Lezione n. 14: Limiti di funzioni di più variabili reali

Luca Bisconti

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Disclaimer

Il presente contenuto è ... e alle esigenze di didattica a distanza resasi necessarie p... ffusione del virus COVID-19.

Per l'attribuzione, l'autore del contenuto è: Luca Bisconti

Firenze, 14/03/2020

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Nel seguito la qualità delle scansioni non sarà sempre omogenea, in dipendenza dell'apparecchio usato per la loro realizzazione

Disclaimer

Il presente contenuto è ... e alle esigenze di didattica a distanza resasi necessarie p... ffusione del virus COVID-19.

Firenze, 14/03/2020

Limiti di Funzioni di due variabili reali

- Si dice che $f(x,y)$ tende a $+\infty$ ($a -\infty$) per (x,y) che tende ad (x_0,y_0), e si scrive $f(x,y) \to +\infty$ ($f(x,y) \to -\infty$) per $(x,y) \to (x_0,y_0)$, se $\forall M>0$ $\exists \delta>0$ ($\delta = \delta_M$) tale che

  $\forall (x,y) \in A = \mathrm{Dom}\, f(x,y)$ con $0 < \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta \Rightarrow f(x,y) > M$ (rispettivamente $f(x,y) < -M$)

Limiti di funzioni di due variabili reali

- Si dice che $f(x,y)$ tende a $+\infty$ ($a -\infty$) per (x,y) che tende ad (x_0,y_0), e si scrive $f(x,y) \to +\infty$ ($f(x,y) \to -\infty$) per $(x,y) \to (x_0,y_0)$, se $\forall M>0$ $\exists \delta>0$ ($\delta = \delta_M$) tale che

$\forall (x,y) \in A = \text{Dom} f(x,y)$ con $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta \Rightarrow f(x,y) > M$ (rispettivamente $f(x,y)<-M$)

Esempio

Si ha che $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} = +\infty$, per $\alpha>0$.

Infatti fissato $M>0$, determiniamo $\boxed{\delta = \delta_M > 0 \text{ tale che se } 0<\underbrace{\|(x,y)\|}_{=\sqrt{x^2+y^2}} < \delta \Rightarrow \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} > M}$

Limiti di Funzioni di due variabili reali

- Si dice che $f(x,y)$ tende a $+\infty$ ($a -\infty$) per (x,y) che tende ad (x_0, y_0), e si scrive $f(x,y) \to +\infty$ ($f(x,y) \to -\infty$) per $(x,y) \to (x_0,y_0)$, se $\forall M>0$ $\exists \delta>0$ ($\delta = \delta_M$) tale che $\forall (x,y) \in A = \mathrm{Dom}\, f(x,y)$ con $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta \Rightarrow f(x,y) > M$ (rispettivamente $f(x,y)<-M$)

Esempio

Si ha che $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} = +\infty$, per $\alpha>0$.

Infatti fissato $M>0$, determiniamo $\delta = \delta_M > 0$ tale che se $0<\underbrace{\|(x,y)\|}_{\sqrt{x^2+y^2}} < \delta \Rightarrow \dfrac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} > M$

Allora: $\boxed{\dfrac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} = \dfrac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^{2\alpha}} > \dfrac{1}{\delta^{2\alpha}}}$

$\sqrt{x^2+y^2} < \delta$

$\Rightarrow (\sqrt{x^2+y^2})^{2\alpha} < \delta^{2\alpha}$

Limiti di Funzioni di due variabili reali

- Si dice che $f(x,y)$ tende a $+\infty$ (a $-\infty$) per (x,y) che tende ad (x_0,y_0), e si scrive $f(x,y) \to +\infty$ ($f(x,y) \to -\infty$) per $(x,y) \to (x_0,y_0)$, se $\forall M>0$ $\exists \delta>0$ ($\delta = \delta_M$) tale che

  $\forall (x,y) \in A = \mathrm{Dom}\, f(x,y)$ con $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta \Rightarrow f(x,y) > M$ (rispettivamente $f(x,y)<-M$)

Esempio

Si ha che $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} = +\infty$, per $\alpha>0$.

