Omologia simpliciale

intuitivo:

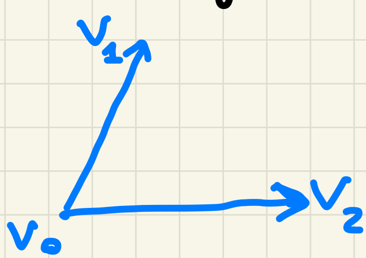
simplesso	0-dim	punto
simplesso	1-dim	intervallo
simplesso	2-dim	triangolo
simplesso	3-dim	tetraedro

Sia V uno spazio vettoriale.
Siano $v_0, v_1, \quad , v_k$ tali che

$\{ v_i - v_0 \mid i = 1, \quad , k \}$ sono

linearmente indipendenti

esempio



l'inviluppo convesso di

$v_0, v_1, \quad , v_k$ è un

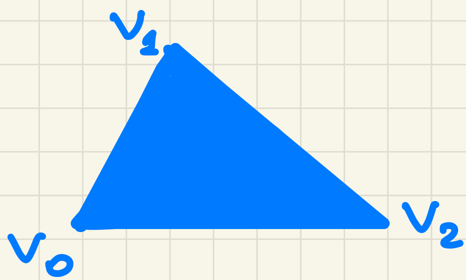
SIMPLESSO CHIUSO di dim k

si denota

$[v_0, v_1, \quad , v_k] =$

$$= \left\{ v \in V \;\middle|\; v = \sum_{i=0}^{k} a_i v_i \ , a_i \geq 0 \ , \sum a_i = 1 \right\}$$

esempio



$(v_0, v_1, \quad , v_k)$ è il simplesso

aperto, ossia $a_i \underset{\neq}{\geq} 0$ $\quad i = 0, \quad , k$

denotiamo $[S]$ e (S)

Sia $[S] = [v_0, v_1, \ \ , v_k]$

v_i sono i vertici di $[S]$

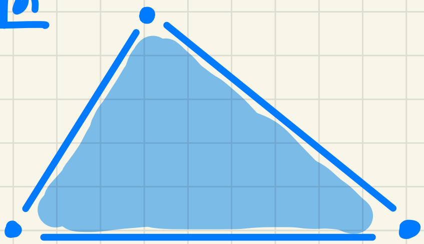
le facce chiuse di $[S]$ sono

i simplessi chiusi

$[v_{j_0}, \dots, v_{j_n}]$ con $\underbrace{\{j_0, \dots, j_k\}}_{\neq \emptyset} \subset \{1, \dots, k\}$

$(v_{j_0}, \dots, v_{j_n})$ facce aperte.

esempi



facce aperte del triangolo

un simplesso chiuso è unione disgiunta delle sue facce aperte

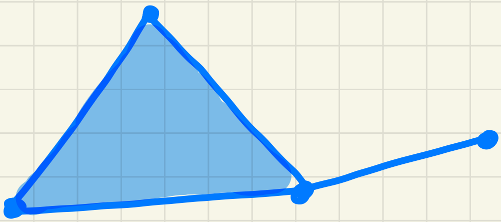
<u>**Def**</u> un COMPLESSO SIMPLICIALE K è un insieme finito di simplessi aperti in $\mathbb{R}^n$ t.c.

1. se $(S) \in K$ allora anche tutte le facce aperte di $[S]$ stanno in K

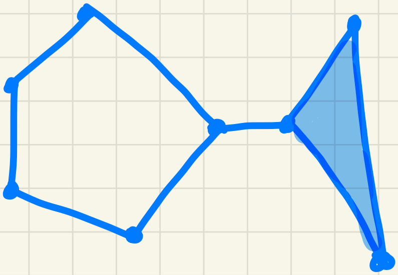
2. se $(S_1), (S_2) \in K$ e $(S_1) \cap (S_2) \neq \emptyset$ allora $(S_1) = (S_2)$

la dimensione di K è la dimensione massima dei simplessi di K.

