Matematica per le Applicazioni Economiche I, 12 giugno 2017 FILA A

La prova ha la durata di $\boxed{\text{due ore}}$. $\log(x)$ o $\ln(x)$ indicano il logaritmo in base e.

Esercizio 1. (8 punti) Si studi
$$f(x) = \log(x) - \frac{1}{2x^2},$$
e si disegni il suo grafico. **NON** si tralasci lo studio della derivata seconda. Si tralasci lo studio del segno. [Dominio: punti 1; limiti: punti 2; argomentazioni sulla eventuale continuità/derivabilità sul dominio: punti 1; monotonia: punti 2; concavità/convessità: punti 1; grafico: punti 1]

Esercizio 2. (8 punti) Sia data
$$f : \mathbb{R}\setminus\{-1\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{1-x}{1+x}.$$

a. [punti 2] Si dica se la funzione f è iniettiva e si determini $\mathrm{Im}(f)$.
b. [punti 2] Si calcoli $f \circ f$, cioè $f(f(x))$.
c. [punti 3] Si determini la funzione inversa f^{-1} e si disegnino i grafici di f e f^{-1}.

Esercizio 3. (8 punti)
a. [punti 3] Usando la definizione di limite si verifichi che
$$\lim_{x\to 16} \sqrt{x} = 4.$$
b. [punti 3] Si calcolino
$$\text{[punti 3]} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x(1-x)-1}{2\sin^2(x)}. \qquad\qquad \text{[punti 2]} \qquad \lim_{x\to+\infty} \left(2+\frac{4}{3^x}\right)^x.$$

Esercizio 4. (8 punti) Si dica, giustificando, se le seguenti affermazioni sono vere o false.
a. [punti 2] Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e tale che $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ e $f(-3) = 2$. Allora esiste $x_0 < 0$ tale che $f(x_0) = 0$.
b. [punti 2] La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = \begin{cases} x^2+2, & \text{se } x < 0 \\ x^2, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ è derivabile nel punto $x_0 = 0$.
c. [punti 2] La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{se } x > 0 \\ -1, & \text{se } x = 0 \\ x+1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$ è continua nel punto $x_0 = 0$.
d. [punti 2] Se una funzione è strettamente crescente sul suo dominio allora è anche continua.

Esercizio 5. (8 punti) Un agente finanziario avente a disposizione una certa somma di denaro deve scegliere tra due opportunità di investimento in titoli. Il suo obiettivo è quello di fare la scelta che minimizzi il rischio di perdita di denaro. L'opportunità 1 consiste nell'acquisto di 2 titoli e comporta un rischio stimato in $r_1(x) = \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{55}{6}$, dove $x \in [0,1]$ rappresenta la proporzione della somma di denaro investita in uno dei due titoli. In alternativa, l'opportunità 2 consiste nell'acquisto di 2 titoli, diversi dai precedenti, e comporta un rischio stimato in $r_2(z) = 2z^2 - 6z + 11$, dove $z \in [0,1]$ rappresenta la proporzione della somma di denaro investita in uno dei due titoli. Determinare
a. [punti 3] il valore di x che minimizza $r_1(x)$
b. [punti 3] il valore z che minimizza $r_2(z)$
c. [punti 2] su quale opportunità ricada la scelta dell'investitore e con quale proporzione.

Traccia delle soluzioni.

Esercizio 1.

1. Dominio.

dom $f = \mathbb{R}_{++}$.

2. Segno.

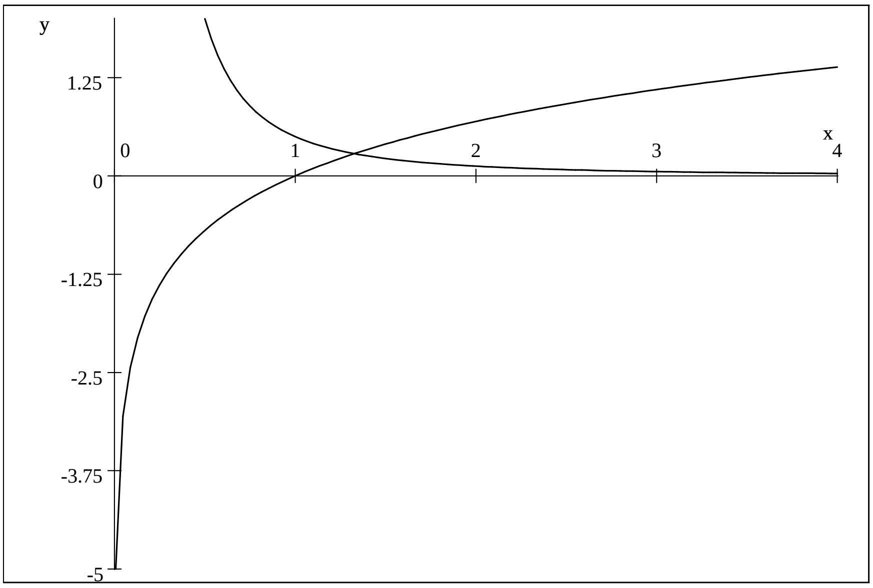
$\log(x) - \frac{1}{2x^2} > 0$, ovvero $\frac{1}{2x^2} < \log(x)$ è difficile da studiare in maniera esplicita. Un'analisi grafica

FIGURA

consente però di concludere che esiste $\alpha \in (1, e)$, tale che $x \geq \alpha$ sse $f(x) \geq 0$. Infatti, definita $g(x) = \frac{1}{2x^2}$, si ha $f(x) = \log(x) - g(x)$ e

$$g(1) = \tfrac{1}{2} > 0 = \log(1)\,, \text{ e}$$

$$g(e) = \tfrac{1}{e} < \log(e) = 1$$



3. Punti di discontinuita'.

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\ln(x) - \frac{1}{2x^2} \right) = \text{"} - \infty - \infty, \text{"}$$

allora $f(x) \to -\infty$.

4. Comportamento a $\pm\infty$ e eventuali asintoti non verticali.

$\lim_{x\to+\infty} \left(\log(x) - \frac{1}{2x^2} \right) = \text{"} + \infty - \frac{1}{+\infty} = +\infty - 0 = \text{"} + \infty$.

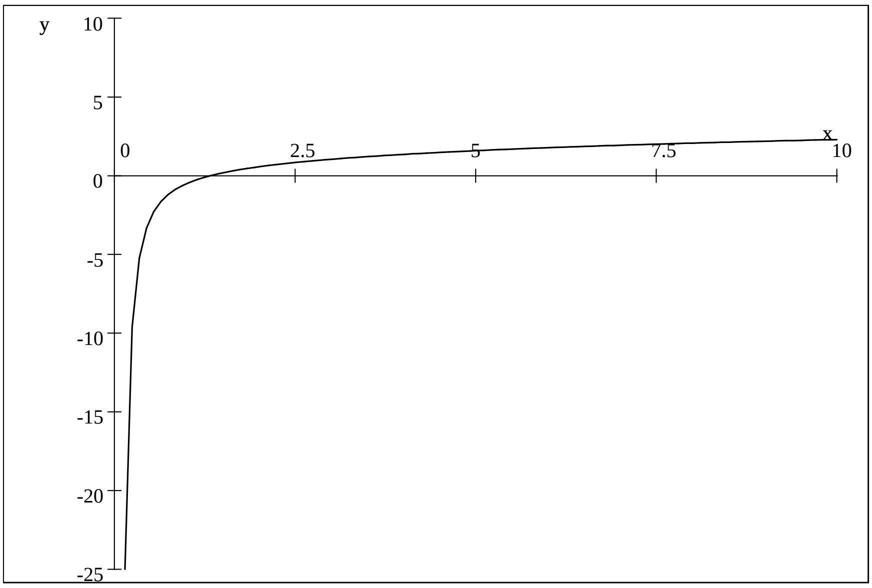
5. Derivata prima.

