Alcune proprietà della f. di Green

$$G(x,y) = \phi(y-x) - \varphi^x(y) \quad \text{con } x,y \in U$$
$$\text{e } x \neq y$$

dove

$$\varphi^x(y) : \begin{cases} \Delta_y \varphi^x(y) = 0 & y \in U \\ \varphi^x(y) = \phi(x-y) & y \in \partial U \end{cases} \qquad x \in U$$

1) $\Delta_y G(x,y) = \delta(x-y)$ → misura di Dirac

2) $G\big|_{\partial U} = 0$

3) Unicità della f. di Green

4) Simmetria: $G(x,y) = G(y,x)$

Punto 1: Verifica formale della proprietà

Def δ: $$\int_{\mathbb{R}^n} \delta(x-y) f(y)\, dV(y) = f(x) \quad *$$

Avevamo dimostrato che

$$\Delta_x \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x-y) f(y)\, dV(y) = -f(x) \qquad f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$$

Scambio derivata con int (questo è solo un passaggio formale)

$$\int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\Delta_x \phi(x-y)} f(y)\, dV(y) = -f(x)$$

$$\Delta_x \phi(x-y) = \Delta_y \phi(x-y)$$

prendo f: supp $f \subset U$ e $x \in U$

$$\int_U \Delta_y \phi(x-y)\, f(y) = -f(x)$$

sommo $-\Delta_y \varphi^x(y) = 0$

$$\int_U \Delta_y \big[\underbrace{\phi(x-y) - \varphi^x(y)}_{G(x,y)}\big] f(y) = -f(x)$$

$$\int \Delta_y G(x,y) f(y) = -f(x)$$ confrontando con * ho verificato

Punto 2: immediato

prendo $y \in \partial U \Rightarrow g(x,y) = \phi(x-y) - \varphi^x(y) = 0$

per definizione di φ^x

Punto 3: se g esiste è unica

$g(x,y) = \phi(x-y) - \varphi^x(y)$

La non unicità può venire solo da $\varphi^x(y)$

$$\varphi^x(y) \Rightarrow \underbrace{\begin{cases} \Delta_y \varphi^x = 0 & x \in U \\ \varphi^x(y) = \phi(x-y) & x \in \partial U \end{cases}}$$

problema Lap. Dirichlet: unicità di soluz.

(princ. max forte)

Punto 4 $\quad g(x,y)=g(y,x)$

Definiamo $\quad w(z)=g(y,z)=\phi(y-z)-\varphi^{y}(z)$

$$v(z)=g(x,z)=\phi(x-z)-\varphi^{x}(z)$$

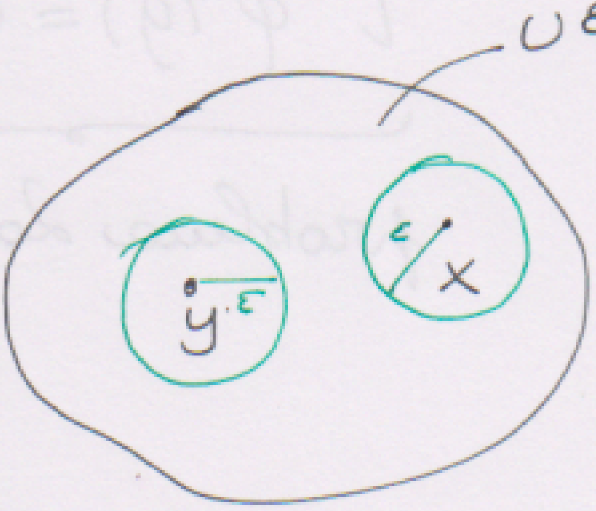
$w(x)=g(y,x) \qquad v(y)=g(x,y)$

Quindi se $\quad w(x)=v(y) \Rightarrow g(x,y)=g(y,x)$

$$\begin{cases} \Delta_z w = 0 & z \neq y \\ w = 0 & z \in \partial U \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta_z v = 0 & z \neq x \\ v = 0 & z \in \partial U \end{cases}$$

Considero il dominio U^{ε}

$U^{\varepsilon}=U-B(x,\varepsilon)-B(y,\varepsilon)$



Formula di integ. per parti

$$\int_{U^{\varepsilon}} \underbrace{(\Delta_z w\, v - w\, \Delta_z v)}_{=0} \, dV(z) = \int_{\partial U^{\varepsilon}} \left(\frac{\partial w}{\partial \nu} v - \frac{\partial v}{\partial \nu} w\right) dS(z)$$

$$= \underbrace{\int_{\partial U} \left(\frac{\partial w}{\partial \nu} v - \frac{\partial v}{\partial \nu} w\right) dS}_{=0} + \int_{\partial B(x,\varepsilon)\cup \partial B(y,\varepsilon)} \left(\frac{\partial w}{\partial \nu} v - \frac{\partial v}{\partial \nu} w\right) dS$$

