Matematica per le Applicazioni Economiche I, 6 luglio 2017
Testo d'esame A

La prova ha la durata di due ore. **Spiegate con molta cura le vostre risposte.**

Esercizio 1. (10 punti)
Si studi la seguente funzione (incluso lo studio della concavità e convessità):

$$f(x) = e^x(x^2 - 2x - 3)$$

Esercizio 2. (9 punti)
Si calcolino i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \cos(x) - 1}{\operatorname{sen}(x)}, \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x - 4\ln(x) + x^{10}}{8x^2 + e^{2x} - 200}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2x+3} - \sqrt{3}}{x}$$

Esercizio 3. (5 punti)
Si ricavi l'insieme di definizione della seguente funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{e^x - 3}}{\ln(x) - 5}$$

e si determini l'insieme dei punti di accumulazione di tale insieme.

Esercizio 4. (4 punti)
Si dia la definizione di funzione strettamente crescente.
Si dimostri, utilizzando la definizione di funzione strettamente crescente, che la seguente funzione è strettamente crescente nell'intervallo $[1, +\infty)$:

$$f(x) = x^3 - 2x + 5$$

Esercizio 5. (6 punti)
Si consideri la funzione dipendente dai parametri reali a e b definita come segue:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3ax + b & \text{se } x \in (-\infty, 0] \\ e^{7x} & \text{se } x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

(i) Si determinino un valore per il parametro a e un valore per il parametro b in modo che la funzione f sia derivabile nel punto 0;

(ii) Si determinino un valore per il parametro a e un valore per il parametro b in modo che la funzione f sia continua ma non derivabile nel punto 0;

(iii) Si determinino un valore per il parametro a e un valore per il parametro b in modo che la funzione f non sia continua nel punto 0.

Esercizio 6. (6 punti)
Siano

$$A = (-\infty, 1] \cup [3, 8) \cup (10, 11), \quad B = (0, 4] \cup [7, 12)$$

(i) si stabilisca se $(4, 6) \subseteq A \cap B$;

(ii) si calcoli l'insieme dei minoranti di $A \cap B$;

(iii) si stabilisca se $[3, 11] \subseteq A \cup B$;

(ii) si calcoli l'insieme dei minoranti di $A \cup B$.