$\left(\ln x - \frac{1}{2x^2} \right)' = +\frac{1}{x} - \frac{1}{2}(-2)\, x^{-3} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}_{++}$. Dunque f è strettamente crescente.

6. Derivata seconda.

$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} \right)' = -x^{-2} - 3x^{-4} = -\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^4} < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}_{++}$. Dunque f è strettamente concava.

Dunque il grafico di f è il seguente.



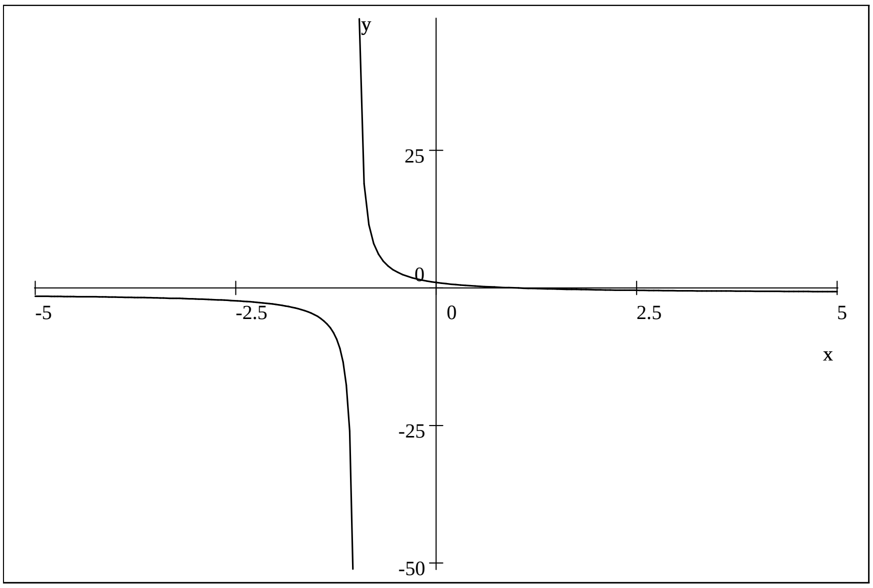
Esercizio 2.

a. Preso $y \in \mathbb{R}$, si ha $\frac{1-x}{1+x} = y$ sse $1 - x = yx + y$, ossia $x(1+y) = 1 - y$: se $y = -1$ si otterrebbe $0 = 2$, quindi se $y = -1$ l'equazione in x data da $f(x) = y$ non ha soluzione, quindi la controimmagine di $y = -1$ non esiste, ossia $f^{-1}(-1) = \emptyset$. Altrimenti, se $y \neq -1$ in $x(1+y) = 1 - y$ si può dividere per $1 + y$ e si ottiene che y ha una sola controimmagine $f^{-1}(y) = \frac{1-y}{1+y}$.
Ciò mostra che tutti e soli i valori $y \neq -1$ vengono assunti da f, quindi $Im(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$. Inoltre f è iniettiva perché ogni $y \neq -1$ è assunto su un solo $x = f^{-1}(y) = \frac{1-y}{1+y}$.

b. Si ha

$$(f \circ f)(x) := f(f(x)) = f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1 - \frac{1-x}{1+x}}{1 + \frac{1-x}{1+x}} = \frac{\frac{1+x-1+x}{1+x}}{\frac{1+x+1-x}{1+x}} = \frac{2x}{2} = x.$$

c. Da quanto detto al punto a., si ha $f^{-1}(y) = \frac{1-y}{1+y}$, ossia $f^{-1}(x) = \frac{1-x}{1+x}$, ossia la funzione inversa di f è f stessa, infatti ial punto b. risulta che $f \circ f = f \circ f^{-1}$ è l'identità.
f è una iperbole equilatera con origine traslata nel punto di ascissa tale che $(1 + x) = 0$ e ordinata pari a $\lim_{x\to+\infty} \frac{1-x}{1+x}$,ovvero origine traslata nel punto $(-1, -1)$. Poichè $f(0) = 1$, il grafico di f (e di f^{-1}) è il seguente.



Esercizio 3.

a. Si deve verificare che

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \text{ tale che } \forall x \geq 0 \text{ con } 0 < |x-16| < \delta, \text{ si abbia } \left|\sqrt{x}-4\right| < \varepsilon,$$

ossia che tra le soluzioni della $|\sqrt{x}-4| < \varepsilon$ ci sia tutto un intorno di 16.
In effetti,$|\sqrt{x}-4| < \varepsilon$ sse

$$\begin{cases} \sqrt{x}-4 < \varepsilon \\ \sqrt{x}-4 > -\varepsilon \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} \sqrt{x} < \varepsilon + 4 \\ \sqrt{x} > -\varepsilon + 4. \end{cases}$$

Poiché è lecito restringersi a considerare ε piccoli, prendiamo $\varepsilon < 4$, cosicché $-\varepsilon + 4 > 0$, e così ciascuna disuguaglianza ha entrambi i membri maggiori o uguali a zero, e si è autorizzati ad elevare al quadrato ciascun membro lasciando la disuguaglianza nello stesso verso. Quindi per $\varepsilon < 4$ il sistema sopra è equivalente a

$$\begin{cases} x < 16 + 8\varepsilon + \varepsilon^2 \\ x > 16 - 8\varepsilon + \varepsilon^2. \end{cases}$$

Osserviamo che $+8\varepsilon + \varepsilon^2 > 0$ e che $-8\varepsilon + \varepsilon^2 = \varepsilon(\varepsilon - 8) < 0$, perciò $16 + 8\varepsilon + \varepsilon^2 > 16$ e $16 - 8\varepsilon + \varepsilon^2 < 16$, e le soluzioni $x \in (16 - 8\varepsilon + \varepsilon^2, 16 + 8\varepsilon + \varepsilon^2)$ del sistema costituiscono un intorno (non simmetrico) di 16. Il limite perciò è verificato.

b. Il primo limite si presenta nella forma $\frac{0}{0}$. Applicando il teorema di de l'Hopital a

$$\frac{e^x(1-x)-1}{2\sin^2(x)} = \frac{e^x - 1 - xe^x}{2\sin^2(x)},$$

poiché

$$\frac{e^x - e^x - xe^x}{4\sin(x)\cos(x)} = -\frac{1}{4}\frac{x}{\sin(x)}\frac{e^x}{\cos(x)} \to -\frac{1}{4}$$

allora anche il limite proposto è $-\frac{1}{4}$.

Poiché $\frac{4}{3^x} \to 0$, il secondo limite si presenta nella forma immediata $2^{+\infty}$, il risultato è dunque $+\infty$.

Esercizio 4.

a. Vero.

Poichè $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, allora $\forall k_1 < 0\ \exists k_2 < 0$ tale che se $x < k_2$ allora $f(x) < k_1 < 0$. Preso $k_1 < -3$, possiamo applicare il teorema degli zeri alla funzione f, che è continua per ipotesi, sull'intervallo $[k_1, -3]$ e concludere che esiste $x_0 \in (k_1, -3)$, e dunque $x_0 < -3 < 0$, tale che $f(x_0) = 0$.

b. Falso.

La funzione proposta non è continua nel punto 0, perché $\lim_{x\to0^+} f(x) = 0$ mentre $\lim_{x\to0^-} f(x) = 2$. Per il teorema che lega derivabilità e continuità, la funzione non può essere nemmeno derivabile in 0.

c. Falso.