Otteniamo

$$\int_{\partial B(x,\varepsilon)} \left(\frac{\partial w}{\partial \nu} v - w\frac{\partial v}{\partial \nu}\right) dS = \int_{\partial B(y,\varepsilon)} \left(\frac{\partial v}{\partial \nu} w - v \frac{\partial w}{\partial \nu}\right) dS \qquad (1)$$

Considero l'integ. di sinistra: w è regolare attorno a x, mentre $v(z) \sim \phi(x-z)$ per $z \sim y$

↳ contiene la singolarità

$$\int_{\partial B(x,\varepsilon)} \frac{\partial w}{\partial \nu} v \, dS(z) = \underbrace{\int_{\partial B(x,\varepsilon)} \frac{\partial w}{\partial \nu} \Phi(x-z)\, dS(z)}_{A} - \underbrace{\int_{\partial B(x,\varepsilon)} \frac{\partial w}{\partial \nu} \phi^x(z)\, dS}_{\xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0}$$

integro funz. regolari in un dominio che va a $\emptyset$

$$|A| \le \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \left|\frac{\partial w}{\partial \nu}\right| dS(z) \cdot |\phi(\varepsilon)|$$

$$\le \max_{\partial B(x,\varepsilon)} |\nabla w| \; |\partial B(x,\varepsilon)| \; |\phi(\varepsilon)| \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$$

$$-\int_{\partial B(x,\varepsilon)} w \frac{\partial v}{\partial \nu} = -\int_{\partial B(x,\varepsilon)} w \frac{\partial \phi(x-z)}{\partial \nu} dS(z) + \underbrace{\int_{\partial B(x,\varepsilon)} w \frac{\partial \phi^x(z)}{\partial \nu} dS(z)}_{\xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0}$$

Ricordiamo $\vec{\nu} \cdot \vec{\nabla}\phi \Big|_{\partial B(0,\varepsilon)} = + \dfrac{1}{|\partial B(0,\varepsilon)|}$

e $\displaystyle \lim_{\varepsilon \to 0} (-)\int_{\partial B(x,\varepsilon)} w(z) \frac{\partial \phi(x-z)}{\partial \nu} dS(z) = -w(x)$

Quindi, nel limite $\varepsilon \to 1$ l'Eq. (1) si riduce

a $\quad -w(x) = -v(y)$

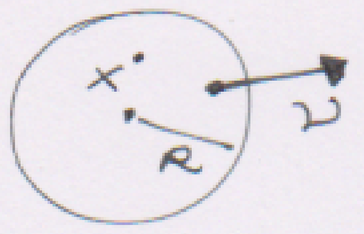
Applicazione f. di Green: soluzione del probl. Dirichlet-Laplace in una sfera in forma integrale

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & x \in B(0,R) \\ u = g & x \in \partial B(0,R) \end{cases}$$

Consideriamo il caso $n \geq 3$

Dalla formula della f. di Green, prendiamo $x \in B(0,R)$

$$u(x) = -\int_{\partial B(0,R)} \underbrace{\frac{\partial G}{\partial \nu}}_{\vec{\nabla}_y G \cdot \vec{\nu}} (x,y)\, g(y)\, dS(y)$$



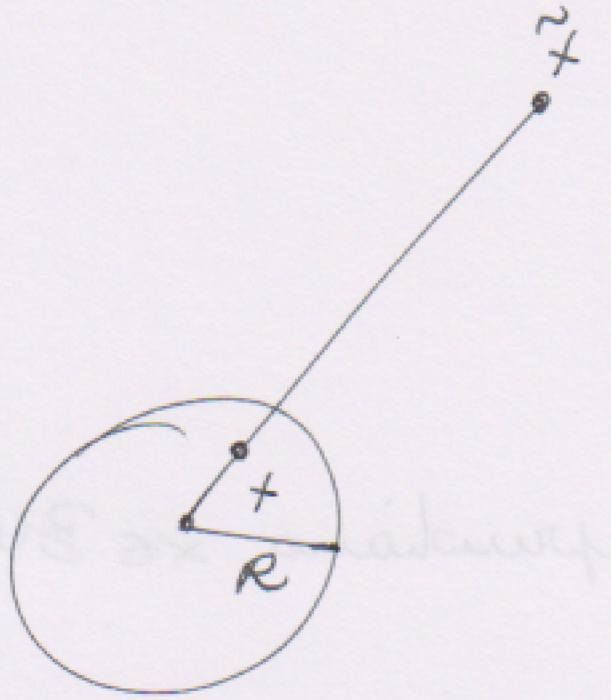
$$G(x,y) = \Phi(x-y) - \varphi^x(y)$$

$$① \begin{cases} \Delta_y \varphi^x(y) = 0 & y \in B(0,R) \\ \varphi^x(y) = \Phi(x-y) & y \in \partial B(0,R) \end{cases}$$