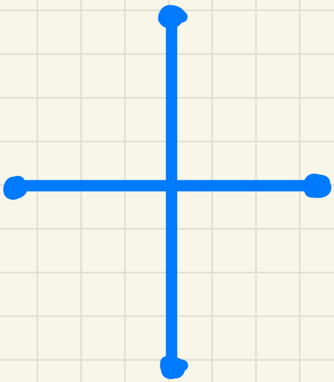
esempi :



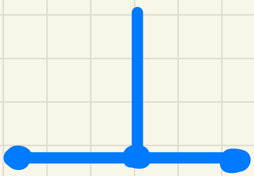
SI



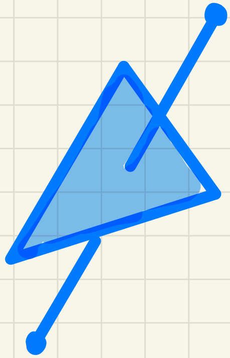
SI



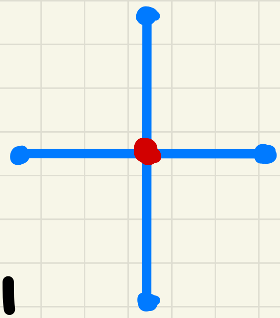
NO



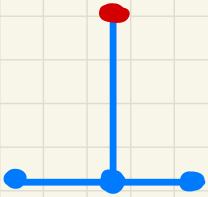
NO



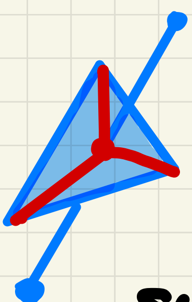
NO



SI



SI



SI

Notazione :

K è un dato combinatorio.

$[K] \overset{\text{def.}}{=}$ unione dei punti che costituiscono i simplessi aperti di K.

NB $[K]$ è compatto

$$[K] = \bigcup_{(s) \in K} (s) = \bigcup_{(s) \in K} [s]$$

gruppo fondamentale di un complesso simpliciale K.

Un LATO in K è una coppia ordinatata $\boxed{e = |v_1 v_2|}$, tale che v_1 e v_2 stanno in un simplesso di K

v_1 è l'origine di e
v_2 la fine di e

$$e^{-1} \stackrel{def}{=} |v_2 v_1|$$

Un cammino ω è una successione finita di lati in K

$$\omega = e_1 e_2 \quad e_k$$

tali che $\forall$ i la fine di e_i è uguale all'origine di e_{i+1}.

L'origine di ω è l'origine di e_1
la fine di ω è la fine di e_k

Siano $\omega = e_1 \cdots e_k$

$\sigma = e_1' \cdots e_m'$

con fine di ω = origine di σ

il prodotto

$$\boxed{\omega\sigma = e_1 \cdots e_k \, e_1' \cdots e_m'}$$

$$\boxed{\omega^{-1} = e_k^{-1} \cdots e_1^{-1}}$$

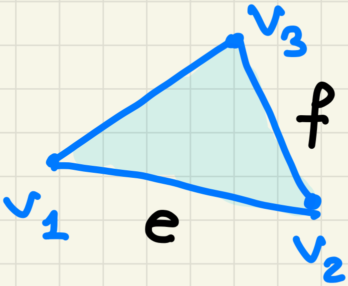
Definiamo una <u>relazione</u>
<u>di equivalenza</u> sull'insieme
dei cammini :

Se $e = |v_1 v_2|$ e $f = |v_2 v_3|$

sono dati che v_1, v_2, v_3

sono <u>vertici di un simplesso</u>

(ossia $(v_1, v_2, v_3) \subset K$)



