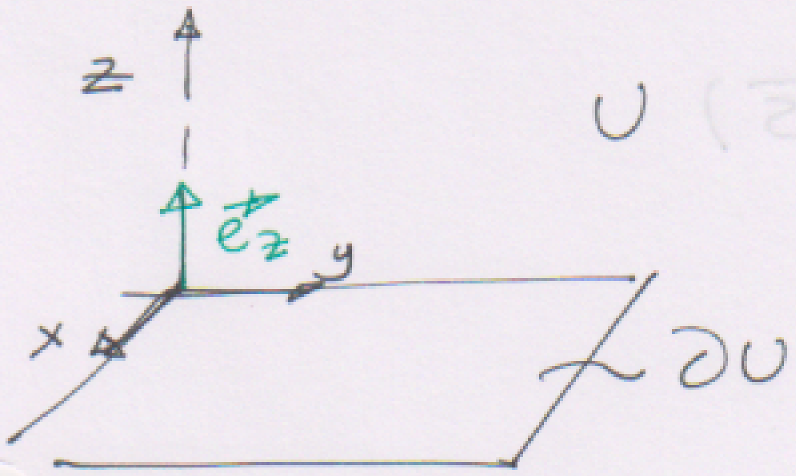
Funzione di Green: Soluzione in un semispazio di $\mathbb{R}^3$

Consideriamo il dominio $U = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0 \}$

$\partial U = \{ (x, y, z) \, \mathbb{R}^3 \ \ z = 0 \}$



Soluzione attraverso il metodo della "carica immagine"
Determiniamo $\varphi^{\bar{x}}(\bar{s})$ in maniera analoga a quanto fatto per la sfera: partiamo da $\phi(|\bar{x}-\bar{s}|)$ con $\bar{x} \in U$ e $s \in U$ (che sarà la var. di integ.) e cerchiamo una trasformazione di coordinate che sposta la singolarità di ϕ fuori dal dominio. Consideriamo la coordinata $\tilde{x}$ ottenuta tramite riflessione di $\bar{x}$ attraverso il piano $z=0$

$\vec{x} = (x_x, y_x, z_x) \Rightarrow \tilde{x} = (x_x, y_x, -z_x)$

Verifichiamo che sia $\varphi^x(\bar{s}) = \phi(|\bar{s} - \tilde{x}|) = \phi(|x_s - x_x, y_s - y_x, z_s + z_x|)$

Avremo che $\Delta_s \phi = 0$ in $U \Rightarrow \Delta_s \varphi^x = 0$ in U

$$\varphi^*(\bar{s})\Big|_{s\in\partial U} = \phi(\tilde{r}-\bar{s}) = \phi(\bar{r}-\bar{s})$$

$$\downarrow$$
$$\tilde{r}=\bar{r}$$

Abbiamo determinato la f. di Green nel semispazio

$$G(r,s) = \phi(\bar{r}-\bar{s}) - \phi(\tilde{r}-\bar{s})$$

Dove $\phi(r) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\bar{r}|}$

Quindi, la soluzione del problema in $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & r\in R^3 \quad z>0 \\ u = g(x,y) & z=0 \end{cases}$$

Si ottiene tramite Nota $\vec{\nu} = -\vec{e}_z$ normale uscente

$$u(x,y,z) = +\int_{z=0} \frac{\partial G}{\partial \vec{e}_z}\Big|_{z=0} g(x,y)\,dx\,dy$$

Calcoliamo $+\frac{\partial G}{\partial \vec{e}_z} = +\nabla_s G\cdot(0,0,1) = \frac{\partial G}{\partial z_s}$

$$= \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z_s}\Big[\left((x_r-x_s)^2+(y_r-y_s)^2+(z_r-z_s)^2\right)^{-1/2} - \left((x_r-x_s)^2+(y_r-y_s)^2+(z_r+z_s)^2\right)^{-1/2}\Big]$$

