Forme differenziali su $\mathbb{R}^n$

Sia $p \in \mathbb{R}^n$

sappiamo che

$$\{dx^1_p, \dots, dx^n_p\}$$

è una base di $T_p^*\mathbb{R}^n$ e

$$dx^I = dx^{i_1} \wedge \quad \wedge dx^{i_q}$$

con $1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n$

è una base di $\Lambda^q(T_p\mathbb{R}^n)$

(Nel testo di Tu si usa

la notazione $A_q(T_p\mathbb{R}^n)$)

alternating

quindi un elemento $\omega_p \in \Lambda^q(T_p\mathbb{R}^n)$ è della forma:

$$\omega_p = \sum_I f_{i_1 \dots i_q}(p)\, dx^{i_1}\big|_p \wedge \dots \wedge dx^{i_q}\big|_p$$

$$\omega_p = \sum_I f_I(p)\, dx^I$$

dove $f_I(p) \in \mathbb{R}$.

Definiamo le q-forme su $\mathbb{R}^n$: $\boxed{\Omega^q(\mathbb{R}^n)}$

$$\omega \in \Omega^q(\mathbb{R}^n)$$

$$\omega = \sum \underbrace{f_{i_1 \dots i_q}}_{C^\infty(\mathbb{R}^n)} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q} =$$

$$= \sum f_I \, dx^I \qquad \text{con } f_I \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

$$\boxed{\Omega^*(\mathbb{R}^n) = \sum_{q=0}^{n} \Omega^q(\mathbb{R}^n)}$$

algebra graduata

è un'algebra generata da $\{dx^1, \dots, dx^n\}$ mediante il wedge, con le seguenti relazioni :

$$\begin{cases} dx^i \wedge dx^i = 0 \\ dx^i \wedge dx^j = - dx^j \wedge dx^i \quad i \neq j \end{cases}$$

ci capiterà di omettere $\wedge$

e scrivere $dx^i dx^j$ per esempio.

Differenziale

$$d : \Omega^q(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \Omega^{q+1}(\mathbb{R}^n)$$

definizione:

① se $f \in \Omega^0(\mathbb{R}^n) = C^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

② se $\omega = f_I \, dx^I$

$$d\omega = df_I \wedge dx^I$$

Significato del differenziale

l'esempio di $\mathbb{R}^3$:

NOTA: un campo vettoriale in $\mathbb{R}^3$ è un oggetto del tipo

$$f_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + f_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + f_3 \frac{\partial}{\partial x^3}$$

con $f_i \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$

In ogni $p \in \mathbb{R}^3$

$$f_1(p) \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p + f_2(p) \left.\frac{\partial}{\partial x^2}\right|_p + f_3(p) \left.\frac{\partial}{\partial x^3}\right|_p$$

dà un vettore in $T_p\mathbb{R}^n$

Denotiamo con $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ l'insieme dei campi vettoriali su $\mathbb{R}^3$:

- è uno spazio vettoriale
- un modulo su $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ vedremo
- un'algebra di Lie vedremo

identificazioni

$$\bullet\ C^\infty(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\sim} \Omega^0(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\sim} \Omega^3(\mathbb{R}^3)$$

$$f \longmapsto f \longmapsto f\,dx\,dy\,dz$$

$$\bullet\ \mathcal{X}(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\sim} \Omega^1(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\sim} \Omega^2(\mathbb{R}^3)$$

$$f_1\frac{\partial}{\partial x} + f_2\frac{\partial}{\partial y} + f_3\frac{\partial}{\partial z} \longmapsto f_1\,dx + f_2\,dy + f_3\,dz \longmapsto f_1\,dy\,dz - f_2\,dx\,dz + f_3\,dx\,dy$$

con in mente queste identificazioni

$$\underbrace{d: \Omega^0(\mathbb{R}^3) \longrightarrow \Omega^1(\mathbb{R}^3)}_{}$$

$$f \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

gradiente

$$d : \Omega^1(\mathbb{R}^3) \longrightarrow \Omega^2(\mathbb{R}^3)$$

$$d\left(f_1\,dx + f_2\,dy + f_3\,dz\right) =$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}\,dy\,dx + \frac{\partial f_1}{\partial z}\,dz\,dx +$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}\,dx\,dy + \frac{\partial f_2}{\partial z}\,dz\,dy +$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x}\,dx\,dz + \frac{\partial f_3}{\partial y}\,dy\,dz =$$

$$\left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right)dy\,dz - \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right)dx\,dz +$$

$$+\left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)dx\,dy$$

Rotore (curl)

di un campo vettoriale

$$d : \Omega^2(\mathbb{R}^3) \longrightarrow \Omega^3(\mathbb{R}^3)$$

$$d\left(f_1\,dy\,dz - f_2\,dx\,dz + f_3\,dx\,dy\right) =$$

$$= \frac{\partial f_1}{\partial x}\,dx\,dy\,dz + \frac{\partial f_2}{\partial y}\,dx\,dy\,dz + \frac{\partial f_3}{\partial z}\,dx\,dy\,dz$$

$$= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$$

divergenza

In sintesi

$$\Omega^0 \xrightarrow{\text{grad}} \Omega^1 \xrightarrow{\text{rotore}} \Omega^2 \xrightarrow{\text{div}} \Omega^3$$