allora

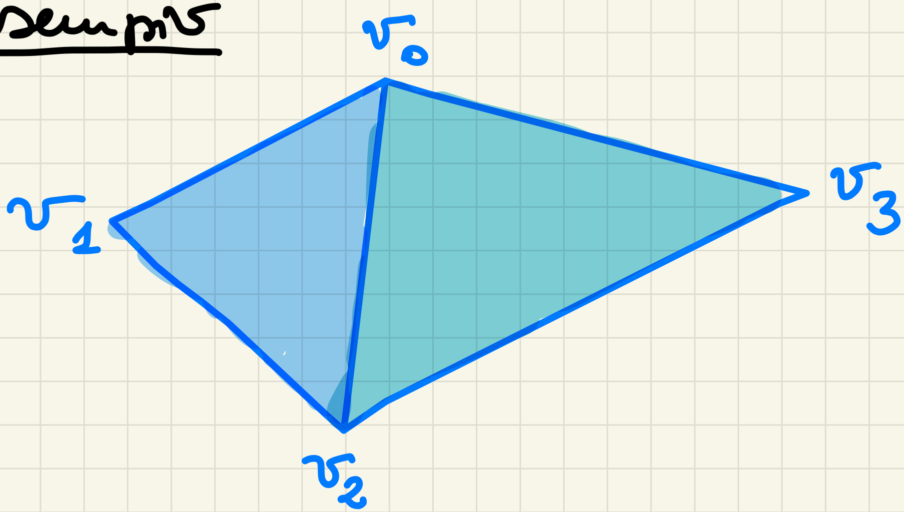
$$ef \sim |v_1 v_3|$$

Due cammini ω e θ sono equivalenti

$$\omega \overset{E}{\sim} \theta$$

se θ può essere ottenuto da ω mediante una sequenza di equivalenze di lati.

esempio



$$\underbrace{|v_0 v_1||v_1 v_2|}_{\omega} \simeq^E \underbrace{|v_0 v_2|}_{\sim} \simeq \underbrace{|v_0 v_3||v_3 v_2|}_{\sigma}$$

NB $\sim^E$ è una relazione di equivalenza

$\omega\,\omega^{-1} \sim^E |v_1|$ $\quad v_1$ origine di ω

<u>Teo</u> Sia K un complesso simpliciale. Sia $E(K, v_0)$ l'insieme delle classi di equivalenza di cammini con origine e fine in v_0.

$E(K, v_0)$ è un gruppo con l'operazione di prodotto indotta da quella tra cammini definita prima.

NB $E(K, v_0)$ è un oggetto di natura PURAMENTE <u>combinatoria</u>
<u>NON</u> usa le proprietà topologiche di $[K]$

Teorema Sia K un complesso simpliciale e sia v_0 un vertice di K. Allora $E(K, v_0)$ è isomorfo a $\pi_1([K], v_0)$.

modellare uno spazio top. X con un complesso simpliciale permette di studiare la topologia di X con strumenti di combinatoria.

simplesso orientato

due ordini dei vertici

$v_{j_0}, \dots, v_{j_e}$ e $v_{k_0}, \dots, v_{k_e}$

sono equivalenti se differiscono per una permutazione pari.

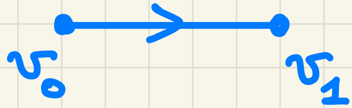
quando si sceglie una di queste due orientazioni il simplesso si dice orientato e si indica così:

$$\langle v_0, v_1, \quad , v_e \rangle$$

NB

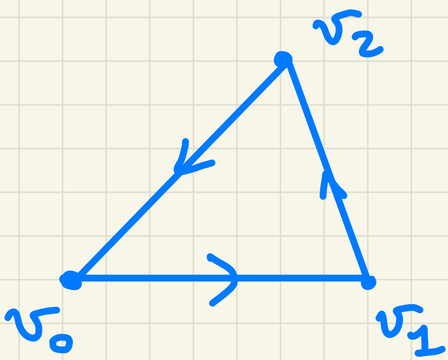
1-simplesso orientato dà una direzione

$\langle v_0, v_1 \rangle$



2-simplesso orientato dà un senso di rotazione

$\langle v_0, v_1, v_2 \rangle$



ℓ-simplesso orientato dà una orientazione $\mathrm{Span}\{v_1 - v_0, \ , v_\ell - v_0\}$

Sia K un complesso simpliciale

Consideriamo:

$$\boxed{\left\{ \sum_{\substack{s \\ \ell\text{-simplesso}}} n_s \langle s \rangle \;\middle|\; n_s \in \mathbb{Z} \right\}}$$

gruppo libero abeliano generato dagli ℓ-simplessi orientati.

$$\boxed{\left\{ \langle v_0, v_1, \ , v_\ell \rangle + \langle v_1, v_0, \dots, v_\ell \rangle \right\}}$$

sottogruppo generato dagli elementi di questo tipo.

$$C_\ell(K,\mathbb{Z}) \overset{\text{def}}{=} \frac{\text{gruppo libero}}{\text{sottogruppo}}$$

gruppo delle ℓ - CATENE di K a coefficienti interi.