Infatti fissato $M>0$, determiniamo $\delta = \delta_M > 0$ tale che se $0<\overset{\sqrt{x^2+y^2}}{\overset{\|}{\|(x,y)\|}}<\delta \Rightarrow \dfrac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} > M$

Allora:

$$\frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} = \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{2\alpha}} > \frac{1}{\delta^{2\alpha}} \overset{\text{introduco } M}{>} M$$

$\sqrt{x^2+y^2} < \delta$

$\Rightarrow \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{2\alpha} < \delta^{2\alpha}$

e guardando all'ultima disuguaglianza

$$\boxed{\frac{1}{\delta^{2\alpha}} > M \iff \delta < 1/M^{1/2\alpha}}$$

Limiti di funzioni di due variabili reali

- Si dice che $f(x,y)$ tende a $+\infty$ ($a -\infty$) per (x,y) che tende ad (x_0,y_0), e si scrive $f(x,y)\to+\infty$ ($f(x,y)\to-\infty$) per $(x,y)\to(x_0,y_0)$, se $\forall M>0$ $\exists\,\delta>0$ ($\delta=\delta_M$) tale che

$\forall (x,y)\in A=\mathrm{Dom}\, f(x,y)$ con $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta \Rightarrow f(x,y)>M$ (rispettivamente $f(x,y)<-M$)

Esempio

Si ha che $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}=+\infty$, per $\alpha>0$.

Infatti fissato $M>0$, determiniamo $\delta=\delta_M>0$ tale che se $0<\underbrace{\|(x,y)\|}_{}$ $\left(\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}\right)$ $<\delta \Rightarrow \dfrac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}>M$

Allora: $\dfrac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}=\dfrac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^{2\alpha}} > \dfrac{1}{\delta^{2\alpha}} > M$ (introduco M) e guardando all'ultima disuguaglianza

$\sqrt{x^2+y^2}<\delta \Rightarrow (\sqrt{x^2+y^2})^{2\alpha}<\delta^{2\alpha}$

$\dfrac{1}{\delta^{2\alpha}}>M \iff \delta<1/M^{1/2\alpha}$

$$\boxed{\text{Quindi se scegliamo } \delta<1/M^{1/2\alpha} \Rightarrow \dfrac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}>M \text{ come da definizione.}}$$ ∎

Esempio

Abbiamo che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(y)}{x^2 y} = +\infty$.

$\boxed{\text{Per prima cosa osserviamo che per } y \to 0 \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}(y)}{y} \to 1 \text{ quindi è una quantità limitata e positiva in prossimità di } y=0}$

Esempio

Abbiamo che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(y)}{x^2 y} = +\infty$. Per prima cosa osserviamo che per $y \to 0 \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}(y)}{y} \to 1$

Adesso, preso $M > 0$ allora: $\frac{\operatorname{sen}(y)}{x^2 y} = \frac{\operatorname{sen}(y)}{y}\frac{1}{x^2} \geq \frac{\operatorname{sen}(y)}{y}\frac{1}{x^2+y^2} = \frac{\operatorname{sen}(y)}{y}\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2} \underset{0<|y|<\bar{\delta}}{>} \frac{1-\frac{1}{M}}{\delta^2}$

introduco δ

$0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$

$\exists\ \bar{\delta} > 0$ t.c.

per $0<|y|<\bar{\delta}$

$\Rightarrow \left|\frac{\operatorname{sen}(y)}{y} - 1\right| < \frac{1}{M}$

$\Leftrightarrow 1-\frac{1}{M} < \frac{\operatorname{sen}(y)}{y} < 1+\frac{1}{M}$

Esempio

Abbiamo che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(y)}{x^2 y} = +\infty$. Per prima cosa osserviamo che per $y \to 0 \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}(y)}{y} \to 1$

Adesso, preso $M > 0$ allora: $\frac{\operatorname{sen}(y)}{x^2 y} = \frac{\operatorname{sen}(y)}{y}\frac{1}{x^2} \geq \frac{\operatorname{sen}(y)}{y}\frac{1}{x^2+y^2} = \frac{\operatorname{sen}(y)}{y}\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2} \underset{0<|y|<\bar{\delta}}{>} \frac{1-\frac{1}{M}}{\delta^2} > M$

introduco M

$\exists\ \bar{\delta} > 0$ t.c. per $0 < |y| < \bar{\delta}$

$\Rightarrow \left| \frac{\operatorname{sen}(y)}{y} - 1 \right| < \frac{1}{M}$

$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{M} < \frac{\operatorname{sen}(y)}{y} < 1 + \frac{1}{M}$

quindi $\frac{1}{\delta^2} > \frac{M^2}{M-1} \Leftrightarrow \delta < \frac{\sqrt{M-1}}{M}$

e selezionando $\delta = \min\{\bar{\delta}, \delta\}$ allora

per $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}(y)}{x^2 y} > M$ ■

Esempio

Abbiamo che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(y)}{x^2 y} = +\infty$. Per prima cosa osserviamo che per $y \to 0 \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}(y)}{y} \to 1$

