# Matematica per le Applicazioni Economiche I, 17 Febbraio 2017
# Testo d'esame A

La prova ha la durata di <u>due ore</u>. **Spiegate con molta cura le vostre risposte.**

**Esercizio 1** (3 punti) Si scrivano le seguenti definizioni: funzione continua in un punto, funzione iniettiva, funzione concava.

**Esercizio 2** (7 punti) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false. Si motivino le risposte "vero" fornendone una dimostrazione, la quale può basarsi su definizioni, proposizioni e teoremi contenuti nel programma del corso. Si motivino le risposte "falso" esibendo un controesempio all'affermazione.

(2a) Se $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$ è continua e $f(0) < f(3)$, allora $\mathrm{Im}(f) = [f(0), f(3)]$.

(2b) Se $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$ è iniettiva, allora $f$ è monotona strettamente crescente o monotona strettamente decrescente.

(2c) Se $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$ è concava e $f(0) < f(3)$, allora 0 è punto di minimo globale per $f$.

**Esercizio 3** (6 punti) Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 3x - 4}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{(e^x - 1)x}{(\sin(2x))(\ln(1 + x))}$$

**Esercizio 4** (5 punti) Data la funzione $f(x) = 2x^5 \ln(x)$,

(4a) si determini l'insieme di definizione $A$ di $f$;

(4b) si calcolino la derivata prima e la derivata seconda di $f$;

(4c) si determinino gli intervalli di concavità/convessità di $f$ in $A$.

**Esercizio 5** (9 punti) Si consideri l'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x + 4 \geq 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 8x < 0\}$$

(5a) si esprima $A$ come unione di intervalli disgiunti;

(5b) si determinino l'insieme dei maggioranti e l'estremo superiore dell'insieme $A$;

(5c) si determinino l'insieme dei punti interni per $A$ e l'insieme dei punti di accumulazione per $A$.

**Esercizio 6** (10 punti) Si studi la funzione

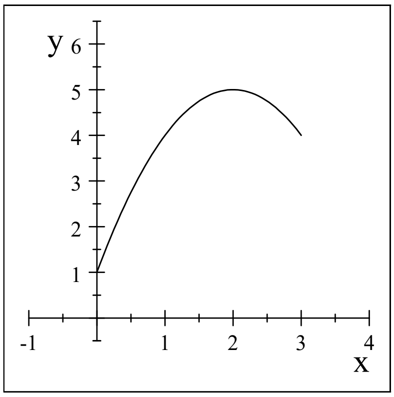
$$f(x) = \frac{xe^x}{4x + 3}$$

e si disegni il suo grafico tralasciando lo studio della derivata seconda.

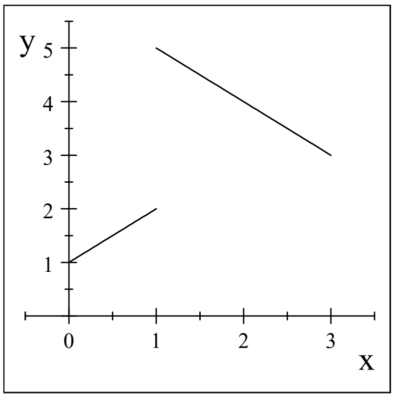
# Soluzioni per il testo d'esame A

**Esercizio 1** Si veda il libro di testo.

**Esercizio 2** (2a) L'affermazione è falsa. Si consideri ad esempio $f(x) = -x^2 + 4x + 1$, $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$, che ha il seguente grafico:




Allora $f(0) = 1$, $f(3) = 4$, ma $\mathrm{Im}(f)$ non è uguale a $[1, 4]$ poiché, ad esempio, $f(2) = 5$ e $5 \notin [1, 4]$.
(2b) L'affermazione è falsa. Si consideri ad esempio $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \in [0,1] \\ 6-x & \text{se } x \in (1,3] \end{cases}$, che ha il seguente grafico:




Questa funzione è iniettiva ma non è monotona strettamente crescente né monotona strettamente decrescente.
(2c) L'affermazione è vera. Dimostriamo qui che $f(x) \geq f(0)$ per ogni $x \in [0, 3]$. Ponendo $x_1 = 0$ e $x_2 = 3$ nella definizione di funzione concava si ottiene la seguente proprietà: $f(x) \geq f(0) + \frac{f(3)-f(0)}{3}x$ per ogni $x \in [0, 3]$. Poiché $f(3) > f(0)$, si deduce che $\frac{f(3)-f(0)}{3} > 0$ e dunque $\frac{f(3)-f(0)}{3}x \geq 0$ per ogni $x \in [0, 3]$. Pertanto $f(x) \geq f(0) + \frac{f(3)-f(0)}{3}x \geq f(0)$ per ogni $x \in [0, 3]$.

**Esercizio 3** (3a) $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-3x-4} = \frac{0}{0}$, $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{(x+1)(x-4)} = \lim_{x\to 4} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x+1)(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4} \frac{x-4}{(x+1)(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{20}$.
(3b) $\lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)x}{(\sin(2x))(\ln(1+x))} = \frac{0}{0}$, $\lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^x-1}{x}\frac{x}{x}}{\frac{\sin(2x)}{x}\frac{\ln(1+x)}{x}} = \frac{1\cdot 1}{2\cdot 1} = \frac{1}{2}$.

**Esercizio 4** (4a) L'insieme di definizione $A$ di $f$ è $(0, +\infty)$.
(4b) $f'(x) = 10x^4\ln(x) + 2x^4$, $f''(x) = 10\left(4x^3\ln(x) + x^3\right) + 8x^3 = 2x^3\,(20\ln(x) + 9)$.
(4c) Per ogni $x \in A$ si ha che $2x^3 > 0$, e $20\ln(x) + 9 \geq 0$ equivale a $\ln(x) \geq -\frac{9}{20}$, ovvero $x \geq e^{-9/20}$ ($20\ln(x) + 9 \leq 0$ equivale a $0 < x \leq e^{-9/20}$). Pertanto $f$ è convessa nell'intervallo $[e^{-9/20}, +\infty)$, $f$ è concava nell'intervallo $(0, e^{-9/20}]$.

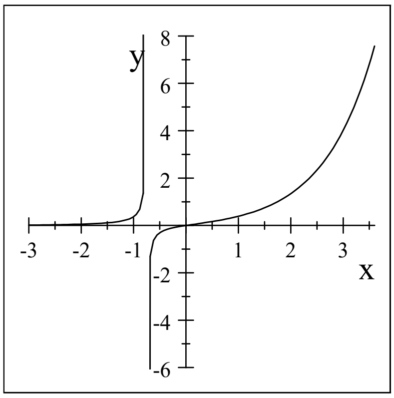
**Esercizio 5** (5a) Per la disequazione $x^2 - 5x + 4 \geq 0$ l'insieme delle soluzioni è $(-\infty, 1] \cup [4, +\infty)$. Per la disequazione $x^2 - 8x < 0$ l'insieme delle soluzioni è $(0, 8)$. Pertanto $A = ((-\infty, 1] \cup [4, +\infty)) \cap (0, 8) = (0, 1] \cup [4, 8)$.

(5b) L'insieme dei maggioranti per $A$ è $[8, +\infty)$, quindi $\sup A = 8$.
(5c) L'insieme dei punti interni per $A$ è $(0,1) \cup (4,8)$. L'insieme dei punti di accumulazione per $A$ è $[0,1] \cup [4,8]$.