informalmente possiamo pensare che le ℓ-catene sono

$$\sum_{\substack{s \\ \ell \text{ simplesso}}} n_s \langle v_0, v_1, \ , v_\ell \rangle$$

con la regola che

$$\langle v_0, v_1, \ , v_\ell \rangle = -\langle v_1, v_0, \ , v_\ell \rangle$$

ossia quando incontro un simplesso e il suo opposto li posso semplificare.

mappa bordo

Sia K un complesso simpliciale.

definiamo un omomorfismo di gruppi

$$\partial : C_{\ell+1}(K, \mathbb{Z}) \longrightarrow C_\ell(K, \mathbb{Z})$$

nel modo seguente:

$$\langle s \rangle = \langle v_0, v_1, \dots, v_{\ell+1} \rangle \longmapsto$$

si elimina

- $$\partial \langle s \rangle = \underbrace{\sum_{j=0}^{\ell+1} (-1)^j \langle v_0, v_1, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_{\ell+1} \rangle}_{\text{bordo di } \langle s \rangle}$$

e

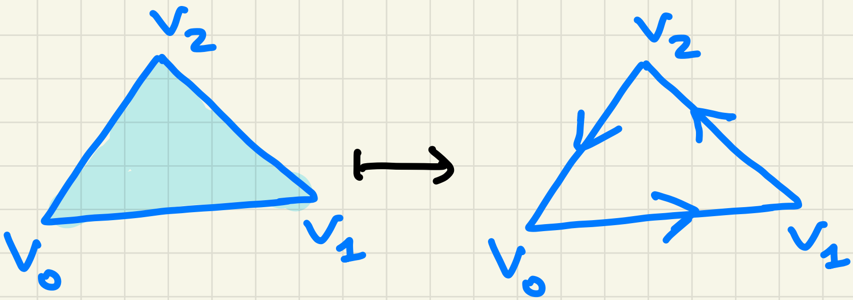
- $$\partial\left(\sum a_s \langle s \rangle\right) = \sum a_s \partial \langle s \rangle$$

esempi

$$\partial \langle v_0, v_1 \rangle = \langle v_1 \rangle - \langle v_0 \rangle$$

$$\partial \langle v_0, v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle - \langle v_0, v_2 \rangle + \langle v_0, v_1 \rangle$$

$\partial :$



OSS posso rimpiazzare $\mathbb{Z}$ con un gruppo abeliano G avrò $C_\ell(K, G)$

$$\partial : C_{\ell+1}(K, G) \to C_\ell(K, G)$$

Consideriamo

$$\to C_{\ell+1} \xrightarrow{\partial} C_\ell \xrightarrow{\partial} C_{\ell-1} \to \cdots$$

Lemma $\boxed{\partial^2 = 0}$

Definiamo

$$\underbrace{Z_\ell(K,G) = \{ c \in C_\ell(K,G) \mid \partial c = 0 \}}_{\text{cicli}}$$

$$\underbrace{B_\ell(K,G) = \{ \partial c \mid c \in C_{\ell+1}(K,G) \}}_{\text{bordi}}$$

NB $\partial^2 = 0 \Rightarrow B_\ell(K,G) \underset{\text{sgr}}{\subseteq} Z_\ell(K,G)$

$\partial(\partial c) = \partial^2 c = 0$

$$H_\ell(K,G) = \frac{Z_\ell(K,G)}{B_\ell(K,G)}$$

cicli

classi di equivalenza di cicli

bordi

due cicli sono equivalenti quando differiscono per un bordo

ℓ-esimo gruppo di <u>omologia</u>

di K a coefficienti in G.

NB $H_\ell(K,G)$ è un

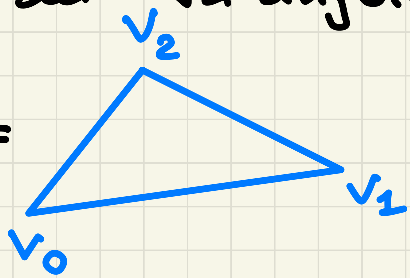
invariante topologico di K

Se $f : [K] \to [L]$ è un omeomorfismo allora

$$f_* : H_\ell(K,G) \to H_\ell(L,G)$$

isomorfismo

Come esempio calcoliamo l'omologia del triangolo vuoto e del triangolo pieno.

