7 aprile 2020 - lezione 2

Avvertenza importante!

Questo pdf contiene indicativamente il materiale della seconda ora di lezione di martedì 7 aprile 2020 (la seconda lezione dedicata all’ultima parte del programma, cioè la cosiddetta “logica dei predicati”). La forma è volutamente discorsiva, cercando di imitare lo stile che avrei utilizzato nella lezione “dal vivo”. Per lo studio, si raccomanda di utilizzare gli appunti di “Logica” disponibili in rete nella pagina e-learning (“Moodle”) di questo insegnamento. Il materiale contenuto negli appunti è più che sufficiente per lo studio della materia!

Per poter ragionare in termini di verità e falsità, ci serve un modo per esprimere predicati sugli elementi della struttura in cui interpretiamo (e ricordate che “interpretiamo” ha per noi un preciso significato, che abbiamo visto nella precedente lezione!) i termini del nostro linguaggio. Il linguaggio che utilizziamo va per questo motivo arricchito di opportuni simboli.

Un insieme A si dice un *alfabeto per un linguaggio descrittivo di secondo livello* (o anche, brevemente, un *alfabeto descrittivo di secondo livello*) se è un alfabeto per un linguaggio descrittivo di primo livello e inoltre ad esso appartengono

(v) un numero finito (ma arbitrario) t di simboli $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_t$ detti “*simboli di predicato*”, a ciascuno dei quali resta associato un numero intero positivo detto *arietà* del simbolo di predicato; talvolta si scrive $\mathrm{P}_i^{(j_i)}$ per indicare che al simbolo di predicato P_i è associata la arietà j_i (o, come spesso si dice, che il simbolo di predicato f_i ha arietà j_i) .

Il *tipo* di un alfabeto per un linguaggio descrittivo di secondo livello è costituito non solo dal numero k dei simboli di costante, dal numero s dei simboli di funzione e dalla sequenza delle rispettive arietà, ma anche dal numero t dei simboli di predicato e dalla sequenza delle rispettive arietà.

Parole e termini (aperti o chiusi) in un alfabeto per un linguaggio descrittivo di secondo livello si definiscono come in un alfabeto descrittivo di primo livello (quindi, in particolare, nei termini non sono coinvolti i simboli di predicato). L’aggiunta dei simboli di predicato ci permette però di introdurre un nuovo concetto, essenziale per lo sviluppo della logica dei predicati.

Sia A un alfabeto per un linguaggio descrittivo di secondo livello. Si dice *formula atomica* di A ogni parola della forma

$$\mathrm{P}_i t_1 t_2 \ldots t_{k_i}$$

dove P_i è un simbolo di predicato di arietà k_i e t_1, t_2, …, t_{k_i} sono termini su A. Generalmente, per una maggiore chiarezza, si introducono parentesi e virgole come già per indicare i termini, e anziché $\mathrm{P}_i t_1 t_2 \ldots t_{k_i}$ si scrive

$$\mathrm{P}_i(t_1, t_2, \ldots, t_{k_i}).$$

Una formula atomica si dice *chiusa* se in essa non compaiono variabili, *aperta* altrimenti.

L’insieme delle formule atomiche costituisce il *linguaggio descrittivo di secondo livello* associato all’alfabeto A.

Sia A un alfabeto per un linguaggio descrittivo di secondo livello. Si dice *struttura adeguata a* A ogni quaterna ordinata (S, $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{P}$) tale che

– (S, $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}$) è una struttura adeguata a A in quanto alfabeto descrittivo di primo livello;

– $\mathcal{P}$ è un insieme $\{\overline{\mathrm{P}}_0, \overline{\mathrm{P}}_1, \overline{\mathrm{P}}_2, \ldots, \overline{\mathrm{P}}_t\}$ di t predicati su S tali che il predicato $\overline{\mathrm{P}}_t$ richiede k_i argomenti (dove k_i è la arietà di P_i) per $i := 1, \ldots, t$.