Il problema si riconduce al calcolo di $\varphi^x(y)$, se non fosse per la singolarità di $\Phi(x-y)$ in $y=x$ potremmo banalmente porre $\varphi^x(y) = \Phi(x-y)$. "Spostiamo" la singolarità fuori da $B(0,R)$

Punto duale associato a x

$$\tilde{x} = \frac{x}{|x|^2} R^2 \Rightarrow |\tilde{x}| = \frac{R^2}{|x|} \underset{|x|\le R}{\geq} R$$



$$\begin{cases} |\tilde{x}||x| = R^2 \\ |\tilde{x}| \geq R \Rightarrow x \notin B(0,R) \end{cases}$$

Abbiamo $\Delta_y \phi(y) = 0 \quad y \neq 0$

$\Downarrow$

$\Delta_y \phi(y - \tilde{x}) = 0 \quad \forall y \in B(0,R)$

$\tilde{x}$ fuori dalla palla

Inoltre $\Delta_y \phi(|y-\tilde{x}||x|) = 0 \quad \forall y \in B(0,R)$

$|x|$ parametri

Lo verifichiamo $\phi(|x||y-\tilde{x}|) = \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \frac{|x|^{2-n}}{|y-\tilde{x}|^{n-2}}$

$= |x|^{2-n} \phi(y - \tilde{x}) \Rightarrow \Delta_y \phi(|x||\tilde{x}-y|) = 0$

Si ha che $\varphi^x(y) = \phi(|x||\tilde{x}-y|) R^{n-2}$ é soluzione

di 1

È necessario solo verificare le condizioni al bordo

Fisso $y \in \partial B(0,R)$ e $x \neq 0$

Abbiamo $\quad |x|^2 |\tilde{x}-y|^2 = |x|^2 \left(|y|^2 + |\tilde{x}|^2 - 2\,\tilde{x}\cdot y \right)$

$$= |x|^2 \left(R^2 + \frac{R^4}{|x|^2} - 2\,\frac{y\cdot x}{|x|^2} R^2 \right) = R^2 \left(|x|^2 + \underset{|y|^2}{\underset{\parallel}{R^2}} - 2\,x\cdot y \right)$$

$$= R^2 |x-y|^2$$

$$\Rightarrow \quad |x|\,|\tilde{x}-y| = R\,|x-y| \quad (2)$$

Quindi per $y \in \partial B(0,R)$

$$\varphi^x(y) = R^{n-2} \phi\left(|x|\,|y-\tilde{x}| \right) = R^{n-2}\, \phi\left(R|x-y| \right) =$$

$$= \cancel{R^{n-2}}\, \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)\,|x-y|^{n-2}\,\cancel{R^{n-2}}} = \phi(x-y)$$

$$\Rightarrow \quad \varphi^x(y)\Big|_{\partial B(0,R)} = \phi(x-y)$$

Quindi la f. Green

$$G(x,y) = \phi(x-y) - R^{n-2}\,\phi\left(|x|\,|\tilde{x}-y| \right)$$

Calcolo $\nabla_y G(x,y)$

$$\phi(y-x) = \frac{1}{(n-2)n\alpha(n)} \left(\sqrt{\Sigma_i |y_i - x_i|^2}\right)^{2-n}$$

$$\partial_{y_i} \phi(y-x) = \frac{1}{(n-2)n\alpha(n)} (2-n) \frac{y_i - x_i}{|y-x|^n} = \frac{1}{n\alpha(n)} \frac{x_i - y_i}{|x-y|^n}$$

$$\partial_{y_i} \phi(|x||y-\tilde{x}|) = \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} |x|^{2-n} \left(\Sigma_i (y_i - \tilde{x}_i)^2\right)^{1-n/2}$$

$$= \frac{|x|^{2-n}}{n(n-2)\alpha(n)} (2-n) \frac{y_i - \tilde{x}_i}{|\tilde{x}-y|^n}$$

$$= \frac{|x|^{2-n}}{n\alpha(n)} \frac{\tilde{x}_i - y_i}{|\tilde{x}-y|^n} = \frac{|x|^2}{n\alpha(n)} \frac{\tilde{x}_i - y_i}{(|x||\tilde{x}-y|)^n}$$