$K =$ 

triangolo vuoto

$$C_0(K,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$$

$$C_1(K,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$$

$$C_\ell(K,\mathbb{Z}) = 0 \qquad \ell > 1$$

$$0 \xleftarrow{\partial} C_0 \xleftarrow{\partial} C_1 \xleftarrow{\partial} C_2 \longleftarrow$$

$$\partial^2 = 0$$

$$H_1(K,\mathbb{Z}) = \frac{Z_1(K,\mathbb{Z})}{B_1(K,\mathbb{Z})} = ?$$

$$Z_1 = \{ c \in C_1 \mid \partial c = 0 \}$$

$$c = m_1(v_0, v_1) + m_2(v_1, v_2) + m_3(v_2, v_0)$$

$$m_i \in \mathbb{Z}$$

$$\partial c = m_1(v_1) - m_1(v_0) + m_2(v_2) - m_2(v_1) + m_3(v_0) - m_3(v_2)$$

$$\partial c = 0 \iff \begin{cases} m_3 - m_1 = 0 \\ m_1 - m_2 = 0 \\ m_2 - m_3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff$$

$$m_1 = m_2 = m_3$$

$Z_1 = \mathbb{Z}$ ogni 1-catena che ha bordo 0 è un multiplo del perimetro del triangolo

$B_1 = 0$ perché $C_2 = 0$

$$\Rightarrow \boxed{H_1(K, \mathbb{Z}) = \frac{Z_1}{B_1} = \mathbb{Z}}$$

$$H_0(K, \mathbb{Z}) = \frac{Z_0(K, \mathbb{Z})}{B_0(K, \mathbb{Z})} = ?$$

$$Z_0(K, \mathbb{Z}) = C_0(K, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

$$B_0 = \{\partial c \mid c \in C_1\}$$

cerchiamo $c_0 \in C_0$ t.c.

esiste $c_1 \in C_1$ e $c_0 = \partial c_1$

$$C_0 = n_1 \langle v_0 \rangle + n_2 \langle v_1 \rangle + n_3 \langle v_2 \rangle \qquad n_i \in \mathbb{Z}$$

$$C_1 = m_1 \langle v_0, v_1 \rangle + m_2 \langle v_1, v_2 \rangle + m_3 \langle v_2, v_0 \rangle$$

$$m_i \in \mathbb{Z}$$

$$C_0 = \partial C_1$$

$$\Updownarrow$$

$$\circledast \begin{cases} m_3 - m_1 = n_1 \\ m_1 - m_2 = n_2 \\ m_2 - m_3 = n_3 \end{cases}$$

ammette soluzioni intere

__oss__

$\circledast \Rightarrow n_1 + n_2 + n_3 = 0$

viceversa, se $n_1 + n_2 + n_3 = 0$

esistono soluz. intere

$$\begin{cases} m_3 = n_1 + m_1 \\ m_2 = -n_2 + m_1 \end{cases}$$

quindi

$$B_0(K, \mathbb{Z}) = \{ n_1\langle v_0\rangle + n_2\langle v_1\rangle + n_3\langle v_2\rangle \mid n_1 + n_2 + n_3 = 0 \}$$

ricordiamo che

$$H_0 = \frac{Z_0}{B_0}$$

consideriamo

$$Z_0 = C_0 \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}$$

$$\varphi\left(n_1\langle v_0\rangle + n_2\langle v_1\rangle + n_3\langle v_2\rangle\right) =$$

$$= n_1 + n_2 + n_3$$

omomorfismo di gruppi suriettivo

$\ker \varphi = B_0$

$$\begin{tikzcd} Z_0 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{Z} \\ \frac{Z_0}{B_0} \arrow[ur, "\bar{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

applicazione indotta, $\bar{\varphi}$, è un isomorfismo.

