Lezione n. 12: Esercizi sulle equazioni differenziali del primo ordine (equazioni lineari e equazioni a variabili separabili)

Luca Bisconti

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Disclaimer

Firenze, 14/03/2020

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Nel seguito la qualità delle scansioni non sarà sempre omogenea, in dipendenza dell'apparecchio usato per la loro realizzazione

Disclaimer

Il presente contenuto è [...]e alle esigenze di didattica a distanza resasi necessarie p[...]ffusione del virus COVID-19.

Firenze, 14/03/2020

Equazioni lineari del primo ordine

Un'equazione differenziale del primo ordine si chiama lineare quando è nella forma:

$$(I) \quad \boxed{y' + p(t)\, y = q(t)}$$

dove p e q sono funzioni continue su un dato intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$.

Equazioni lineari del primo ordine

Un'equazione differenziale del primo ordine si chiama lineare quando è nella forma:

(I) $\quad y' + p(t)\, y = q(t)$ dove p e q sono funzioni continue su un dato intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$.

Fattore Integrante:

Al fine di risolvere l'equazione (I) si può utilizzare una funzione speciale $\mu(t)$, detta fattore integrante per (I), con la proprietà che:

da determinarsi

$$\boxed{\mu'(t) = p(t)\, \mu(t)} \quad (\text{II})$$

Equazioni lineari del primo ordine

Un'equazione differenziale del primo ordine si chiama lineare quando è nella forma:

$$\text{(I)} \qquad y' + p(t)\, y = q(t)$$

dove p e q sono funzioni continue su un dato intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$.

Fattore Integrante:

Al fine di risolvere l'equazione (I) si può utilizzare una funzione speciale $\mu(t)$ (da determinarsi), detta fattore integrante per (I), con la proprietà che:

$$\mu'(t) = p(t)\,\mu(t) \qquad \text{(II)}$$

Moltiplicando ambo i membri di (I) per $\mu(t)$ otteniamo:

$$\text{(III)} \qquad \boxed{\mu(t)\, y'(t) + \underbrace{\mu(t)\, p(t)}_{=\mu'(t)}\, y(t) = \mu(t)\, q(t)} \iff \boxed{\overbrace{\mu(t)\, y'(t) + \mu'(t)\, y(t)}^{\frac{d}{dt}\left(y(t)\mu(t)\right) =} = \mu(t)\, q(t)}$$

Equazioni lineari del primo ordine

Un'equazione differenziale del primo ordine si chiama lineare quando è nella forma:

$$(\mathrm{I}) \qquad y' + p(t)\,y = q(t)$$

dove p e q sono funzioni continue su un dato intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$.

Fattore Integrante:

Al fine di risolvere l'equazione (I) si può utilizzare una funzione speciale $\underset{\text{da determinarsi}}{\mu(t)}$, detta fattore integrante per (I), con le proprietà che:

$$\mu'(t) = p(t)\,\mu(t) \qquad (\mathrm{II})$$

Moltiplicando ambo i membri di (I) per $\mu(t)$ otteniamo:

$$(\mathrm{III}) \qquad \mu(t)\,y'(t) + \underbrace{\mu(t)\,p(t)}_{=\mu'(t)}\,y(t) = \mu(t)\,q(t) \iff \overbrace{\mu(t)\,y'(t) + \mu'(t)\,y(t)}^{\frac{d}{dt}\left(y(t)\mu(t)\right) =} = \mu(t)\,q(t)$$

Ancora, la relazione (III) diventa $\boxed{\dfrac{d}{dt}\left(y(t)\,\mu(t)\right) = \mu(t)\,q(t)}$ che integrata in "dt" diventa la seguente:

generica cost. di integrazione

$$\int \frac{d}{dt}\left(y(t)\mu(t)\right) dt = \int \mu(t) q(t)\, dt + c \qquad \text{ovvero} \qquad \boxed{y(t)\mu(t) = \int \mu(t) q(t)\, dt + c} \qquad (IV)$$

generica cost. di integrazione

$$\int \frac{d}{dt}\left(y(t)\mu(t)\right)dt = \int \mu(t)g(t)\,dt + c \quad \text{ovvero} \quad y(t)\mu(t) = \int \mu(t)g(t)\,dt + c \qquad (IV)$$