Adesso, preso $M > 0$ allora:

$$\frac{\operatorname{sen}(y)}{x^2 y} = \frac{\operatorname{sen}(y)}{y}\frac{1}{x^2} \geq \frac{\operatorname{sen}(y)}{y}\frac{1}{x^2+y^2} = \frac{\operatorname{sen}(y)}{y}\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2} > \frac{1-\frac{1}{M}}{\delta^2} > M$$

$0<|y|<\bar\delta$; introduco δ: $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$; introduco M

$\exists\, \bar\delta > 0$ t.c. per $0<|y|<\bar\delta$

$\Rightarrow \left|\frac{\operatorname{sen}(y)}{y} - 1\right| < \frac{1}{M}$

$\Leftrightarrow 1-\frac{1}{M} < \frac{\operatorname{sen}(y)}{y} < 1+\frac{1}{M}$

quindi $1/\delta^2 > \frac{M^2}{M-1} \Leftrightarrow \delta < \frac{\sqrt{M-1}}{M}$

e selezionando $\delta = \min\{\bar\delta, \delta\}$ allora

per $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}(y)}{x^2 y} > M$ ■

Esempio

Vale che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen} x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$; infatti fissato $\varepsilon > 0$ si ha che:

$$\left|\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0\right| = \frac{|\operatorname{sen}(x^2)|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \left|\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2}\right| \cdot \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Esempio

Abbiamo che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(y)}{x^2 y} = +\infty$. Per prima cosa osserviamo che per $y \to 0 \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}(y)}{y} \to 1$

Adesso, preso $M > 0$ allora: $\frac{\operatorname{sen}(y)}{x^2 y} = \frac{\operatorname{sen}(y)}{y} \frac{1}{x^2} \geq \frac{\operatorname{sen}(y)}{y} \frac{1}{x^2+y^2} = \frac{\operatorname{sen}(y)}{y} \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^2} \underset{0<|y|<\bar{\delta}}{>} \frac{1-\frac{1}{M}}{\delta^2} > M$

introduco M

introduco δ
$0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$

$\exists\ \bar{\delta} > 0$ t.c.
per $0 < |y| < \bar{\delta}$
$\Rightarrow \left| \frac{\operatorname{sen}(y)}{y} - 1 \right| < \frac{1}{M}$

$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{M} < \frac{\operatorname{sen}(y)}{y} < 1 + \frac{1}{M}$

quindi $1/\delta^2 > \frac{M^2}{M-1} \Leftrightarrow \delta < \frac{\sqrt{M-1}}{M}$

e selezionando $\delta = \min\{\bar{\delta}, \delta\}$ allora

per $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}(y)}{x^2 y} > M$ ∎

Esempio

Vale che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen} x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$; infatti fissato $\varepsilon > 0$ si ha che:

$$\left| \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| = \frac{|\operatorname{sen}(x^2)|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \left| \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2} \right| \cdot \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \underset{x^2 \leq x^2+y^2}{\leq} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} < \delta < \varepsilon$$

introduco δ

Allora se scegliamo $\delta < \varepsilon$, non appena $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow \left| \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| < \varepsilon$ ■

Allora se scegliamo $\delta < \varepsilon$, non appena $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow \left| \dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| < \varepsilon$ ■

<u>Osservazione 1</u>

- Supponiamo che $\exists$ limite per $\overbrace{p=(x,y) \to P_0=(x_0,y_0) \text{ di } f(P)}^{= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \quad (\mathrm{I})}$. Allora fissata una qualunque <u>direzione</u> $\underline{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ con $\|\underline{v}\| = \sqrt{v_1^2+v_2^2} = 1$, si verifica subito che $\boxed{\exists \lim_{t\to 0} f(P_0 + t\underline{v})}$ e inoltre $\boxed{\lim_{t\to 0} f(P_0 + t\underline{v}) = \lim_{t\to 0} f((x_0 + t v_1, y_0 + t v_2)) = L}$