$H_0(K, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$

G, K due gruppi

$f: G \longrightarrow K$ omomorfismo

$\underset{\text{stgr}}{\operatorname{Ker} f = \{g \in G \mid f(g) = e\} \subseteq G}$

$$\pi: G \longrightarrow \frac{G}{\operatorname{Ker} f}$$

$$g \longmapsto [g]$$

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "G"] & K \\
\frac{G}{\operatorname{Ker} f} \arrow[ur, "\bar{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

$\bar{f}([g]) = f(g)$

- $\bar{f}$ è ben definita,

Infatti se $g_2 = g_1 h \quad h \in \ker f$

$$\bar{f}([g_2]) = f(g_2) = f(g_1 h) =$$
$$= f(g_1) f(h)$$
$$= f(g_1) = \bar{f}([g_1])$$

la f sulle classi di equivalenza è costante

- $\bar{f}$ è iniettiva

riassunto:

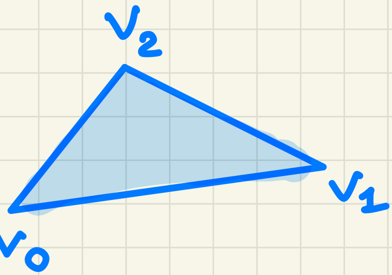
triangolo vuoto

$$H_0(\triangle, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$

$$H_1(\triangle, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$

$$H_e(\triangle, \mathbb{Z}) = 0 \quad e > 1$$

Triangolo pieno

$K =$ 

triangolo pieno

$$C_0(K,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

$$C_1(K,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

$$C_2(K,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$

$$C_\ell(K,\mathbb{Z}) = 0 \qquad \ell > 2$$

$$0 \xleftarrow{\partial} C_0 \xleftarrow{\partial} C_1 \xleftarrow{\partial} C_2 \longleftarrow$$

$$\partial^2 = 0$$

$$0 \xleftarrow{\partial} C_0 \xleftarrow{\partial} C_1$$

$$H_0(\blacktriangle, \mathbb{Z}) = H_0(\triangle, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$

$$H_1(\blacktriangle, \mathbb{Z}) = \frac{Z_1(\blacktriangle, \mathbb{Z})}{B_1(\blacktriangle, \mathbb{Z})} = ?$$

$$Z_1(\blacktriangle, \mathbb{Z}) = Z_1(\triangle, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$

$$B_1(\blacktriangle, \mathbb{Z}) = \{ \partial c \mid c \in C_2(\blacktriangle, \mathbb{Z}) \}$$

$$c = n \langle v_0, v_1, v_2 \rangle$$

$$\partial c = n(\langle v_1, v_2 \rangle + \langle v_2, v_0 \rangle + \langle v_0, v_1 \rangle)$$

quindi $\quad B_1 \simeq \mathbb{Z}$

quindi $\quad H_1 = \dfrac{\mathbb{Z}}{\mathbb{Z}} = 0$

$$H_2 = \frac{Z_2}{B_2}$$

$$Z_2 = \{ c \in C_2 \mid \partial c = 0 \}$$

$$\partial(n\langle v_0, v_1, v_2\rangle) = n\,\partial\langle v_0, v_1, v_2\rangle = 0$$

$$\iff$$

$$n = 0$$

$$Z_2 = 0$$

$$H_2 = 0$$

Riassumendo

triangolo pieno

$$H_0(\blacktriangle, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$

$$H_\ell(\blacktriangle, \mathbb{Z}) = 0 \qquad \ell > 0$$

per $\triangle$ e $\blacktriangle$ vale quanto fatto anche per G gruppo abeliano.

