# 21 aprile 2020 - lezione 1

## ***Avvertenza importante!***

***Questo pdf contiene indicativamente il materiale della prima ora di lezione di martedì 21 aprile 2020. La forma è volutamente discorsiva, cercando di imitare lo stile che avrei utilizzato nella lezione “dal vivo”. Per lo studio, si raccomanda di utilizzare gli appunti di “Logica” disponibili in rete nella pagina e-learning (“Moodle”) di questo insegnamento. Il materiale contenuto negli appunti è più che sufficiente per lo studio della materia!***

Nella seconda ora (virtuale) di lezione di venerdì scorso 17 aprile 2020, ho cercato di convincervi che sia una ***buona cosa*** avere a disposizione una formula logicamente equivalente a quella che stiamo studiando nella quale però i quantificatori stiano tutti all’inizio della formula. Anche se non vi ho convinto, ciò resta comunque una buona cosa davvero, e le due ore odierne saranno appunto dedicate ($i$) a dimostrare che una siffatta formula si può sempre trovare e ($ii$) a vedere come si fa in pratica a trovarla. E naturalmente prima di tutto ciò dovremo dare una definizione *precisa* della cosa che ho approssimativamente indicato come “i quantificatori stanno tutti all’inizio della formula”.

Insomma, avete capito che adesso ci dedichiamo allo studio del comportamento dei quantificatori. Cominciamo con un paio di osservazioni banali ma importantissime.

La prima osservazione è che un quantificatore “opera” su una variabile individuale $x$ (vincolandola, e consentendo come importante conseguenza di assegnare un valore di verità alla formula senza dover esplicitare una specifica assegnazione di valore alla $x$) soltanto se la $x$ è presente nella formula (ed in essa è libera); se la $x$ nella formula non c’è, possiamo comunque premettere il quantificatore associandolo alla $x$, ma la formula che si ottiene è logicamente equivalente alla precedente. Detto con meno chiacchiere e più precisione:

Teorema 3.5.9

Siano A un alfabeto per la logica dei predicati, $x$ una variabile individuale e $\varphi$ una formula di A nella quale $x$ non compare. Allora

$$\varphi \equiv (\forall x)\varphi \qquad \text{e} \qquad \varphi \equiv (\exists x)\varphi\,.$$

Qui non c’è davvero proprio niente da dimostrare: se $x$ non compare in $\varphi$, il valore di verità di $\varphi$ non può in nessun modo dipendere da una assegnazione di valore alla $x$.

La seconda osservazione è che quando si vincola una variabile individuale $x$ premettendo alla formula un quantificatore associato a $x$, che la variabile individuale si chiami $x$ oppure $y$ oppure *gazumba* poco importa: come diceva l’Anonimo nella introduzione dei Promessi Sposi, “*essendo cosa evidente e da verun negata non essere i nomi se non puri purissimi accidenti*…”; oppure, se preferite una citazione un po’ più poetica, “*What’s in a name? That which we call a rose, by any other name would smell as sweet!*” (Shakespeare, Romeo and Juliet, Act II, scene 2). Per la precisione:

Teorema 3.5.10

Siano A un alfabeto per la logica dei predicati e $\varphi(x)$ una formula di A nella quale ogni comparsa della variabile individuale $x$ è libera e la variabile individuale $y$ non compare. Se $\varphi(y)$ è la formula ottenuta da $\varphi(x)$ sostituendo alla variabile individuale $x$ in ogni sua comparsa la variabile individuale $y$, allora

$$(\forall x)\varphi(x) \equiv (\forall y)\varphi(y) \qquad \text{e} \qquad (\exists x)\varphi(x) \equiv (\exists y)\varphi(y)\,.$$

Per quanto osservato nel teorema 3.5.10, se in una formula una certa variabile individuale è vincolata da un quantificatore il nome di quella variabile diviene irrilevante perché la valutazione di verità su quella formula non dipende più dalla (eventuale) particolare assegnazione con la quale si sta lavorando; di questo fatto conviene approfittare cambiando nome alle variabili vincolate ogni volta che ciò consenta di evitare confusioni e ambiguità (e qualche volta, come vedremo più avanti, anche per semplificare l’espressione dell’intera formula).

