Teoria Hamilton-Jacobi: trasformazioni canoniche

Come si può evincere dai vari esempi già considerati la formulaz. di Ham. fornisce equazioni dinamiche equivalenti a quelle ottenute dalla formulaz. Lagrange, mantenendo sostanzialmente la stessa difficoltà legata all'integrazione temporale. Esistono casi significativi in cui però l'integraz. della dinamica di Hamilton è banale. Prendiamo il caso in cui H non dipende da nessuna q_i. Quindi

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \qquad \forall i = 1 \dots n$$

$$p_i = \alpha_i \qquad \alpha_i \text{ costante}$$

Inoltre $H = H(p_1(t), p_2(t) \dots p_n(t)) =$

$$H(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial H}{\partial \alpha_i} \doteq \omega_i = \text{costante in quanto } H \text{ è costante}$$

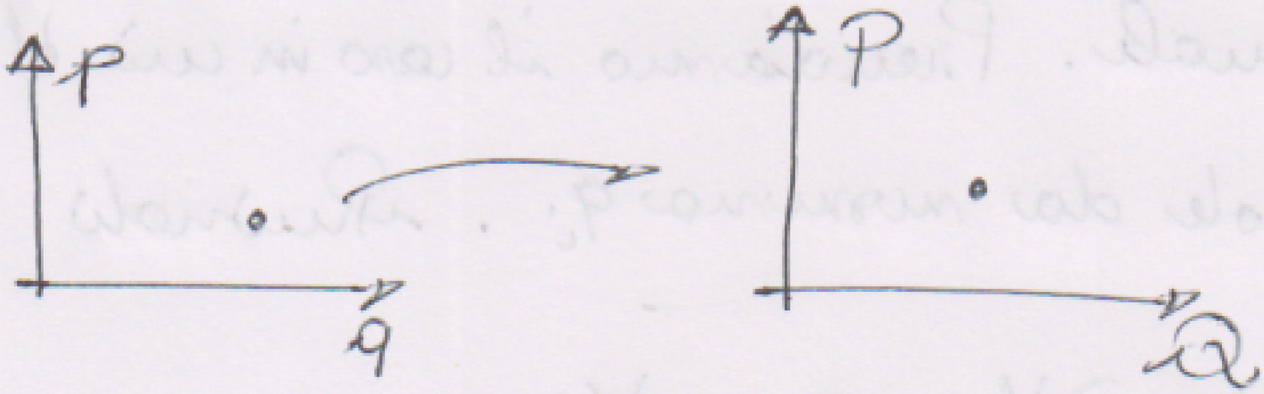
Soluz. di moto $\quad q_i(t) = \omega_i t + \underbrace{\beta_i}_{\text{CI}}$

Esistono sistemi "interessanti" di questo tipo!

IDEA: Partendo da un problema generico individuare un cambio di coord. (q,p) t.c. nel nuovo set di coordinate H ha la forma appena vista, ovvero CICLICA per tutte le nuove coordinate q_i:

TRASFORMAZIONI CANONICHE

Trasformazioni del piano delle fasi in se stesso



Consideriamo trasformazioni generiche tipo
$$Q_i = Q_i(\bar{q}, \bar{p}, t)$$
$$P_i = P_i(\bar{q}, \bar{p}, t)$$

Invertibili

Questo cambio di coordinate corrisponde alla scrittura di una nuova Hamiltoniana del sistema (la fisica non cambia) espressa nelle nuove variabili

Sia $K(Q, P, t)$ l'Hamiltoniana del sistema nelle nuove variabili

ATTENZIONE: In generale K non è banalmente H espresso nelle nuove variabili

$$K(Q, P, t) \neq \mathcal{H}(q(Q,P,t), p(Q,P,t), t)$$

Inoltre la forma delle eq. di Ham non è preservata per una generica trasformazione ovvero $\mathring{Q}_i \neq \frac{\partial K}{\partial P_i}$ e $\mathring{P}_i \neq -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_i}$

TRASFORM. CANONICHE: Cambio di variabili $Q_i(\bar{q}, \bar{p}, t)$, $P_i(\bar{q}, \bar{p}, t)$ t.c. esiste $K(Q, P, t)$ per cui le eq. di moto hanno la forma delle eq. di Ham.

$$\mathring{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} \qquad \mathring{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}$$

Le trasf canoniche preservano la forma delle eq. di Hamilton.