sugli stessi esempi calcoliamo

$\pi_1 \sim E_1$

$E_1(\triangle, v_0)$

$\omega = |v_0v_1||v_1v_2||v_2v_0|$ genera E_1

$$\boxed{E_1 \simeq \pi_1 \simeq \mathbb{Z}}$$

ricordiamo

$H_1(\triangle, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$

$E_1(\blacktriangle, v_0)$

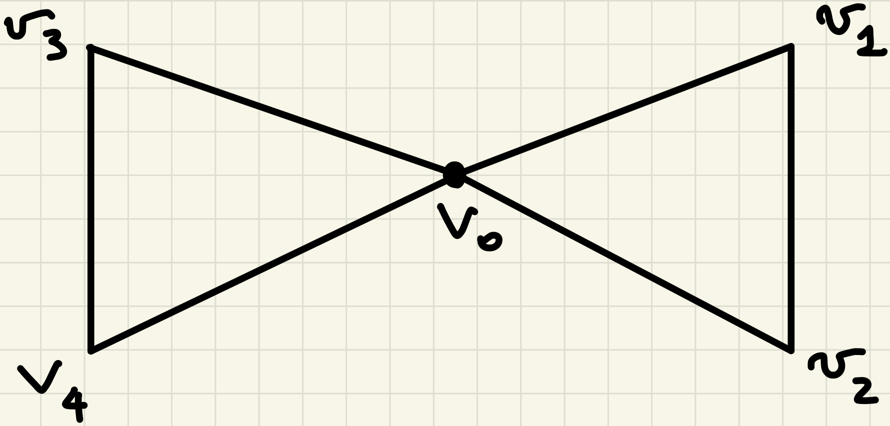
$|v_0v_1||v_1v_2||v_2v_0| \sim |v_0v_2||v_2v_0| = |v_0v_0|$

$$\boxed{\begin{array}{c} E_1 = \{e\} \\ \pi_1 = \{e\} \end{array}}$$

ricordiamo

$H_1 = 0$

altro esempio



$$\pi_1(\infty) = E_1(\bowtie) = F_2$$

gruppo libero su due generatori

$$a = |V_0 V_3||V_3 V_4||V_4 V_0|$$

$$b = |V_0 V_1||V_1 V_2||V_2 V_0|$$

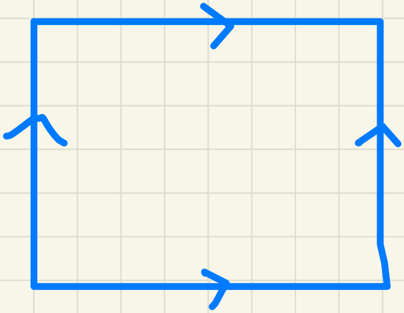
$$H_1 = \frac{Z_1}{B_1} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

in generale

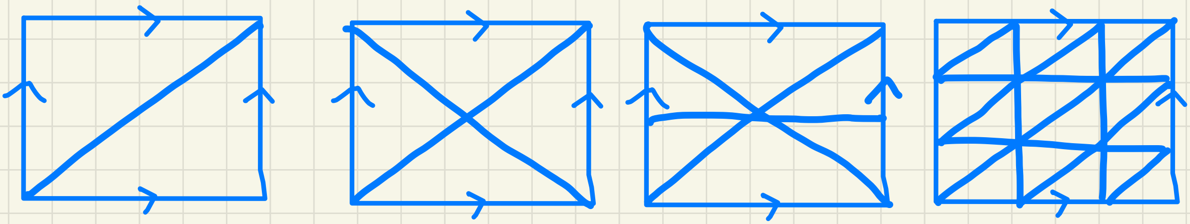
$H_1(K, \mathbb{Z})$ = abelianizzazione di $\pi_1([K])$

COMPLESSI SIMPLICIALI COME <u>MODELLI</u> COMBINATORICI DI <u>SPAZI TOPOLOGICI</u> (di varietà differenziabili)

- $S^2 = \partial \Delta^3 \qquad \Delta^3 = [0, e_1, e_2, e_3]$
- $S^n = \partial \Delta^{n+1} \qquad \Delta^{n+1} = [0, e_1, \dots, e_n]$



toro



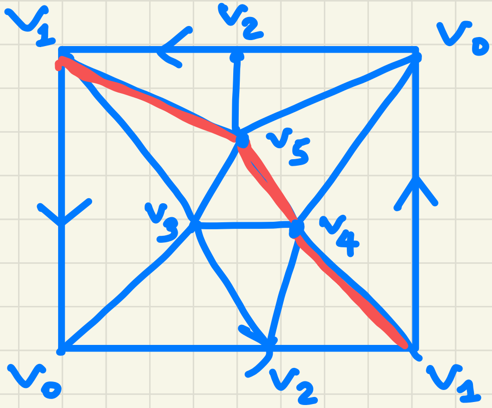
NO NO NO si

$H_0 = \mathbb{Z}$ $H_1 = \mathbb{Z}^2$ $H_2 = \mathbb{Z}$

$\pi_1 = \mathbb{Z}$

① se $(s) \in K$ allora anche tutte le facce aperte di $[s]$ stanno in K

② se $(s_1), (s_2) \in K$ e $(s_1) \cap (s_2) \neq \emptyset$ allora $(s_1) = (s_2)$