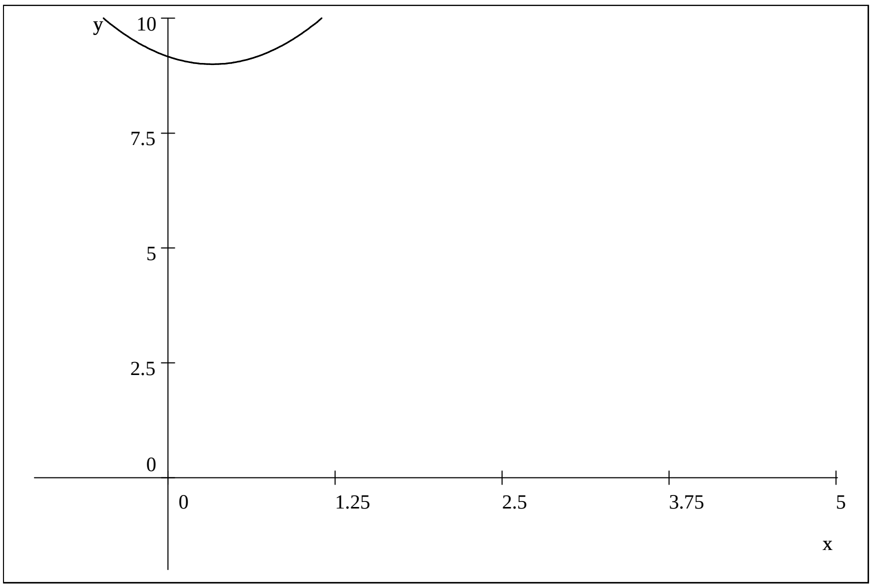
Si deve verificare se è vero che $\lim_{x\to0} f(x) = f(0)$. Abbiamo che $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0} e^x = 1$ ed anche $\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0} x + 1 = 1$, dunque $\lim_{x\to0} f(x) = 1$, però $f(0) = -1$ non coincide con tale limite. La funzione non è dunque continua in 0.

d. Falso.

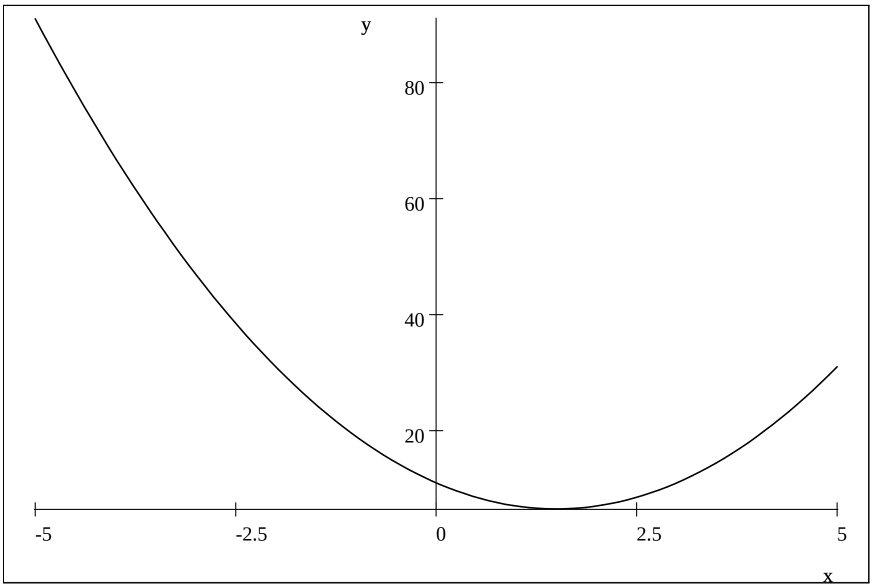
Ad esempio la funzione $f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x < 0 \\ x+1, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ è strettamente crescente sul suo dominio $\mathbb{R}$, ma non è continua in 0, perché il $\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} x = 0$ non coincide con il $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} x+1 = 1$.

Esercizio 5. (8 punti)

a. Si deve risolvere $\min_{x\in[0,1]} r_1(x) = \min_{x\in[0,1]} \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{55}{6}$. Si ha che $r_1'(x) = 3x - 1 \geq 0$ sse $x \geq \frac{1}{3} \in [0,1]$, $\frac{1}{3}$ è dunque il punto di minimo di r_1 su $[0,1]$, e $\min_{x\in[0,1]} r_1(x) = r_1\left(\frac{1}{3}\right) = 9$.



b. Si deve risolvere $\min_{z\in[0,1]} r_2(z) = \min_{z\in[0,1]} 2z^2 - 6z + 11$. Si ha che $r_2'(z) = 4z - 6 \geq 0$ sse $z \geq \frac{3}{2} \notin [0,1]$, perciò su [0,1] la funzione $r_2(z)$ è decrescente, ed il punto di minimo è $z = 1$, con $\min_{z\in[0,1]} r_2(z) = r_2(1) = 7$.



c. La scelta deve dunque ricadere sull'opportunità 2, il cui minimo rischio è inferiore al minimo rischio dell'opportunità 1. Inoltre la proporzione da scegliere è $z = 1$.

Matematica per le Applicazioni Economiche I, 12 giugno 2017 FILA B

La prova ha la durata di $\boxed{\text{due ore}}$. $\log(x)$ o $\ln(x)$ indicano il logaritmo in base e.

Esercizio 1. (8 punti) Si studi

$$f(x) = \log(x) - \frac{3}{x^2},$$

e si disegni il suo grafico. **NON** si tralasci lo studio della derivata seconda. Si tralasci lo studio del segno. [Dominio: punti 1; limiti: punti 2; argomentazioni sulla eventuale continuità/derivabilità sul dominio: punti 1; monotonia: punti 2; concavità/convessità: punti 1; grafico: punti 1]

Esercizio 2. (8 punti) Sia data

$$f : \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{x+1}{x-1}.$$

a. [punti 2] Si dica se la funzione f è iniettiva e si determini $\mathrm{Im}(f)$.
b. [punti 2] Si calcoli $f \circ f$, cioè $f(f(x))$.
c. [punti 3] Si determini la funzione inversa f^{-1} e si disegnino i grafici di f e f^{-1}.

Esercizio 3. (8 punti)
a. [punti 3] Usando la definizione di limite si verifichi che

$$\lim_{x\to 9} \sqrt{x} = 3.$$

b. [punti 3] Si calcolino

$$[\text{punti } 3] \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2(x) - 1}{1 - e^x(1-x)} \qquad\qquad [\text{punti } 2] \qquad \lim_{x\to+\infty} \left(3 + \frac{5}{4^x}\right)^x.$$

Esercizio 4. (8 punti) Si dica, giustificando, se le seguenti affermazioni sono vere o false.
a. [punti 2] Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e tale che $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ e $f(-2) = 2$. Allora esiste $x_0 < 0$ tale che $f(x_0) = 0$.
b. [punti 2] La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & \text{se } x < 0 \\ x^2, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ è derivabile nel punto $x_0 = 0$.
c. [punti 2] La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = \begin{cases} -e^x, & \text{se } x < 0, \\ 2, & \text{se } x = 0 \\ x-1, & \text{se } x > 0, \end{cases}$ è continua nel punto $x_0 = 0$.
d. [punti 2] Se una funzione è decrescente sul suo dominio allora è anche continua.

Esercizio 5. (8 punti) Un agente finanziario avente a disposizione una certa somma di denaro deve scegliere tra due opportunità di investimento in titoli. Il suo obiettivo è quello di fare la scelta che minimizzi il rischio di perdita di denaro. L'opportunità 1 consiste nell'acquisto di 2 titoli e comporta un rischio stimato in $r_1(x) = \frac{2}{3}x^2 + 2x + \frac{13}{2}$, dove $x \in [0,1]$ rappresenta la proporzione della somma di denaro investita in uno dei due titoli. In alternativa, l'opportunità 2 consiste nell'acquisto di 2 titoli, diversi dai precedenti, e comporta un rischio stimato in $r_2(z) = \frac{3}{2}z^2 - z + \frac{55}{6}$, dove $z \in [0,1]$ rappresenta la proporzione della somma di denaro investita in uno dei due titoli. Determinare
a. [punti 3] il valore di x che minimizza $r_1(x)$
b. [punti 3] il valore z che minimizza $r_2(z)$
c. [punti 2] su quale opportunità debba ricadere la scelta dell'investitore e con quale proporzione.