Per introdurre le trasformazioni canoniche è utile rifarsi alla Lagrangiana ed al principio di Hamilton

Consideriamo un generico cambio di coord

$(q, \dot{q}) \to (Q, \dot{Q})$

Cui corrispondono le Lagrangiane

$L(q, \dot{q}, t) \qquad \mathcal{L}'(Q, \dot{Q})$ fisicamente equivalenti

Considero le azioni

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt \qquad S' = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}'(Q, \dot{Q}, t)\, dt$$

Principio di Hamilton

$$\delta S = 0 \quad e \quad \delta S' = 0$$

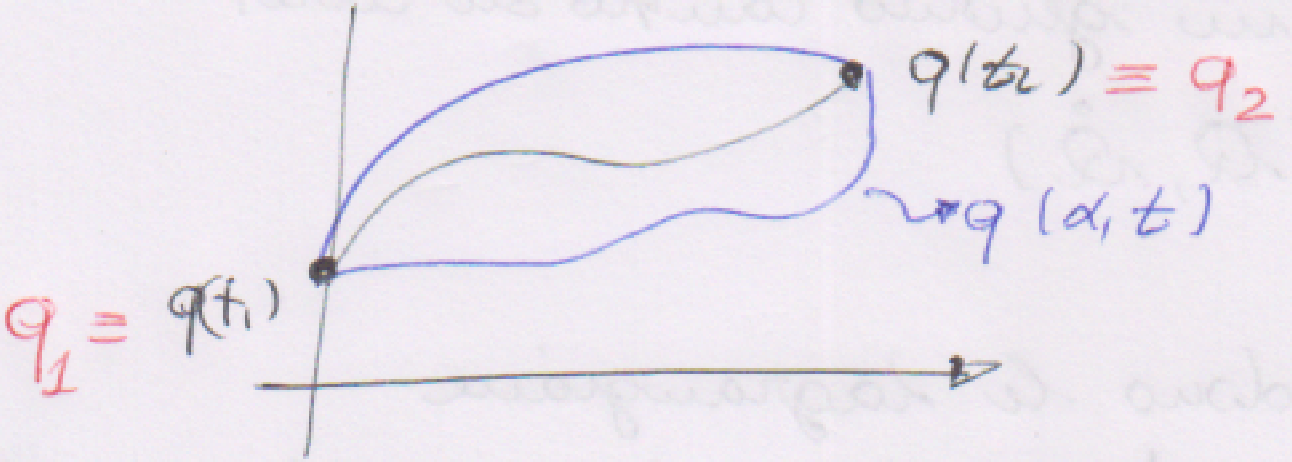
$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt = 0 \qquad \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}'(Q, \dot{Q}, t)\, dt = 0$$

Sottraendo

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(L(q, \dot{q}, t) - \mathcal{L}'(Q, \dot{Q}, t) \right) dt = 0$$

NOTA: Ricordiamo che per costruzione si ha

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} f(q(t,\alpha),t)\,dt = \frac{d}{d\alpha}\int_{t_1}^{t_2} f(q(t,\alpha),t)\,dt$$



Se scegliamo $f(q,t) = \frac{d}{dt}\,g(q,t)$

$$\Rightarrow \text{ otteniamo } \frac{d}{d\alpha}\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\,g(q(t,\alpha),t))\,dt =$$

$$= \frac{d}{d\alpha}\Big[\, g(\underbrace{q(t_2,\alpha)}_{q_1},t_2) - g(\underbrace{q(t_1,\alpha)}_{q_2},t_1)\Big] = 0$$

Abbiamo ottenuto $\displaystyle \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{dF}{dt}\,dt = 0$