Utilizzo (2)

$$\partial_{y_i} \phi(|x||y-\tilde{x}|) = \frac{|x|^2}{n\alpha(n)} \frac{\tilde{x}_i - y_i}{R^n|x-y|^n} =$$

$$= \frac{|x|^2}{n\alpha(n)} \frac{1}{R^n|x-y|^n} \left(\frac{x_i}{|x|^2} R^2 - y_i\right)$$

$$= \frac{1}{n\alpha(n) R^n|x-y|^n} \left(x_i R^2 - |x|^2 y_i\right)$$

$$\vec\nabla_y G(y,x)\cdot \underbrace{\vec\nu}_{=\frac{\vec y}{R}} \quad \text{per } \vec y \in \partial B(0,R)$$

$$= \frac{1}{R}\sum_i \Big[\overbrace{\underbrace{y_i(x_i-y_i)}_{y\cdot x - |y|^2} \frac{1}{n\alpha(n)|x-y|^n}}^{\partial_{y_i}\Phi(x-y)} + \overbrace{\frac{R^{n-2}}{n\alpha(n)R^n|x-y|^n}\, y_i\left(-x_i R^2 + y_i|x|^2\right)}^{-\partial_{y_i} R^{n-2}\Phi(|x||\tilde{x}-y|)} \Big]$$

$$= \frac{1}{R\, n\alpha(n)|x-y|^n}\Big[\cancel{x\cdot y}\underbrace{-|y|^2}_{=-R^2} + \frac{1}{R^2}\big(-\cancel{y\cdot x}\,R^2 + \underbrace{|y|^2}_{=R^2}|x|^2\big)\Big]$$

$$= \frac{1}{R\, n\alpha(n)|x-y|^n}\left(-R^2+|x|^2\right)$$

Otteniamo FORMULA DI POISSON

$$\boxed{u(x) = \frac{R^2-|x|^2}{R\,n\,\alpha(n)}\int_{\partial B(0,R)} \frac{g(y)}{|x-y|^n}\, dS(y)}$$

La formula di Poisson

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{R\, n\, \alpha(n)} \int_{\partial B(0,R)} \frac{g(y)}{|x-y|^n}\, dS(y) \qquad (1)$$

Fornisce una formula integrale per risolvere il problema Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & x \in B(0,R) \\ u = g & x \in \partial B(0,R) \end{cases}$$

Nella derivazione della formula, si é sempre ipotizzato $x \in B(0,R)$, punto interno. Il lim. $x \to R$ va controllato con cautela (l'integrale diventa singolare). Quindi, affinchè la f. Poisson fornisca la corretta soluzione del prob. Lap-Dirich. dimostriamo il seguente Teorema

Th:

$$\underbrace{\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in B(0,R)}}}_{\text{limite dall'interno della sfera}} u(x) = g(x_0) \qquad \forall x_0 \in \partial B(x_0 R)$$

dove u é dato da (1) e $g \in C^0(\partial B)$

Dimostrazione

notiamo innanzitutto che il $\lim_{x \to \partial B}$ è della forma $\frac{0}{0}$

$$u(x) = \frac{\overbrace{R^2 - |x|^2}^{\overset{0}{\uparrow}\, x \to \partial B}}{R n \alpha(n)} \int_{\partial B(0,1)} \underbrace{\frac{g(y)}{|x-y|^n}}_{\underset{0}{\downarrow}\, x \to \partial B} dS(y) \quad \to 2 \to \text{singolarità}$$

Per Hp g è continua $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon\ \exists \delta > 0$ t.c. $x_0, y \in \partial B(0,R)$

$|y - x_0| < \delta \Rightarrow |g(y) - g(x_0)| < \varepsilon$

Poi notiamo che la formula di Pois. per $g = 1$ si scrive

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{R n \alpha(n)} \int_{\partial B(0,1)} \frac{1}{|x-y|^n} dS(y) = 1 \quad (*)$$