Sia A un alfabeto per un linguaggio descrittivo di secondo livello, e sia $\Sigma =$ (S, $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{P}$) una struttura adeguata a A. Si dice *interpretazione* di A su Σ ogni funzione da A in $\mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{P}$ che fa corrispondere ad ogni simbolo di costante un elemento di $\mathcal{C}$, ad ogni simbolo di funzione f un elemento $\overline{f}$ di $\mathcal{F}$ “rispettando le arietà”, ossia con la condizione che $\overline{f}$ sia una funzione $\mathrm{S}^k \to \mathrm{S}$ dove k è la arietà di f, e ad ogni simbolo di predicato P un elemento $\overline{\mathrm{P}}$ di $\mathcal{P}$ ancora “rispettando le arietà”, ossia con la condizione che il predicato $\overline{\mathrm{P}}$ richieda tanti argomenti quanta è la arietà di P.

Sia A un alfabeto per un linguaggio descrittivo di secondo livello, e sia $\Sigma =$ (S, $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{P}$) una struttura adeguata a A. Se è data una interpretazione i_0 di A su Σ, resta definita una funzione v dall’insieme delle formule atomiche *chiuse* su A nell’insieme $\{0, 1\}$ ponendo

$$v(\mathrm{P}_i(t_1, t_2, \ldots, t_{k_i})) := \begin{cases} 1 & \text{se il predicato } \overline{\mathrm{P}} \text{ che } i_0 \text{ fa corrispondere a P risulta vero per gli} \\ & \text{elementi } \overline{t}_1, \overline{t}_2, \ldots, \overline{t}_{k_i} \text{ che } i_0 \text{ fa corrispondere a } t_1, t_2, \ldots, t_{k_i}\text{;} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Tale funzione v si dice *valutazione di verità* associata all’interpretazione i_0 data sulla struttura Σ.

Esempio 3.2.1

Sia A un alfabeto per un linguaggio descrittivo di secondo livello con due simboli di costante (c_0 e c_1) e un simbolo di predicato P di arietà 2. Sia

$$t_1 := c_0\,; \qquad t_2 := c_1\,; \qquad t_3 := x\,;.$$

I termini t_1 e t_2 sono chiusi, mentre il termine t_3 è aperto. Vediamo alcuni esempi di strutture adeguate a A, alcune possibili interpretazioni di A su esse e le valutazioni di verità ad esse associate per la formula atomica $\alpha := \mathrm{P}(t_1, t_2)$.

Caso 1 $\quad \mathrm{S} := \mathbb{Z},\ \ \mathcal{C} := \{0, 1\},\ \ \mathcal{P} := \{\,<\,\}$.

Una possibile interpretazione associa 0 a c_0, 1 a c_1 e (senza possibilità di scelta) $<$ a P. Sotto tale interpretazione, la valutazione di verità per la formula atomica α è

$$v(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < 1\,; \\ \\ 0 & \text{se } 0 \not< 1\,. \end{cases}$$

Dunque, $v(\alpha) = 1$.

Per la formula atomica aperta $\beta := \mathrm{P}(t_1, t_3)$ non siamo in grado di definire una valutazione di verità.

Un’altra possibile interpretazione associa 1 a c_0, 0 a c_1 e (senza possibilità di scelta) $<$ a P. Sotto tale interpretazione, la valutazione di verità per la formula atomica α è

$$v(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{se } 1 < 0\,; \\ \\ 0 & \text{se } 1 \not< 0\,. \end{cases}$$

Dunque, $v(\alpha) = 0$.

Per la formula atomica aperta $\beta := \mathrm{P}(t_1, t_3)$ non siamo in grado di definire una valutazione di verità.

Caso 2 $\quad \mathrm{S} := \mathbb{N},\ \ \mathcal{C} := \{0, 1\},\ \ \mathcal{P} := \{\,\leq\,,\,=\,\}$.

Una possibile interpretazione associa 0 a c_0, 1 a c_1 e $\leq$ a P. Sotto tale interpretazione, la valutazione di verità per la formula atomica α è

$$v(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq 1\,; \\ \\ 0 & \text{se } 0 \not\leq 1\,. \end{cases}$$

Dunque, $v(\alpha) = 1$.