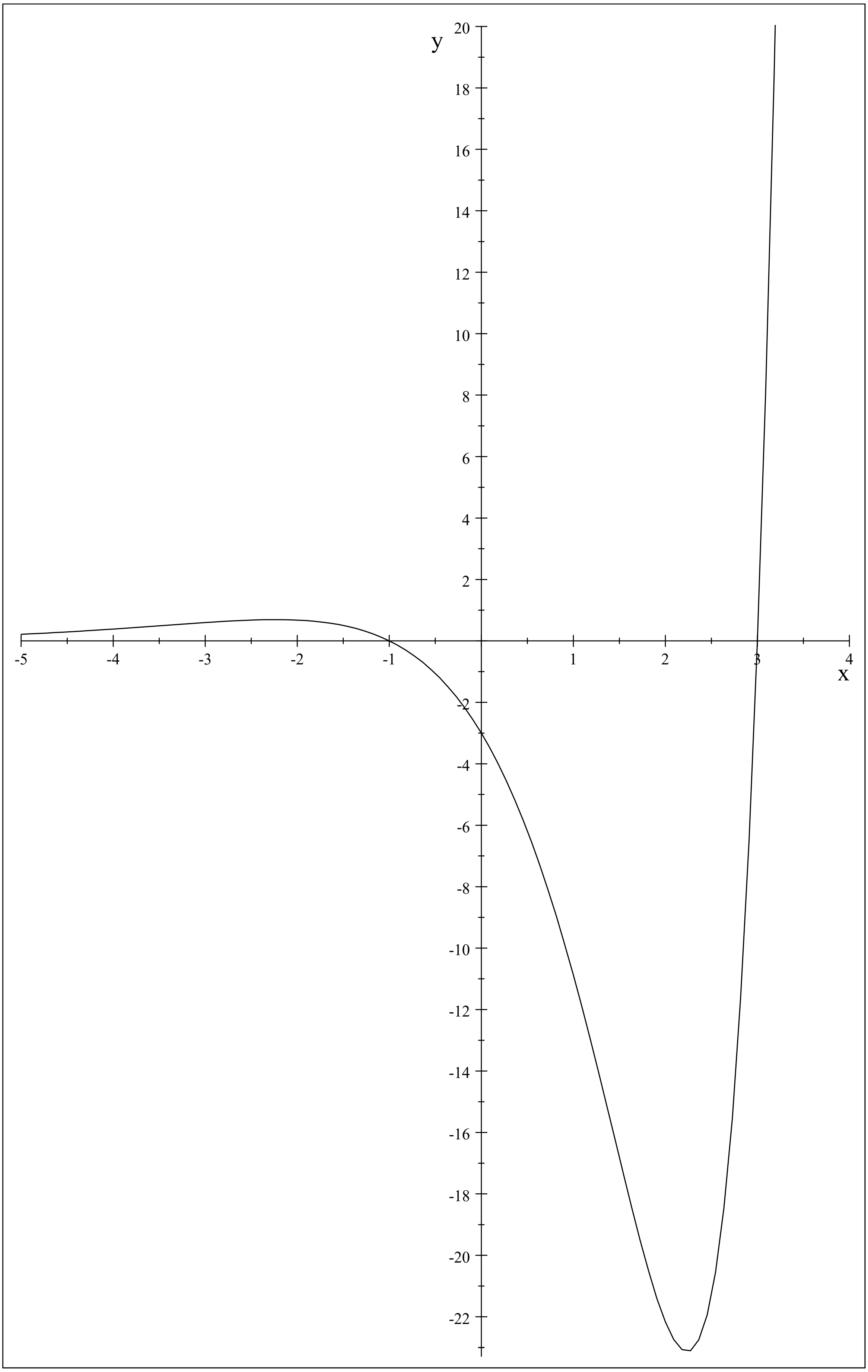
Soluzioni Testo A

1. L'insieme di definizione di f è $\mathbb{R}$. Questa funzione non è pari, né dispari, né periodica, è continua e derivabile in $\mathbb{R}$. Il segno di $f(x)$ coincide con il segno di $x^2 - 2x - 3$, dunque $f(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -1)$, $f(-1) = 0$, $f(x) < 0$ per $x \in (-1, 3)$, $f(3) = 0$, $f(x) > 0$ per $x \in (3, +\infty)$.

   Calcolo dei limiti:
   $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \cdot (+\infty)$$
   dunque $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Inoltre
   $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \cdot (+\infty)$$
   Poiché questa è una forma indeterminata, utilizziamo il cambio di variabile $y = -x$ (si noti che la funzione $y = -x$ è monotona strettamente decrescente in $\mathbb{R}$, dunque iniettiva) e otteniamo $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{y \to +\infty} e^{-y}(y^2 + 2y - 3) = \lim_{y \to +\infty} \frac{y^2+2y-3}{e^y} = 0$ per la gerarchia tra infiniti. Dunque $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

   La derivata prima di f è
   $$f'(x) = e^x(x^2 - 5)$$
   e $f'(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, +\infty)$, $f'(x) < 0$ per $x \in (-\sqrt{5}, \sqrt{5})$; dunque f è strettamente crescente nell'intervallo $(-\infty, -\sqrt{5})$, è strettamente decrescente nell'intervallo $(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$, è strettamente crescente nell'intervallo $(\sqrt{5}, +\infty)$. La derivata seconda di f è
   $$f''(x) = e^x(2x + x^2 - 5)$$
   e $f''(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -\sqrt{6} - 1) \cup (\sqrt{6} - 1, +\infty)$, $f'(x) < 0$ per $x \in (-\sqrt{6} - 1, \sqrt{6} - 1)$; dunque f è convessa nell'intervallo $(-\infty, -\sqrt{6}-1)$, è concava nell'intervallo $(-\sqrt{6}-1, \sqrt{6}-1)$, è convessa nell'intervallo $(\sqrt{6} - 1, +\infty)$.

   Il grafico di f è


y
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
-2
-4
-6
-8
-10
-12
-14
-16
-18
-20
-22
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
x

Dunque $x=\sqrt{5}$ è punto di min globale per f e $\min f=-2\left(\sqrt{5}-1\right)e^{\sqrt{5}}$; $x=-\sqrt{5}$ è punto di max locale per f. Non esiste alcun punto di max globale per f, $\sup f=+\infty$.

2. Risulta che $\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cos(x)-1}{\operatorname{sen}(x)}=\frac{0}{0}$, e per applicare il (primo) teorema di de l'Hopital si calcola

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cos(x)-e^x\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}=1$$

dunque $\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cos(x)-1}{\operatorname{sen}(x)}=1$.

Nel calcolo di $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-4\ln(x)+x^{10}}{8x^2+e^{2x}-200}$ è utile ricorrere alla gerarchia tra infiniti, la quale implica che $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-4\ln(x)+x^{10}}{8x^2+e^{2x}-200}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^{2x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$.

Risulta che $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{3}}{x}=\frac{0}{0}$ ed è utile notare che $\frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{3}}{x}=\frac{(\sqrt{2x+3}-\sqrt{3})\cdot(\sqrt{2x+3}+\sqrt{3})}{x(\sqrt{2x+3}+\sqrt{3})}=\frac{2}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{3}}$. Dunque $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{3}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

3. L'insieme di definizione di f è $A=\{x\in\mathbb{R}: e^x-3\geq 0,\ x>0,\ \ln(x)-5\neq 0\}$. L'insieme delle soluzioni della disequazione $e^x-3\geq 0$ è l'intervallo $[\ln(3),+\infty)$. L'insieme delle soluzioni delle disequazioni $x>0$ e $\ln(x)-5\neq 0$ è l'insieme $(0,e^5)\cup(e^5,+\infty)$. Dunque $A=[\ln(3),e^5)\cup(e^5,+\infty)$, e l'insieme dei punti di accumulazione di A è $[\ln(3),+\infty)$.