**Esercizio 6** L'insieme di definizione di $f$ è $A = \{x \in \mathbb{R} : 4x+3 \neq 0\} = (-\infty, -\frac{3}{4}) \cup (-\frac{3}{4}, +\infty)$.
Per studiare il segno di $f(x)$ è utile osservare che $e^x > 0$ per ogni $x \in A$, dunque il segno di $f(x)$ coincide con il segno di $\frac{x}{4x+3}$. Poiché $4x+3 < 0$ per $x \in (-\infty, -\frac{3}{4})$ e $4x+3 > 0$ per $x \in (-\frac{3}{4}, +\infty)$, risulta che $f(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -\frac{3}{4})$, $f(x) < 0$ per $x \in (-\frac{3}{4}, 0)$, $f(0) = 0$, $f(x) > 0$ per $x \in (0, +\infty)$.
$f$ non è pari, né dispari, né periodica.
Per calcolare $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ è utile notare che $\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{4x+3} = \frac{1}{4}$ e $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$, quindi $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$.
$\lim_{x \to -\frac{3}{4}^-} f(x) = \frac{-\frac{3}{4}e^{-3/4}}{0^-}$, quindi $\lim_{x \to -\frac{3}{4}^-} f(x) = +\infty$.
$\lim_{x \to -\frac{3}{4}^+} f(x) = \frac{-\frac{3}{4}e^{-3/4}}{0^+}$, quindi $\lim_{x \to -\frac{3}{4}^+} f(x) = -\infty$.
Per calcolare $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ è utile notare che $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{4x+3} = \frac{1}{4}$ e $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, quindi $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
La derivata prima di $f$ è

$$f'(x) = \frac{(e^x + xe^x)(4x+3) - 4xe^x}{(4x+3)^2} = (4x^2 + 3x + 3)\frac{e^x}{(4x+3)^2}$$

Al fine di studiarne il segno in $A$, è utile osservare che $\frac{e^x}{(4x+3)^2} > 0$ per ogni $x \in A$, e quindi il segno di $f'(x)$ coincide con il segno di $4x^2 + 3x + 3$. Poiché $4x^2 + 3x + 3 > 0$ per ogni $x \in A$, si deduce che $f$ è monotona strettamente crescente nell'intervallo $(-\infty, -\frac{3}{4})$ ed è monotona strettamente crescente anche nell'intervallo $(-\frac{3}{4}, +\infty)$. Pertanto non esistono per questa funzione punti di max/min locali/globali; $\inf f = -\infty$, $\sup f = +\infty$. Il grafico di $f$ è



# Matematica per le Applicazioni Economiche I, 17 Febbraio 2017
# Testo d'esame B

La prova ha la durata di due ore. **Spiegate con molta cura le vostre risposte.**

**Esercizio 1** (3 punti) Si scrivano le seguenti definizioni: funzione continua in un punto, funzione iniettiva, funzione concava.

**Esercizio 2** (7 punti) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false. Si motivino le risposte "vero" fornendone una dimostrazione, la quale può basarsi su definizioni, proposizioni e teoremi contenuti nel programma del corso. Si motivino le risposte "falso" esibendo un controesempio all'affermazione.

(2a) Se $f : [1, 4] \to \mathbb{R}$ è continua e $f(1) > f(4)$, allora $\mathrm{Im}(f) = [f(4), f(1)]$.

(2b) Se $f : [1, 4] \to \mathbb{R}$ è iniettiva, allora $f$ è monotona strettamente crescente o monotona strettamente decrescente.

(2c) Se $f : [1, 4] \to \mathbb{R}$ è concava e $f(1) > f(4)$, allora 4 è punto di minimo globale per $f$.

**Esercizio 3** (6 punti) Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x^2-7x-18}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x\sin(x)}{(e^x-1)(\ln(1+3x))}$$

**Esercizio 4** (5 punti) Data la funzione $f(x) = 3x^4 \ln(x)$,

(4a) si determini l'insieme di definizione $A$ di $f$;

(4b) si calcolino la derivata prima e la derivata seconda di $f$;

(4c) si determinino gli intervalli di concavità/convessità di $f$ in $A$.

