Equazione di Laplace

$$\Delta u = 0 \qquad (1)$$

L'equazione viene posta in un dominio $U \subseteq \mathbb{R}^n$

e l'incognita $u : \overline{U} \to \mathbb{R}$

Il problema non omogeneo associato

$$\Delta u = -f \qquad x \in U$$

con $f(x)$ assegnata è detto problema di Poisson.

Una soluzione dell'eq. di Laplace (1) è detta

funzione armonica

Studiamo il problema di Laplace in dimensione

$n \geq 2$. Per $n=1$ (1) si riduce a

$$\frac{d^2}{dx^2} u = 0 \quad \Rightarrow \quad u = x_0 + a x$$

Soluzioni eq. Laplace in $\mathbb{R}^n$

Consideriamo $U = \mathbb{R}^n$. In questo caso l'eq. Lap. ammette molte diverse soluzioni, polinomiali e non

Esempi

in $\mathbb{R}^2$ $\quad u = x, y, x^2 - y^2, x^3 - 3xy^2, \ldots$

(x, y)

$$\Delta u = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u$$

~~precedR~~ $\quad$ oppure $u = e^{\alpha x}\cos(\alpha y), e^{\alpha x}\sin(\alpha y) \quad \alpha \in \mathbb{R}$

in $\mathbb{R}^n$ $\quad u = \sin\left(\sqrt{n-1}\, x_1\right) \sinh\left(x_2 + x_3 + \ldots x_n\right)$

Nota tutte le funzioni divergano per $|x| \to \infty$

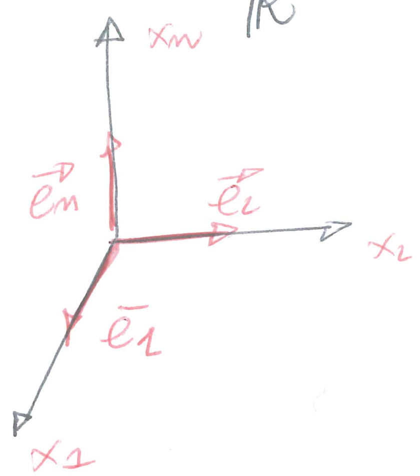
La "soluzione fondamentale" svolge un ruolo speciale nello studio del problema Laplace-Poisson

Matrici ortogonali e cambio di sistema di riferimento

Considero la base canonica di $\mathbb{R}^n$: $\vec{e}_i$ $i=1 \dots n$

↓

diretta come asse x_i



$\vec{e}_i = (0, 0, \dots 1, 0 \dots 0)$
i-esima comp.

$\vec{e}_{i,j} = \delta_{ij}$
↓
comp. j-esima di $\vec{e}_i$

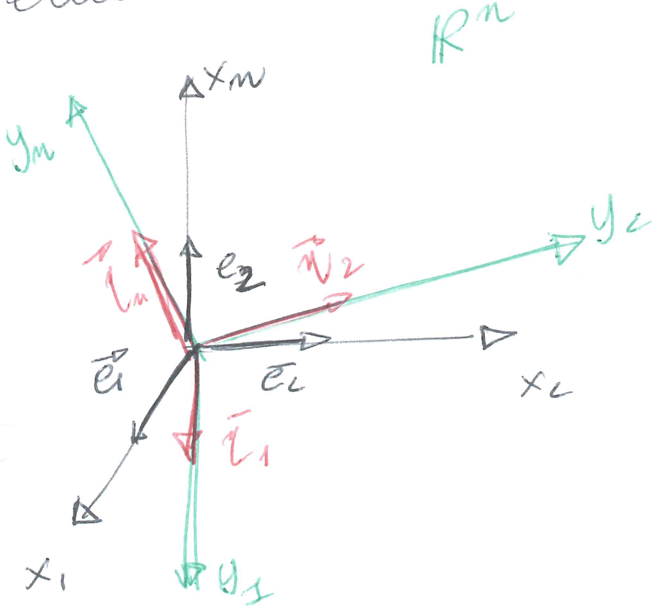
Proprietà di ortonormalità dei versori

$$< \underbrace{\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j}_{\text{Prod. scalare in } \mathbb{R}^n} > = \sum_{r=1}^{n} e_{i,r} \, e_{j,r} = \delta_{ij}$$

↓

r-esima comp. del vettore $\vec{e}_i$

Ruoto gli assi coordinati e trovo un'altro set di elementi di base $\{\vec{\eta}_i\}$ $i = \dots n$



Scriviamo il generico elemento $\vec{\eta}_i$ della nuova base come combinazione lineare di $\vec{e}_i$

$$\vec{\eta}_i = \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij}\, \vec{e}_j$$