Ricordiamo che

$$\text{rotore}(\text{grad}) = 0$$

$$\text{div}(\text{rotore}) = 0$$

ossia $d^2 = 0$

Proposizione

- $d^2 = 0$
- $d(\eta \wedge \omega) = d\eta \wedge \omega + (-1)^{\deg \eta}\, \eta \wedge d\omega$

Chiamiamo $(\Omega^*(\mathbb{R}^n), d)$ complesso di de Rham su $\mathbb{R}^n$.

$$\boxed{\Omega^0(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{d} \Omega^1(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{d} \Omega^2(\mathbb{R}^n) \to \dots}$$

Coomologia di de Rham

fissiamo q

$$\ker d = \{ \omega \in \Omega^q(\mathbb{R}^n) \mid d\omega = 0 \}$$

q-forme CHIUSE

$$\operatorname{Im} d = \{ d\alpha \in \Omega^q(\mathbb{R}^n) \mid \alpha \in \Omega^{q-1}(\mathbb{R}^n) \}$$

q-forme ESATTE

NB $\quad d^2 = 0 \Rightarrow \operatorname{Im} d \subseteq \ker d$

<u>Esempio:</u>

$n=2$

consideriamo un campo vettoriale, un campo di forze:

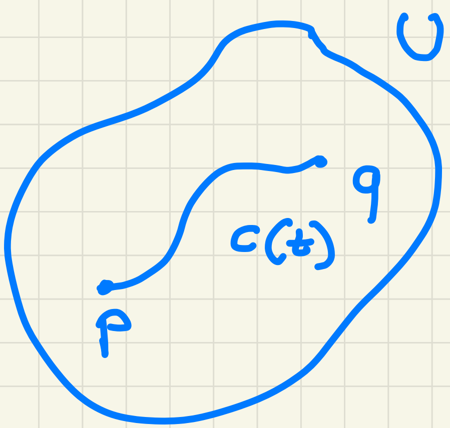
$$P(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+Q(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$$

definito su un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^2$

Siano $p,q \in U$

e

$[0,1] \xrightarrow{c} U$



una curva con $c(0)=p$ $c(1)=q$.

il lavoro:

$$\int_C P\,dx + Q\,dy$$

se $P(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial}{\partial y} = \text{grad}(f)$

ossia α $P\,dx + Q\,dy$ è

una 1-forma esatta

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \int_C f_x\,dx + f_y\,dy = f(q) - f(p)$$

NOTA: ① calcolo immediato

② non dipende dal cammino

Ci sono condizioni che ci assicurano che $Pdx + Qdy$ è esatta?

Condizione necessaria:

osserviamo che se $P = f_x$ e $Q = f_y$

allora $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

quindi $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ condizione necessaria, ossia

$$\boxed{d(Pdx + Qdy) = 0}$$

la 1-forma deve essere $\boxed{\text{chiusa}}$

In generale chiusa NON implica esatta, dipende dalla TOPOLOGIA di U.

Def La coomologia di de Rham di grado q su $\mathbb{R}^n$ è lo spazio vettoriale

$$\boxed{H_{dR}(\mathbb{R}^n) = \frac{\{q\text{-forme chiuse}\}}{\{q\text{-forme esatte}\}}}$$

Analogamente definiamo $H_{dR}(U)$ con $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto.

Esempi:

ⓐ $n=0$ $\qquad H^q(\mathbb{R}^0) = \begin{cases} \mathbb{R} & q=0 \\ 0 & q>0 \end{cases}$

$\uparrow$
$\{p\}$
un punto

ⓑ $n=1$

$$H^0(\mathbb{R}) = \{0\text{-forme chiuse}\} = \mathbb{R}$$

infatti $\quad df = 0 \Rightarrow f = \text{costante}$

$$H^1(\mathbb{R}) = \frac{\{1\text{-forme chiuse}\}}{\{1\text{-forme esatte}\}} = \,?$$

In $\mathbb{R}$ consideriamo

$f(x)\,dx$ 1-forma

$d(f(x)\,dx) = 0 \qquad \frac{df}{dx}\,dx \wedge dx = 0$

ogni 1-forma è <u>chiusa</u>

sia $g(x) = \int_0^x f(u)\,du$

$dg = \frac{dg}{dx}\,dx = f(x)\,dx$

ogni 1-forma è <u>esatta</u>

quindi $H^1(\mathbb{R}) = 0$

(c) Sia $U = \bigsqcup_{i=1}^{m} (a_i, b_i)$

allora $H^0(U) = \mathbb{R}^m$

$H^1(U) = 0$

In generale:

<u>Lemma di Poincaré</u>

$$H^q(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & q = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

lo dimostreremo.