**Esercizio 5** (9 punti) Si consideri l'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 7x + 10 \geq 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 9x < 0\}$$

(5a) si esprima $A$ come unione di intervalli disgiunti;

(5b) si determinino l'insieme dei maggioranti e l'estremo superiore dell'insieme $A$;

(5c) si determinino l'insieme dei punti interni per $A$ e l'insieme dei punti di accumulazione per $A$.

**Esercizio 6** (10 punti) Si studi la funzione

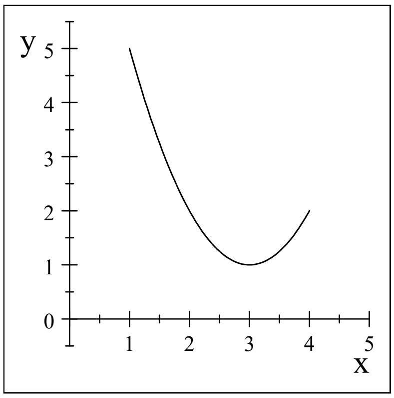
$$f(x) = \frac{xe^x}{2x+5}$$

e si disegni il suo grafico tralasciando lo studio della derivata seconda.

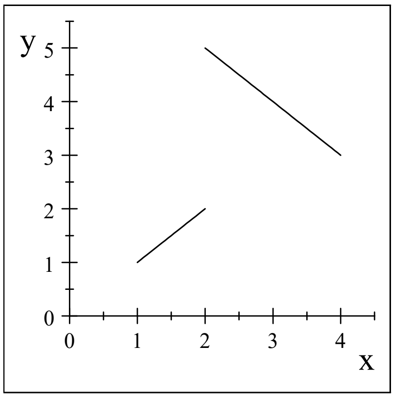
## Soluzioni per il testo d'esame B

**Esercizio 1** Si veda il libro di testo.

**Esercizio 2** (2a) L'affermazione è falsa. Si consideri ad esempio $f(x) = x^2 - 6x + 10$, $f : [1, 4] \to \mathbb{R}$, che ha il seguente grafico:




Allora $f(1) = 5$, $f(4) = 2$, ma $\mathrm{Im}(f)$ non è uguale a $[2, 5]$ poiché, ad esempio, $f(3) = 1$ e $1 \notin [2, 5]$.
(2b) L'affermazione è falsa. Si consideri ad esempio $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [1, 2] \\ 7 - x & \text{se } x \in (2, 4] \end{cases}$, che ha il seguente grafico:




Questa funzione è iniettiva ma non è monotona strettamente crescente né monotona strettamente decrescente.
(2c) L'affermazione è vera. Dimostriamo qui che $f(x) \geq f(4)$ per ogni $x \in [1, 4]$. Ponendo $x_1 = 1$ e $x_2 = 4$ nella definizione di funzione concava si ottiene la seguente proprietà: $f(x) \geq f(1) + \frac{f(4)-f(1)}{3}(x - 1)$ per ogni $x \in [1, 4]$. Poiché $f(1) > f(4)$, si deduce che $\frac{f(4)-f(1)}{3} < 0$ e dunque $y = f(1) + \frac{f(4)-f(1)}{3}(x - 1)$ è una funzione strettamente decrescente in $x$, dunque $f(1) + \frac{f(4)-f(1)}{3}(x-1) \geq f(1) + \frac{f(4)-f(1)}{3}(4-1) = f(4)$ per ogni $x \in [1, 4]$. Dunque $f(x) \geq f(1) + \frac{f(4)-f(1)}{3}(x - 1) \geq f(4)$ per ogni $x \in [1, 4]$.

