17 aprile 2020 - lezione 2

Avvertenza importante!

Questo pdf contiene indicativamente il materiale della seconda ora di lezione di venerdì 17 aprile 2020. La forma è volutamente discorsiva, cercando di imitare lo stile che avrei utilizzato nella lezione “dal vivo”. Per lo studio, si raccomanda di utilizzare gli appunti di “Logica” disponibili in rete nella pagina e-learning (“Moodle”) di questo insegnamento. Il materiale contenuto negli appunti è più che sufficiente per lo studio della materia!

Nella precedente ora (virtuale) di lezione, abbiamo visto come si può attribuire un valore di verità ad una formula φ di un linguaggio della logica dei predicati.

Ribadisco ancora: di ***un*** linguaggio, non ***del*** linguaggio della logica dei predicati: esistono infatti infiniti linguaggi della logica dei predicati, ciascuno caratterizzato dal suo tipo.

Per attribuire un valore di verità ad una formula φ di un linguaggio della logica dei predicati. servono (non è inutile ribadirlo): una struttura adeguata al linguaggio, e una interpretazione; inoltre, se la formula non è chiusa, anche una assegnazione di valore alle variabili individuali libere della formula. Comunque, se abbiamo queste cose, l’attribuzione di un valore di verità alla formula avviene in modo univoco. Questo (attenzione! ecco il bello!) ci permette di ripetere tutte le definizioni di “conseguenza logica”, “equivalenza logica”, “soddisfacibilità” che avevamo introdotto nella logica proposizionale!

In particolare, se esistono almeno una struttura Σ adeguata ad A, almeno un’interpretazione i_0 su Σ e almeno un’assegnazione a_0 sull’insieme delle variabili individuali di A libere in φ tale che φ è vera nell’interpretazione Σ sotto l’assegnazione a_0, si dice che φ è *soddisfacibile*; se ciò non avviene, cioè se nessuna struttura adeguata ad A in nessuna interpretazione e sotto nessuna assegnazione di valore alle variabili individuali è un modello per φ, si dice che φ è *insoddisfacibile*.

Se φ è vera in ogni struttura adeguata ad A, per ogni interpretazione e sotto ogni assegnazione di valore alle variabili individuali di A libere in φ, si dice che φ è…

– una tautologia, diranno subito i miei piccoli lettori! (cit.).

No, ragazzi, avete sbagliato. Si dice che φ è *valida* (è quindi importante, al di là della suggestione del nome, non confondere il concetto di “formula valida” con quello di “formula ben formata”!). In realtà esistono le tautologie anche nella logica dei predicati, ma sono un sottoinsieme proprio delle formule valide. Ci torneremo presto.

Naturalmente, se φ è una formula chiusa (cioè un enunciato), la sua validità, soddisfacibilità o insoddisfacibilità dipendono soltanto dalle strutture adeguate al linguaggio A e dalle possibili interpretazioni.

Adesso vediamo velocemente i risultati della logia dei predicati corrispondenti a quelli della logica proposizionale. “Velocemente” significa che in prima lettura potete tranquillamente saltare le dimostrazioni perché “copiano” nella struttura se non proprio nelle precise parole quelle dei corrispondenti teoremi della logica proposizionale!

Teorema 3.5.5

Siano A un alfabeto per la logica dei predicati e φ una formula di A. La formula φ è valida se e soltanto se la formula $\neg\varphi$ è insoddisfacibile.

Dimostrazione – Supponiamo in primo luogo che φ sia una formula valida: allora per ogni struttura Σ adeguata ad A, per ogni interpretazione i_0 e per ogni assegnazione a_0 di valore alle variabili individuali di A libere in φ (cioè libere in $\neg\varphi$) si ha

$$v(\varphi) = 1 \quad \text{(e quindi } v(\neg\varphi) = 0\text{)}$$

per la valutazione di verità associata a Σ, i_0 e a_0. Ma ciò significa che $\neg\varphi$ è insoddisfacibile.

