Integrali impropri 2

ES (31) OSS: $\forall [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ f è integrabile in $[a,b]$ per Hp.
inoltre e^x è funzione continua in $\mathbb{R} \Rightarrow$
$\Rightarrow f(e^x)$ è integrabile in $[a,b]$ $\forall a<b$.

OSS1 $\displaystyle\int_0^t f(e^x)\,dx \underset{\uparrow}{=} \int_1^{e^t} \frac{f(x)}{x}\,dx \qquad \forall t>0.$

formula di integrazione per sostituzione

OSS2 $\forall x \geq 1$ $0 < \frac{f(x)}{x} \leq f(x)$ quindi per confronto
$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\,dx$ converge essendo $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ convergente

OSS3 $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(e^x)\,dx \underset{\text{per def}}{=} \lim_{t\to+\infty} \int_0^t f(e^x)\,dx \overset{\text{OSS1}}{=} \lim_{t\to+\infty} \int_1^{e^t} \frac{f(x)}{x}\,dx =$

$\displaystyle= \lim_{\tau\to+\infty} \int_1^{\tau} \frac{f(x)}{x}\,dx \underset{\text{per def}}{=} \int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\,dx$ esiste finito per l'OSS 3

quindi $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(e^x)\,dx$ converge. ☒

ES (35) (Consideriamo l'Hp aggiuntiva: $\boxed{\exists \lim_{x\to+\infty} f(x)}$).

essendo $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ convergente si ha $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

$\Rightarrow \displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-f(x)} = 1 \Rightarrow \int_1^{+\infty} e^{-f(x)}\,dx$ diverge