Supponendo di poter dividere ambo i membri di (IV) per $\mu(t)$ ($\mu(t) \neq 0$) allora si ottiene:

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{\mu(t)}\int \mu(t)g(t)\,dt + c\,\frac{1}{\mu(t)}} \qquad (V).$$

$$\int \frac{d}{dt}\left(y(t)\mu(t)\right) dt = \int \mu(t) q(t)\, dt + \underbrace{c}_{\text{generica cost. d'integrazione}} \quad \text{ovvero} \quad y(t)\mu(t) = \int \mu(t) q(t)\, dt + c \qquad (IV)$$

Supponendo di poter dividere ambo i membri di (IV) per $\mu(t)$ $(\mu(t) \neq 0)$ allora si ottiene:

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)} \int \mu(t) q(t)\, dt + c\frac{1}{\mu(t)} \qquad (V).$$

- Per costruire $\mu(t)$ consideriamo una primitiva $A(t)$ di $p(t)$ in (I) e andiamo a porre come fattore integrante $\mu(t) = e^{A(t)}$. In particolare, la (V) diventa:

$$\boxed{y(t) = e^{-A(t)} \int e^{A(t)} q(t)\, dt + c\, e^{-A(t)}}$$

ovvero l'usuale formula per l'integrale generale di (I).

generica cost. di integrazione

$$\int \frac{d}{dt}\left(y(t)\mu(t)\right) dt = \int \mu(t) q(t)\, dt + c \quad \text{ovvero} \quad y(t)\mu(t) = \int \mu(t) q(t)\, dt + c \qquad (IV)$$

Supponendo di poter dividere ambo i membri di (IV) per $\mu(t)$ ($\mu(t) \neq 0$) allora si ottiene:

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)} \int \mu(t) q(t)\, dt + c \frac{1}{\mu(t)} \qquad (V).$$

- Per costruire $\mu(t)$ consideriamo una primitiva $A(t)$ di $p(t)$ in (I) e andiamo a porre come fattore integrante $\mu(t) = e^{A(t)}$. In particolare, la (V) diventa:

$$y(t) = e^{-A(t)} \int e^{A(t)} q(t)\, dt + c\, e^{-A(t)}$$ ovvero l'usuale formula per l'integrale generale di (I).

- Il fatto che $\mu(t) = e^{A(t)}$ verifichi la proprietà $\mu'(t) = p(t)\mu(t)$ segue dalla derivazione diretta di $\mu(t)$, ovvero $\frac{d}{dt}\mu(t) = \frac{d}{dt} e^{A(t)} = e^{A(t)} \frac{d}{dt} A(t) = \underbrace{e^{A(t)}}_{=\mu(t)} p(t) \iff \mu'(t) = p(t)\mu(t)$ la proprietà desiderata.

Esempio

Consideriamo $\boxed{y' = -\frac{1}{x} y + x}$ con $x \neq 0$. Tale equazione può essere riscritta come

$$(1.) \quad \boxed{y' + \frac{1}{x} y = x}$$

con $p(x) = \frac{1}{x}$ e $q(x) = x$ per $x \neq 0$

Esempio

Consideriamo $y' = -\frac{1}{x}y + x$ con $x \neq 0$. Tale equazione può essere riscritta come

$$(1.) \quad y' + \frac{1}{x}y = x$$

con $p(x) = \frac{1}{x}$ e $q(x) = x$ per $x \neq 0$

- Al fine di determinare $\mu(x)$ calcoliamo $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$ e poniamo $\boxed{A(x) = \ln|x|}$

da cui segue che $\boxed{\mu(x) = e^{A(x)} = e^{\ln|x|} = |x|}$ e moltiplichiamo ambo i membri di (1.) per $\mu(x)$:

Esempio

Consideriamo $y' = -\frac{1}{x}y + x$ con $x \neq 0$. Tale equazione può essere riscritta come

$$(1.)\quad y' + \frac{1}{x}y = x$$

con $p(x) = \frac{1}{x}$ e $q(x) = x$ per $x \neq 0$

- Al fine di determinare $\mu(x)$ calcoliamo $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$ e poniamo $A(x) = \ln|x|$

da cui segue che $\mu(x) = e^{A(x)} = e^{\ln|x|} = |x|$ e moltiplicando ambo i membri di (1.) per $\mu(x)$:

$$\boxed{\underbrace{|x|\left(y' + \frac{1}{|x|}y\right)}_{\text{dalle (III)} \;=\; \frac{d}{dx}(y(x)|x|)} = |x|\,x} \underset{(\mathrm{III})}{\iff} \boxed{\frac{d}{dx}(y\,|x|) = |x|\,x} \quad (2.)$$

- Integrando la (2.) troviamo: $\boxed{y\,|x| = \int |x|\,x\,dx + c} \overset{x \neq 0}{\iff} \boxed{y(x) = \frac{1}{|x|}\int |x|\,x\,dx + \frac{c}{|x|} \quad (3.)}$

Esempio

Consideriamo $y' = -\frac{1}{x} y + x$ con $x \neq 0$. Tale equazione può essere riscritta come

$$(1.) \quad y' + \frac{1}{x} y = x$$

con $p(x) = \frac{1}{x}$ e $q(x) = x$ per $x \neq 0$

- Al fine di determinare $\mu(x)$ calcoliamo $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + c$ e poniamo $A(x) = \ln|x|$

da cui segue che $\mu(x) = e^{A(x)} = e^{\ln|x|} = |x|$ e moltiplicando ambo i membri di (1.) per $\mu(x)$:

$$\underbrace{|x|\left(y' + \frac{1}{|x|} y\right)}_{\text{dalla (III)} \, = \frac{d}{dx}(y(x)|x|)} = |x|\,x \quad \overset{}{\underset{(III)}{\iff}} \quad \frac{d}{dx}(y\,|x|) = |x|\,x \qquad (2.)$$

- Integrando la (2.) troviamo: $y\,|x| = \int |x|\,x\, dx + c \overset{x \neq 0}{\iff} y(x) = \frac{1}{|x|} \int |x|\,x\, dx + \frac{c}{|x|}$ (3.)

Per risolvere l'integrale in (3.) conviene separare i due casi $x > 0$ e $x < 0$; in entrambi i casi si ha tuttavia $\boxed{y(x) = \frac{1}{|x|}\left(\frac{1}{3} x^3 \frac{x}{|x|}\right) + \frac{c}{|x|}}$

Esempio

Consideriamo $y' = -\frac{1}{x}y + x$ con $x \neq 0$. Tale equazione può essere riscritta come

$$(1.) \quad y' + \frac{1}{x}y = x$$

con $p(x) = \frac{1}{x}$ e $q(x) = x$ per $x \neq 0$

- Al fine di determinare $\mu(x)$ calcoliamo $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$ e poniamo $A(x) = \ln|x|$

da cui segue che $\mu(x) = e^{A(x)} = e^{\ln|x|} = |x|$ e moltiplichiamo ambo i membri di (1.) per $\mu(x)$:

$$\underbrace{|x|\left(y' + \frac{1}{|x|}y\right)}_{\text{dalla (III)} \;=\; \frac{d}{dx}(y(x)|x|)} = |x|x \overset{}{\underset{\text{(III)}}{\iff}} \frac{d}{dx}(y\,|x|) = |x|\,x \qquad (2.)$$

- Integrando la (2.) troviamo: $y\,|x| = \int |x|\,x\,dx + c \overset{x\neq 0}{\iff} y(x) = \frac{1}{|x|}\int |x|\,x\,dx + \frac{c}{|x|} \quad (3.)$

Per risolvere l'integrale in (3.) conviene separare i due casi $x>0$ e $x<0$; in entrambi i casi si ha tuttavia $y(x) = \frac{1}{|x|}\left(\frac{1}{3}x^3\frac{x}{|x|}\right) + \frac{c}{|x|} = \frac{1}{3}x^2 + \frac{\tilde{c}}{x}$ $=y(x)$ a meno di inglobare il segno di x in $\tilde{c}$.