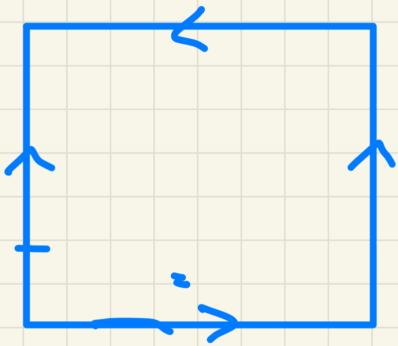
$\mathbb{R}P^2$

$H_0 = \mathbb{Z}$ $\quad$ $H_1 = \dfrac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ $\quad$ $H_2 = 0$

$C =$ 1-catena rossa

$2C = \partial(2\text{-ciclo})$

non orientabile



$H_0 = \mathbb{Z}$

$H_1 = \mathbb{Z} \oplus \dfrac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$

$H_2 = 0$

non orientabile

Teorema di Brower

indichiamo con

$$D^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$$

disco chiuso

e con

$$S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$$

<u>Lemma</u> non esiste $f: D^2 \to S^1$ <u>continua</u> con $f|_{S^1}$ = identità.

<u>Dim</u> supponiamo per assurdo che esista una tale f.

abbiamo

$$S^1 \xhookrightarrow{i} D^2 \xrightarrow{f} S^1$$

$$D^2 \xrightarrow{f} S^1 \xhookrightarrow{i} D^2$$

$f \circ i = id_{S^1}$

$i \circ f \sim id_{D^2}$

infatti

$$F : D^2 \times I \longrightarrow D^2$$

$$(x,t) \longmapsto tx + (1-t)(i \circ f)(x)$$

quindi otteni S^1 e D^2 omotopicamente equivalenti.

Ma

$$\pi_1(S^1) = E_1(\triangle) = \mathbb{Z} \qquad \pi_1(D^2) = \pi_1(\blacktriangle) = 0$$

contraddizione

Teorema di Brouwer

Sia $f : D^2 \longrightarrow D^2$ continua.

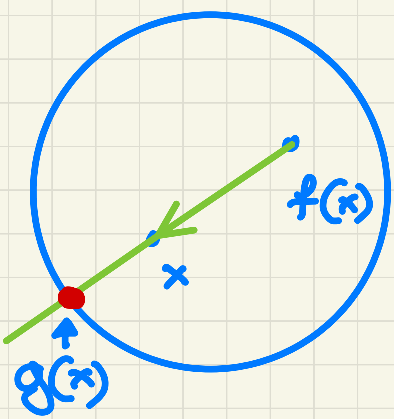
Allora f ha un punto fisso.

Dim

supponiamo per assurdo che

$\forall\, x \in D^2$ sia $f(x) \neq x$

e si consideri $v = x - f(x)$



Definiamo

$g : D^2 \longrightarrow S^1$

$\underline{x} \longmapsto g(x)$

è continua e

$g_{|S^1} = id$ assurdo.

Sia K un complesso simpliciale.

ℓ-esimo numero di Betti di K

$$\beta_\ell = \dim H_\ell(K, \mathbb{R})$$

è un invariante topologico

la caratteristica di Eulero di K è data da

$$\chi(K) = \sum_{\ell=0}^{\dim K} (-1)^\ell \beta_\ell$$

<u>Teorema</u>

$$\chi(K) = \sum_{\ell=0}^{\dim K} (-1)^\ell \alpha_\ell$$

con α_ℓ = numero dei simplessi di dim ℓ in K

Riprenderemo più avanti l'omologia simpliciale in relazione alla coomologia di de Rham di una varietà.

Per ora accenniamo solo alle superfici:

se $[K]$ è omeomorfo a una superficie connessa compatta orientabile, allora

$$\begin{array}{c} \chi(K) = \beta_0 - \beta_1 + \beta_2 = 2 - \beta_1 \\ \| \\ 2 - \underbrace{2g}_{\substack{\| \\ \beta_1}} = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 \end{array}$$

g = numero dei buchi