Rileggendo la formula precedente

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(L(q,\dot{q},t) - \mathcal{L}'(Q,\dot{Q},t) \right) dt = 0$$

possiamo aggiungere $\delta \int \frac{dF}{dt}\, dt = 0$

Quindi, immaginiamo $\mathcal{L}(q,\dot{q},t)$ sia la Lag. di un sistema e $\mathcal{L}'(Q,\dot{Q},t)$ con $Q = Q(q,\dot{q},t)$

t.c. $L(\dot{q},q,t) - \mathcal{L}'(Q,\dot{Q},t) = \frac{dF}{dt}$

Prendendo le variazioni $\delta \int L - L' = \delta \int \frac{dF}{dt} = 0$

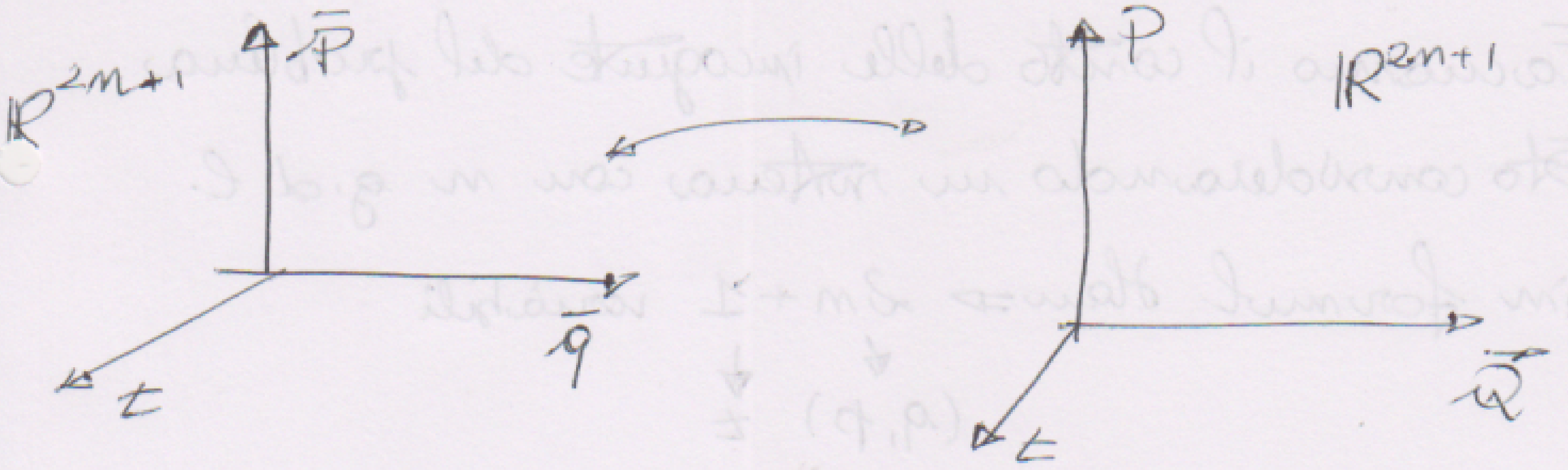
$$\Rightarrow \underbrace{\delta \int L(q,\dot{q},t)\, dt}_{\substack{\| \\ 0}} = \delta \int \mathcal{L}'(Q,\dot{Q},t)\, dt$$

0 perché $\mathcal{L}$ è lag. del sist. $\Rightarrow \delta \int \mathcal{L}'(Q,\dot{Q},t) = 0$

$\Rightarrow$ anche $\mathcal{L}'$ è una Lag. del sistema.

Troviamo che il legame fra 2 rapp. L. di un sistema è il seguente $\mathcal{L}(q,\dot{q},t) - \mathcal{L}'(Q,\dot{Q},t) = \frac{dF}{dt}$ *

Sfruttiamo F come grado di lib. per trovare nuove



in cui $\vec{P} = \vec{P}(\bar{p},\bar{q},t)$ (1) e $\vec{Q} = \vec{Q}(p,q,t)$ (2).

Le trasformazioni sono invertibili. (questo è ovvio se pensiamo al modo simmetrico con cui tratto $(\bar{q},\bar{p},t)$ e $(\bar{Q},\bar{P},t)$, scegliere $(\bar{q},\bar{p})$ come variabili "originarie" è del tutto arbitrario.