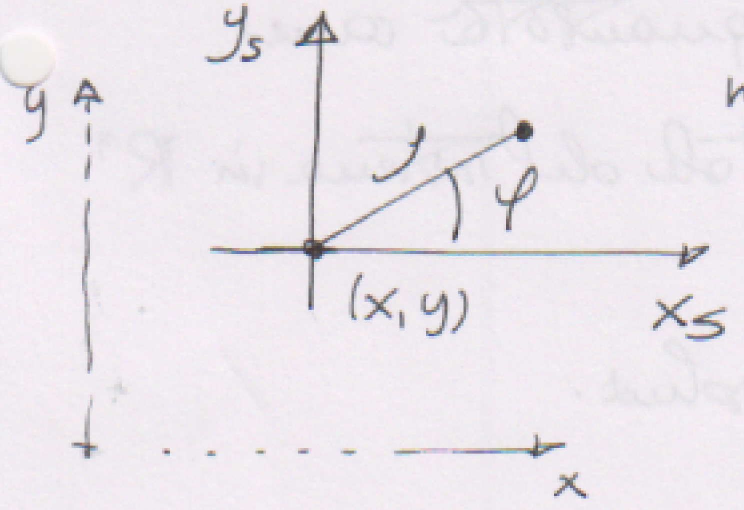
$$= \frac{1}{4\pi}\left(-\frac{1}{2}\right)\left[\frac{-2(z_2-z_s)}{[(x_2-x_s)^2+(y_2-y_s)^2+(z_2-z_s)^2]^{3/2}} - \frac{2(z_2+z_s)}{[(x_2-x_s)^2+(y_2-y_s)^2+(z_2+z_s)^2]^{3/2}}\right]$$

$$\left.\frac{\partial G}{\partial z_s}\right|_{z_s=0} = \frac{1}{4\pi}\,\frac{2 z_r}{|s-r|^3} = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\vec{e}_z\cdot\vec{r}}{|s-r|^3}$$

$$w(x,y,z) = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\vec{e}_z\cdot\vec{r}\; g(\bar{s})}{|\bar{s}-\bar{r}|^3}\, dx_s\, dy_s$$

$$= \frac{z}{2\pi}\int_{z_s=0} \frac{g(\bar{s})}{|\bar{s}-\bar{r}|^3}\, dx_s\, dy_s$$

$$= \frac{z}{2\pi}\int_{z_s=0} \frac{g(x_s,y_s)}{\left((x_s-x)^2+(y_s-y)^2+z^2\right)^{3/2}}\, dx_s\, dy_s$$



in coordinate polari nel piano $(x_s\ y_s)$ con origine nel punto (x, y)

$$w(x,y,z) = \frac{z}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} d\rho\, \frac{g(\rho,\varphi)\,\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}$$

Unicità soluzione eq. Poisson: Metodo energetico

Premessa: Eq. Poisson lega la carica elettrica di un sistema ed il potenz. elettrico associato

$$\Delta U = -4\pi \rho$$

↳ densità di carica

↳ Potenziale elettrico

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} U$$

↳ campo elettrico generato dalla carica ρ

Energia del campo Elettrico in $\mathbb{R}^3$ $= \int_{\mathbb{R}^3} |E|^2 dV$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla U|^2 dV$$

Suggerisce la scelta della seguente quantità come generalizz. del concetto di Energia ~~totale~~ del sistema in $\mathbb{R}^n$

$$E = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dV$$

con u. solut.

$$\begin{cases} \Delta u = f & x \in U \\ u = g & x \in \partial U \end{cases}$$

Ovviamente $E \geq 0$

In particolare $E=0=\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dV \Rightarrow |\nabla u|=0$

quasi ov.