La matrice θ è ortogonale ovvero $\theta\theta^{+} = I$

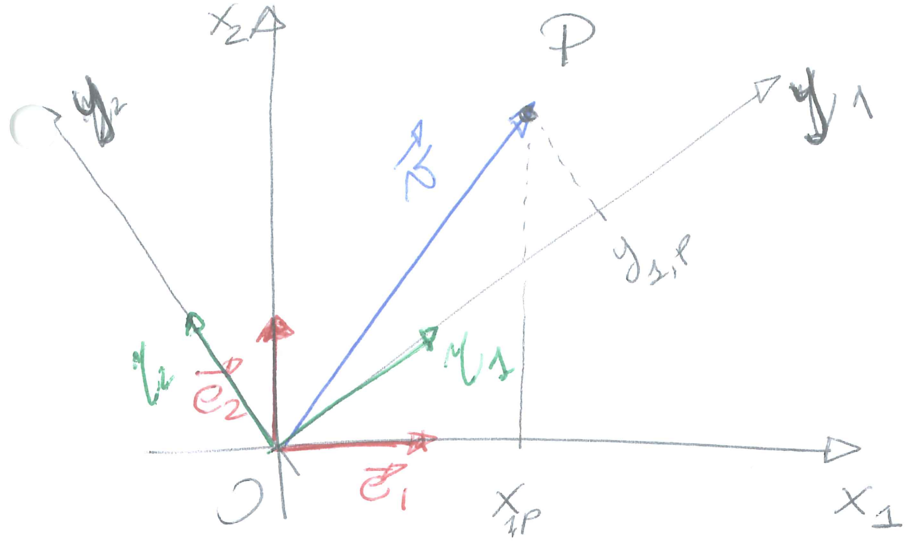
Lo si verifica subito

$$\delta_{ij} = \langle \vec{\eta}_i \cdot \vec{\eta}_j \rangle = \sum_{r,k=1}^{n} \langle \theta_{ir}\, \vec{e}_r \cdot \theta_{jk}\, \vec{e}_k \rangle$$

$$= \sum_{r,k=1}^{n} \theta_{ir}\, \theta_{jk} \underbrace{\langle \vec{e}_r\, \vec{e}_k \rangle}_{=\delta_{rk}} = \sum_{r=1}^{n} \theta_{ir}\, \theta_{jr}$$

In forma matriciale

$$\sum_{r=1}^{n} \theta_{ir}\, \theta_{jr} = \delta_{ij} \Rightarrow \theta\theta^{+} = I$$



Consideriamo un vettore $\vec{v}$ letto nei 2 riferimenti

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i = \sum_{j=1}^{n} y_j \vec{\eta}_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} y_j \sum_{r=1}^{n} \theta_{jr} \vec{e}_r$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i = \sum_{j,r=1}^{n} y_j \theta_{jr} \vec{e}_r$$

Prodotto scalare con $\vec{e}_s$

$$x_s = \sum x_i \langle \vec{e}_s \, \vec{e}_i \rangle = \sum_{j=r=1}^{n} y_j \theta_{jr} \langle \vec{e}_s . \vec{e}_r \rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \theta_{js} y_j$$

detto $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ si è ottenuto $\vec{x} = \theta^T \vec{y}$

La rotazione degli assi coordinati indotta dalla matrice ortogonale θ definisce il cambio di coordinate (trasformazione lineare)

$$x_s = \theta^T_{sj}\, y_s$$

Verifichiamo che l'equazione di Laplace è INVARIANTE per rotazione del sist. di rif.:

ovvero data una matrice ortogonale $\theta: n \times n$ $(\theta\theta^t = I)$

ed una funzione $u \in C^2(U)$ armonica

considerando il cambio di variabili $\vec{y} = \theta\vec{x}$,

ovvero $y_i = \Sigma\, \theta_{ij} x_j$, definendo $v(\vec{y}) \equiv u(\theta\vec{x})$

si ha

$$\Delta_x u = 0 \Rightarrow \Delta_y v = 0$$

La trasformazione di coordinate non cambia l'operatore di Laplace

Verifica

Utilizzando la regola di derivazione a catena

$$\partial_{x_i} u(x) = \partial_{x_i} v(\theta x) = \sum_j \frac{\partial v}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_i} = \sum_j \frac{\partial v}{\partial y_j}\theta_{ji}$$

$$y_j = \sum \theta_{jk} x_k \rightarrow \frac{\partial y_j}{\partial x_i} = \sum \theta_{jk}\delta_{ki} = \theta_{ji}$$

$$\Delta u = \sum_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\sum_j \frac{\partial v}{\partial y_j}\theta_{ji} =$$

$$= \sum_{i,j} \theta_{ji}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial y_j} = \sum_{i,j,k}\theta_{ji}\frac{\partial^2 v}{\partial y_j \partial y_k}\underbrace{\frac{\partial y_k}{\partial x_i}}_{=\theta_{ki}}$$

θ è una mat. costante

$$\Delta_x u = \underbrace{\sum_{i,j,k}\theta_{ji}\,\theta_{ki}}_{\sum_i \theta_{ji}\theta_{ki} = \sum_i \theta_{ji}\theta^t_{ik} = \delta_{jk}}\frac{\partial^2 v}{\partial y_j \partial y_k} = \sum_j \frac{\partial^2 v}{\partial y_j^2} = \Delta_y v$$

L'operatore Δ è invariante per rotazione del sistema di riferimento:

FIS: Nasce dalla model. di fenomeni isotropi, in cui non c'è una direzione privilegiata

Suggerisce di cercare soluz. che rispettino questa simmetria ovvero che dipendano dall'unica quantità che è preservata da $\forall$ rotazioni: il modulo