4. Una funzione $f:A\to\mathbb{R}$ (con $A\subseteq\mathbb{R}$) si dice strettamente crescente se per ogni x_1,x_2 in A tali che $x_1<x_2$ vale $f(x_1)<f(x_2)$. Per la funzione in oggetto, si dimostra che se x_1,x_2 sono in $[1,+\infty)$ tali che $x_1<x_2$, allora vale $f(x_1)<f(x_2)$, ovvero $x_1^3-2x_1+5<x_2^3-2x_2+5$. Questa disuguaglianza equivale a $2x_2-2x_1<x_2^3-x_1^3$, e $x_2^3-x_1^3=(x_2-x_1)\left(x_1^2+x_2^2+x_1x_2\right)$, dunque

$$2x_2-2x_1<x_2^3-x_1^3 \qquad\Leftrightarrow\qquad 2x_2-2x_1<(x_2-x_1)\left(x_1^2+x_2^2+x_1x_2\right) \qquad\Leftrightarrow\qquad 2<x_1^2+x_2^2+x_1x_2$$

(si noti che la seconda equivalenza si basa su $x_2-x_1>0$). L'ultima disuguaglianza e' soddisfatta in quanto $x_1\geq 1$ e $x_2\geq 1$, quindi $x_1^2\geq 1$, $x_2^2\geq 1$, $x_1x_2\geq 1$.

5. (i) La derivabilità nel punto 0 richiede che f sia continua in 0, il che equivale a $\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$, e queste uguaglianze sono soddisfatte se e solo se $b=1$. Adesso calcoliamo $f'_-(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ e $f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ e otteniamo

$$f'_-(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{2h^2+3ah+1-1}{h}=\lim_{h\to 0^-}(2h+3a)=3a$$

Inoltre

$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{e^{7h}-1}{h}=\frac{0}{0}$$

e usando la sostituzione $k=7h$ (si noti che $k=7h$ è una funzione monotona strettamente crescente di h, dunque iniettiva) si ottiene $f'_+(0)=\lim_{k\to 0^+}\frac{e^k-1}{k/7}=7$. Pertanto $f'_-(0)=f'_+(0)$ se e solo se $3a=7$. Dunque f è derivabile nel punto 0 se e solo se $b=1$ e $a=\frac{7}{3}$.

(ii) Sulla base del punto (i) si deduce che se $b=1$ e $a=5$, allora f è continua in 0 ma non è derivabile in 0 perché $f'_-(0)=15\neq f'_+(0)=7$.

(iii) Sulla base del punto (i) si deduce che se $b=4$ e $a=2$, allora f non è continua in 0 perché $\lim_{x\to 0^-}f(x)=f(0)=4$ ma $\lim_{x\to 0^+}f(x)=1$.

6. (i) L'insieme $A\cap B$ coincide con $(0,1]\cup[3,4]\cup[7,8)\cup(10,11)$, quindi non è vero che $(4,6)\subseteq A\cap B$, ad esempio perché $5\notin A\cap B$.

(ii) L'insieme dei minoranti di $A\cap B$ è l'intervallo $(-\infty,0]$.

(iii) L'insieme $A\cup B$ coincide con $(-\infty,12)$, quindi è vero che $[3,11]\subseteq A\cup B$.

(iv) Non esiste alcun minorante per $A\cup B$.

Matematica per le Applicazioni Economiche I, 6 luglio 2017
Testo d'esame B

La prova ha la durata di <u>due ore</u>. **Spiegate con molta cura le vostre risposte.**

Esercizio 1. (10 punti)
Si studi la seguente funzione (incluso lo studio della concavità e convessità):

$$f(x) = e^x(x^2 - 2x - 8)$$

Esercizio 2. (9 punti)
Si calcolino i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - e^x(1+x)}{\tan(x)}, \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{3x} + x^8 - 7\ln(x)}{6x^4 + e^x + 120}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{3x+5} - \sqrt{5}}{x}$$

Esercizio 3. (5 punti)
Si ricavi l'insieme di definizione della seguente funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{e^x - 4}}{\ln(x) - 7}$$

e si determini l'insieme dei punti di accumulazione di tale insieme.

Esercizio 4. (4 punti)
Si dia la definizione di funzione strettamente crescente.
Si dimostri, utilizzando la definizione di funzione strettamente crescente, che la seguente funzione è strettamente crescente nell'intervallo $[2, +\infty)$:

$$f(x) = x^3 - 5x + 7$$

Esercizio 5. (6 punti)
Si consideri la funzione dipendente dai parametri reali a e b definita come segue:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 4ax + b & \text{se } x \in (-\infty, 0] \\ e^{5x} & \text{se } x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

(i) Si determinino un valore per il parametro a e un valore per il parametro b in modo che la funzione f sia derivabile nel punto 0;

(ii) Si determinino un valore per il parametro a e un valore per il parametro b in modo che la funzione f sia continua ma non derivabile nel punto 0;

(iii) Si determinino un valore per il parametro a e un valore per il parametro b in modo che la funzione f non sia continua nel punto 0.

Esercizio 6. (6 punti)
Siano

$$A = (1, 3] \cup [6, 11), \quad B = (-\infty, 4] \cup [7, 10) \cup (12, 15)$$

(i) si stabilisca se $(8, 9) \subseteq A \cap B$;

(ii) si calcoli l'insieme dei minoranti di $A \cap B$;

(iii) si stabilisca se $[3, 7] \subseteq A \cup B$;

(ii) si calcoli l'insieme dei minoranti di $A \cup B$.