Viceversa, supponiamo che $\neg\varphi$ sia insoddisfacibile: allora per ogni struttura Σ adeguata ad A, per ogni interpretazione i_0 e per ogni assegnazione a_0 di valore alle variabili individuali di A libere in $\neg\varphi$ (cioè libere in φ) si ha

$$v(\neg\varphi) = 0 \quad \text{(e quindi } v(\varphi) = v(\neg\neg\varphi) = 1\text{)}$$

per la valutazione di verità associata a Σ, i_0 e a_0. Ma ciò significa che φ è una formula valida.

Teorema 3.5.6

Siano A un alfabeto per la logica dei predicati e φ, ψ formule di A. Sono fatti equivalenti:

(i) $\varphi \wedge \psi$ è una formula valida;

(ii) φ e ψ sono entrambe formule valide.

Dimostrazione – Supponiamo in primo luogo che $\varphi \wedge \psi$ sia una formula valida: allora per ogni struttura Σ adeguata ad A, per ogni interpretazione i_0 e per ogni assegnazione a_0 di valore alle variabili individuali di A si ha

$$v(\varphi \wedge \psi) = 1 \quad \text{(e quindi } v(\varphi) = v(\psi) = 1)$$

per la valutazione di verità associata a Σ, i_0 e a_0. Dunque φ e ψ sono entrambe formule valide.

Viceversa, supponiamo che φ e ψ siano entrambe formule valide: allora per ogni struttura Σ adeguata ad A, per ogni interpretazione i_0 e per ogni assegnazione a_0 di valore alle variabili individuali di A si ha

$$v(\varphi) = v(\psi) = 1 \quad \text{(e quindi } v(\varphi \wedge \psi) = 1)$$

per la valutazione di verità associata a Σ, i_0 e a_0. Dunque $\varphi \wedge \psi$ è una formula valida.

Sia A un alfabeto per la logica dei predicati, e siano φ, ψ formule di A.

Si dice che ψ *è conseguenza logica di* φ e si scrive

$$\varphi \vDash \psi$$

se per ogni struttura adeguata ad A ogni interpretazione (e ogni assegnazione di valori alle eventuali variabili libere di φ e ψ) che soddisfa φ soddisfa anche ψ .

Si dice che φ e ψ sono *logicamente equivalenti* e si scrive

$$\varphi \equiv \psi$$

se ciascuna di esse è conseguenza logica dell’altra, cioè se per ogni struttura adeguata ad A ogni interpretazione (e ogni assegnazione di valori alle eventuali variabili libere di φ e ψ) che soddisfa φ soddisfa anche ψ e viceversa ogni interpretazione (e ogni assegnazione di valori alle eventuali variabili libere di φ e ψ) che soddisfa ψ soddisfa anche φ.

Osservazione 3.5.7 (importante!)

La definizione di formula che abbiamo dato nella sez. 3.3 per la logica dei predicati e il teorema 3.5.1 che regola l’estensione delle valutazioni di verità dalle formule atomiche a tutte le formule ricalcano, rispettivamente, la definizione di formula che abbiamo dato nella sez. 2.1 per la logica proposizionale e il teorema 2.2.1. Per effetto di questa corrispondenza formale, se in una formula φ della logica proposizionale a ciascuna variabile proposizionale si sostituisce una formula della logica dei predicati si ottiene una formula della logica dei predicati che si dice *esemplificazione di* φ; e, fatto altrettanto importante, se φ e ψ sono formule logicamente equivalenti della logica proposizionale le formule della logica dei predicati ottenute da φ e ψ sostituendo a ciascuna variabile proposizionale sempre la stessa formula della logica dei predicati sono logicamente equivalenti nella logica dei predicati.