Esempio

Si consideri $\boxed{y' = \frac{1}{x} y + x}$, $x \neq 0$. Allora l'equazione assegnata può essere riscritta come:

$$(1.) \quad \boxed{y' - \frac{1}{x} y = x \quad \text{per } x \neq 0}$$

con $p(x) = -\frac{1}{x}$ e $q(x) = x$.

Esempio

Si consideri $y' = \frac{1}{x} y + x$, $x \neq 0$. Allora l'equazione assegnata può essere riscritta come:

$$(1.) \quad y' - \frac{1}{x} y = x \quad \text{per } x \neq 0$$

con $p(x) = -\frac{1}{x}$ e $g(x) = x$.

- Per determinare $\mu(x)$, inizialmente consideriamo $\int -\frac{1}{x}\,dx = -\ln|x| + c$ e poniamo $A(x) = -\ln|x|$

da cui segue che $\mu(x) = e^{-\ln|x|} = e^{\ln|x|^{-1}} = \frac{1}{|x|} \iff \mu(x) = \frac{1}{|x|}$ $(x \neq 0)$

Esempio

Si consideri $y' = \frac{1}{x} y + x$, $x \neq 0$. Allora l'equazione assegnata può essere riscritta come:

$$(1.) \quad y' - \frac{1}{x} y = x \quad \text{per } x \neq 0$$

con $p(x) = -\frac{1}{x}$ e $q(x) = x$.

- Per determinare $\mu(x)$, inizialmente consideriamo $\int -\frac{1}{x}\, dx = -\ln|x| + c$ e poniamo $A(x) = -\ln|x|$

da cui segue che $\mu(x) = e^{-\ln|x|} = e^{\ln|x|^{-1}} = \frac{1}{|x|} \iff \mu(x) = \frac{1}{|x|}$ $(x \neq 0)$

Moltiplicando ambo i membri di (1.) per $\mu(x) = \frac{1}{|x|}$ otteniamo che:

$$\boxed{\underbrace{\frac{1}{|x|}\left(y' - \frac{1}{x} y\right)}_{= \frac{d}{dx}\left(y \frac{1}{|x|}\right)} = \frac{x}{|x|}} \quad \underset{\text{relazione (III)}}{\iff} \quad \boxed{\frac{d}{dx}\left(y \frac{1}{|x|}\right) = \frac{x}{|x|}} \quad (2.)$$

Esempio

Si consideri $y' = \frac{1}{x}y + x$, $x \neq 0$. Allora l'equazione assegnata può essere riscritta come:

$$(1.) \quad y' - \frac{1}{x}y = x \quad \text{per } x \neq 0$$

con $p(x) = -\frac{1}{x}$ e $q(x) = x$.

- Per determinare $\mu(x)$, inizialmente consideriamo $\int -\frac{1}{x}\,dx = -\ln|x| + c$ e poniamo $A(x) = -\ln|x|$

da cui segue che $\mu(x) = e^{-\ln|x|} = e^{\ln|x|^{-1}} = \frac{1}{|x|} \iff \mu(x) = \frac{1}{|x|}$ $(x \neq 0)$

Moltiplicando ambo i membri di (1.) per $\mu(x) = \frac{1}{|x|}$ otteniamo che:

$$\underbrace{\frac{1}{|x|}\left(y' - \frac{1}{x}y\right)}_{=\frac{d}{dx}\left(y\frac{1}{|x|}\right)} = \frac{x}{|x|} \underset{\text{relazione (III)}}{\iff} \frac{d}{dx}\left(y\frac{1}{|x|}\right) = \frac{x}{|x|} \qquad (2.)$$

- Integrando la (2.) troviamo:

$$\boxed{y\frac{1}{|x|} = \int \frac{x}{|x|}\,dx + c \iff y(x) = |x|\int \overbrace{\frac{x}{|x|}}^{\text{segno}(x)}\,dx + c|x|}$$

$$\iff \boxed{y(x) = |x|\,|x| + c|x| = x^2 + c|x|}$$

Quindi $y(x) = x^2 + c|x|$ e $y(x) = x^2 + \tilde{c}x$ a meno di inglobare il segno di x in $\tilde{c}$ (si vede bene separando i casi $x > 0$ e $x < 0$ nel fare il calcolo)