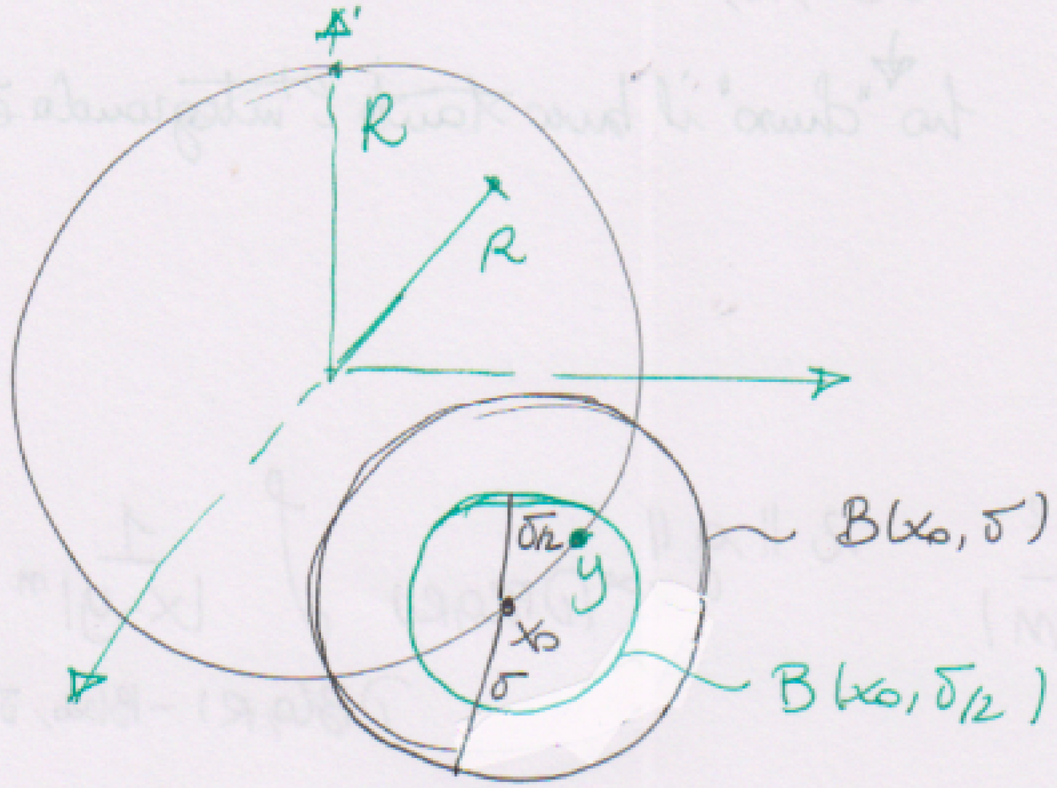
ma il prob. Dirich. associato $\begin{cases} \Delta u = 0 & x \in B \\ u = 1 & x \in \partial B \end{cases}$

ha soluzione $u(x) = 1$

$* \Rightarrow$ fisso $x_0 \in \partial B(0,R)$

$$g(x_0) = \frac{R^2 - |x|^2}{R n \alpha(n)} \int_{\partial B(0,R)} \frac{g(x_0)}{|x-y|^n} dS(y)$$

Restringo la $x \in B(x_0, \delta/2)$ il che non è limitativo in quanto ~~sto~~ studiando $\lim x \to x_0$



Calcolo $u(x) - g(x_0)$

$$u(x) - g(x_0) = \frac{R^2 - |x|^2}{R n \alpha(n)} \int_{\partial B(0,R)} \frac{g(y) - g(x_0)}{|x-y|^n} \, dS(y)$$

Isolo la singolarità dell'integrale $y = x$

$$\partial B(0,R) = \underbrace{\partial B(0,R) \cap B(x_0, \delta)}_{\text{Int I}} + \underbrace{\partial B(0,R) - B(x_0, \delta)}_{\text{Int II}}$$

Stimiamo I

$$|I| \leq \frac{|R - |x|^2|}{R n \alpha(n)} \int_{\partial B(0,R) \cap B(x_0,\delta)} \frac{\overbrace{|g(y) - g(x_0)|}^{< \varepsilon \text{ in quanto } y \in B(x_0, \delta)}}{|x-y|^n} \, dS(y)$$

$R - |x|^2 > 0$ in quanto considero il limite dall'interno della palla $|x| < R$

$$|I| \leq \varepsilon \quad \frac{R^2-|x|^2}{R n\alpha(n)} \int_{\partial B(0,R)} \frac{1}{|x-y|^n}\, dS(y) = \varepsilon \quad (*)$$