Un’altra possibile interpretazione associa 1 a c_0, 0 a c_1 e poi ancora $\leq$ a P. Sotto tale interpretazione, la valutazione di verità per la formula atomica α è

$$v(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{se } 1 \leq 0\,; \\ \\ 0 & \text{se } 1 \not\leq 0\,. \end{cases}$$

Dunque, $v(\alpha) = 0$.

Una terza possibile interpretazione associa 1 a c_0, 0 a c_1, e $=$ a P. Sotto tale interpretazione, la valutazione di verità per la formula atomica α è

$$v(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{se } 1 = 0\,; \\ \\ 0 & \text{se } 1 \neq 0\,. \end{cases}$$

Dunque, $v(\alpha) = 0$.

Notiamo che in nessuna delle tre interpretazioni per la formula atomica aperta $\beta := \mathrm{P}(t_1, t_3)$ siamo in grado di definire una valutazione di verità.

Sia A un alfabeto per un linguaggio descrittivo di secondo livello, sia $\Sigma = (\mathrm{S}, \mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ una struttura adeguata a A e sia data una interpretazione i_0 di A su Σ. Sia $\mathcal{X}$ l'insieme delle variabili individuali di S. Si dice ancora *assegnazione* (all'interno della interpretazione data) ogni funzione $\mathcal{X} \to \mathrm{S}$.

La scelta di una assegnazione a_0, che ci consente di associare un elemento di S a ciascun termine su A, individua una funzione v dall'insieme di tutte le formule atomiche su A nell'insieme $(0, 1)$ ponendo

$$v(\mathrm{P}_i(t_1, t_2, \ldots, t_{k_i})) := \begin{cases} 1 & \text{se il predicato } \overline{\mathrm{P}} \text{ che } i_0 \text{ fa corrispondere a P risulta vero per gli} \\ & \text{elementi } \overline{t}_1, \overline{t}_2, \ldots, \overline{t}_{k_i} \text{ che } i_0 \text{ e } a_0 \text{ fanno corrispondere a } t_1, t_2, \ldots, t_{k_i}\,; \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Tale funzione v si dice *valutazione di verità* associata all'interpretazione i_0 data sulla struttura Σ *sotto l'assegnazione* a_0.

Esempio 3.2.2

Sia A un alfabeto per un linguaggio descrittivo di secondo livello con tre simboli di predicato P, Q, R tutti di arietà 2. Siano x, y variabili dell'alfabeto.

Vediamo alcuni esempi di strutture adeguate a A, alcune possibili interpretazioni di A su esse, alcune assegnazioni e le valutazioni di verità ad esse associate sotto tali assegnazioni per la formula atomica $\alpha := \mathrm{P}(x, y)$.

Caso 1 $\quad \mathrm{S} := \mathbb{Z}, \ \mathcal{P} := \{ <\, , \ \leq\, , \ = \}$.

Una possibile interpretazione associa $<$ a P, $\leq$ a Q e $=$ a R. Con tale interpretazione,

– sotto l'assegnazione che fa corrispondere 2 a x e 3 a y, la valutazione di verità per la formula atomica α è

$$v(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{se } 2 < 3\,; \\ \\ 0 & \text{se } 2 \not< 3\,. \end{cases}$$

Dunque, $v(\alpha) = 1$.

– sotto l’assegnazione che fa corrispondere 2 a x e 1 a y, la valutazione di verità per la formula atomica α è

$$v(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{se } 2 < 1\,; \\ \\ 0 & \text{se } 2 \not< 1\,. \end{cases}$$

Dunque, $v(\alpha) = 0$.

– sotto l’assegnazione che fa corrispondere 2 sia a x che a y, la valutazione di verità per la formula atomica α è

$$v(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{se } 2 < 2\,; \\ \\ 0 & \text{se } 2 \not< 2\,. \end{cases}$$

Dunque, $v(\alpha) = 0$.