Esempio

Consideriamo l'equazione $y' + \frac{2}{t} y = t - 1 + \frac{1}{t}$ corredata con la condizione iniziale $y(1) = \frac{1}{2}$

$t \neq 0$

Esempio

Consideriamo l'equazione $y' + \frac{2}{t} y = t - 1 + \frac{1}{t}$ corredata con la condizione iniziale $y(1) = \frac{1}{2}$

$t \neq 0$

In questo caso $p(t) = \frac{2}{t} \Rightarrow \int \frac{2}{t}\,dt = 2\ln|t| + c = \ln t^2 + c \Rightarrow \boxed{A(t) = \ln(t^2)}$ e $\mu(t) = e^{\ln(t^2)} = t^2$

$\Leftrightarrow \boxed{\mu(t) = t^2}$

Adesso moltiplichiamo l'equazione assegnata per $\mu(t) = t^2$ ottenendo:

$$\boxed{\underbrace{t^2\left(y' + \frac{2}{t}y\right)}_{= \frac{d}{dt}(t^2 y)} = t^3 - t^2 + t} \Leftrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\left(t^2 y\right) = t^3 - t^2 + t} \qquad (1.)$$

Esempio

Consideriamo l'equazione $y' + \frac{2}{t} y = t - 1 + \frac{1}{t}$ corredata con la condizione iniziale $y(1) = \frac{1}{2}$

$t \neq 0$

In questo caso $p(t) = \frac{2}{t} \Rightarrow \int \frac{2}{t}\,dt = 2\ln|t| + c = \ln t^2 + c \Rightarrow A(t) = \ln(t^2)$ e $\mu(t) = e^{\ln(t^2)} = t^2$

$\Longleftrightarrow \mu(t) = t^2$

Adesso moltiplichiamo l'equazione assegnata per $\mu(t) = t^2$ ottenendo:

$$\underbrace{t^2\left(y' + \frac{2}{t}y\right)}_{= \frac{d}{dt}(t^2 y)} = t^3 - t^2 + t \Longleftrightarrow \frac{d}{dt}\left(t^2 y\right) = t^3 - t^2 + t \qquad (1.)$$

Integrando (1.) in dt troviamo $t^2 y = \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + c \overset{t \neq 0}{\Longleftrightarrow} \boxed{y = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{3}t + \frac{1}{2} + c\,t^{-2}}$ (2.)

Esempio

Consideriamo l'equazione $y' + \frac{2}{t} y = t - 1 + \frac{1}{t}$ corredata con la condizione iniziale $y(1) = \frac{1}{2}$
$t \neq 0$

In questo caso $p(t) = \frac{2}{t} \Rightarrow \int \frac{2}{t} dt = 2\ln|t| + c = \ln t^2 + c \Rightarrow A(t) = \ln(t^2)$ e $\mu(t) = e^{\ln(t^2)} = t^2$

$\Leftrightarrow \mu(t) = t^2$

Adesso moltiplichiamo l'equazione assegnata per $\mu(t) = t^2$ ottenendo:

$$\underbrace{t^2 \left(y' + \frac{2}{t} y \right)}_{= \frac{d}{dt}(t^2 y)} = t^3 - t^2 + t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(t^2 y\right) = t^3 - t^2 + t \qquad (1.)$$

Integrando (1.) in dt troviamo $t^2 y = \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + c \overset{t \neq 0}{\Leftrightarrow} y = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{3}t + \frac{1}{2} + c\,t^{-2}$ (2.)

Infine, imponendo la condizione iniziale in (2.) : $\boxed{\frac{1}{2} = y(1) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + c \Leftrightarrow c = \frac{1}{12}}$ in (2.)

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{3}t + \frac{1}{2} + \frac{t^{-2}}{12}}$$

Esempio

$\boxed{y' + 3x\,y = 2x}$

qui $p(x) = 3x$
e $q(x) = 2x$

Per determinare le primitive $A(x)$ consideriamo $\int 3x\,dx = \frac{3}{2}x^2 + c$

$\Rightarrow$ prendiamo $\boxed{A(x) = \frac{3}{2}x^2}$ (1.)