Traccia delle soluzioni.

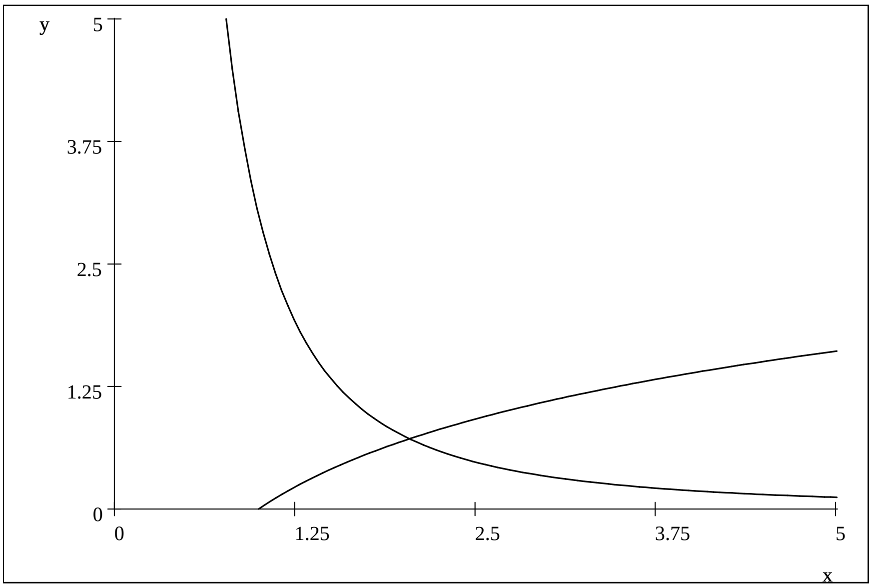
Esercizio 1.

1. Dominio.

$dom\ f = \mathbb{R}_{++}$.

2. Segno.

$\frac{3}{x^2} - \log(x) > 0$, ovvero $\frac{3}{x^2} > \log(x)$, è difficile da studiare in maniera esplicita. Un'analisi del grafico congiunto di $\log(x)$ e $g(x) = \frac{3}{x^2}$ consente però di concludere che esiste un unico $\alpha > 0$ tale che $\log(x) \geq g(x)$ sse $x \geq \alpha$, ossia $f(x) \geq 0$ sse $x \geq \alpha$. In particolare $\alpha > 1$ perché $g(1) = 3 > 0 = \log(1)$.



3. Punti di discontinuita'.

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\ln(x) - \frac{3}{x^2}\right) = \text{"} - \infty - \infty, \text{"}$$

allora $f(x) \to -\infty$.

4. Comportamento a $\pm\infty$ e eventuali asintoti non verticali.

$\lim_{x\to+\infty}\left(\log(x) - \frac{3}{x^2}\right) = \text{"} + \infty - \frac{1}{+\infty} = +\infty - 0 = \text{"} + \infty$.

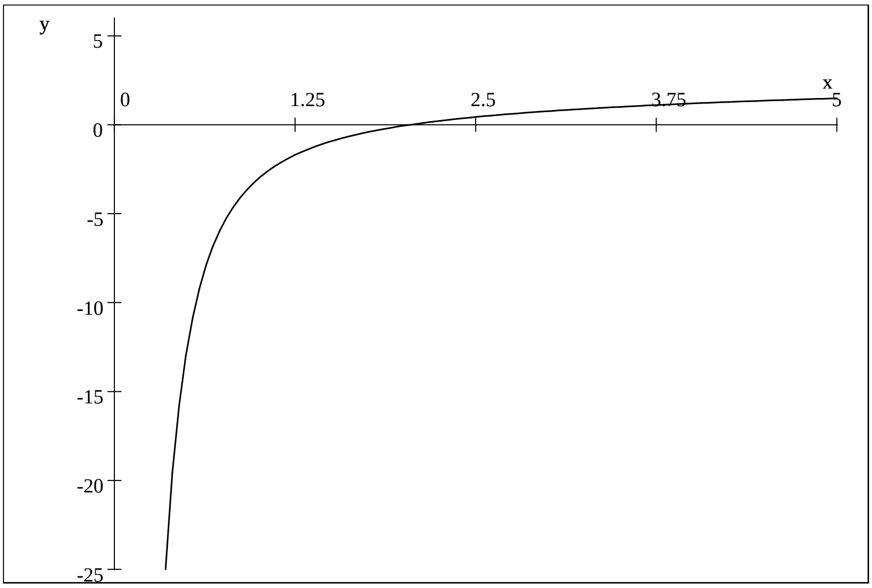
5. Derivata prima.

$\left(\ln x - \frac{3}{x^2}\right)' = +\frac{1}{x} - 3(-2)x^{-3} = \frac{1}{x} + \frac{6}{x^3} > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}_{++}$. Dunque f è strettamente crescente.

6. Derivata seconda.

$\left(\frac{1}{x} + \frac{6}{x^3}\right)' = -x^{-2} + 6(-3)x^{-4} = -\frac{1}{x^2} - \frac{18}{x^4} < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}_{++}$. Dunque f è strettamente concava.

Dunque il grafico di f è il seguente.



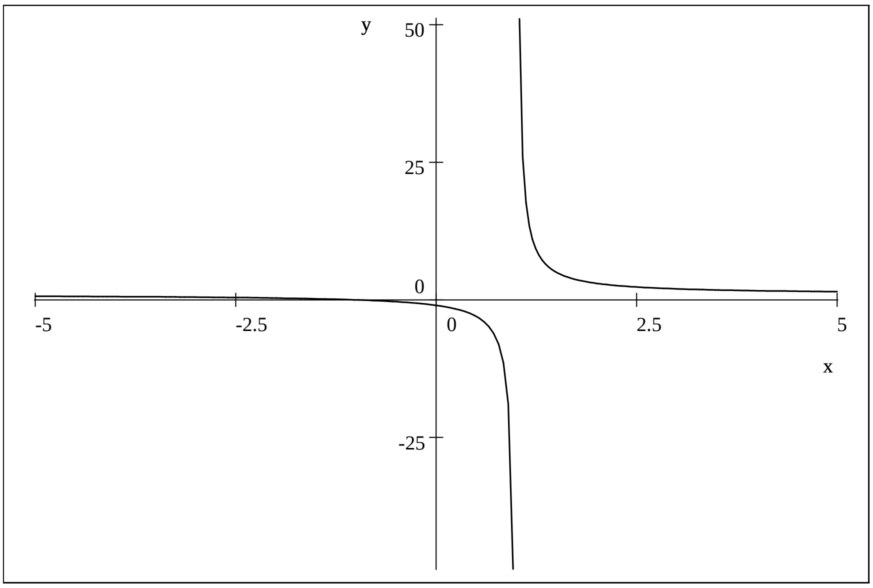
Esercizio 2.

a. Preso $y \in \mathbb{R}$, si ha $\frac{1+x}{x-1} = y$ sse $1 + x = yx - y$, ossia $x(y-1) = y + 1$: se $y = 1$ si otterrebbe $0 = 2$, quindi se $y = 1$ l'equazione in x data da $f(x) = y$ non ha soluzione, quindi la controimmagine di $y = 1$ non esiste, ossia $f^{-1}(1) = \emptyset$. Altrimenti, se $y \neq 1$ in $x(1 + y) = 1 - y$ si può dividere per $y - 1$ e si ottiene che y ha una sola controimmagine $f^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-1}$.
Ciò mostra che tutti e soli i valori $y \neq 1$ vengono assunti da f, quindi $Im(f) = \mathbb{R} - \{1\}$. Inoltre f è iniettiva perché ogni $y \neq 1$ è assunto su un solo $x = f^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-1}$.

b. Si ha

$$(f \circ f)(x) := f(f(x)) = f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{\frac{x+1}{x-1} + 1}{\frac{x+1}{x-1} - 1} = \frac{x+1+x-1}{x+1-x+1} = \frac{2x}{2} = x.$$

c. Da quanto detto al punto a., si ha $f^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-1}$, ossia $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}$, ossia la funzione inversa di f è f stessa, infatti ial punto b. risulta che $f \circ f = f \circ f^{-1}$ è l'identità.
f è una iperbole equilatera con asintoto orizzontale $y = 1$ ed asintoto verticale $x = 1$. Poiché $f(0) = -1$, il grafico di f (e di f^{-1}) è il seguente.