Per quanto detto nell’osservazione 3.5.7, ogni esemplificazione di una tautologia è una *formula valida* (e sono proprio queste particolari *formule valide* che anche nella logica dei predicati si chiamano ***tautologie***). Ma esistono formule valide che non sono esemplificazioni di tautologie (e che ***non*** si dicono tautologie!); ad esempio,

$$(\exists x)(\mathrm{P}(x) \vee \mathrm{Q}(x)) \to ((\exists x)\mathrm{P}(x)) \vee (\exists x)\mathrm{Q}(x)) .$$

Allo stesso modo esistono formule insoddisfacibili che non sono esemplificazioni di contraddizioni; ad esempio, $(\exists x)(\mathrm{P}(x) \vee \mathrm{Q}(x)) \wedge (\forall x)\neg\mathrm{P}(x) \wedge (\forall x)\neg\mathrm{Q}(x)$.

Teorema 3.5.12

Sia A un alfabeto per la logica dei predicati; siano φ, ψ formule di A. Sono fatti equivalenti:

(i) $\varphi \vDash \psi$;

(ii) $\varphi \to \psi$ è una formula valida.

Dimostrazione – Proviamo in primo luogo che dalla (i) segue la (ii).

Supponiamo che valga la (i). Siano Σ una struttura adeguata per A, i_0 un’interpretazione di A su Σ e a_0 un’assegnazione di valori alle variabili individuali di A; dobiamo dimostrare che

$$\Sigma \vDash_{i_0, a_0} (\varphi \to \psi) .$$

Ciò significa che, detta v la valutazione di verità sull’insieme delle formule di A associata a i_0 e a_0 (cfr. teor. 3.5.1), deve essere $v(\varphi \to \psi) = 1$. Ciò è immediato se $v(\varphi) = 0$; ma se invece $v(\varphi) = 1$ allora, poiché vale la (i), è anche $v(\psi) = 1$ e dunque anche in questo caso $v(\varphi \to \psi) = 1$ come si voleva.

Adesso proviamo che dalla (ii) segue la (i).

Supponiamo dunque che valga la (ii). Siano Σ una struttura adeguata per A, i_0 un’interpretazione di A su Σ e a_0 un’assegnazione di valori alle variabili individuali di A tale che

$$\Sigma \vDash_{i_0, a_0} \varphi$$

e proviamo che è anche

$$\Sigma \vDash_{i_0, a_0} \psi .$$

Ciò significa che, detta v la valutazione di verità sull’insieme delle formule di A associata a i_0 e a_0 (cfr. teor. 3.5.1), deve essere $v(\psi) = 1$. Ma noi sappiamo che $v(\varphi) = 1$ e che, poiché vale la (ii), è $v(\varphi \to \psi) = 1$; dunque deve essere $v(\psi) = 1$ come si voleva.

Teorema 3.5.13

Sia A un alfabeto per la logica dei predicati; siano φ, ψ formule di A. Sono fatti equivalenti:

(i) φ e ψ sono logicamente equivalenti;

(ii) $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$ è una formula valida.

Dimostrazione – Segue immediatamente dai teoremi 3.5.12 e 3.5.6.

Come si è fatto nella sez. 2.2 per la logica proposizionale, anche nella logica dei predicati la nozione di “conseguenza logica” si può generalizzare a un insieme di formule.

Siano $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n, \varphi$ formule. Si dice che “φ *è conseguenza logica di* $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n$” e si scrive

$$\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n\} \vDash \varphi$$

se per ogni struttura adeguata ad A ogni interpretazione (e ogni assegnazione di valori alle eventuali variabili libere di $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n$ e φ) che soddisfa $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n$ soddisfa anche φ .

Vale l’analogo del teorema 2.3.4 (e dell’osservazione 2.3.5) :

Teorema 3.5.14

Siano $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \varphi$ formule. Sono fatti equivalenti:

(i) $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n\} \vDash \varphi$;

(ii) $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \vDash \varphi$;

(iii) $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \wedge \neg\varphi$ è insoddisfacibile .

Avete visto che bella cosa? Ci ritroviamo nella stessa situazione della logica proposizionale: per stabilire se la formula φ è o non è conseguenza logica di un’altra formula (o di altre formule) basta (e bisogna!) stabilire se una certa formula (ottenuta congiungendo le formule che esprimono le premesse con la negazione di φ) è soddisfacibile!