Possiamo quindi scrivere $\vec{p} = \bar{p}(\bar{Q},\bar{P},t)$ (3) e

$$\bar{q} = \bar{q}(\bar{Q},\bar{P},t) \quad (4)$$

Facciamo un passaggio ulteriore. Considero (1) + (3)

$$P_i = P_i(\bar{p},\bar{q},t) \quad \text{e} \quad p_i = p_i(\bar{Q},\bar{P},t)$$

$$P_i = P_i(\bar{p}(Q,\bar{P},t),\bar{q},t) = \tilde{P}_i(\bar{Q},\bar{q},t)$$

posso esprimere il mom. con. $\bar{P}$ come funzione di (Q,q,t)

Facciamo un esempio per chiarire questo punto (caso oscill. armonico)

$$\boxed{P = p^2 + q^2} \qquad \boxed{Q = \operatorname{arctg}(p/q)}$$

Inverto $\quad p = q \operatorname{tg} Q$

$$P = q^2 \operatorname{tg}^2 Q + q^2 = q^2 \underbrace{(1 + \operatorname{tg}^2 Q)}$$

$$1 + \frac{\sin^2 Q}{\cos^2 Q} = \frac{\cos^2 Q + \sin^2 Q}{\cos^2 Q} = \frac{1}{\cos^2 Q}$$

$$\boxed{\begin{aligned} q &= \sqrt{P} \cos Q \\ p &= \sqrt{P} \sin Q \end{aligned}} \qquad p = q \operatorname{tg} Q = \sqrt{P} \sin Q$$

Adesso esprimo $\quad P = P(q, Q)$

$$P = p^2 + q^2 = P \sin^2 Q + q^2$$

$$\Rightarrow \quad P(1 - \sin^2 Q) = q^2 \Rightarrow \boxed{P = \frac{q^2}{\cos^2 Q}}$$

$$p = p(q, Q)$$

$$p = \sqrt{P} \sin Q = \sqrt{p^2 + q^2} \sin Q$$

$$p^2 = (p^2 + q^2) \sin^2 Q \Rightarrow \boxed{p = q \operatorname{tg} Q}$$

Riprendiamo la trattazione teorica generale. Avendo scelto le variabili (q, Q, t) come $2n+1$ variabili indipendenti riconsidero la relazione

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H - \sum P_i \dot{Q}_i + H' = \frac{dF}{dt}$$

Ricorda: F è una f. arbitraria ⇒ coerentemente con le mie scelte posso considerare

$F = F(q(t), Q(t), t)$; poiché q, Q sono variabili dinamiche in ultima analisi F dip. dal tempo. Quindi

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Inserendolo sopra ottengo

$$\sum_i \left(p_i - \frac{\partial F}{\partial q_i}\right) \dot{q}_i + \sum_i \left(-P_i - \frac{\partial F}{\partial Q_i}\right) \dot{Q}_i +$$

$$+ H' - H - \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

Imponiamo che questa relazione sia valida qualunque sia l'evoluzione del sistema, non per un moto particolare, quindi valida qualunque sia $\dot{q}_i$ e $\dot{Q}_i$ (evoluz dei g.d.l. del sistema)

Eguagliando quindi a zero i termini di ogni coeff. abbiamo il seguente sistema di eq.

$$\begin{cases} p_i = \dfrac{\partial F}{\partial q_i}(\bar{q}, \bar{Q}, t) & (1) \\ P_i = -\dfrac{\partial F}{\partial Q_i}(\bar{q}, \bar{Q}, t) & (2) \\ \mathcal{H}' = \mathcal{H} + \dfrac{\partial F}{\partial t} & (3) \end{cases}$$

Rileggiamo il risultato in termini di cambio di variabili: $F(\bar{q}, \bar{Q}, t)$ è una funzione ARBITRARIA. Immaginiamo di avere un sistema descritto dalle var. lag $\bar{q} \Rightarrow$ conosciamo $\mathcal{L}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$ e otteniamo $\mathcal{H}(\bar{q}, \bar{p}, t) \rightarrow$ NOTA

Dalla (1) posso ricavare $\bar{Q}$ come funzione di $(\bar{q}, \bar{p}, t)$; inserendolo in (2) ottengo $\bar{P}$ come funzione di (q, p, t)

Ho trovato una trasf. di variabili $\bar{Q} = \bar{Q}(\bar{q}, \bar{p}, t)$ e $\bar{P} = \bar{P}(\bar{q}, \bar{p}, t)$ <u>generata</u> dalla conoscenza di F. F prende il nome di funzione generatrice.