Esercizio 3.

a. Si deve verificare che

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \text{ tale che } \forall x \geq 0 \text{ con } 0 < |x - 9| < \delta, \text{ si abbia } \left|\sqrt{x} - 3\right| < \varepsilon,$$

ossia che tra le soluzioni della $|\sqrt{x} - 3| < \varepsilon$ ci sia tutto un intorno di 9.
In effetti,$|\sqrt{x} - 3| < \varepsilon$ sse

$$\begin{cases} \sqrt{x} - 3 < \varepsilon \\ \sqrt{x} - 3 > -\varepsilon \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} \sqrt{x} < \varepsilon + 3 \\ \sqrt{x} > -\varepsilon + 3. \end{cases}$$

Poiché è lecito restringersi a considerare ε piccoli, prendiamo $\varepsilon < 3$, cosicché $-\varepsilon + 3 > 0$, e così ciascuna disuguaglianza ha entrambi i membri maggiori o uguali a zero, e si è autorizzati ad elevare al quadrato ciascun membro lasciando la disuguaglianza nello stesso verso. Quindi per $\varepsilon < 3$ il sistema sopra è equivalente a

$$\begin{cases} x < 9 + 6\varepsilon + \varepsilon^2 \\ x > 9 - 6\varepsilon + \varepsilon^2. \end{cases}$$

Osserviamo che $+6\varepsilon + \varepsilon^2 > 0$ e che $-6\varepsilon + \varepsilon^2 = \varepsilon(\varepsilon - 6) < 0$, perciò $9 + 6\varepsilon + \varepsilon^2 > 9$ e $9 - 6\varepsilon + \varepsilon^2 < 9$, e le soluzioni $x \in (9 - 6\varepsilon + \varepsilon^2, 9 + 6\varepsilon + \varepsilon^2)$ del sistema costituiscono un intorno (non simmetrico) di 9. Il limite perciò è verificato.

b. Il primo limite si presenta nella forma $\frac{0}{0}$. Applicando il teorema di de l'Hopital a

$$\frac{\cos^2(x) - 1}{1 - e^x\,(1 - x)} = \frac{\cos^2(x) - 1}{1 - e^x + xe^x},$$

poiché

$$\frac{-2\cos(x)\sin(x)}{-e^x + e^x + xe^x} = -2\frac{\sin(x)}{x}\frac{\cos(x)}{e^x} \to -2$$

allora anche il limite proposto è -2.

Poiché $\frac{5}{4^x} \to 0$, il secondo limite si presenta nella forma immediata $3^{+\infty}$, il risultato è dunque $+\infty$.

Esercizio 4.

a. Vero.

Poichè $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, allora $\forall k_1 < 0$ $\exists k_2 < 0$ tale che se $x < k_2$ allora $f(x) < k_1 < 0$. Preso $k_1 < -2$, possiamo applicare il teorema degli zeri alla funzione f, che è continua per ipotesi, sull'intervallo $[k_1, -2]$ e concludere che esiste $x_0 \in (k_1, -2)$, e dunque $x_0 < -2 < 0$, tale che $f(x_0) = 0$.

b. Falso.

La funzione proposta non è continua nel punto 0, perché $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ mentre $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$. Per il teorema che lega derivabilità e continuità, la funzione non può essere nemmeno derivabile in 0.

c. Falso.

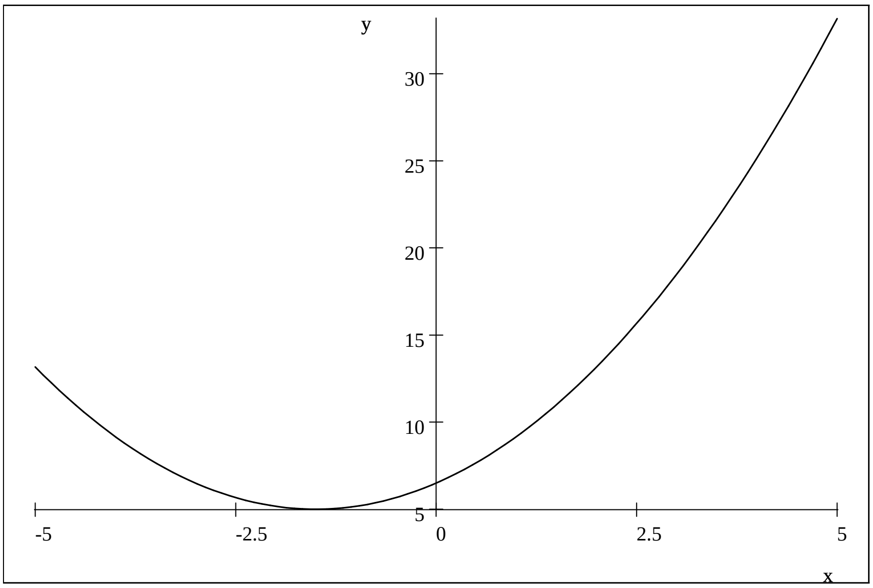
Si deve verificare se è vero che $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Abbiamo che $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} x - 1 = -1$ ed anche $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} -e^x = -1$, dunque $\lim_{x\to 0} f(x) = -1$, però $f(0) = 2$ non coincide con tale limite. La funzione non è dunque continua in 0.

d. Falso.

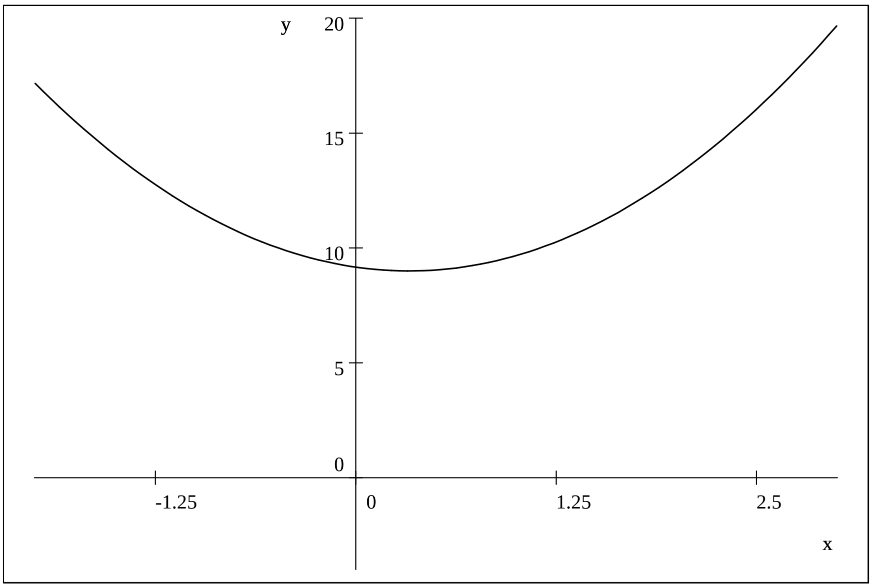
Ad esempio la funzione $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{se } x < 0 \\ -x-1, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ è decrescente sul suo dominio $\mathbb{R}$, ma non è continua in 0, perché il $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} -x = 0$ non coincide con il $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} -x - 1 = -1$.