ho "chiuso" il buco tanto l'integrando è >0

Considero II

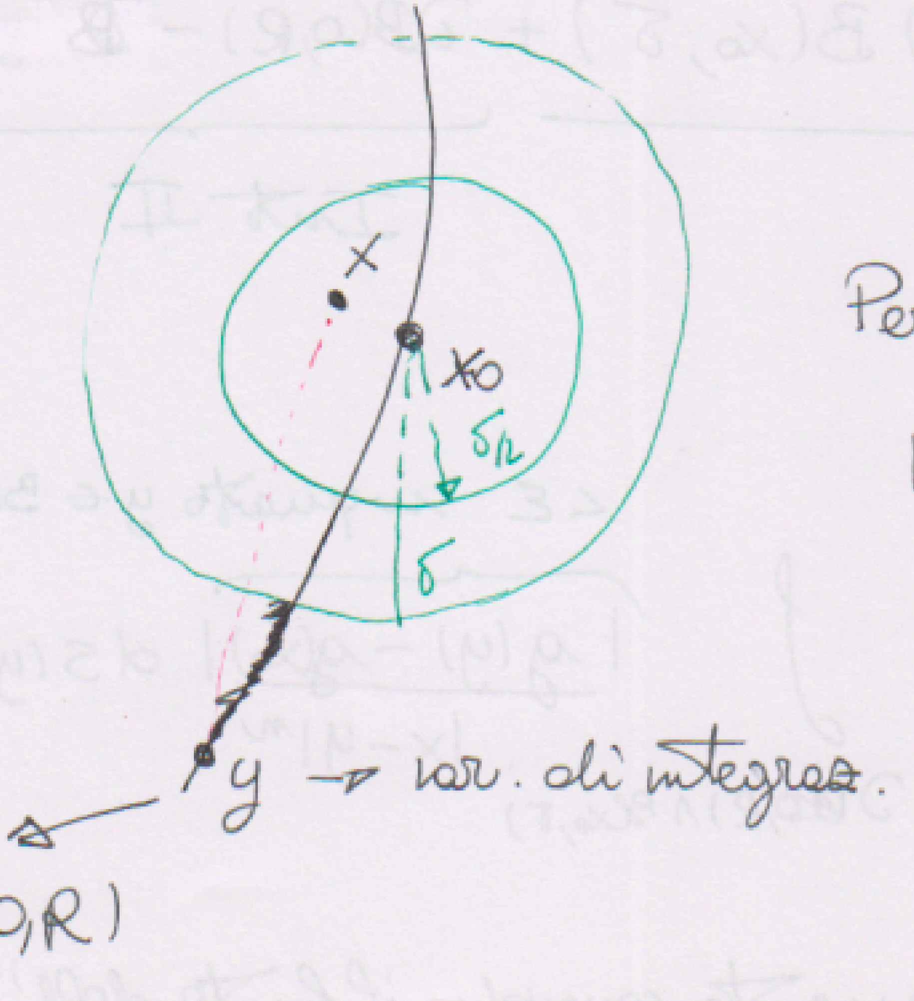
$$|II| \leq \frac{R^2-|x|^2}{R n\alpha(n)} \, 2\, \|g\|_{L^\infty(\partial B(0,R))} \int_{\partial B(0,R) - B(x_0,\delta)} \frac{1}{|x-y|^n}\, dS(y)$$

ho utilizzato $|g(x_0) - g(y)| \leq |g(x_0)| + |g(y)| \leq$

$x_0, y \in \partial B(0,R)$

$$\underbrace{\leq 2 \max_{x \in \partial B(0,R)}}_{g \text{ è continua e } \partial B \text{ è compatta}} |g(x)| = 2\, \|g\|_{L^\infty(\partial B(0,R))}$$

Notiamo che le variabili sono vincolate nei reg. insiemi



Per costruzione abbiamo

$$|x-y| \geq \frac{\delta}{2}$$

quindi $\frac{1}{|x-y|^n} \leq \left(\frac{2}{\delta}\right)^n$

otteniamo $|\mathrm{II}| \leq \frac{R^2-|x|^2}{R n \alpha(n)} 2\|g\|_{L^\infty(\partial B(0,R))} \left(\frac{2}{\delta}\right)^n \underbrace{n\alpha(n)R^{n-1}}_{|\partial B(0,R)|}$

quindi potrò sempre trovare x suff. vicino al bordo della palla t.c. $|\mathrm{II}| \leq \varepsilon$ $\left(\text{uso } R^2-|x|^2 \to 0 \right)$

In conclusione ho verificato che $\forall \varepsilon > 0$ posso sempre trovare un intorno di x_0 $B(x, \tilde{\delta})$ t.c. $x_0 \in \partial B(0,R)$, $x \in B(x_0, \tilde{\delta}) \cap \overline{B(0,R)}$ t.c.