Ok, certo, però una formula di un linguaggio della logica dei predicati è parecchio ingarbugliata, con tutti quei quantificatori che possono spuntare in qualsiasi posto (beh, quasi in qualsiasi posto) come funghi. Ma proviamo a sognare un mondo migliore. Bisogna essere ottimisti. Che cosa potremmo fare con una formula nella quale gli unici quantificatori sono quantificatori universali (nessuna presenza di $\exists$, per capirsi), non solo, ma compaiono tutti all’inizio della formula?

Proviamo a vedere come possiamo affrontare un sillogismo mooolto elmentare (l’abbiamo già visto nella prima ora del 7 aprile, qui è riformulato in modo da poter essere schematizzato più semplicemente).

PREMESSE:

(1) Ogni cosa, se è un virus sconosciuto è pericolosa;

(2) Il COVID-19 è un virus sconosciuto;

CONSEGUENZA:

(3) Il COVID-19 è pericoloso.

Scegliamo un linguaggio della logica dei predicati con due simboli di predicato unario, V(x) e P(x), e un simbolo di costante c, e consideriamo le seguenti formule:

$\alpha_1 := (\forall x)(\mathrm{V}(x) \to \mathrm{P}(x))$;
$\alpha_2 := \mathrm{V}(c)$;
$\varphi := \mathrm{P}(c)$.

Se pensiamo a una struttura costituita dal mondo reale, “essere un virus sconosciuto” è un predicato unario, nel quale possiamo interpretare il simbolo $\mathrm{V}(x)$; “essere pericoloso” è anch’esso un simbolo di predicato unario, nel quale possiamo interpretare il simbolo $\mathrm{P}(x)$. Con questa interpretazione, una assegnazione di valore che assegni a x la feroce tigre Biribissa (deve essere un preciso elemento della struttura!) rende falso $\mathrm{V}(x)$ ma vero $\mathrm{P}(x)$. Giusto per esemplificare.

Se interpretiamo il simbolo di costante c col COVID-19 (uno qualsiasi dei milioni di esemplari che circolano nel mondo, ora non fate i pidocchiosi, eh, che sto cercando di fare un esempio di attualità… se no vi beccate “Socrate è un uomo” con tutto quel che segue…), dicevo, con questa interpretazione del simbolo di costante c le tre formule α_1, α_2 e φ traducono esattamente il sillogismo del quale vogliamo verificare la validità.

Per dimostrare che $\{\alpha_1, \alpha_2\} \vDash \varphi$, basta e bisogna dimostrare che $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \neg\varphi$ è insoddisfacibile.

Ma

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \neg\varphi = (\forall x)(\mathrm{V}(x) \to \mathrm{P}(x)) \wedge \mathrm{V}(c) \wedge \neg\mathrm{P}(c)$$

cioè

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \neg\varphi = (\forall x)(\neg\mathrm{V}(x) \vee \mathrm{P}(x)) \wedge \mathrm{V}(c) \wedge \neg\mathrm{P}(c)$$

e siccome la variabile individuale x non compare nella seconda parte della formula converrete con me (naturalmente, martedì prossimo vedremo nei dettagli le “regole di calcolo” per la logica dei predicati, fra le quali questa osservazione) che ciò è logicamente equivalente a

$$(\forall x)\big((\neg\mathrm{V}(x) \vee \mathrm{P}(x)) \wedge \mathrm{V}(c) \wedge \neg\mathrm{P}(c)\big)\,.$$