Esercizio 5. (8 punti)

a. Si deve risolvere $\min_{x\in[0,1]} r_1(x) = \min_{x\in[0,1]} \frac{2}{3}x^2 + 2x + \frac{13}{2}$. Si ha che $r_1'(x) = \frac{4}{3}x + 2 \geq 0$ sse $x \geq -\frac{3}{2} \notin [0,1]$, perciò su [0,1] la funzione r_1 è sempre crescente, ed il punto di minimo è $x = 0$, con $\min_{x\in[0,1]} r_1(x) = r_1(0) = \frac{13}{2} = 6.5$.



b. Si deve risolvere $\min_{z\in[0,1]} r_2(z) = \min_{z\in[0,1]} \frac{3}{2}z^2 - z + \frac{55}{6}$. Si ha che $r_2'(z) = 3z - 1 \geq 0$ sse $z \geq \frac{1}{3} \in [0,1]$, $\frac{1}{3}$ è dunque il punto di minimo di r_2 su $[0,1]$, e $\min_{z\in[0,1]} r_2(z) = r_2\left(\frac{1}{3}\right) = 9$.



c. La scelta deve dunque ricadere sull'opportunità 1, il cui minimo rischio è inferiore al minimo rischio dell'opportunità 2. Inoltre la proporzione da scegliere è $x = 0$.

Matematica per le Applicazioni Economiche I, 12 giugno 2017 FILA C

La prova ha la durata di $\boxed{\text{due ore}}$. $\log(x)$ o $\ln(x)$ indicano il logaritmo in base e.

Esercizio 1. (8 punti) Si studi

$$f(x) = \frac{1}{2x^2} - \log(x),$$

e si disegni il suo grafico. **NON** si tralasci lo studio della derivata seconda. Si tralasci lo studio del segno. [Dominio: punti 1; limiti: punti 2; argomentazioni sulla eventuale continuità/derivabilità sul dominio: punti 1; monotonia: punti 2; concavità/convessità: punti 1; grafico: punti 1]

Esercizio 2. (8 punti) Sia data

$$f : \mathbb{R}\setminus\{2\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{2x-1}{x-2}.$$

a. [punti 3] Si dica se la funzione f è iniettiva e si determini $\mathrm{Im}(f)$.
b. [punti 2] Si calcoli $f \circ f$, cioè $f(f(x))$.
c. [punti 3] Si determini la funzione inversa f^{-1} e si disegnino i grafici di f e f^{-1}.

Esercizio 3. (8 punti)
a. [punti 3] Usando la definizione di limite si verifichi che

$$\lim_{x\to 25} \sqrt{x} = 5.$$

b. Si calcolino

$$[\text{punti } 3] \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x(1-x)-1}{1-(\cos^2(x))} \qquad\qquad [\text{punti } 2] \qquad \lim_{x\to +\infty}\left(4+\frac{7}{3^x}\right)^x.$$

Esercizio 4. (8 punti) Si dica, giustificando, se le seguenti affermazioni sono vere o false.
a. [punti 2] Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e tale che $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ e $f(-1) = 2$. Allora esiste $x_0 < 0$ tale che $f(x_0) = 0$.
b. [punti 2] La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = \begin{cases} x^2-1, & \text{se } x<0 \\ x^2, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ è derivabile nel punto $x_0 = 0$.
c. [punti 2] La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{se } x>0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ 2x+1, & \text{se } x<0 \end{cases}$ è continua nel punto $x_0 = 0$.
d. [punti 2] Se una funzione è crescente sul suo dominio allora è anche continua.

Esercizio 5. (8 punti) Un agente finanziario avente a disposizione una certa somma di denaro deve scegliere tra due opportunità di investimento in titoli. Il suo obiettivo è quello di fare la scelta che minimizzi il rischio di perdita di denaro. L'opportunità 1 consiste nell'acquisto di 2 titoli e comporta un rischio stimato in $r_1(x) = \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{15}{2}$, dove $x \in [0,1]$ rappresenta la proporzione della somma di denaro investita in uno dei due titoli. In alternativa, l'opportunità 2 consiste nell'acquisto di 2 titoli, diversi dai precedenti, e comporta un rischio stimato in $r_2(z) = \frac{2}{3}z^2 + 2z + \frac{13}{2}$, dove $z \in [0,1]$ rappresenta la proporzione della somma di denaro investita in uno dei due titoli. Determinare
a. [punti 3] il valore di x che minimizza $r_1(x)$
b. [punti 3] il valore z che minimizza $r_2(z)$
c. [punti 2] su quale opportunità debba ricadere la scelta dell'investitore e con quale proporzione.

Traccia delle soluzioni.

Esercizio 1.

1. Dominio.

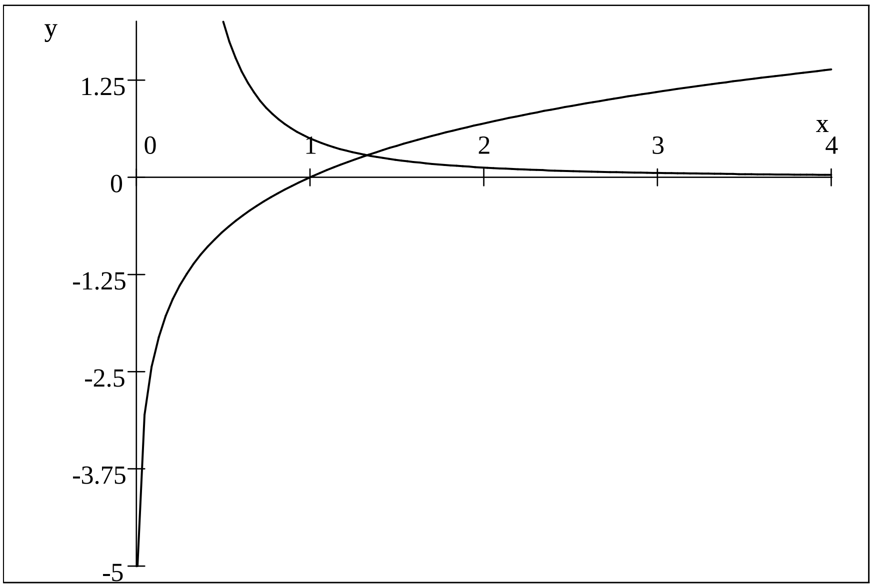
dom $f = \mathbb{R}_{++}$.