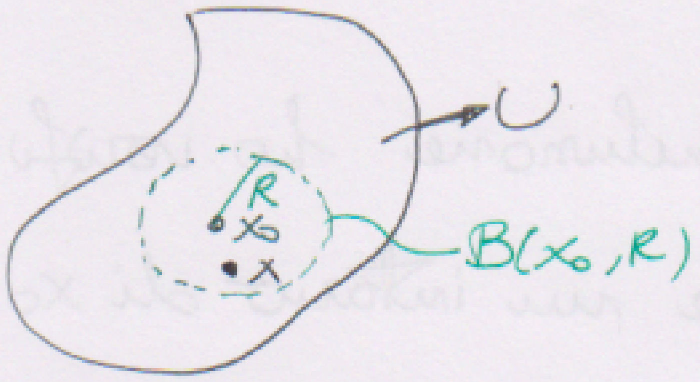
$|x - x_0| \leq \tilde{\delta} \Rightarrow |u(x) - g(x_0)| < \varepsilon$

Utilizziamo la f. di Poisson per ricavare la disuguaglianza di Harnack: fissa un limite inferiore e superiore valido x una f. armonica di cui si conosce il valore in un punto.

Sia $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ e $B(x_0, R) \subset U$

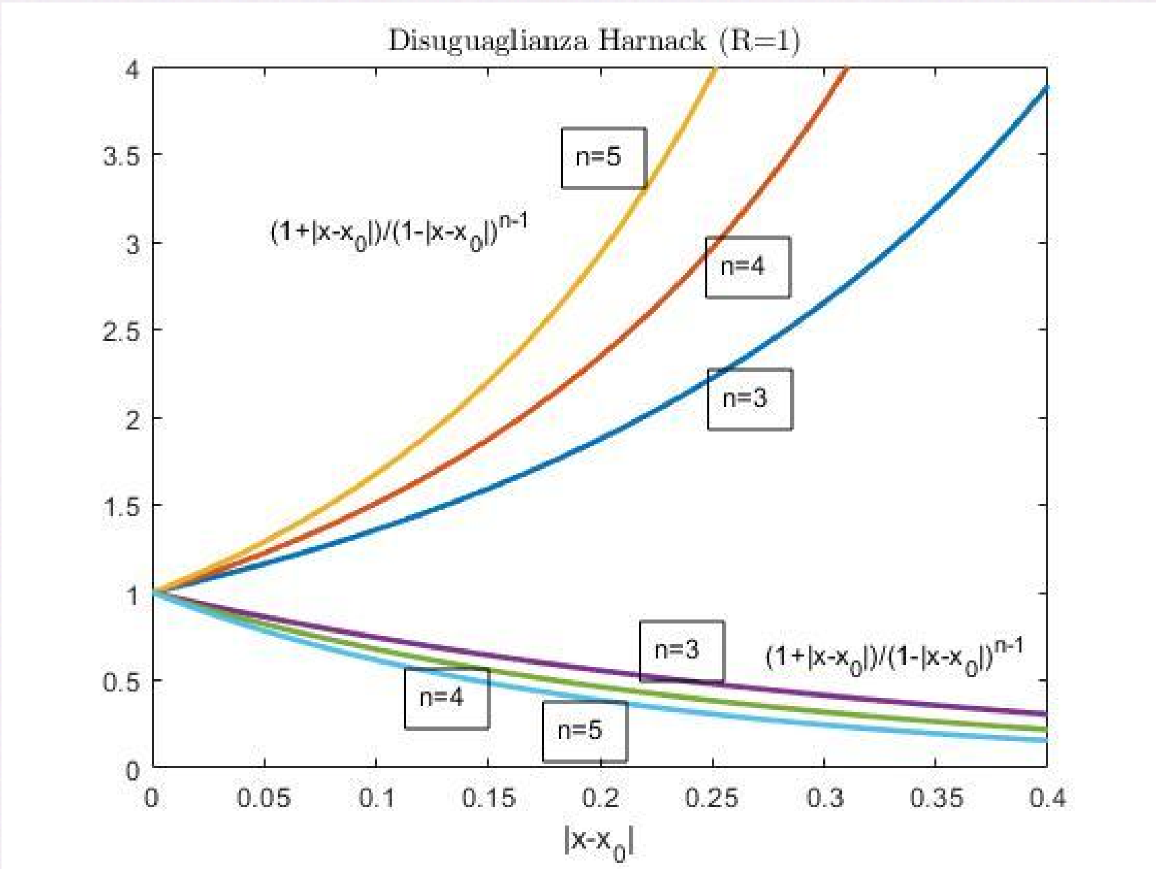
$\Delta u = 0 \quad x \in U$

$u \geq 0$



Valgono le seguenti limitazioni $\forall x \in B(x_0, R)$

$$\frac{(R - |x-x_0|)\, R^{n-2}}{(R + |x-x_0|)^{n-1}}\, u(x_0) \leq u(x) \leq \underbrace{\frac{(R + |x-x_0|)\, R^{n-2}}{(R - |x-x_0|)^{n-1}}}_{\text{fattore geometrico}}\, u(x_0)$$