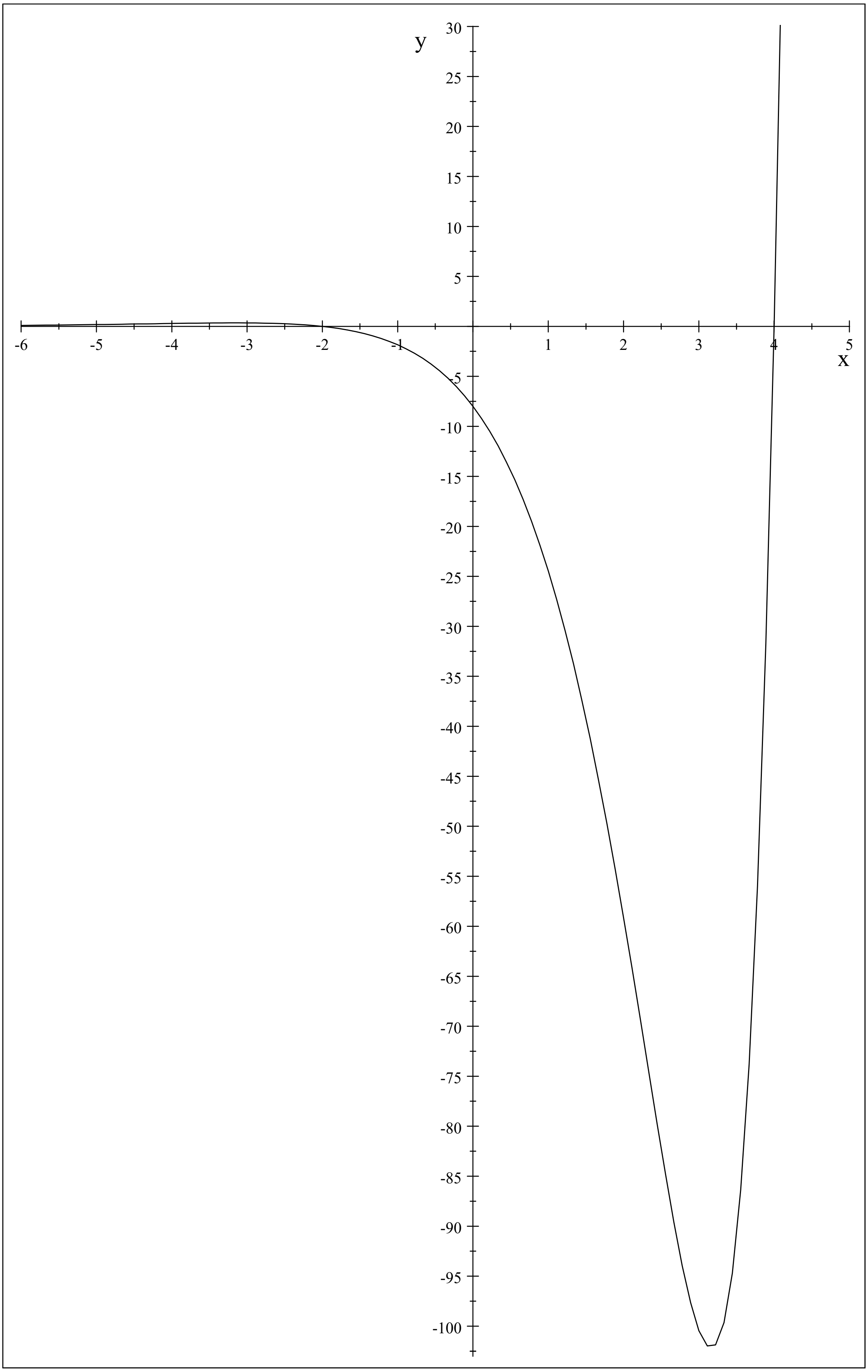
Soluzioni Testo B

1. L'insieme di definizione di f è $\mathbb{R}$. Questa funzione non è pari, né dispari, né periodica, è continua e derivabile in $\mathbb{R}$. Il segno di $f(x)$ coincide con il segno di $x^2 - 2x - 8$, dunque $f(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -2)$, $f(-2) = 0$, $f(x) < 0$ per $x \in (-2, 4)$, $f(4) = 0$, $f(x) > 0$ per $x \in (4, +\infty)$.