In particolare, vale la pena di osservare che teoricamente è accettabile una formula come

$$\mathrm{P}(x) \to ((\exists x)(\mathrm{Q}(x)))$$

dove la prima $x$ è libera mentre la seconda è vincolata dal quantificatore $\exists x$, o addirittura una formula come

$$(\forall x)(\mathrm{P}(x) \to ((\exists x)(\mathrm{Q}(x))))$$

dove la prima $x$ è vincolata dal quantificatore universale $\forall x$ mentre la seconda è vincolata dal quantificatore esistenziale $\exists x$.

Ma noi, per evitare confusioni e ambiguità, ci rifiuteremo di usare queste scritture cambiando, tutte le volte che dovesse risultare necessario, il nome a una o più fra le variabili vincolate. Questa scelta non diminuirà in alcun modo le capacità del nostro linguaggio di esprimere le situazioni che vogliamo analizzare logicamente.

Scriveremo dunque (ad esempio)

$$\mathrm{P}(x) \to ((\exists y)(\mathrm{Q}(y))) \qquad \text{anziché} \qquad \mathrm{P}(x) \to ((\exists x)(\mathrm{Q}(x)))$$

e

$$(\forall x)(\mathrm{P}(x) \to ((\exists y)(\mathrm{Q}(y)))) \qquad \text{anziché} \qquad (\forall x)(\mathrm{P}(x) \to ((\exists x)(\mathrm{Q}(x)))) \, .$$

E adesso precisiamo la forma che desideriamo per la nostra formula.

Una formula della logica dei predicati si dice *in forma normale prenessa* ([1]) se si scrive come

$$(\mathrm{Q}_1 x_1)(\mathrm{Q}_2 x_2)\ldots(\mathrm{Q}_s x_s)\varphi$$

dove ciascun $\mathrm{Q}_j$ è un quantificatore (cioè è $\forall$ oppure $\exists$ ) e $\varphi$ è una formula nella cui espressione non compaiono quantificatori.

I prossimi teoremi sono propedeutici al teorema 3.6.15 (nel quale stabiliremo che ogni formula è logicamente equivalente a una formula in forma normale prenessa) ma ciascuno di essi ha anche uno specifico interesse operativo (precisa cioè uno dei passaggi da effettuarsi per trasformare una assegnata formula in altra che sia ad essa logicamente equivalente e in forma normale prenessa).

---

[1] Non è un errore di stampa! L’aggettivo “pre***n***essa” (con la “n”) è una “traduzione pigra” dell’inglese *prenex*, forse dal latino “prae-nexa” (per “legata anteriormente”, cfr. il verbo “nectere”) .

Teorema 3.6.1

Per ogni variabile individuale $x$ e per ogni formula $\varphi$, le formule

$$\neg((\forall x)\varphi) \quad \text{e} \quad (\exists x)(\neg\varphi)$$

sono logicamente equivalenti.

Questo teorema generalizza un fatto che abbiamo osservato più volte a lezione, anche quando potevo farle “dal vivo” tra ottobre e gennaio: cioè che se voglio NEGARE che una certa proprietà vale *per ogni* $x$ bisogna (e basta!) che trovi *un controesempio*, cioè un $x_0$ per il quale la proprietà non vale. Il teorema 3.6.1 è in qualche modo più ampio, perché la formula $\varphi$ può esprimere molto di più di una specifica proprietà, e soprattutto è un risultato formale della teoria che stiamo elaborando (la logica dei predicati). È interessante vedere come si dimostra, perché ci fa capire il ruolo delle strutture adeguate al linguaggio, delle interpretazioni e delle assegnazioni di valore alle variabili.

Per dimostrare l’equivalenza logica fra due formule bisogna (e basta) far vedere che ciascuna è conseguenza logica dell’altra.

Proviamo dunque in primo luogo che

$$\neg((\forall x)\varphi) \vDash (\exists x)(\neg\varphi)\,.$$

Siano $\Sigma = (\mathrm{S}, \mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ una struttura adeguata per A, $i_0$ un’interpretazione di A su $\Sigma$ e $a_0$ un’assegnazione di valori alle variabili individuali di A diverse da $x$ tale che

$$\Sigma \vDash_{i_0,\, a_0} \neg((\forall x)\varphi)$$

e proviamo che è anche $\quad \Sigma \vDash_{i_0,\, a_0} (\exists x)(\neg\varphi)\,.$

Per ipotesi, è falso che per ogni $s \in \mathrm{S}$ si abbia $\overline{v}(\varphi) = 1$ per la valutazione di verità $\overline{v}$ associata all’interpretazione $i_0$ sotto l’assegnazione $a_0(x \leftarrow s)$ definita nella sez. 3.2 : esiste dunque almeno un $s_* \in \mathrm{S}$ tale che $\overline{v}(\varphi) = 0$ (e quindi $\overline{v}(\neg\varphi) = 0$) per la valutazione di verità $\overline{v}$ associata all’interpretazione $i_0$ sotto l’assegnazione $a_0(x \leftarrow s_*)$ definita nella sez. 3.2 ; ma ciò significa appunto che $\Sigma \vDash_{i_0,\, a_0} (\exists x)(\neg\varphi)$ .