Dimostr. dis. Harnack

Partiamo dalla f. di Poisson per il prob. $\begin{cases} \Delta v=0 & x \in B(0,R) \\ v=g & x \in \partial B(0,R) \end{cases}$

Lap.-Dirich. nella palla $B(0,R)$

$$v(x) = \frac{R^2-|x|^2}{Rn\alpha(n)} \int_{\partial B(0,R)} \frac{\overbrace{v(y)}^{v=g \text{ su } \partial B}}{|x-y|^n}\, dS(y)$$

Definiamo $w(x) = v(x-x_0) \Rightarrow \Delta w=0$ in $B(x_0,R)$

$$w(x) = \frac{R^2-|x-x_0|^2}{Rn\alpha(n)} \int_{\partial B(0,R)} \frac{\overset{w(y'+x_0)}{\overset{\shortparallel}{v(y')}}}{|x-x_0-y'|^n}\, dS(y')$$

cambio di variabile nell'integrale $y = x_0+y'$

$$u(x) = \frac{R^2-|x-x_0|^2}{Rn\alpha(n)} \int_{\partial B(x_0,R)} \frac{w(y)}{|x-y|^n}\, dS(y)$$

dove $x \in B(x_0,R) \subset U$

$$u(x) = \frac{1}{Rn\alpha(n)} \int_{\partial B(x_0,R)} \frac{R^2-|x-x_0|^2}{|(x-x_0)-(y-x_0)|^n}\, w(y)\, dS(y)$$

$$= \frac{1}{Rn\alpha(n)} \int_{\partial B(x_0,R)} a\, u(y)\, dS(y)$$ #

dove $\quad a \doteq \dfrac{R^2 - |x-x_0|^2}{|(x-x_0)-(y-x_0)|^n}$

Semplifichiamo le notazioni e stimiamo a

Notiamo che $y \in \partial B(x_0,R) \Rightarrow R^2 = |y-x_0|^2$

$$a = \frac{|y-x_0|^2 - |x-x_0|^2}{|(x-x_0)-(y-x_0)|^n} \qquad \text{pongo} \quad x' = x-x_0, \quad y' = y-x_0$$

$$a = \frac{|y'|^2 - |x'|^2}{|x'-y'|^n} \qquad \text{dove} \quad |y'| = R, \quad |x'| \leq R \quad (x \in B(x_0,R))$$

$$a = \frac{(|y'|-|x'|)(|y'|+|x'|)}{|x'-y'|^n}$$

1) Minorante di a

considero la disug. triangolare $|x'-y'|^n \leq (|x'|+|y'|)^n$

$$a = \frac{(|y'|-|x'|)(|y'|+|x'|)}{|x'-y'|^n} \geq \frac{|y'|-|x'|}{(|x'|+|y'|)^{n-1}} = \frac{R-|x'|}{(|x'|+R)^{n-1}}$$

$$a \geq \frac{R-|x-x_0|}{(|x-x_0|+R)^{n-1}}$$

2) Maggiorante di a

Disuguaglianza tria. inversa $|y'| \geq |x'| \Rightarrow$

$$|x'-y'| \geq |y'|-|x'|$$

$$a = \frac{(|y'|-|x'|)(|y'|+|x'|)}{|x'-y'|^n} \leq \frac{|y'|+|x'|}{(|y'|-|x'|)^{n-1}} = \frac{R+|x'|}{(R-|x'|)^{n-1}}$$

Otteniamo

$$\frac{R-|x-x_0|}{(|x-x_0|+R)^{n-1}} \leq a \leq \frac{R+|x-x_0|}{(R-|x-x_0|)^{n-1}}$$

Tornando a #, considerando il termine a dx

Qui uso che u è non negativa
per preservare il senso delle dis

$$u(x) = \frac{1}{Rn\alpha(n)} \int_{\partial B(x_0,R)} a\, u(y)\, dS(y) \leq$$

$$\leq \frac{R+|x-x_0|}{Rn\alpha(n)(R-|x-x_0|)^{n-1}} \underbrace{\int_{\partial B(x_0,R)} u(y)\, dS_y}$$

|| prop. media int. di farm.

$u(x_0)\,|\partial B(x_0,R)| =$

$= u(x_0)\, n\alpha(n) R^{n-1}$

Quindi

$$u(x) \leq \frac{R+|x-x_0|}{(R-|x-x_0|)^{n-1}} R^{n-2} u(x_0)$$

analogamente, l'altra disuguaglianza porta a

$$u(x) \geq \frac{R-|x-x_0|}{(R+|x-x_0|)^{n-1}} R^{n-2} u(x_0)$$