   Calcolo dei limiti:
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \cdot (+\infty)$$
   dunque $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Inoltre
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \cdot (+\infty)$$
   Poiché questa è una forma indeterminata, utilizziamo il cambio di variabile $y = -x$ (si noti che la funzione $y = -x$ è monotona strettamente decrescente in $\mathbb{R}$, dunque iniettiva) e otteniamo $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{y\to+\infty} e^{-y}(y^2+2y-8) = \lim_{y\to+\infty} \frac{y^2+2y-8}{e^y} = 0$ per la gerarchia tra infiniti. Dunque $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

   La derivata prima di f è
$$f'(x) = e^x(x^2 - 10)$$
   e $f'(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -\sqrt{10}) \cup (\sqrt{10}, +\infty)$, $f'(x) < 0$ per $x \in (-\sqrt{10}, \sqrt{10})$; dunque f è strettamente crescente nell'intervallo $(-\infty, -\sqrt{10})$, è strettamente decrescente nell'intervallo $(-\sqrt{10}, \sqrt{10})$, è strettamente crescente nell'intervallo $(\sqrt{10}, +\infty)$. La derivata seconda di f è
$$f''(x) = e^x(2x + x^2 - 10)$$
   e $f''(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -\sqrt{11} - 1) \cup (\sqrt{11} - 1, +\infty)$, $f'(x) < 0$ per $x \in (-\sqrt{11} - 1, \sqrt{11} - 1)$; dunque f è convessa nell'intervallo $(-\infty, -\sqrt{11} - 1)$, è concava nell'intervallo $(-\sqrt{11} - 1, \sqrt{11} - 1)$, è convessa nell'intervallo $(\sqrt{11} - 1, +\infty)$.

   Il grafico di f è


y
x
30
25
20
15
10
5
-5
-10
-15
-20
-25
-30
-35
-40
-45
-50
-55
-60
-65
-70
-75
-80
-85
-90
-95
-100
-6
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5

Dunque $x = \sqrt{10}$ è punto di min globale per f e $\min f = -2(\sqrt{10}-1)e^{\sqrt{10}}$; $x = -\sqrt{10}$ è punto di max locale per f. Non esiste alcun punto di max globale per f, $\sup f = +\infty$.

2. Risulta che $\lim_{x\to 0} \frac{1-e^x(1+x)}{\tan(x)} = \frac{0}{0}$, e per applicare il (primo) teorema di de l'Hopital si calcola

$$\lim_{x\to 0} \frac{-e^x(1+x)-e^x}{1+(\tan(x))^2} = -2$$

dunque $\lim_{x\to 0} \frac{1-e^x(1+x)}{\tan(x)} = -2$.

Nel calcolo di $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3x}+x^8-7\ln(x)}{6x^4+e^x+120}$ è utile ricorrere alla gerarchia tra infiniti, la quale implica che $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3x}+x^8-7\ln(x)}{6x^4+e^x+120} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3x}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$.

Risulta che $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{3x+5}-\sqrt{5}}{x} = \frac{0}{0}$ ed è utile notare che $\frac{\sqrt{3x+5}-\sqrt{5}}{x} = \frac{(\sqrt{3x+5}-\sqrt{5})(\sqrt{3x+5}+\sqrt{5})}{x(\sqrt{3x+5}+\sqrt{5})} = \frac{3}{\sqrt{3x+5}+\sqrt{5}}$.
Dunque $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{3x+5}-\sqrt{5}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{3}{\sqrt{3x+5}+\sqrt{5}} = \frac{3}{2\sqrt{5}}$.

3. L'insieme di definizione di f è $A = \{x \in \mathbb{R} : e^x - 4 \geq 0,\ x > 0,\ \ln(x) - 7 \neq 0\}$. L'insieme delle soluzioni della disequazione $e^x - 4 \geq 0$ è l'intervallo $[\ln(4), +\infty)$. L'insieme delle soluzioni delle disequazioni $x > 0$ e $\ln(x) - 7 \neq 0$ è l'insieme $(0, e^7) \cup (e^7, +\infty)$. Dunque $A = [\ln(4), e^7) \cup (e^7, +\infty)$, e l'insieme dei punti di accumulazione di A è $[\ln(4), +\infty)$.

4. Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ (con $A \subseteq \mathbb{R}$) si dice strettamente crescente se per ogni x_1, x_2 in A tali che $x_1 < x_2$ vale $f(x_1) < f(x_2)$. Per la funzione in oggetto, si dimostra che se x_1, x_2 sono in $[2, +\infty)$ tali che $x_1 < x_2$, allora vale $f(x_1) < f(x_2)$, ovvero $x_1^3 - 5x_1 + 7 < x_2^3 - 5x_2 + 7$. Questa disuguaglianza equivale a $5x_2 - 5x_1 < x_2^3 - x_1^3$, e $x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)\left(x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2\right)$, dunque

$$5x_2 - 5x_1 < x_2^3 - x_1^3 \quad \Leftrightarrow \quad 5x_2 - 5x_1 < (x_2 - x_1)\left(x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2\right) \quad \Leftrightarrow \quad 5 < x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$$

(si noti che la seconda equivalenza si basa su $x_2 - x_1 > 0$). L'ultima disuguaglianza e' soddisfatta in quanto $x_1 \geq 2$ e $x_2 \geq 2$, quindi $x_1^2 \geq 4$, $x_2^2 \geq 4$, $x_1x_2 \geq 4$.