Allora se scegliamo $\delta < \varepsilon$, non appena $0<\sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow \left| \dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| < \varepsilon$ ■

<u>Osservazione 1</u>

- Supponiamo che $\exists$ limite per $\overbrace{P=(x,y) \to P_0=(x_0,y_0) \text{ di } f(P)}^{= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \quad (\mathrm{I})}$. Allora fissata una qualunque <u>direzione</u> $\underline{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ con $\|\underline{v}\| = \sqrt{v_1^2+v_2^2} = 1$, si verifica subito che $\exists \lim_{t\to 0} f(P_0 + t\underline{v})$ e inoltre $\lim_{t\to 0} f(P_0+t\underline{v}) = \lim_{t\to 0} f((x_0+tv_1, y_0+tv_2)) = L$

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall \varepsilon>0 \quad \text{non appena} \quad 0<\|P_0+t\underline{v} - P_0\| = \|t\underline{v}\| = |t|\overset{1}{\overset{\shortparallel}{\|\underline{v}\|}} = |t| < \underset{\text{per }(\mathrm{I})}{\delta} \\ \qquad \Rightarrow \quad |f(P_0+t\underline{v}) - L| < \varepsilon \end{array}}$$

Allora se scegliamo $\delta < \varepsilon$, non appena $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow \left| \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| < \varepsilon$ ■

Osservazione 1

- Supponiamo che $\exists$ limite per $\overbrace{p=(x,y) \to p_0=(x_0,y_0) \text{ di } f(p)}^{= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \quad (\mathrm{I})}$. Allora fissata una qualunque direzione $\underline{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ con $\|\underline{v}\| = \sqrt{v_1^2+v_2^2} = 1$, si verifica subito che $\exists \lim_{t\to 0} f(p_0 + t\underline{v})$ e inoltre $\lim_{t\to 0} f(p_0+t\underline{v}) = \lim_{t \to 0} f((x_0+tv_1, y_0+tv_2)) = L$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \text{non appena} \quad 0 < \|p_0 + t\underline{v} - p_0\| = \|t\underline{v}\| = |t|\overbrace{\|\underline{v}\|}^{=1} = |t| < \underbrace{\delta}_{\text{per } (\mathrm{I})}$$

$$\Rightarrow \quad |f(p_0 + t\underline{v}) - L| < \varepsilon$$

- In altre parole, se esiste il limite per $\overset{p}{(x,y)} \to \overset{p_0}{(x_0,y_0)}$ di $f(x,y)$, allora fissato un qualunque versore ($\underline{v} = (h,k) \in \mathbb{R}^2 : h^2+k^2 = 1$) si ha che $\exists$ il limite direzionale $\lim_{t\to 0} f(p_0+t\underline{v})$ e il valore di tale limite (che coincide con $L = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$) è indipendente da $\underline{v}$.

Allora se scegliamo $\delta < \varepsilon$, non appena $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow \left| \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| < \varepsilon$ ■

Osservazione 1

• Supponiamo che $\exists$ limite per $\overbrace{p=(x,y) \to p_0 = (x_0,y_0) \text{ di } f(p)}^{= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \quad (\mathrm{I})}$. Allora fissata una qualunque direzione $\underline{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ con $\|\underline{v}\| = \sqrt{v_1^2+v_2^2} = 1$, si verifica subito che $\exists \lim_{t\to 0} f(p_0 + t\underline{v})$ e inoltre $\lim_{t\to 0} f(p_0+t\underline{v}) = \lim_{t\to 0} f((x_0+tv_1, y_0+tv_2)) = L$

$\forall \varepsilon > 0$ non appena $0 < \|p_0 + t\underline{v} - p_0\| = \|t\underline{v}\| = |t|\|\underline{v}\| = |t| < \delta$

Testo

$\Rightarrow |f(p_0+t\underline{v}) - L| < \varepsilon$ per (I)

• In altre parole, se esiste il limite per $(\overset{p}{x,y}) \to (\overset{p_0}{x_0,y_0})$ di $f(x,y)$, allora fissato un qualunque versore $(\underline{v} = (h,k) \in \mathbb{R}^2 : h^2+k^2 = 1)$ si ha che $\exists$ il limite direzionale $\lim_{t\to 0} f(p_0+t\underline{v})$ e il valore di tale limite (che coincide con $L = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$) è <u>indipendente</u> da $\underline{v}$.

