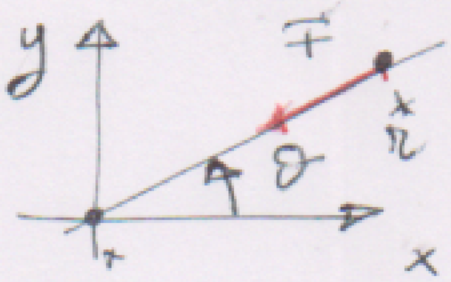
Esempi formulazione Hamilton

Moto piano in presenza di forza centrale



$F = -\nabla U \qquad U(r)$ assegnato

Coordinate piane (r, ϑ)

$$L = T - U = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 \right) - U(r)$$

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r} \Rightarrow \dot{r} = \frac{p_r}{m}$$

$$p_\vartheta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = m r^2 \dot{\vartheta} \Rightarrow \dot{\vartheta} = \frac{p_\vartheta}{m r^2}$$

$$H = p_r \dot{r} + p_\vartheta \dot{\vartheta} - L = p_r \frac{p_r}{m} + p_\vartheta \, p_\vartheta \frac{1}{m r^2} +$$

$$- \frac{1}{2} m \left(\frac{p_r^2}{m^2} + r^2 \frac{p_\vartheta^2}{m^2 r^4} \right) + U(r)$$

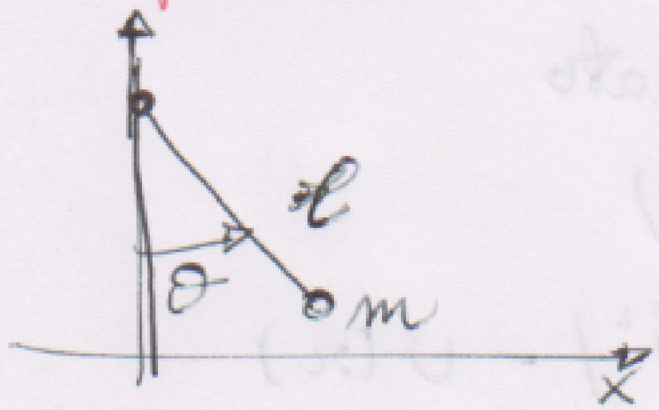
$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\vartheta^2}{2 m r^2} + U(r)$$

Eq. $H \Rightarrow \quad \dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \qquad \dot{\vartheta} = \frac{\partial H}{\partial p_\vartheta} = \frac{p_\vartheta}{m r^2}$

$$\mathring{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{m r^3} - \frac{\partial U}{\partial r}$$

$$\mathring{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0$$

Es: pendolo



$$L = \frac{1}{2} m l^2 \mathring{\theta}^2 + m g l \cos\theta$$

$$p_\theta = m l^2 \mathring{\theta} \Rightarrow \mathring{\theta} = \frac{p_\theta}{m l^2}$$

$$H = \mathring{\theta} p_\theta - L = \frac{p_\theta^2}{m l^2} - \frac{m}{2} l^2 \frac{p_\theta^2}{m^2 l^4} - m g l \cos\theta$$

$$= \frac{p_\theta^2}{2 m l^2} - m g l \cos\theta$$

Eq. H.

$$\begin{cases} \mathring{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{m l^2} \\ \mathring{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -m g l \sin\theta \end{cases}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{\mathring{p}}{m l^2} = -\frac{g}{l} \sin\theta$$

Legame Hamiltoniana - Energia totale di un sistema

Consideriamo il caso di 1 particella, la generalizz. è immediata

Alla base della def. di coord. generalizz. lagrangiane vi è una trasformazione di coordinate

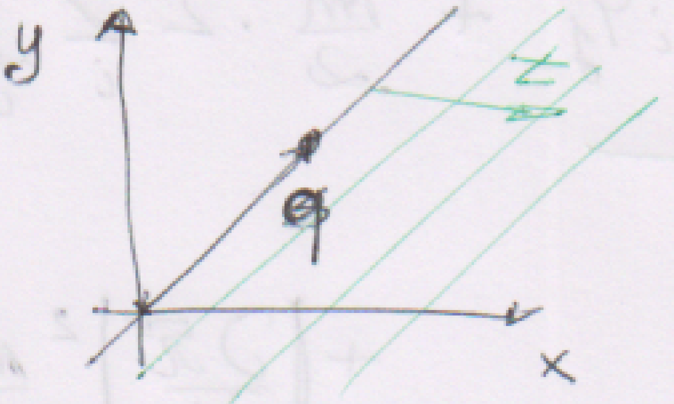
tipo $\vec{r} = \vec{r}(\vec{q}, t)$

$\downarrow$

pos. massa

↳ in generale può essere una dip. esplicita dal tempo

Esempio punto su una guida



$$\vec{r} = \begin{cases} x = q/\sqrt{2} \\ y = q/\sqrt{2} \\ z = 0 \end{cases}$$

Se la guida fosse ~~stata~~ mobile, con legge assegnata

$$\vec{r} = \begin{cases} x = q/\sqrt{2} + v t \\ y = q/\sqrt{2} \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow r(\bar{q}, t)$$

Entrambe sono trasformazioni appropriate per la dinamica di Lag. ma comportano alcune differenze riguardo alla cons. dell'E

e al signif. dell'Hamiltoniana.