5. (i) La derivabilità nel punto 0 richiede che f sia continua in 0, il che equivale a $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$, e queste uguaglianze sono soddisfatte se e solo se $b = 1$. Adesso calcoliamo $f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ e $f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ e otteniamo

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2h^2+4ah+1-1}{h} = \lim_{h\to 0^-} (2h+4a) = 4a$$

Inoltre

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{e^{5h}-1}{h} = \frac{0}{0}$$

e usando la sostituzione $k = 5h$ (si noti che $k = 5h$ è una funzione monotona strettamente crescente di h, dunque iniettiva) si ottiene $f'_+(0) = \lim_{k\to 0^+} \frac{e^k-1}{k/5} = 5$. Pertanto $f'_-(0) = f'_+(0)$ se e solo se $4a = 5$. Dunque f è derivabile nel punto 0 se e solo se $b = 1$ e $a = \frac{5}{4}$.

(ii) Sulla base del punto (i) si deduce che se $b = 1$ e $a = 3$, allora f è continua in 0 ma non è derivabile in 0 perché $f'_-(0) = 12 \neq f'_+(0) = 5$.

(iii) Sulla base del punto (i) si deduce che se $b = 4$ e $a = 2$, allora f non è continua in 0 perché $\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 4$ ma $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$.

6. (i) L'insieme $A \cap B$ coincide con $(1, 3] \cup [7, 10)$, quindi è vero che $(8, 9) \subseteq A \cap B$.

(ii) L'insieme dei minoranti di $A \cap B$ è l'intervallo $(-\infty, 1]$.

(iii) L'insieme $A \cup B$ coincide con $(-\infty, 4] \cup [6, 11) \cup (12, 15)$, quindi non è vero che $[3, 7] \subseteq A \cup B$, ad esempio perché $5 \notin A \cup B$.

(iv) Non esiste alcun minorante per $A \cup B$.

Matematica per le Applicazioni Economiche I, 6 luglio 2017
Testo d'esame C

La prova ha la durata di <u>due ore</u>. **Spiegate con molta cura le vostre risposte.**

Esercizio 1. (10 punti)
Si studi la seguente funzione (incluso lo studio della concavità e convessità):

$$f(x) = e^x(x^2 - 2x - 15)$$

Esercizio 2. (9 punti)
Si calcolino i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{(1+x)\cos(x) - 1}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{7x^5 + 4\ln(x) + e^x}{80 - e^{4x} + 6x^7}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{5x+7} - \sqrt{7}}{x}$$

Esercizio 3. (5 punti)
Si ricavi l'insieme di definizione della seguente funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{e^x - 5}}{\ln(x) - 8}$$

e si determini l'insieme dei punti di accumulazione di tale insieme.

Esercizio 4. (4 punti)
Si dia la definizione di funzione strettamente crescente.
Si dimostri, utilizzando la definizione di funzione strettamente crescente, che la seguente funzione è strettamente crescente nell'intervallo $[3, +\infty)$:

$$f(x) = x^3 - 14x + 11$$

Esercizio 5. (6 punti)
Si consideri la funzione dipendente dai parametri reali a e b definita come segue:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 5ax + b & \text{se } x \in (-\infty, 0] \\ e^{3x} & \text{se } x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

(i) Si determinino un valore per il parametro a e un valore per il parametro b in modo che la funzione f sia derivabile nel punto 0;

(ii) Si determinino un valore per il parametro a e un valore per il parametro b in modo che la funzione f sia continua ma non derivabile nel punto 0;

(iii) Si determinino un valore per il parametro a e un valore per il parametro b in modo che la funzione f non sia continua nel punto 0.

Esercizio 6. (6 punti)
Siano

$$A = (-5, 2] \cup [6, 9) \cup (11, +\infty), \quad B = (0, 4] \cup [8, 14)$$

(i) si stabilisca se $(3, 6) \subseteq A \cap B$;

(ii) si calcoli l'insieme dei maggioranti di $A \cap B$;

(iii) si stabilisca se $[7, 13] \subseteq A \cup B$;

(ii) si calcoli l'insieme dei maggioranti di $A \cup B$.