Adesso proviamo che è anche $\quad (\exists x)(\neg\varphi) \vDash \neg((\forall x)\varphi)$ .

Siano dunque $\Sigma = (\mathrm{S}, \mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ una struttura adeguata per A, $i_0$ un’interpretazione di A su $\Sigma$ e $a_0$ un’assegnazione di valori alle variabili individuali di A diverse da $x$ tale che

$$\Sigma \vDash_{i_0,\, a_0} (\exists x)(\neg\varphi)$$

e proviamo che è anche

$$\Sigma \vDash_{i_0,\, a_0} \neg((\forall x)\varphi)\,.$$

Per ipotesi, esiste dunque almeno un $s_* \in \mathrm{S}$ tale che $\overline{v}(\neg\varphi) = 1$ (e quindi $\overline{v}(\varphi) = 0$) per la valutazione di verità $\overline{v}$ associata all'interpretazione $i_0$ sotto l'assegnazione $a_0(x \leftarrow s_*)$ definita nella sez. 3.2: dunque è falso che per ogni $s \in \mathrm{S}$ si abbia $\overline{v}(\varphi) = 1$ per la valutazione di verità $\overline{v}$ associata all'interpretazione $i_0$ sotto l'assegnazione $a_0(x \leftarrow s)$ definita nella sez. 3.2 ; ma ciò significa appunto che

$$\Sigma \models_{i_0,\, a_0} \neg((\forall x)\varphi)\,.$$

Simmetrico al teorema 3.6.1 è il

Teorema 3.6.2

Per ogni variabile individuale $x$ e per ogni formula $\varphi$, le formule

$$\neg((\exists x)\varphi) \quad \text{e} \quad (\forall x)(\neg\varphi)$$

sono logicamente equivalenti.

Anche la dimostrazione si può fare in modo analogo (e anzi, per controllare se avete capito come funziona la dimostrazione del teorema 3.6.1 siete invitati a provare a “ricopiarla” -con i dovuti cambiamenti- per dimostrare il teorema 3.6.2). Però se abbiamo già a disposizione il teorema 3.6.1 c'è un modo più veloce per dimostrare il teorema 3.6.2, sfruttando il fatto che per ogni formula $\alpha$ si ha che $\neg\neg\alpha \equiv \alpha$ (ricordate il teorema 2.3.1, visto a ottobre?). Basta osservare che

$$\neg((\exists x)\varphi) \overset{\text{(teor. 2.3.1 }(i))}{\equiv} \neg((\exists x)\neg(\neg\varphi)) \overset{\text{(teor. 3.6.1)}}{\equiv} \neg(\neg((\forall x)\neg\varphi)) \overset{\text{(teor. 2.3.1 }(i))}{\equiv} (\forall x)(\neg\varphi)\,.$$

Vediamo adesso che cosa si può dire della congiunzione di due formule in ciascuna delle quali la variabile individuale $x$ è vincolata dal quantificatore universale $\forall$:

Teorema 3.6.3

Per ogni variabile individuale $x$ e per ogni scelta delle formule $\varphi$ e $\psi$, le formule

$$(\forall x)\varphi \wedge (\forall x)\psi \quad \text{e} \quad (\forall x)(\varphi \wedge \psi)$$

sono logicamente equivalenti.

I coraggiosi possono provare a fare la dimostrazione (lo schema è sempre quello del teorema 3.6.1), ma direi che possiamo prendere per buono questo risultato, per non soffrire troppo. Però un’osservazione fatemela fare.