• Come conseguenza se sappiamo che $\exists \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ (ma non ne conosciamo il valore) e se $\exists \lim_{t\to 0} f((x_0,y_0)+t\underline{v}) = L$ con $\underline{v}$ versore fissato $\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$

- D'altra parte, se $\exists$ il limite direzionale in $P_0 = (x_0, y_0)$ ed esso dipende dalla direzione (o non esiste per qualche direzione) allora $f(P)$ non ammette limite per $P \to P_0$;

- D'altra parte, se $\exists$ il limite direzionale in $P_0 = (x_0, y_0)$ ed esso dipende dalla direzione (o non esiste per qualche direzione) allora $f(P)$ non ammette limite per $P \to P_0$; in una tipica situazione: $\exists$ una direzione $\underline{v}_1$, $\|\underline{v}_1\| = 1$, e una seconda direzione $\underline{v}_2$, $\|\underline{v}_2\| = 1$, con $\underline{v}_1 \neq \underline{v}_2$ e tali che

$$\boxed{\lim_{t \to 0} f(P + t\underline{v}_1) \neq \lim_{t \to 0} f(P + t\underline{v}_2) \Rightarrow \nexists \lim_{P \to P_0} f(P)}$$

- D'altra parte, se $\exists$ il limite direzionale in $P_0 = (x_0, y_0)$ ed esso dipende dalla direzione (o non esiste per qualche direzione) allora $f(P)$ non ammette limite per $P \to P_0$; in una tipica situazione: $\exists$ una direzione $\underline{v}_1$, $\|\underline{v}_1\| = 1$, e una seconda direzione $\underline{v}_2$, $\|\underline{v}_2\| = 1$, con $\underline{v}_1 \neq \underline{v}_2$ e tali che

$$\lim_{t \to 0} f(P + t\underline{v}_1) \neq \lim_{t \to 0} f(P + t\underline{v}_2) \Rightarrow \nexists \lim_{P \to P_0} f(P)$$

Esempio

Consideriamo il limite $\boxed{\lim_{(x,y) \to (0,0)} \underbrace{\frac{xy}{x^2+y^2}}_{= f(x,y)}}$ e proviamo che non esiste.

Fissiamo un vettore $\underline{v} = (h, k)$ con $h^2 + k^2 = 1$ $\Rightarrow$ $\boxed{\underbrace{(0,0)}_{= P_0} + t\underbrace{(h,k)}_{= \underline{v}} = (th, tk)}$

- D'altra parte, se $\exists$ il limite direzionale in $P_0 = (x_0, y_0)$ ed esso dipende dalla direzione (o non esiste per qualche direzione) allora $f(P)$ non ammette limite per $P \to P_0$; in una tipica situazione: $\exists$ una direzione $\underline{v}_1$, $\|\underline{v}_1\| = 1$, e una seconda direzione $\underline{v}_2$, $\|\underline{v}_2\| = 1$, con $\underline{v}_1 \neq \underline{v}_2$ e tali che

$$\lim_{t \to 0} f(P + t\underline{v}_1) \neq \lim_{t \to 0} f(P + t\underline{v}_2) \Rightarrow \nexists \lim_{P \to P_0} f(P)$$

Esempio

Consideriamo il limite $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \underbrace{\frac{xy}{x^2+y^2}}_{= f(x,y)}$ e proviamo che non esiste.

Fissiamo un vettore $\underline{v} = (h, k)$ con $h^2 + k^2 = 1 \Rightarrow \underbrace{(0,0)}_{= P_0} + t \underbrace{(h,k)}_{= \underline{v}} = (th, tk)$

quindi il limite direzionale diventa:

$$\lim_{t \to 0} f(P_0 + t\underline{v}) = \lim_{t \to 0} f(th, tk) = \lim_{t \to 0} \frac{th\,tk}{t^2h^2 + t^2k^2} = \lim_{t \to 0} \frac{t^2 hk}{t^2(h^2+k^2)} = \boxed{\frac{hk}{h^2+k^2} \underset{h^2+k^2=1}{=} hk} \quad (\mathrm{I})$$

allora se prendiamo $\boxed{\underline{v}_1 = (1,0) \text{ cioè } h=1, k=0 \Rightarrow \lim_{t \to 0} f(P_0 + t\underline{v}_1) \underset{(\mathrm{I})}{=} 1 \cdot 0 = 0}$