Pull-back :

- Ricordiamo che

$$F_* : W \longrightarrow V \qquad \text{lineare}$$

definisce $F^* : \Lambda^q(V) \longrightarrow \Lambda^q(W)$

$$\phi \longmapsto F^*\phi$$

dove $(F^*\phi)(w_1, \dots, w_q) = \phi(F_* w_1, \dots, F_* w_q)$

per def. $F^* : \Lambda^0(V) = \mathbb{R} \longrightarrow \Lambda^0(W) = \mathbb{R}$ è l'identità.

- Si consideri ora

$$f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad C^\infty$$

allora, in un punto $p \in \mathbb{R}^m$

$$f_{*}|_p : T_p(\mathbb{R}^m) \longrightarrow T_{f(p)}\mathbb{R}^n$$

$$f^*|_p : \Lambda^q(T_{f(p)}\mathbb{R}^n) \longrightarrow \Lambda^q(T_p\mathbb{R}^m)$$

quindi f^* definisce una mappa dalle q-forme su $\mathbb{R}^n$ alle q-forme su $\mathbb{R}^m$, detto pull-back di f. Vediamola in dettaglio:

$q=0$

$$f^*: \Omega^0(\mathbb{R}^n) = C^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \Omega^0(\mathbb{R}^m) = C^\infty(\mathbb{R}^m)$$

$$g \longmapsto g\circ f$$

$$f^*: \Omega^q(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \Omega^q(\mathbb{R}^m) \quad ?$$

applichiamo la def.

sia $\omega = \sum_I g_I \, dy^{i_1} \wedge \ \wedge dy^{i_q}$

$$(f^*\omega)_p (X_{1,p}, \dots, X_{q,p}) =$$

$$\omega_{f(p)}(f_{*|p} X_{1,p}, \dots, f_{*|p} X_{q,p}) =$$

$$= \sum_I (g_I \circ f)\, dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_q} (f_{*_p} X_{1,p}, \dots, f_{*_p} X_{q,p})$$

$$= \sum_I (g_I \circ f) \left[\sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma)\, dy^{\sigma(i_1)} \otimes \dots \otimes dy^{\sigma(i_q)} \right] (f_{*_p} X_{1,p}, \dots, f_{*_p} X_{q,p}) =$$

$$= \sum_I (g_I \circ f) \left[\sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot dy^{\sigma(i_1)}(f_{*_p} X_{1,p}) \cdot \dots \cdot dy^{\sigma(i_q)}(f_{*_p} X_{q,p}) \right] =$$

$$= \sum_I (g_I \circ f) \left[\sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma)\, f_{*_p} X_{1,p}(Y^{\sigma(i_1)}) \dots f_{*_p} X_{q,p}(Y^{\sigma(i_q)}) \right] =$$

$$= \sum_I (g_I \circ f)\left[\sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma)\, X_{1,p}\left(Y^{\sigma(i_1)} \circ f\right) \cdots\cdots X_{q,p}\left(Y^{\sigma(i_q)} \circ f\right)\right] =$$

$$= \sum_I (g_I \circ f)\left[\sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma)\, \underbrace{df_{\sigma(i_1)|p}(X_{1,p}) \cdots\cdots df_{\sigma(i_q)|p}}_{\text{componenti di } f}(X_{q,p})\right]$$

ricordiamo $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$(Y^i \circ f) = f_i$ i-esima componente di f

$$= \sum_I (g_I \circ f)\, df_{i_1} \wedge \cdots \wedge df_{i_q}$$

quindi, formula per il pull-back

$$\boxed{f^*\omega = \sum_I (g_I \circ f)\, df_{i_1} \wedge \quad \wedge df_{i_q}}$$

Osservazione:

$$\mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$d(g \circ f)_p = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial (g \circ f)}{\partial x^i}\Big|_p dx^i_{|p} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y^j}\Big|_{f(p)} \cdot \frac{\partial f^j}{\partial x^i}\Big|_p \right) dx^i_{|p} =$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y^j}\Big|_{f(p)} df^j_{|p}$$

Proposizione f^* e d commutano.

Dim

1 $d f^* \left(g_I \, dy^{i_1} \dots dy^{i_q} \right) =$

$d\left(g_I \circ f \, df_{i_1} \wedge \quad \wedge df_{i_q} \right) =$

$d(g_I \circ f) \, df_{i_1} \wedge \quad \wedge df_{i_q} +$

$+ (-1)^0 (g_I \circ f) \underbrace{d\left(df_{i_1} \wedge \quad \wedge df_{i_q} \right)}_{=0} =$

$= d(g_I \circ f) \, df_{i_1} \wedge \quad \wedge df_{i_q}$

(2) $(f^* \circ d)(g_I \, dy^{i_1} \cdots dy^{i_q}) =$

$$= f^*(dg_I \, dy^{i_1} \cdots dy^{i_q}) =$$

$$= f^*\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_I}{\partial y^j} dy^j dy^{i_1} \cdots dy^{i_q}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial g_I}{\partial y^j} \circ f\right) df_j \wedge df_{i_1} \wedge \quad \wedge df_{i_q} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_I}{\partial y^j}\Big|_{f(p)} df_j \wedge df_{i_1} \wedge \quad \wedge df_{i_q} =$$

$$= d(g_I \circ f) \, df_{i_1} \wedge \quad \wedge df_{i_q}$$

■