Et voila! Il nostro sogno si è avverato! Dobbiamo decidere la soddisfacibilità o meno di una formula nella quale tutti i quantificatori sono universali e tutti stanno all’inizio della formula! Fra l’altro (che bella fortuna!) la parte che segue i quantificatori universali (sì, lo so, ce n’è uno solo, ma sto cercando di fare un discorso appena un po’ generale…) è in forma normale congiuntiva *rispetto alle formule atomiche* (che, ricordate? nella logica proposizionale coincidevano con le variabili proposizionali). Possiamo anche scrivere uno ***schema*** di “insieme di clausole”, così:

$$\{\{\neg\mathrm{V}(x), \mathrm{P}(x)\}, \{\mathrm{V}(c)\}, \{\neg\mathrm{P}(c)\}\}\,.$$

Perché “schema” di “insieme di clausole”? Perché c’è dentro una variabile individuale x che, come ci ricorda il quantificatore universale (che non abbiamo mica buttato via, semplicemente non l’abbiamo scritto, ma la sua presenza incombe su tutto il ragionamento), che, dicevo, può assumere qualsiasi valore. Fra i possibili valori c’è naturalmente l’elemento (di quale struttura? di *qualsiasi* struttura adeguata al linguaggio…) nel quale interpretiamo il simbolo di costante c. Se assegniamo il valore c alla x, otteniamo queste tre clausole: $\{\neg\mathrm{V}(c), \mathrm{P}(c)\}, \{\mathrm{V}(c)\}, \{\neg\mathrm{P}(c)\}$. Il risolvente (rispetto a $\mathrm{V}(c)$) fra le prime due è la clausola $\{\mathrm{P}(c)\}$; il risolvente (rispetto a $\mathrm{P}(c)$) fra questa e la terza (cioè $\{\neg\mathrm{P}(c)\}$) è la clausola vuota! E così, ragionando ***proprio come nella logica proposizionale*** sulle clausole corrispondenti alla formula abbiamo “dimostrato” che $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \neg\varphi$ è insoddisfacibile e che quindi φ è davvero conseguenza logica di α_1 e α_2 (credo che non aveste dubbi in proposito, altrimente che stiamo chiusi in casa a fare?).

Ho messo “dimostrato” con le virgolette, perché naturalmente tutte le cose che ho dato per scontato (tipo: le formule atomiche si possono trattare ***esattamente come*** le variabili proposizionali nella logica proposizionale, e quindi possiamo andarci giù pesante con “forma normale congiuntiva”, “clausole”, “risolventi”…) vanno giustificate. Ma questo lo faremo nelle prossime lezioni.

A me interessava convincervi subito che tutto questo faticoso meccanismo di termini, interpretazioni, assegnazioni di valore alle variabili individuali, strutture adeguate e chi più ne ha più ne metta ci porta però, una volta digerito, molto direttamente verso l’applicazione (“quasi” identica) dei metodi della vecchia e cara (?) logica proposizionale. Certo, ci sarà da lavorarci. Faccio una lista degli obiettivi che ci aspettano:

(i) Ricondurre ogni formula della logica dei predicati a una formula nella quale i quantificatori universali stanno tutti all’inizio e da lì ciascuno vincola la variabile individuale di sua pertinenza ogni volta che essa compare nella formula (sarà vero che ogni formula è logicamente equivalente a una formula che ha questa forma? E come si ottiene?)

(ii) Fare un altro passo, “uccidendo” i quantificatori esistenziali (sarà vero che ogni formula è logicamente equivalente a una formula senza quantificatori esistenziali, e con i quantificatori universali tutti all’inizio? E come si ottiene?)

(iii) Ridurre il numero delle strutture nelle quali andare a “testare” la soddisfacibilità della formula. Le strutture adeguate al linguaggio sono sempre infinite, quindi (onestamente) un po’ troppe. Anche le interpretazioni (fissata una struttura) sono tante, potenzialmente infinite. Riusciamo a ricondurci a un numero finito?

(iv) Capire in che modo e perché le formule atomiche chiuse si possono trattare come facevamo nella logica proposizionale con le sue formule atomiche, che sono le variabili proposizionali.

Fatto questo, non avremo altro da dire, e ci potremo salutare. Ma un paio di settimane ancora ci vorranno! A martedì prossimo…