$\Rightarrow \nabla u = 0$ in $\mathbb{R}^n$ $(u \in C^\infty) \Rightarrow u = $ costante

Utilizziamo E per dimostrare l'unicità della soluz. del prob. Poisson in dominio finito (alternativa a utilizzo princ. max)

$\boxed{\text{Dimo unicità}}$: Siano u, v 2 soluzioni di

$$\begin{cases} \Delta u = -f & x \in U \\ u = g & x \in \partial U \end{cases}$$

$\Rightarrow w = u - v$ è soluz. di $\begin{cases} \Delta w = 0 & x \in U \\ w = 0 & x \in \partial U \end{cases}$

Calcoliamo

$$0 = -\int_U \Delta w \cdot w \overset{dV}{=} \int_U \nabla w \nabla w \, dV + \int_{\partial U} \underset{0}{\underset{\|}{w}} (\nabla w \cdot \nu)$$

$\Rightarrow \int_U |\nabla w|^2 dV = 0 \Rightarrow \nabla w = 0 \quad w = \text{cost} = 0$

nel bordo

$\Rightarrow u = v$

Soluzione del problema di Poisson e minimo di un funzionale di Energia

Definiamo $\quad I[w] = \int_U \left(\frac{1}{2}|\nabla w|^2 - wf\right) dV$

in cui w appartiene al seguente insieme di funzioni

$$A = \{ w \in C^2(\bar{U}) \mid w = g \text{ su } \partial U \}$$

Dimostriamo che la sol. di Poisson corrisponde alla funzione in A che minimizza A

Th: Sia $u \in C^2(\bar{U})$ t.c. $\begin{cases} \Delta u = f & x \in U \\ u = g & x \in \partial U \end{cases}$

allora $\quad I[u] = \min_{w \in A} I[w]$

Vale anche il viceversa, se u da min I $\Rightarrow$ u è soluz. Eq. Poiss

Dimo. Poi $\Rightarrow$ min. prendiamo $w \in A$ e u soluz. di Eq. Pois.

Calcoliamo $\int_U \underbrace{(-\Delta u - f)}_{=0} (u-w) \, dV = 0$

$$\int_U -\Delta u \, (u-w) \, dV = \int_U \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla}(u-w) \, dV$$

$$- \int_{\partial U} \nabla u \, \overbrace{(u-w)}^{0} \cdot \hat{n} \, dS =$$

$$= \int_U |\nabla u|^2 - \int_U \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} w \, dV$$

Abbiamo

$$\int_U (|\nabla u|^2 - uf)\, dV = \int_U (\bar{\nabla} u \bar{\nabla} w - fw)\, dV$$

Stimiamo il termine a destra

$$\int_U \bar{\nabla} u \cdot \bar{\nabla} w \, dV \leq \left| \int_U \nabla u \cdot \nabla w \, dV \right| \leq \int |\nabla u \cdot \nabla w| \, dV$$

$$\leq \frac{1}{2} \int_U |\nabla u|^2 dV + \frac{1}{2} \int_U |\nabla w|^2 dV$$

dove si è utilizzato $|\nabla u \cdot \nabla w| \leq \underbrace{|\nabla u|}_{a} \underbrace{|\nabla w|}_{b} \leq$

dis. Cauchy

$$\leq \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} |\nabla w|^2$$

Si verifica immediat. $0 \leq (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

$$2ab \leq a^2 + b^2$$

Abbiamo ottenuto

$$\int_U (|\nabla u|^2 - uf)\, dV \leq \frac{1}{2} \int_U |\nabla u|^2 + \int_U \left(\frac{|\nabla w|^2}{2} - fw\right) dV$$

$$\int_U \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - uf\right) dV \leq \int_U \left(\frac{1}{2} |\nabla w|^2 - fw\right) dV$$

Quindi $I[u] \leq I[w] \quad \forall w \in A$

ed il Th è dimostrato.