**Esercizio 3** (3a) $\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x^2-7x-18} = \frac{0}{0}$, $\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{(x+2)(x-9)} = \lim_{x\to 9} \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{(x+2)(x-9)(\sqrt{x}+3)} = \lim_{x\to 9} \frac{x-9}{(x+2)(x-9)(\sqrt{x}+3)} = \lim_{x\to 9} \frac{1}{(x+2)(\sqrt{x}+3)} = \frac{1}{66}$.
(3b) $\lim_{x\to 0} \frac{x\sin(x)}{(e^x-1)(\ln(1+3x))} = \frac{0}{0}$, $\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{x}\cdot\frac{\sin(x)}{x}}{\frac{e^x-1}{x}\cdot\frac{\ln(1+3x)}{x}} = \frac{1\cdot 1}{1\cdot 3} = \frac{1}{3}$.

**Esercizio 4** (4a) L'insieme di definizione $A$ di $f$ è $(0, +\infty)$.
(4b) $f'(x) = 12x^3\ln(x) + 3x^3$, $f''(x) = 12\left(3x^2\ln(x) + x^2\right) + 9x^2 = 3x^2\left(12\ln(x) + 7\right)$.
(4c) Per ogni $x \in A$ si ha che $3x^2 > 0$, e $12\ln(x) + 7 \geq 0$ equivale a $\ln(x) \geq -\frac{7}{12}$, ovvero $x \geq e^{-7/12}$ ($12\ln(x) + 7 \leq 0$ equivale a $0 < x \leq e^{-7/12}$). Pertanto $f$ è convessa nell'intervallo $[e^{-7/12}, +\infty)$, $f$ è concava nell'intervallo $(0, e^{-7/12}]$.

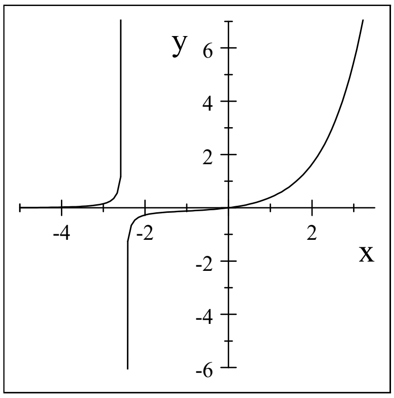
**Esercizio 5** (5a) Per la disequazione $x^2 - 7x + 10 \geq 0$ l'insieme delle soluzioni è $(-\infty, 2] \cup [5, +\infty)$. Per la disequazione $x^2 - 9x < 0$ l'insieme delle soluzioni è $(0, 9)$. Pertanto $A = ((-\infty, 2] \cup [5, +\infty)) \cap (0, 9) = (0, 2] \cup [5, 9)$.

(5b) L'insieme dei maggioranti per $A$ è $[9, +\infty)$, quindi $\sup A = 9$.
(5c) L'insieme dei punti interni per $A$ è $(0, 2) \cup (5, 9)$. L'insieme dei punti di accumulazione per $A$ è $[0, 2] \cup [5, 9]$.

**Esercizio 6** L'insieme di definizione di $f$ è $A = \{x \in \mathbb{R} : 2x + 5 \neq 0\} = (-\infty, -\frac{5}{2}) \cup (-\frac{5}{2}, +\infty)$.
Per studiare il segno di $f(x)$ è utile osservare che $e^x > 0$ per ogni $x \in A$, dunque il segno di $f(x)$ coincide con il segno di $\frac{x}{2x+5}$. Poiché $2x + 5 < 0$ per $x \in (-\infty, -\frac{5}{2})$ e $2x + 5 > 0$ per $x \in (-\frac{5}{2}, +\infty)$, risulta che $f(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -\frac{5}{2})$, $f(x) < 0$ per $x \in (-\frac{5}{2}, 0)$, $f(0) = 0$, $f(x) > 0$ per $x \in (0, +\infty)$.
$f$ non è pari, né dispari, né periodica.
Per calcolare $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ è utile notare che $\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{2x+5} = \frac{1}{2}$ e $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$, quindi $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
$\lim_{x\to-\frac{5}{2}^-} f(x) = \frac{-\frac{5}{2}e^{-5/2}}{0^-}$, quindi $\lim_{x\to-\frac{5}{2}^-} f(x) = +\infty$.
$\lim_{x\to-\frac{5}{2}^+} f(x) = \frac{-\frac{5}{2}e^{-5/2}}{0^+}$, quindi $\lim_{x\to-\frac{5}{2}^+} f(x) = -\infty$.
Per calcolare $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ è utile notare che $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2x+5} = \frac{1}{2}$ e $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, quindi $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
La derivata prima di $f$ è