Esempio

$y' + 3x\,y = 2x$ Per determinare le primitive $A(x)$ consideriamo $\int 3x\,dx = \frac{3}{2}x^2 + c$

qui $p(x) = 3x$

e $q(x) = 2x$

$\Rightarrow$ prendiamo $A(x) = \frac{3}{2}x^2$ (1.)

Dalla relazione (1.) possiamo andare a formare $\boxed{\mu(x) = e^{\frac{3}{2}x^2}}$ e moltiplicando ambo i membri della nostra equazione per $\mu(x)$ otteniamo:

Esempio

$y' + 3x\,y = 2x$ Per determinare le primitive $A(x)$ consideriamo $\int 3x\,dx = \frac{3}{2}x^2 + c$

qui $p(x) = 3x$

e $g(x) = 2x$

$\Rightarrow$ prendiamo $A(x) = \frac{3}{2}x^2$ (1.)

Dalla relazione (1.) possiamo andare a formare $\mu(x) = e^{\frac{3}{2}x^2}$ e moltiplicando ambo i membri della nostra equazione per $\mu(x)$ otteniamo:

$$\underbrace{e^{\frac{3}{2}x^2}(y' + 3xy)}_{\frac{d}{dx}\left(y\,e^{\frac{3}{2}x^2}\right)} = 2x\,e^{\frac{3}{2}x^2} \iff \boxed{\frac{d}{dx}\left(y\,e^{\frac{3}{2}x^2}\right) = 2x\,e^{\frac{3}{2}x^2}} \xRightarrow{\text{integrando}} \boxed{y\,e^{\frac{3}{2}x^2} = \int 2x\,e^{\frac{3}{2}x^2}\,dx + c}$$

(2.)

Esempio

$y' + 3xy = 2x$ Per determinare le primitive $A(x)$ consideriamo $\int 3x\,dx = \frac{3}{2}x^2 + c$

qui $p(x) = 3x$

e $q(x) = 2x$

$\Longrightarrow$ prendiamo $A(x) = \frac{3}{2}x^2$ (1.)

Dalla relazione (1.) possiamo andare a formare $\mu(x) = e^{\frac{3}{2}x^2}$ e moltiplicando ambo i membri della nostra equazione per $\mu(x)$ otteniamo:

$$\underbrace{e^{\frac{3}{2}x^2}\left(y' + 3xy\right)}_{\frac{d}{dx}\left(y\, e^{\frac{3}{2}x^2}\right)} = 2x\, e^{\frac{3}{2}x^2} \iff \frac{d}{dx}\left(y\, e^{\frac{3}{2}x^2}\right) = 2x\, e^{\frac{3}{2}x^2} \underset{\text{integrando}}{\Longrightarrow} y\, e^{\frac{3}{2}x^2} = \int 2x\, e^{\frac{3}{2}x^2}\,dx + c \qquad (2.)$$

Risolvendo l'integrale a secondo membro della (2.) otteniamo $y\, e^{\frac{3}{2}x^2} = \frac{2}{3} e^{\frac{3}{2}x^2} + c$

ovvero $\boxed{y(t) = \frac{2}{3} + c\, e^{-\frac{3}{2}x^2}}$ che è la soluzione generale dell'equazione assegnata.

Esempio (equazione a variabili separabili)

$$\boxed{y'(x) = h(x)\,\ell(y)} \underset{\ell(y)\neq 0}{\Rightarrow} \frac{1}{\ell(y)}\,y'(x) = h(x) \Rightarrow \boxed{L(y) = H(x) + c}$$

Primitiva di $1/\ell(y)$

H(t) è una primitiva di $h(t)$

se $y(t)=y_0$ e $\ell(y_0)=0$
allora y_0 è soluzione costante

Esempio (equazione a variabili separabili)

Data: $y'(x) = \dfrac{x e^{y}}{xy - y} \iff \boxed{y' = \dfrac{e^{y}}{y} \dfrac{x}{x-1}} \iff \boxed{y' y e^{-y} = \dfrac{x}{x-1}}$ (1.) (qui $x \neq 1$)

Adesso le variabili sono separate

Esempio (equazione a variabili separabili)