Dimostriamo l'implicazione inversa

$$u \text{ t.c. } I[u] = \min_{w \in A} I[w] \Rightarrow \begin{cases} \Delta u = -f & x \in U \\ u = g & x \in \partial U \end{cases}$$

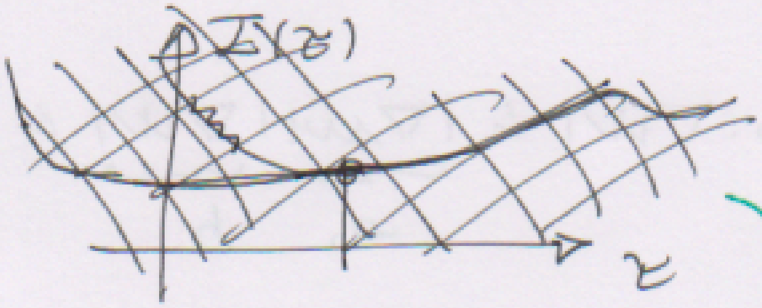
Poiché u da un minimo, scelto w t.c. $w\big|_{\partial U} = 0 \Rightarrow$

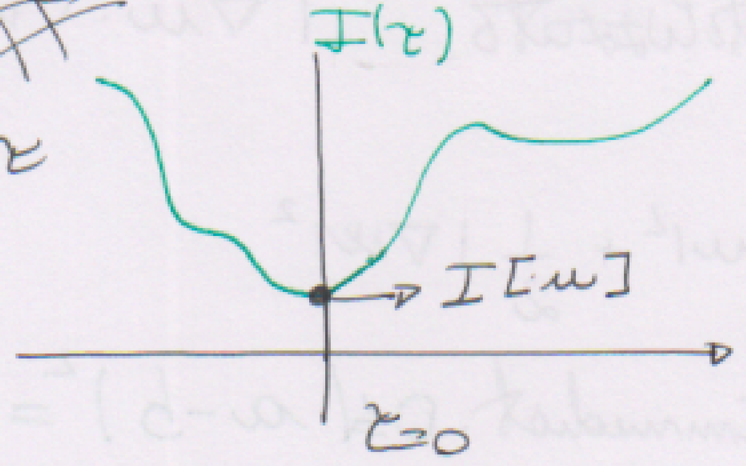
$$I[u+\tau w] \geq I[u] \quad \text{con } \tau \in \mathbb{R} \Rightarrow \boxed{u+\tau w = g} \quad x \in \partial U$$

$u+\tau w \in A$

Fissato u, w, posso vedere I come una funzione $\tau \to \mathbb{R}$

quindi il minimo si ha per $\dfrac{dI}{d\tau}\Big|_{\tau=0} = 0$





$$I[u+\tau w] = \int_U \left(\frac{1}{2} |\nabla u + \tau \nabla w|^2 - (u+\tau w) f \right) dV =$$

$$= \int_U \left(\frac{|\nabla u|^2}{2} + \tau \nabla u \cdot \nabla w + \frac{1}{2} |\nabla w|^2 \tau^2 - (u+\tau w) f \right) dV$$

$$\frac{d}{d\tau} I[u+\tau w] = \int_U \left(\nabla u \cdot \nabla w + \tau |\nabla w|^2 - w f\right) dV$$

$$\left.\frac{d}{d\tau} I[u+\tau w]\right|_{\tau=0} = \int_U (\nabla u \nabla w - w f) dV = 0$$

Integrando per parti: $\int_U w(-\Delta u - \cancel{f})\, \cancel{d}V + \int_{\partial U} \overset{0}{\overset{\shortparallel}{w}} \nabla u \cdot n = 0$

Quindi $\int_U w(-\Delta u - f)\, dV = 0$

$\Rightarrow$ $\Delta u = -f$ per la generalità di w.

Equazione del calore

$$\partial_t u + \Delta_x u = 0 \qquad \text{con } x \in \mathbb{R}^{n+1}$$

$\partial_t \to$ tempo

$\Delta_x \to$ spazio

Tipicamente $x \in \mathbb{R}^n$ su tutto lo spazio

oppure dominio limitato $x \in U \subset \mathbb{R}^n$

tempo $t \in [0, +\infty)$

$u(x, 0)$: condizioni iniziali

caso non omogeneo

$$\partial_t u - \Delta_x u = f$$

L'eq. descrive, ad esempio, l'evoluzione temporale della temperatura $u(x,t)$ all'interno di un dominio U (in cui si prescrive tipicamente assegnata la temperatura nel bordo $u = g$ in ∂U) in presenza di sorgenti di calore assegnate descritte da f.