$$f'(x) = \frac{(e^x + xe^x)(2x+5) - 2xe^x}{(2x+5)^2} = (2x^2 + 5x + 5)\frac{e^x}{(2x+5)^2}$$

Al fine di studiarne il segno in $A$, è utile osservare che $\frac{e^x}{(2x+5)^2} > 0$ per ogni $x \in A$, e quindi il segno di $f'(x)$ coincide con il segno di $2x^2 + 5x + 5$. Poiché $2x^2 + 5x + 5 > 0$ per ogni $x \in A$, si deduce che $f$ è monotona strettamente crescente nell'intervallo $(-\infty, -\frac{5}{2})$ ed è monotona strettamente crescente anche nell'intervallo $(-\frac{5}{2}, +\infty)$. Pertanto non esistono per questa funzione punti di max/min locali/globali; $\inf f = -\infty$, $\sup f = +\infty$. Il grafico di $f$ è



# Matematica per le Applicazioni Economiche I, 17 Febbraio 2017
## Testo d'esame C

La prova ha la durata di <u>due ore</u>. **Spiegate con molta cura le vostre risposte.**

**Esercizio 1** (3 punti) Si scrivano le seguenti definizioni: funzione continua in un punto, funzione iniettiva, funzione convessa.

**Esercizio 2** (7 punti) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false. Si motivino le risposte "vero" fornendone una dimostrazione, la quale può basarsi su definizioni, proposizioni e teoremi contenuti nel programma del corso. Si motivino le risposte "falso" esibendo un controesempio all'affermazione.

(2a) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 7$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 12$, allora $\mathrm{Im}(f) = (7, 12)$.

(2b) Se $f : [2, 5] \to \mathbb{R}$ è iniettiva, allora $f$ è monotona strettamente crescente o monotona strettamente decrescente.

(2c) Se $f : [2, 5] \to \mathbb{R}$ è convessa e $f(2) < f(5)$, allora 5 è punto di massimo globale per $f$.

**Esercizio 3** (6 punti) Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2+6x-7}, \qquad \lim_{x\to0} \frac{x\ln(1+x)}{(e^{4x}-1)(\sin(x))}$$

**Esercizio 4** (5 punti) Data la funzione $f(x) = 5x^3 \ln(x)$,

(4a) si determini l'insieme di definizione $A$ di $f$;

(4b) si calcolino la derivata prima e la derivata seconda di $f$;

(4c) si determinino gli intervalli di concavità/convessità di $f$ in $A$.

**Esercizio 5** (9 punti) Si consideri l'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 9x + 18 \geq 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 7x < 0\}$$

(5a) si esprima $A$ come unione di intervalli disgiunti;

(5b) si determinino l'insieme dei maggioranti e l'estremo superiore dell'insieme $A$;

(5c) si determinino l'insieme dei punti interni per $A$ e l'insieme dei punti di accumulazione per $A$.

**Esercizio 6** (10 punti) Si studi la funzione

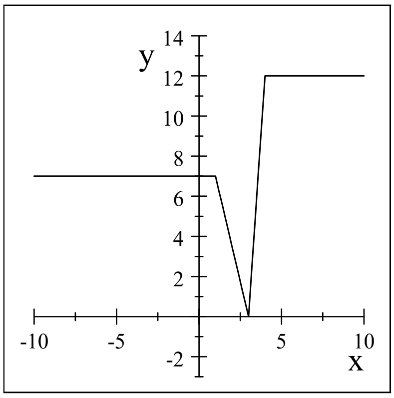
$$f(x) = \frac{xe^x}{3x+2}$$

e si disegni il suo grafico tralasciando lo studio della derivata seconda.