Sommano $T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\dot{r})^2$

usando $r = r(q,t) \Rightarrow \dot{r} = \frac{\partial r}{\partial q_i} \dot{q}_i + \underbrace{\frac{\partial r}{\partial t}}_{\text{presente nel caso di vincolo tempo-dip}}$

$$T = \frac{1}{2} m \left(\sum_i \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right) \cdot \left(\sum_j \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right)$$

$$= \frac{m}{2} \sum_{i,j} \underbrace{\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j}_{a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j} + \frac{m}{2} \cdot 2 \sum_i \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \dot{q}_i$$

$$+ \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right|^2 \frac{m}{2}$$

$$T = \frac{1}{2} \sum a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_i b_i \dot{q}_i + c$$

in cui $a_{ij} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}$, $b_i = m \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}$

$c = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right|^2 \frac{m}{2}$

Quando solo nel caso di trasf. indip. dal tempo $\mathcal{H} = E$ inoltre se consideriamo solo forze derivanti da potenziale $U(q)$ allora sappiamo che E è conservata $\Rightarrow$

Sistemi conserv. + trasf. indip. dal tempo

$\Rightarrow$ $\mathcal{H} \equiv E$ ed $\mathcal{H}(q, p)$ è una costante di moto cioè $\mathcal{H}(q(t), p(t)) = E$ costante

Esistono casi in cui $\mathcal{H}$ è costante nel tempo ma non coincide con l'energia del sistema.

Questo avviene quando la Lag. non dip. dal tempo $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, infatti per la relaz. vista precedentemente

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow \mathcal{H} = \text{costante}$$

Rivediamo questo calcolo

$\mathcal{H} = \mathcal{H}(q(t), p(t), t) \Rightarrow$

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$$

$\mathcal{L} = T - U$ con $U(\bar{q})$ dato

passiamo alla Ham.

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \sum_{rs} \frac{1}{2} a_{rs} \dot{q}_r \dot{q}_s + b_i$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \frac{1}{2} \sum_{rs} a_{rs} \dot{q}_r \dot{q}_s = \sum_j a_{ij} \dot{q}_j$$

$$\mathcal{H} = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$$

$$= \sum_{i,j} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum b_i \dot{q}_i - \underbrace{\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)}_{T - U(q)}$$

$$\mathcal{H} = \sum_{ij} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum b_i \dot{q}_i - T + U(q)$$

Notiamo il caso interessante di trasf. indip. dal tempo $\vec{r} = \vec{r}(q) \rightarrow b_i = 0, c = 0$ nell'espressione di T

ottengo $T = \frac{1}{2} \sum_{ij} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$

$$\mathcal{H} = \underbrace{\sum_{i,j} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j}_{\substack{\parallel \\ 2T}} - T + U(q) = T + U =$$

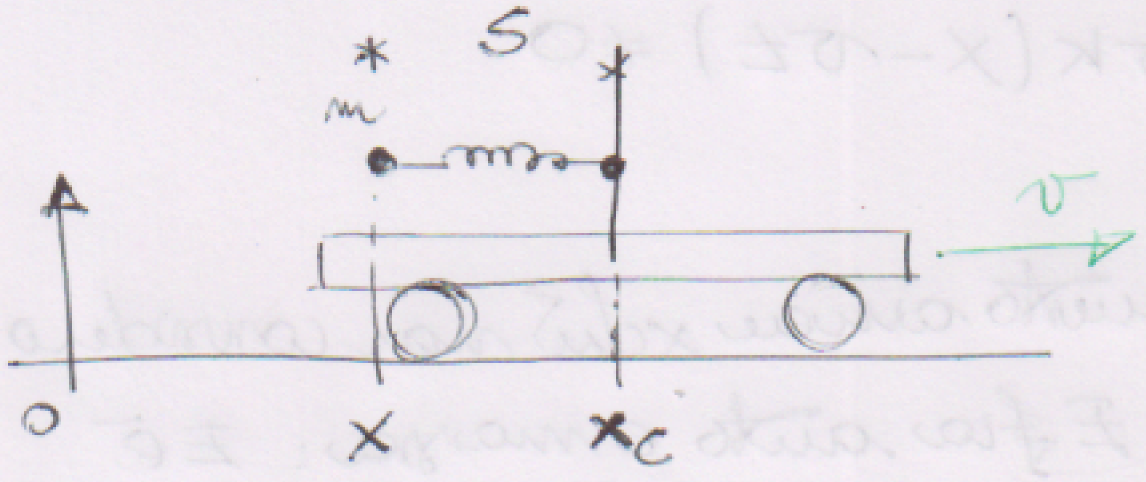
E mecc. tot.

Sostituendo le Eq. Ham. $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$ $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$

$$\frac{dH}{dt} = -\dot{p}\dot{q} + \dot{q}\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{dH}{dt} = 0$ ma H non è necess. l'energia tot del sist.