Soluzione fondamentale dell' eq. del calore

Cerchiamo una soluzione dell'equazione

$$\partial_t u - \Delta_x u = 0 \qquad x \in \mathbb{R}^n \qquad t \in [0, +\infty)$$

della forma (soluzioni radiali)

$$u(\vec{x}, t) = \frac{1}{t^{n/2}} \, v\left(\frac{r}{t^{1/2}}\right) \qquad \text{dove } r = |x|$$

$$\partial_{x_i} u = \frac{\partial}{\partial x_i} t^{-n/2} v(r t^{-1/2}) =$$

$$= t^{-n/2} v'(rt^{-1/2}) \, t^{-1/2} \underbrace{\frac{\partial r}{\partial x_i}}_{= \frac{x_i}{r}} = t^{-\frac{n+1}{2}} v'(rt^{-1/2}) \frac{x_i}{r}$$

$$\partial^2_{x_i} u = t^{-\frac{n+1}{2}} v''(rt^{-1/2}) \, t^{-1/2} \frac{x_i^2}{r^2} + t^{-\frac{n+1}{2}} v'(rt^{-1/2}) \left[\frac{1}{r} + - \frac{x_i}{r^2} \frac{x_i}{r} \right]$$

$$= t^{-\frac{n+2}{2}} \left[\frac{x_i^2}{r^2} v''(rt^{-1/2}) + t^{1/2} v'(rt^{-1/2}) \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \right) \right]$$

$$\sum_{i=1}^{n} \partial^2_{x_i} u = t^{-\frac{n+2}{2}} \left[v''(rt^{-1/2}) + v'(rt^{-1/2}) \left(\frac{n}{r} - \frac{1}{r} \right) t^{1/2} \right]$$

$$\partial_t u = \partial_t \, t^{-n/2} v(r t^{-1/2}) =$$

$$= -\frac{n}{2} t^{-\frac{n+2}{2}} v(r t^{-1/2}) + t^{-\frac{n}{2}} v'(r t^{-1/2}) \left(-\frac{1}{2}\right) t^{-3/2} r$$

$$= -\frac{n}{2} t^{-\frac{n+2}{2}} v(r t^{-1/2}) - \frac{t^{-\frac{n+3}{2}}}{2} v'(r t^{-1/2}) r$$

Otteniamo, ponendo $y = r t^{-1/2}$

$$-\frac{n}{2} v(y) - v'(y) \frac{y}{2} - v''(y) - v'(y) \left(\frac{n}{y} - \frac{1}{y}\right) = 0$$

$$\frac{1}{2} (n v + v' y) + v'' + v' \left(\frac{n-1}{y}\right) = 0$$

notando che $\frac{d y^{n-1}}{dy} = \frac{n-1}{y} y^{n-1}$

moltiplichiamo per y^{n-1}

$$\underbrace{\frac{1}{2} (n y^{n-1} v + y v')}_{\frac{1}{2} \frac{d}{dy} (y^n v)} + \underbrace{y^{n-1} v'' + y^{n-1} \frac{n-1}{y} v'}_{\frac{d}{dy} (y^{n-1} v')} = 0$$

Otteniamo

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{1}{2} y^n v + y^{n-1} v' \right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} y^n v + y^{n-1} v' = a$$

prendiamo $a=0$ otteniamo

$$\frac{dv}{dy} = -\frac{yv}{2}$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{y}{2}\, dy \Rightarrow \ln v = -\frac{y^2}{4} + c$$

$$v = e^{-\frac{y^2}{4}} \cdot e^{c}$$

Tornando alle variabili $u(x,t) = \frac{1}{t^{n/2}} \, v(|x| t^{-1/2})$

$$u(x,t) = \frac{1}{t^{n/2}} \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \, e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

Definiamo la soluzione fondamentale dell'eq. del calore Φ

$$\Phi(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \, e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

Singolarità di Φ in $t=0$