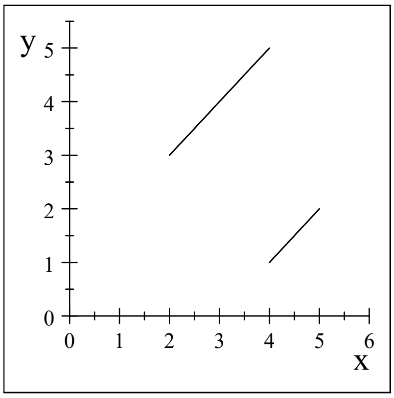
# Soluzioni per il testo d'esame C

**Esercizio 1** Si veda il libro di testo.

**Esercizio 2** (2a) L'affermazione è falsa. Si consideri ad esempio $f(x) = \begin{cases} 7 & \text{se } x < 1 \\ -\frac{7}{2}x + \frac{21}{2} & \text{se } x \in [1,3] \\ 12x - 36 & \text{se } x \in (3,4) \\ 12 & \text{se } x \geq 4 \end{cases}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, che ha il seguente grafico:




Allora $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 7$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 12$, ma $\mathrm{Im}(f) = [0, 12]$, che è un insieme diverso dall'intervallo $(7, 12)$.
(2b) L'affermazione è falsa. Si consideri ad esempio $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \in [2,4] \\ x-3 & \text{se } x \in (4,5] \end{cases}$, che ha il seguente grafico:




Questa funzione è iniettiva ma non è monotona strettamente crescente né monotona strettamente decrescente.
(2c) L'affermazione è vera. Dimostriamo qui che $f(x) \leq f(5)$ per ogni $x \in [2, 5]$. Ponendo $x_1 = 2$ e $x_2 = 5$ nella definizione di funzione convessa si ottiene la seguente proprietà: $f(x) \leq f(2) + \frac{f(5)-f(2)}{3}(x-2)$ per ogni $x \in [2, 5]$. Poiché $f(5) > f(2)$, si deduce che $\frac{f(5)-f(2)}{3} > 0$ e dunque $y = f(2) + \frac{f(5)-f(2)}{3}(x-2)$ è una funzione strettamente crescente, dunque $f(2) + \frac{f(5)-f(2)}{3}(x-2) \leq f(2) + \frac{f(5)-f(2)}{3}(5-2) = f(5)$ per ogni $x \in [2, 5]$. Dunque $f(x) \leq f(2) + \frac{f(5)-f(2)}{3}(x-2) \leq f(5)$ per ogni $x \in [2, 5]$.

**Esercizio 3** (3a) $\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2+6x-7} = \frac{0}{0}$, $\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x}-1}{(x+7)(x-1)} = \lim_{x\to1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x+7)(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to1} \frac{x-1}{(x+7)(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to1} \frac{1}{(x+7)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{16}$.
(3b) $\lim_{x\to0} \frac{x\ln(1+x)}{(e^{4x}-1)(\sin(x))} = \frac{0}{0}$, $\lim_{x\to0} \frac{\frac{x}{x}\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}}{\frac{e^{4x}-1}{x}\cdot\frac{\sin(x)}{x}} = \frac{1\cdot1}{4\cdot1} = \frac{1}{4}$.