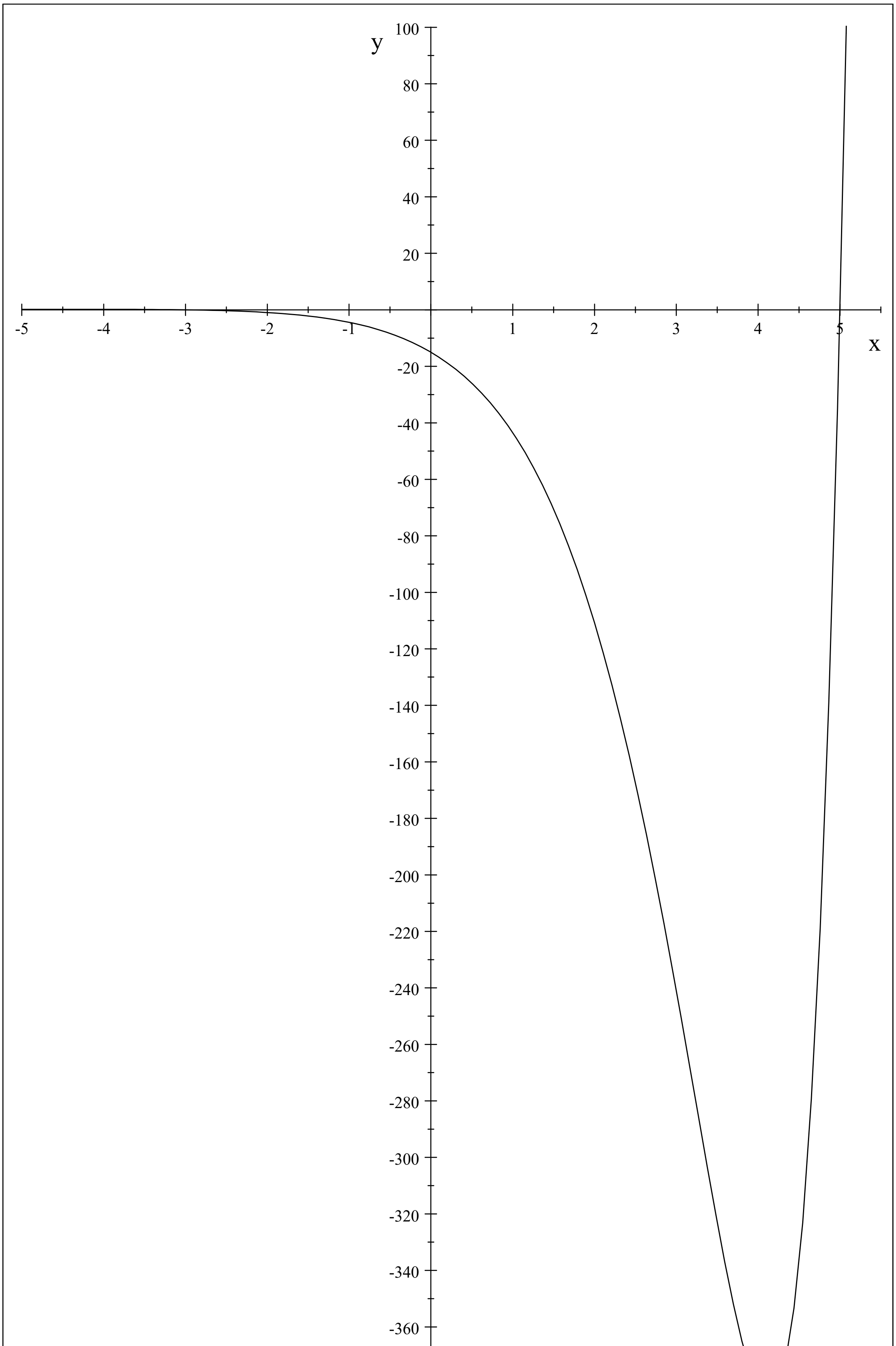
Soluzioni Testo C

1. L'insieme di definizione di f è $\mathbb{R}$. Questa funzione non è pari, né dispari, né periodica, è continua e derivabile in $\mathbb{R}$. Il segno di $f(x)$ coincide con il segno di $x^2 - 2x - 15$, dunque $f(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -3)$, $f(-3) = 0$, $f(x) < 0$ per $x \in (-3, 5)$, $f(5) = 0$, $f(x) > 0$ per $x \in (5, +\infty)$.

   Calcolo dei limiti:
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \cdot (+\infty)$$
   dunque $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Inoltre
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \cdot (+\infty)$$
   Poiché questa è una forma indeterminata, utilizziamo il cambio di variabile $y = -x$ (si noti che la funzione $y = -x$ è monotona strettamente decrescente in $\mathbb{R}$, dunque iniettiva) e otteniamo $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{y \to +\infty} e^{-y}(y^2 + 2y - 15) = \lim_{y \to +\infty} \frac{y^2+2y-15}{e^y} = 0$ per la gerarchia tra infiniti. Dunque $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

   La derivata prima di f è
$$f'(x) = e^x(x^2 - 17)$$
   e $f'(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -\sqrt{17}) \cup (\sqrt{17}, +\infty)$, $f'(x) < 0$ per $x \in (-\sqrt{17}, \sqrt{17})$; dunque f è strettamente crescente nell'intervallo $(-\infty, -\sqrt{17})$, è strettamente decrescente nell'intervallo $(-\sqrt{17}, \sqrt{17})$, è strettamente crescente nell'intervallo $(\sqrt{17}, +\infty)$. La derivata seconda di f è
$$f''(x) = e^x(2x + x^2 - 17)$$
   e $f''(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -3\sqrt{2} - 1) \cup (3\sqrt{2} - 1, +\infty)$, $f'(x) < 0$ per $x \in (-3\sqrt{2} - 1, 3\sqrt{2} - 1)$; dunque f è convessa nell'intervallo $(-\infty, -3\sqrt{2} - 1)$, è concava nell'intervallo $(-3\sqrt{2} - 1, 3\sqrt{2} - 1)$, è convessa nell'intervallo $(3\sqrt{2} - 1, +\infty)$.

   Il grafico di f è


y
100
80
60
40
20
-20
-40
-60
-80
-100
-120
-140
-160
-180
-200
-220
-240
-260
-280
-300
-320
-340
-360
-380
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
x

Dunque $x = \sqrt{17}$ è punto di min globale per f e $\min f = -2(\sqrt{17}-1)e^{\sqrt{17}}$; $x = -\sqrt{17}$ è punto di max locale per f. Non esiste alcun punto di max globale per f, $\sup f = +\infty$.