Un’altra possibile interpretazione associa $\leq$ a P, $<$ a Q e $=$ a R. Con tale interpretazione,

– sotto l’assegnazione che fa corrispondere 2 a x e 3 a y, la valutazione di verità per la formula atomica α è

$$v(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{se } 2 \leq 3\,; \\ \\ 0 & \text{se } 2 \not\leq 3\,. \end{cases}$$

Dunque, $v(\alpha) = 1$.

– sotto l’assegnazione che fa corrispondere 2 a x e 1 a y, la valutazione di verità per la formula atomica α è

$$v(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{se } 2 \leq 1\,; \\ \\ 0 & \text{se } 2 \not\leq 1\,. \end{cases}$$

Dunque, $v(\alpha) = 0$.

– sotto l’assegnazione che fa corrispondere 2 sia a x che a y, la valutazione di verità per la formula atomica α è

$$v(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{se } 2 \leq 2\,; \\ \\ 0 & \text{se } 2 \not\leq 2\,. \end{cases}$$

Dunque, $v(\alpha) = 1$.

Una terza possibile interpretazione associa $=$ a P, $<$ a Q e $\leq$ a R. Con tale interpretazione,

– sotto l’assegnazione che fa corrispondere 2 a x e 3 a y, la valutazione di verità per la formula atomica α è

$$v(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{se } 2 = 3\,; \\ \\ 0 & \text{se } 2 \neq 3\,. \end{cases}$$

Dunque, $v(\alpha) = 0$.

– sotto l’assegnazione che fa corrispondere 2 a x e 1 a y, la valutazione di verità per la formula atomica α è

$$v(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{se } 2 = 1\,; \\ \\ 0 & \text{se } 2 \neq 1\,. \end{cases}$$

Dunque, $v(\alpha) = 0$.

– sotto l’assegnazione che fa corrispondere 2 sia a x che a y, la valutazione di verità per la formula atomica α è

$$v(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{se } 2 = 2\,; \\ \\ 0 & \text{se } 2 \neq 2\,. \end{cases}$$

Dunque, $v(\alpha) = 1$.

$\boxed{\text{Caso 2}}$ $\quad$ S $:= \mathbb{N}$, $\mathcal{P} := \{|,\ \leq\ ,\ =\}$.

Una possibile interpretazione associa $|$ a P, $\leq$ a Q e $=$ a R. Con tale interpretazione,

– sotto l’assegnazione che fa corrispondere 2 a x e 3 a y, la valutazione di verità per la formula atomica α è

$$v(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{se } 2 \mid 3\,; \\ \\ 0 & \text{se } 2 \nmid 3\,. \end{cases}$$

Dunque, $v(\alpha) = 0$.

– sotto l’assegnazione che fa corrispondere 2 a x e 6 a y, la valutazione di verità per la formula atomica α è

$$v(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{se } 2 \mid 6\,; \\ \\ 0 & \text{se } 2 \nmid 6\,. \end{cases}$$

Dunque, $v(\alpha) = 1$.

– sotto l’assegnazione che fa corrispondere 2 sia a x che a y, la valutazione di verità per la formula atomica α è

$$v(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{se } 2 \mid 2\,; \\ \\ 0 & \text{se } 2 \nmid 2\,. \end{cases}$$

Dunque, $v(\alpha) = 1$.

Questi esempi sono stati probabilmente noiosi e li avrete trovati banali, ma bisognava farli. Spero che con essi abbiate capito come si assegna un valore di verità a una formula atomica nella logica dei predicati. Dopo Pasqua ad ogni modo riprenderemo il discorso, ricordando brevemente quello che abbiamo visto oggi e poi estendendo l’assegnazione del valore di verità a formule più complesse; quest’ultima parte però sarà sostanzialmente indolore perché in ***quasi tutte*** le situazioni sarà sufficiente fare riferimento alla regole viste nella logica proposizionale… quasi tutte…

Per adesso, buona Pasqua a tutti!