2. Segno.

$\frac{1}{2x^2} - \log(x) > 0$, ovvero $\frac{1}{x^2} > \log(x)$ è difficile da studiare in maniera esplicita. Una analisa grafica consente però di concludere che esiste $\alpha \in (1,2)$, tale che $x < \alpha$ implica $f(x) > 0$. Si osservi che definita $g(x) = \frac{1}{x^2}$, si ha che

$$g(1) = 1 > 0 = \log(1)\,, \text{ e}$$

$$g(2) = \tfrac{1}{4} < \log(2)$$



3. Punti di discontinuita'.

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{2x^2} - \ln x\right) = \text{"}\frac{1}{0+} - (-\infty)\text{"} = +\infty.$$

4. Comportamento a $\pm\infty$ e eventuali asintoti non verticali.

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{2x^2} - \ln x\right) = \text{"}\frac{1}{+\infty} - (+\infty)\text{"} = -\infty.$$

5. Derivata prima.

$$\frac{d\left(\frac{1}{2x^2} - \ln x\right)}{dx} = \frac{1}{2}(-2)\,x^{-3} - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} = -\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right) < 0$$

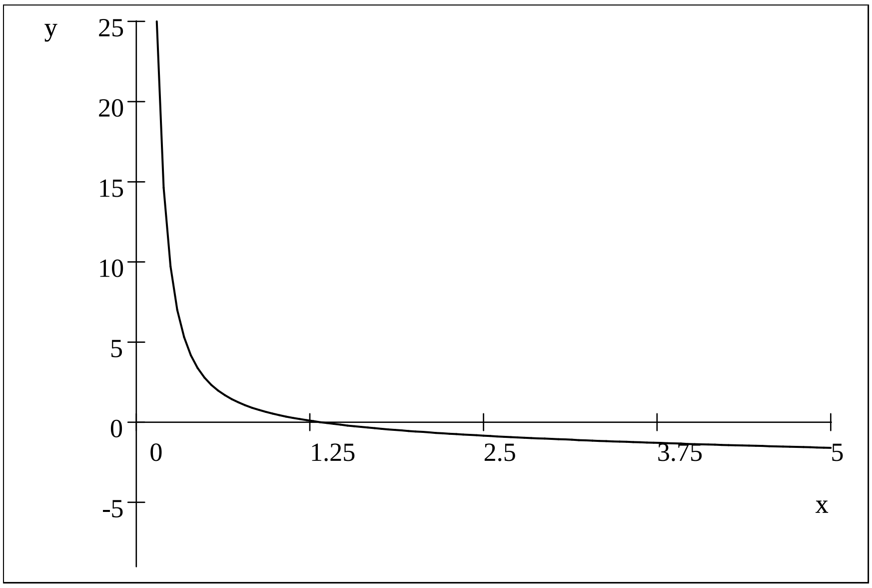
per ogni $x \in \mathbb{R}_{++}$. Dunque f è strettamente decrescente.

5. Derivata seconda.

$$\frac{d\left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right)}{dx} = -\left(-x^{-2} - 3x^{-4}\right) = \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} > 0$$

per ogni $x \in \mathbb{R}_{++}$. Dunque f è strettamente convessa.

Dunque il grafico di f è il seguente.$\frac{1}{2x^2} - \log(x)$



Esercizio 2.

a.

$$\operatorname{Im} f := \{y \in \mathbb{R} : \ \exists x \in dom(f) \ \text{ tale che } y = f(x)\} = \left\{x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} : \ \frac{2x-1}{x-2} = y\right\}.$$

Dobbiamo dunque studiare la equazione $\frac{2x-1}{x-2} = y$ nella incognita $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

$$\tfrac{2x-1}{x-2} = y, \qquad 2x - 1 = xy - 2, \qquad x(2-y) = 1 - 2y, \qquad x = \tfrac{2y-1}{y-2},$$

in cui l'ultimo passaggio è lecito purchè $y \neq 2$. Dunque

$$\operatorname{Im} f = \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

Si osservi che $\frac{2y-1}{y-2} = 2$ sse $2y - 1 = 2y - 4$ sse $-1 = -4$,il che è impossibile.

f è iniettiva se per ogni $x, z \in dom(f)$, $f(x) = f(z) \Rightarrow x = z$. In effetti,

$$\tfrac{2x-1}{x-2} = \tfrac{2z-1}{z-2}, \qquad (2x-1)\cdot(z-2) = (2z-1)\cdot(x-2), \qquad 2xz - 4x - z + 2 = 2xz - 4z - x + 2,$$

$$-4x - z = -4z - x, \qquad -3x = -3z, \qquad x = z,$$

come desiderato.

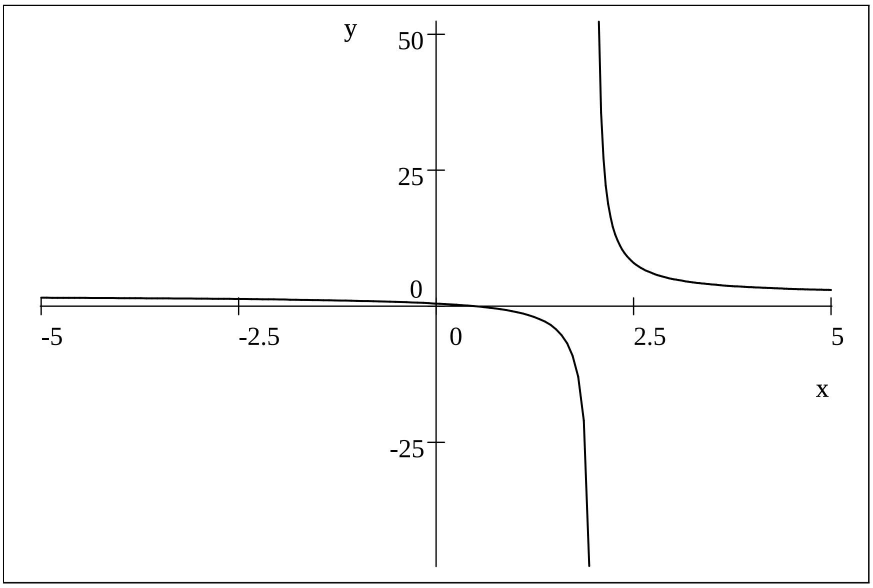
b.

$$(f \circ f)(x) := f(f(x)) = f\left(\frac{2x-1}{x-2}\right) = \frac{2\frac{2x-1}{x-2} - 1}{\frac{2x-1}{x-2} - 2} = \frac{4x - 2 - x + 2}{2x - 1 - 2x + 4} = \frac{3x}{3} = x$$

c.

Da quanto detto al punto a., o al punto *b.*, la funzione inversa di f è f stessa. f è una iperbole equilatera con origine traslata nel punto di ascissa tale che $(1+x) = 0$ e ordinata pari a $\lim_{x\to+\infty} \frac{1-x}{1+x}$,ovvero origine traslata nel punto $(-1,-1)$. Poichè $f(2) = -\frac{1}{3}$, il grafico di f (e di f^{-1}) è il seguente.

$\frac{2x-1}{x-2}$



Esercizio 3.

a.

Si deve verificare che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists\, \delta > 0 \text{ tale che } \forall x \geq 0 \text{ con } 0 < |x - 25| < \delta, \text{ si ha } \left|\sqrt{x} - 5\right| < \varepsilon,$$

ossia che l'insieme delle soluzioni della disequazione $|\sqrt{x} - 4| < \varepsilon$ contenga un intorno di 16.