2. Risulta che $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}(x)}{(1+x)\cos(x)-1} = \frac{0}{0}$, e per applicare il (primo) teorema di de l'Hopital si calcola

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{\cos(x)-(1+x)\mathrm{sen}(x)} = 1$$

dunque $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}(x)}{(1+x)\cos(x)-1} = 1$.

Nel calcolo di $\lim_{x\to+\infty} \frac{7x^5+4\ln(x)+e^x}{80-e^{4x}+6x^7}$ è utile ricorrere alla gerarchia tra infiniti, la quale implica che $\lim_{x\to+\infty} \frac{7x^5+4\ln(x)+e^x}{80-e^{4x}+6x^7} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{-e^{4x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{-e^{3x}} = 0$.

Risulta che $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{5x+7}-\sqrt{7}}{x} = \frac{0}{0}$ ed è utile notare che $\frac{\sqrt{5x+7}-\sqrt{7}}{x} = \frac{(\sqrt{5x+7}-\sqrt{7})(\sqrt{5x+7}+\sqrt{7})}{x(\sqrt{5x+7}+\sqrt{7})} = \frac{5}{\sqrt{5x+7}+\sqrt{7}}$.
Dunque $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{5x+7}-\sqrt{7}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{5}{\sqrt{5x+7}+\sqrt{7}} = \frac{5}{2\sqrt{7}}$.

3. L'insieme di definizione di f è $A = \{x \in \mathbb{R} : e^x - 5 \geq 0,\ x > 0,\ \ln(x) - 8 \neq 0\}$. L'insieme delle soluzioni della disequazione $e^x - 5 \geq 0$ è l'intervallo $[\ln(5), +\infty)$. L'insieme delle soluzioni delle disequazioni $x > 0$ e $\ln(x) - 8 \neq 0$ è l'insieme $(0, e^8) \cup (e^8, +\infty)$. Dunque $A = [\ln(5), e^8) \cup (e^8, +\infty)$, e l'insieme dei punti di accumulazione di A è $[\ln(5), +\infty)$.

4. Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ (con $A \subseteq \mathbb{R}$) si dice strettamente crescente se per ogni x_1, x_2 in A tali che $x_1 < x_2$ vale $f(x_1) < f(x_2)$. Per la funzione in oggetto, si dimostra che se x_1, x_2 sono in $[3, +\infty)$ tali che $x_1 < x_2$, allora vale $f(x_1) < f(x_2)$, ovvero $x_1^3 - 14x_1 + 11 < x_2^3 - 14x_2 + 11$. Questa disuguaglianza equivale a $14x_2 - 14x_1 < x_2^3 - x_1^3$, e $x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)\left(x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2\right)$, dunque

$$14x_2 - 14x_1 < x_2^3 - x_1^3 \quad \Leftrightarrow \quad 14x_2 - 14x_1 < (x_2 - x_1)\left(x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2\right) \quad \Leftrightarrow \quad 14 < x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$$

(si noti che la seconda equivalenza si basa su $x_2 - x_1 > 0$). L'ultima disuguaglianza e' soddisfatta in quanto $x_1 \geq 3$ e $x_2 \geq 3$, quindi $x_1^2 \geq 9$, $x_2^2 \geq 9$, $x_1x_2 \geq 9$.

5. (i) La derivabilità nel punto 0 richiede che f sia continua in 0, il che equivale a $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$, e queste uguaglianze sono soddisfatte se e solo se $b = 1$. Adesso calcoliamo $f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ e $f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ e otteniamo

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2h^2 + 5ah + 1 - 1}{h} = \lim_{h\to 0^-} (2h + 5a) = 5a$$

Inoltre

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{e^{3h}-1}{h} = \frac{0}{0}$$

e usando la sostituzione $k = 3h$ (si noti che $k = 3h$ è una funzione monotona strettamente crescente di h, dunque iniettiva) si ottiene $f'_+(0) = \lim_{k\to 0^+} \frac{e^k-1}{k/3} = 3$. Pertanto $f'_-(0) = f'_+(0)$ se e solo se $5a = 3$. Dunque f è derivabile nel punto 0 se e solo se $b = 1$ e $a = \frac{3}{5}$.

(ii) Sulla base del punto (i) si deduce che se $b = 1$ e $a = 8$, allora f è continua in 0 ma non è derivabile in 0 perché $f'_-(0) = 40 \neq f'_+(0) = 3$.

(iii) Sulla base del punto (i) si deduce che se $b = 4$ e $a = 2$, allora f non è continua in 0 perché $\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 4$ ma $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$.

6. (i) L'insieme $A \cap B$ coincide con $(0, 2] \cup [8, 9) \cup (11, 14)$, quindi non è vero che $(3, 6) \subseteq A \cap B$, ad esempio perché $5 \notin A \cap B$.

(ii) L'insieme dei maggioranti di $A \cap B$ è l'intervallo $[14, +\infty)$.

(iii) L'insieme $A \cup B$ coincide con $(-5, 4] \cup [6, +\infty)$, quindi è vero che $[7, 13] \subseteq A \cup B$.

(iv) Non esiste alcun maggiorante per $A \cup B$.