Esempio: oscillatore su veicolo



$x_c = vt$

Il veicolo si muove a v costante (sistema non inerz.)

$$L(x,\dot{x},t) = \underbrace{\frac{m}{2}\dot{x}^2}_{T} - \underbrace{\frac{k}{2}(x - \overset{x_c}{\overset{\shortparallel}{vt}})^2}_{-U}$$

$\Downarrow$

Rif. a fisso qui $x = q$ ovvero le coord. lagrang. coincidono con le coordinate cartesiane $\vec{x} = \vec{x}(q)$

Eq. moto $m\ddot{x} = -k(x - vt)$

Da ciò che abbiamo visto (forze conserv + trasf. indip. dal tempo) $\mathcal{H} \equiv E$

$$H = T + U = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}(x - vt)^2$$

$$P = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

MA l'energia <u>non</u> è conservata

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} = -vk(x - vt) \neq 0$$

Fisicamente questo avviene xchè non considero lo scambio di E fra auto e massa: E è conservata come somma $E_m + T_c$

↳ ammicamento auto

L'oscillazione della molla tende ad accelerare e frenare l'auto, che quindi per mantenere v costante dovrà erogare o dissipare E

Scriviamo adesso $\mathcal{L}$ nel sistema di rif. mobile, ovvero utilizzando $q = s$ con la relazione

$$s = x - x_c = x - vt \Rightarrow \mathring{s} = \mathring{x} - v$$

$$\mathcal{L}(s, \mathring{s}, t) = \mathcal{L}(x(s), \mathring{x}(\mathring{s}), t) =$$

$$= \frac{m}{2}(\mathring{s}+v)^2 - \frac{k}{2}(s)^2 =$$

$$= \frac{m}{2}\mathring{s}^2 + \frac{m}{2}v^2 + m\mathring{s}v - \frac{k}{2}s^2$$

NOTA: adesso $x = x(s,t)$ trasf. tempo dip.

ma $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$

$$\mathcal{H} \Rightarrow p_s = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathring{s}} = m\mathring{s} + mv = m(\mathring{s}+v)$$

$$\mathring{s} = \frac{p_s}{m} - v$$

$$\mathcal{H} = p_s \mathring{s} - \mathcal{L}(s, \mathring{s}, t)\Big|_{\mathring{s} = \frac{p_s}{m} - v} =$$

$$= p_s\left(\frac{p_s}{m} - v\right) - \frac{m}{2}\left(\frac{p_s}{m} - v\right)^2 - \frac{m}{2}v^2 +$$

$$- mv\left(\frac{p_s}{m} - v\right) + \frac{k}{2}s^2$$

$$H = \frac{p_s^2}{2m} - v p_s + \frac{k s^2}{2} = \frac{1}{2m}(p_s - mv)^2 + \frac{k s^2}{2} - \frac{m v^2}{2}$$

quindi $H(s(t), p_s(t))$ è conservata ma non rappresenta l'Energia tot. del sistema

Vediamo le eq. del moto

CASO (x, p) $\quad H(x,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}(x - vt)^2$

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -k(x - vt) = -kx + vkt \end{cases}$$

$$\ddot{x} = \frac{\dot{p}}{m} = -\frac{k}{m}x + \frac{vk}{m}t$$

Soluz. (oscill. con termine forzante)

$$x = A \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \varphi\right) + v \quad t$$

CI

prendiamo $A = \sqrt{\frac{m}{k}}\, v \quad \varphi = 0$

$$x = \sqrt{\frac{m}{k}}\, v \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t \quad\right) + v \quad t$$

$$\dot{x} = \quad v \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) + v$$

$$p = \dot{x}\, m$$

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}(x - vt)^2 =$$

$$\frac{1}{2m}\left(vm\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + vm\right)^2 + \frac{k}{2}\frac{m}{k}v^2\sin^2\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

$$= \frac{1}{2m}\left(v^2m^2\cos^2\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + v^2m^2 + 2v^2m^2\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\right)$$

$$+ \frac{mv^2}{2}\sin^2\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) = v^2m^2 + 2vm^2\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

CASO (S, P_S) $\mathcal{H}(S, P) = \frac{1}{2m}(P - vm)^2 + \frac{kS^2}{2} - \frac{mv^2}{2}$

$$\begin{cases} \dot{S} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} - v \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial S} = -kS \end{cases}$$

$$\ddot{S} = \frac{\dot{p}}{m} = -\frac{k}{m}S \Rightarrow \text{oscill armonico}$$

$$S = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right) \qquad A = \sqrt{\frac{m}{k}}v$$

$$\varphi = 0$$

$$S = v\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

$$\dot{s} = v\sqrt{\frac{m}{k}}\,\sqrt{\frac{k}{m}}\,\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) = v\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)$$

$$p = (\dot{s} + v)m = mv\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + mv$$

$$H = \frac{1}{2m}(p - mv)^2 + \frac{ks^2}{2} - \frac{mv^2}{2}$$

$$= \frac{1}{2m}\,m^2v^2\cos^2\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + \frac{\cancel{k}}{2}\,v^2\frac{m}{\cancel{k}}\sin^2\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)$$

$$- \frac{mv^2}{2} = 0$$