Se invece prendiamo $\boxed{\underline{v}_2 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \text{ cioè } h = 1/\sqrt{2} = k \Rightarrow \lim_{t \to 0} f(P_0 + t\underline{v}_2) \underset{(\mathrm{I})}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}}$

Allora $\lim_{t\to 0} f(P_0 + t v_1) \neq \lim_{t\to 0} f(P_0 + t v_2)$ quindi il limite direzionale dipende dalla direzione (h,k)

$\Rightarrow$ si può concludere che $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$.

Allora $\lim_{t \to 0} f(P_0 + t v_1) \neq \lim_{t \to 0} f(P_0 + t v_2)$ quindi il limite direzionale dipende dalla direzione (h,k)

$\Rightarrow$ si può concludere che $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$.

Osservazione 2

• L'esistenza del limite direzionale non garantisce tuttavia l'esistenza del limite. Consideriamo per esempio

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{y}\sqrt{x^2+y^2}, \quad \text{con } P_0 = (0,0).} \qquad \text{(III)}$$

Allora $\lim_{t \to 0} f(P_0 + t\underline{v}_1) \neq \lim_{t \to 0} f(P_0 + t\underline{v}_2)$ quindi il limite direzionale dipende dalla direzione (h,k)

$\Rightarrow$ si può concludere che $\nexists \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$.

Osservazione 2

• L'esistenza del limite direzionale non garantisce tuttavia l'esistenza del limite. Consideriamo per esempio $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x}{y}\sqrt{x^2+y^2}$, con $P_0 = (0,0)$. (III)

Il limite direzionale (per $\underline{v} = (h,k)$, $h^2+k^2=1$) è dato da:

$$\lim_{t \to 0} \frac{th}{tk}\sqrt{t^2h^2+t^2k^2} = \lim_{t \to 0} \frac{h}{k}|t|\underbrace{\sqrt{h^2+k^2}}_{=1} = \frac{h}{k}\lim_{t \to 0}|t| = 0$$

tale limite esiste ed è uguale a "0" lungo ogni direzione $\underline{v} = (h,k)$, $k \neq 0$. Perciò, dall'osservazione 1,

se $\exists \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x}{y}\sqrt{x^2+y^2}$ esso dovrebbe essere uguale al limite direzionale, ovvero uguale a "0".

Allora $\lim_{t\to 0} f(P_0 + t\underline{v}_1) \neq \lim_{t\to 0} f(P_0 + t\underline{v}_2)$ quindi il limite direzionale dipende dalla direzione (h,k)

$\Rightarrow$ si può concludere che $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$.

---

osservazione 2

- L'esistenza del limite direzionale non garantisce tuttavia l'esistenza del limite. Consideriamo per esempio

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{y}\sqrt{x^2+y^2}, \quad \text{con } P_0 = (0,0). \qquad (\mathrm{III})$$

Il limite direzionale (per $\underline{v} = (h,k)$, $h^2+k^2=1$) è dato da:

$$\lim_{t\to 0} \frac{th}{tk}\sqrt{t^2h^2+t^2k^2} = \lim_{t\to 0} \frac{h}{k}|t|\underbrace{\sqrt{h^2+k^2}}_{=1} = \frac{h}{k}\lim_{t\to 0}|t| = 0$$

tale limite esiste ed è uguale a "0" lungo ogni direzione $\underline{v} = (h,k)$, $k\neq 0$. Perciò, dall'osservazione 1, se $\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{y}\sqrt{x^2+y^2}$ esso dovrebbe essere uguale al limite direzionale, ovvero uguale a "0".

D'altra parte, considerando il limite della restrizione della funzione $f(x,y) = \frac{x}{y}\sqrt{x^2+y^2}$ alla curva $y = x^2$, $x>0$ allora si ottiene $\lim_{x\to 0^+} f(x,x^2) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x^2}\sqrt{x^2+x^4} = \lim_{x\to 0^+}\sqrt{1+x^2} = 1$ quindi il limite (III) non esiste ∎