IMPORTANTE: Affinché il cambio di variabili sia possibile, devono essere preservati i gdl e del sistema, il numero di variab. indip. rimane costante e le relaz. $Q(q,p,t)$, $P(q,p,t)$ devono essere INVERTIBILI: posso esprimere indifferent. il mio sistema nelle variabili $(\bar{q}, \bar{p}, t)$ oppure $(\bar{Q}, \bar{P}, t)$. Questo è garantito dalla richiesta

$$\det\left|\frac{\partial F}{\partial Q_i \partial q_j}\right| \neq 0$$: condizione di esistenza di trasf. canoniche

---

a parte questa condiz. $F(\bar{q}, \bar{Q}, t)$ è arbitraria

Una volta trovato il cambio di variabili invertibili

$$(Q(q,p,t), P(q,p,t)) \Longleftrightarrow (q(Q,P,t), p(Q,P,t))$$

la relazione (3) fornisce l'Ham. relativa alle nuove variabili

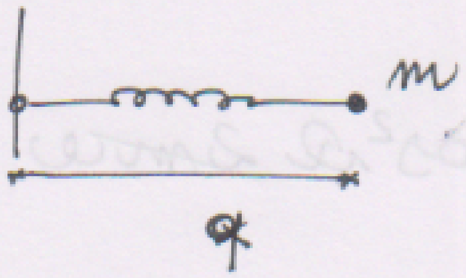
$$H'(Q,P,t) = H(q(Q,P,t), p(Q,P,t), t) + \frac{\partial F}{\partial t}(Q,q,t)\Big|_{q(Q,P,t)}$$

Ricordiamo che per costruzione, H' è l'Ham. del sistema quindi nelle nuove variabili

$$\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P}(Q,P,t)$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial Q}(Q,P,t)$$

Esempio: Oscillatore armonico



$$T = \frac{m\dot{q}^2}{2} \qquad U = \frac{1}{2} k q^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 \qquad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \dot{q} m$$

$$H = T + U = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2$$

Considero la funzione generatrice $F(q,Q) = \frac{m}{2} \omega q^2 \operatorname{cotg} Q$

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} = m \omega q \operatorname{cotg} Q$$

$$P = -\frac{\partial F}{\partial Q} = + \frac{m}{2} \omega q^2 \frac{1}{\sin^2 Q}$$

Risolviamo per le variabili (q, p)

$$q^2 = P \sin^2 Q \, \frac{2}{m\omega} \Rightarrow q = \sqrt{P} \sin Q \sqrt{\frac{2}{m\omega}}$$

$$p = m\omega \sqrt{\frac{2}{m\omega}} \sqrt{P} \sin Q \frac{\cos Q}{\sin Q} \Rightarrow p = \sqrt{P} \cos Q \sqrt{2m\omega}$$

L'Ham. $\mathcal{H}'$ nelle nuove variabili $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H}(q,p)\Big|_{\substack{q(P,Q)\\ p(P,Q)}} = \frac{1}{\cancel{2m}} P\cos^2 Q\, \cancel{2m}\omega +$$

$$+ \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{m}\omega^2 P\sin^2 Q \frac{\cancel{2}}{\cancel{m\omega}} = P\omega$$

$\mathcal{H}' = P\omega \Rightarrow Q$ è variabile ciclica

$$\dot{P} = \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial Q} = 0 \qquad P = P_0 \qquad \overset{\mathcal{H}}{\overset{\parallel}{E}} = P\omega \Rightarrow P = \frac{E}{\omega}$$

$$\dot{Q} = \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial P} = \omega \Rightarrow Q = \omega t + Q_0$$

Tornando alle variabili originarie

$$q = \sqrt{\frac{2m}{m\omega} P} \sin Q = \sqrt{\frac{2\,E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + Q_0)$$