In effetti,$|\sqrt{x} - 5| < \varepsilon$ sse

$$\begin{cases} \sqrt{x} - 5 < \varepsilon \\ \sqrt{x} - 5 > -\varepsilon \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} \sqrt{x} < \varepsilon + 5 \\ \sqrt{x} > -\varepsilon + 5. \end{cases}$$

Poiché è lecito restringersi a considerare ε piccoli, prendiamo $\varepsilon < 5$, cosicché $-\varepsilon + 5 > 0$, e così ciascuna disuguaglianza ha entrambi i membri maggiori o uguali a zero, e si è autorizzati ad elevare al quadrato ciascun membro. Quindi per $\varepsilon < 5$ il sistema sopra è equivalente a

$$\begin{cases} x < 25 + 10\varepsilon + \varepsilon^2 \\ x > 25 - 10\varepsilon + \varepsilon^2. \end{cases}$$

Osserviamo che $+10\varepsilon + \varepsilon^2 > 0$ e che $-10\varepsilon + \varepsilon^2 = \varepsilon(\varepsilon - 10) < 0$, perciò $25 + 10\varepsilon + \varepsilon^2 > 25$ e $25 - 10\varepsilon + \varepsilon^2 < 25$, e l'insieme delle soluzioni $(16 - 8\varepsilon + \varepsilon^2, 16 + 8\varepsilon + \varepsilon^2)$ del sistema contiene un intorno di 25, come desiderato

b. Il limite si presenta nella forma $\frac{0}{0}$. Applicando il teorema di de l'Hopital a

$$\frac{e^x\,(1 - x) - 1}{1 - \cos^2(x)} = \frac{e^x - 1 - xe^x}{\sin^2(x)},$$

si ha

$$\frac{e^x - e^x - xe^x}{2\sin(x)\cos(x)} = -\frac{1}{2}\frac{x}{\sin(x)}\frac{e^x}{\cos(x)}$$

e

$$\lim_{x \to 0} -\frac{1}{2}\frac{x}{\sin(x)}\frac{e^x}{\cos(x)} = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 1 \cdot \frac{1}{1} = -\frac{1}{2}.$$

c. Poiché $\lim_{x\to+\infty} \frac{7}{3^x} = 0$, si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\left(4+\frac{7}{3^x}\right)^x = "4^{+\infty}" = +\infty.$$

Esercizio 4.

a. Vero.

Poichè $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, allora $\forall k_1 < 0\ \exists k_2 < 0$ tale che se $x < k_2$ allora $f(x) < k_1$. Preso $k_1 < -1$, possiamo applicare il teorema degli zeri alla funzione, che è continua per ipotesi, sull'intervallo $[k_1, -1]$ per concludere che esiste $x_0 \in (k_1, -1)$, e dunque $x_0 < -1 < 0$, tale che $f(x_0) = 0$.

b. Falso.

La funzione proposta non è continua nel punto 0, perché $\lim_{x\to0^+} f(x) = 1$ mentre $\lim_{x\to0^-} f(x) = -1$, ma $f(0) = 0$. Per il teorema che lega derivabilità e continuità, la funzione non è derivabile in 0.

c. Falso.

Si deve verificare se è vero che $\lim_{x\to0} f(x) = f(0)$. Abbiamo che $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0} e^x = 0$ ed anche $\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} x+1 = 0$, dunque $\lim_{x\to0} f(x) = 0$, però $f(0) = -1$ non coincide con tale limite. La funzione non è dunque continua in 0.

d. Falso.

Ad esempio la funzione

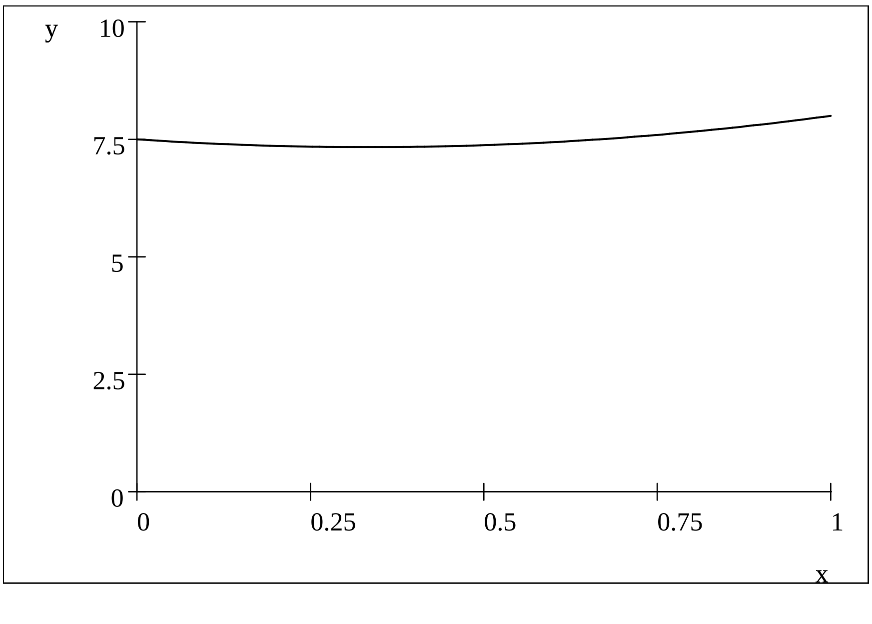
$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x < 0 \\ x+1, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

è crescente sul suo dominio $\mathbb{R}$, ma non è continua in 0, perché il $\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} x = 0$ non coincide con il $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} x+1 = 1$.

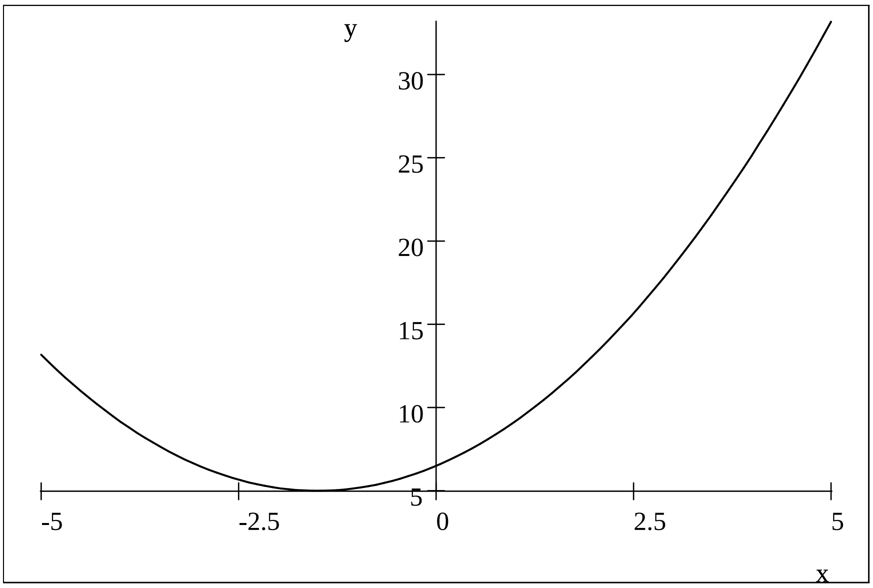
Esercizio 5. (8 punti) Investimento di minimo rischio

a) [3 punti] Si deve risolvere $\min_{x\in[0,1]} r_1(x) = \min_{x\in[0,1]} \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{15}{2}$. Si ha che $r_1'(x) = 3x - 1 \geq 0$ sse $x \geq \frac{1}{3} \in [0,1]$, $\frac{1}{3}$ è dunque il punto di minimo di r_1 su $[0,1]$, e $\min_{x\in[0,1]} r_1(x) = r_1\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{2}\frac{1}{9} - \frac{1}{3} + \frac{15}{2} = \frac{22}{3}$.

$\frac{3}{2}x^2 - x + \frac{15}{2}$



.b) [3 punti] Si deve risolvere $\min_{z\in[0,1]} r_2(z) = \min_{z\in[0,1]} \frac{2}{3}z^2 + 2z + \frac{13}{2}$. Si ha che $r_2'(z) = \frac{4}{3}z + 2 \geq 0$ sse $z \geq -\frac{4}{3} \notin [0,1]$, perciò a funzione $r_2(z)$ è crescente su $[0,1]$ l, ed il punto di minimo è $z = 0$, con $\min_{z\in[0,1]} r_2(z) = r_2(1) = \frac{13}{2}$



c) [2 punti] La scelta deve dunque ricadere sull'opportunità 2, il cui minimo rischio, cioe' $\frac{22}{3}$, è inferiore al minimo rischio dell'opportunità 1, cioè $\frac{13}{2}$.. Inoltre la proporzione da scegliere è $z = 0$.