**Esercizio 4** (4a) L'insieme di definizione $A$ di $f$ è $(0, +\infty)$.
(4b) $f'(x) = 15x^2\ln(x) + 5x^2$, $f''(x) = 15\,(2x\ln(x) + x) + 10x = 5x\,(6\ln(x) + 5)$.
(4c) Per ogni $x \in A$ si ha che $5x > 0$, e $6\ln(x) + 5 \geq 0$ equivale a $\ln(x) \geq -\frac{5}{6}$, ovvero $x \geq e^{-5/6}$ ($6\ln(x) + 5 \leq 0$ equivale a $0 < x \leq e^{-5/6}$). Pertanto $f$ è convessa nell'intervallo $[e^{-5/6}, +\infty)$, $f$ è concava nell'intervallo $(0, e^{-5/6}]$.

**Esercizio 5** (5a) Per la disequazione $x^2 - 9x + 18 \geq 0$ l'insieme delle soluzioni è $(-\infty, 3] \cup [6, +\infty)$. Per la disequazione $x^2 - 7x < 0$ l'insieme delle soluzioni è $(0, 7)$. Pertanto $A = ((-\infty, 3] \cup [6, +\infty)) \cap (0, 7) = (0, 3] \cup [6, 7)$.
(5b) L'insieme dei maggioranti per $A$ è $[7, +\infty)$, quindi $\sup A = 7$.
(5c) L'insieme dei punti interni per $A$ è $(0, 3) \cup (6, 7)$. L'insieme dei punti di accumulazione per $A$ è $[0, 3] \cup [6, 7]$.

**Esercizio 6** L'insieme di definizione di $f$ è $A = \{x \in \mathbb{R} : 3x + 2 \neq 0\} = (-\infty, -\frac{2}{3}) \cup (-\frac{2}{3}, +\infty)$.
Per studiare il segno di $f(x)$ è utile osservare che $e^x > 0$ per ogni $x \in A$, dunque il segno di $f(x)$ coincide con il segno di $\frac{x}{3x+2}$. Poiché $3x + 2 < 0$ per $x \in (-\infty, -\frac{2}{3})$ e $3x + 2 > 0$ per $x \in (-\frac{2}{3}, +\infty)$, risulta che $f(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -\frac{2}{3})$, $f(x) < 0$ per $x \in (-\frac{2}{3}, 0)$, $f(0) = 0$, $f(x) > 0$ per $x \in (0, +\infty)$.
$f$ non è pari, né dispari, né periodica.
Per calcolare $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ è utile notare che $\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{3x+2} = \frac{1}{3}$ e $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$, quindi $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
$\lim_{x\to-\frac{2}{3}^-} f(x) = \frac{-\frac{2}{3}e^{-2/3}}{0^-}$, quindi $\lim_{x\to-\frac{2}{3}^-} f(x) = +\infty$.
$\lim_{x\to-\frac{2}{3}^+} f(x) = \frac{-\frac{2}{3}e^{-2/3}}{0^+}$, quindi $\lim_{x\to-\frac{2}{3}^+} f(x) = -\infty$.
Per calcolare $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ è utile notare che $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{3x+2} = \frac{1}{3}$ e $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, quindi $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
La derivata prima di $f$ è

$$f'(x) = \frac{(e^x + xe^x)(3x+2) - 3xe^x}{(3x+2)^2} = (3x^2 + 2x + 2)\frac{e^x}{(3x+2)^2}$$

Al fine di studiarne il segno in $A$, è utile osservare che $\frac{e^x}{(3x+2)^2} > 0$ per ogni $x \in A$, e quindi il segno di $f'(x)$ coincide con il segno di $3x^2 + 2x + 2$. Poiché $3x^2 + 2x + 2 > 0$ per ogni $x \in A$, si deduce che $f$ è monotona strettamente crescente nell'intervallo $(-\infty, -\frac{2}{3})$ ed è monotona strettamente crescente anche nell'intervallo $(-\frac{2}{3}, +\infty)$. Pertanto non esistono per questa funzione punti di max/min locali/globali; $\inf f = -\infty$, $\sup f = +\infty$. Il grafico di $f$ è