Data: $y'(x) = \dfrac{x e^y}{xy - y} \iff y' = \dfrac{e^y}{y} \dfrac{x}{x-1} \iff y' y e^{-y} = \dfrac{x}{x-1}$ (1.) (qui $x \neq 1$)

Adesso le variabili sono separate

Si integra (1.) in dx ottenendo: $\boxed{\underbrace{\int y' y e^{-y} \, dx}_{\text{I}} = \underbrace{\int \dfrac{x}{x-1} \, dx}_{\text{II}}}$ Risolvo separatamente I e II

Esempio (equazione a variabili separabili)

Data: $y'(x) = \dfrac{x e^{y}}{xy - y} \iff y' = \dfrac{e^{y}}{y}\,\dfrac{x}{x-1} \iff y' y e^{-y} = \dfrac{x}{x-1}$ (1.) (qui $x \neq 1$)

Adesso le variabili sono separate

Si integra (1.) in dx ottenendo: $\underbrace{\int y' y e^{-y}\,dx}_{\mathrm{I}} = \underbrace{\int \dfrac{x}{x-1}\,dx}_{\mathrm{II}}$ Risolvo separatamente I e II

per parti

$\mathrm{I} = \int y e^{-y}\,dy \overset{\text{per parti}}{=} -y e^{-y} + \int e^{-y}\,dy = -y e^{-y} - e^{-y} + c_1$; $\mathrm{II} = \int \dfrac{x-1+1}{x-1}\,dx = \int 1\,dx + \int \dfrac{1}{x-1}\,dx = x + \ln|x-1| + c_2$

$y(x) = y$

$y'dx = dy$

Quindi dalla relazione $\mathrm{I} = \mathrm{II}$ segue $\boxed{-e^{-y}(1+y) = x + \ln|x-1| + c}$

Soluzione scritta in forma implicita.

Esempio (equazione a variabili separabili)

$$\boxed{\frac{\operatorname{sen}(x)}{2+y}\,y' = \cos(x)}$$

$(y \neq -2)$

Se $\operatorname{sen}(x) \neq 0$ cioè $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, allora l'eq. assegnata diventa:

$$\boxed{\frac{1}{2+y}\,y' = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen} x}} \underset{\text{integrando}}{\Longrightarrow} \boxed{\int \frac{1}{2+y}\,y'\,dx = \int \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}\,dx} \quad (1.)$$

Esempio (equazione a variabili separabili)

$$\frac{\operatorname{sen}(x)}{2+y}\, y' = \cos(x) \qquad (y \neq -2)$$

Se $\operatorname{sen}(x) \neq 0$ cioè $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ allora l'eq. assegnata diventa:

$$\frac{1}{2+y}\, y' = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen} x} \underset{\text{integrando}}{\Longrightarrow} \int \frac{1}{2+y}\, y'\, dx = \int \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}\, dx \qquad (1.)$$

(1.) diventa $\ln|2+y| = \ln|\operatorname{sen}(x)| + c$ ovvero $e^{\ln|2+y|} = e^{c}\, e^{\ln|\operatorname{sen}(x)|}$

Esempio (equazione a variabili separabili)

$$\frac{\operatorname{sen}(x)}{2+y}\, y' = \cos(x) \qquad (y \neq -2)$$

Se $\operatorname{sen}(x) \neq 0$ cioè $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ allora l'eq. assegnata diventa:

$$\frac{1}{2+y}\, y' = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen} x} \underset{\text{integrando}}{\Longrightarrow} \int \frac{1}{2+y}\, y'\, dx = \int \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}\, dx \qquad (1.)$$

(1.) diventa $\ln|2+y| = \ln|\operatorname{sen}(x)| + c$ ovvero $e^{\ln|2+y|} = e^{c} e^{\ln|\operatorname{sen}(x)|}$

$$\Longleftrightarrow \boxed{|2+y| = e^{c}\, |\operatorname{sen}(x)|}$$

dalle quale si ottiene la soluzione generale

$$\boxed{\begin{array}{l} y(x) = d\operatorname{sen}(x) - 2 \\ \text{con } d \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \end{array}}$$