Scriviamo le formule $\varphi$ e $\psi$ come $\varphi(x)$ e $\psi(x)$, per evidenziare la presenza della variabile individuale $x$ in ciascuna di esse. Affermare che è vera la $(\forall x)\varphi(x)$ significa dire che è vera ogni formula $\varphi(\overline{x})$ ottenuta sostituendo a $x$ un qualsiasi elemento $\overline{x}$ della struttura $\Sigma$ in cui interpretiamo $\varphi$; e analogamente per la $\psi$. Adesso facciamo un’ipotesi moooolto semplificatrice, cioè che nella struttura $\Sigma$ ci sia un numero finito $n$ di elementi che chiameremo $x_1$, $x_2$, $x_3$, $\dots$, $x_n$. Sotto questa ipotesi, affermare che è vera la formula $(\forall x)\varphi(x)$ equivale ad affermare che è vera la formula $\varphi(x_1) \wedge \varphi(x_2) \wedge \varphi(x_3) \wedge \dots \wedge \varphi(x_n)$; ed affermare che è vera la formula $(\forall x)\psi(x)$ equivale ad affermare che è vera la formula $\psi(x_1) \wedge \psi(x_2) \wedge \psi(x_3) \wedge \dots \wedge \psi(x_n)$. Quindi, affermare che è vera la formula

$$(\forall x)\varphi(x) \wedge (\forall x)\psi(x)$$

equivale ad affermare che è vera la formula

$$\big(\varphi(x_1) \wedge \varphi(x_2) \wedge \varphi(x_3) \wedge \dots \wedge \varphi(x_n)\big) \wedge \big(\psi(x_1) \wedge \psi(x_2) \wedge \psi(x_3) \wedge \dots \wedge \psi(x_n)\big)$$

la quale, per le regole di calcolo che abbiamo visto nella logica proposizionale e che valgono, come si è detto, anche nella logica dei predicati, è logicamente equivalente alla

$$\big(\varphi(x_1) \wedge \psi(x_1)\big) \wedge \big(\varphi(x_2) \wedge \psi(x_2)\big) \wedge \dots \wedge \big(\varphi(x_n) \wedge \psi(x_n)\big)$$

ossia, sempre nell’ipotesi che gli unici elementi della struttura $\Sigma$ siano $x_1$, $x_2$, $x_3$, $\dots$, $x_n$,

$$(\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x)).$$

Questo teorema non ci dice cioè niente di nuovo (e potremmo fare a meno del quantificatore universale $\forall\dots$) quando la struttura in cui interpretiamo il nostro linguaggio ha un numero finito di elementi. Ma il senso di questa osservazione è soprattutto suggerirvi di vedere il quantificatore universale $\forall$ come una specie di “generalizzazione al caso infinito” del connettivo di congiunzione logica $\wedge$. E questo atteggiamento dovrebbe mnemonicamente aiutarvi a ricordare che il connettivo di congiunzione logica $\wedge$ “interagisce bene” (nel senso espresso dal teorema 3.6.3) col quantificatore universale $\forall$.

Ricordando quanto osservato col teorema 3.5.9, dal teorema 3.6.3 segue ora subito il

Teorema 3.6.4

Per ogni variabile individuale $x$ e per ogni scelta delle formule $\varphi$ e $\psi$, se $x$ non compare in $\psi$ le formule

$$(\forall x)\varphi \wedge \psi \quad \text{e} \quad (\forall x)(\varphi \wedge \psi)$$

sono logicamente equivalenti.

È facile convincersi che invece le formule

$$(\forall x)\varphi \vee (\forall x)\psi \qquad \text{e} \qquad (\forall x)(\varphi \vee \psi)$$

***non*** sono in generale logicamente equivalenti.

Ad esempio, sia $\varphi := \mathrm{P}(x)$ e sia $\psi := \mathrm{D}(x)$ con P e D simboli di predicati unari; interpretiamo P e D nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali rispettivamente come "essere pari" e "essere dispari". Allora $(\forall x)(\varphi \vee \psi)$ è vera (ogni numero è pari o dispari!) ma $(\forall x)\varphi \vee (\forall x)\psi$ è falsa (non è vero che ogni numero è pari, e nemmeno che ogni numero è dispari!).

Potete però dimostrare (è un facile esercizio, ma vi aiuta a prendere confidenza col modo di fare le dimostrazioni nella logica dei predicati, perché dovete un po' barcamenarvi fra strutture adeguate al linguaggio, interpretazioni e assegnazioni di valore alle variabili individuali!) che per ogni variabile individuale $x$ e per ogni scelta delle formule $\varphi$ e $\psi$ si ha

$$(\forall x)\varphi \vee (\forall x)\psi \vDash (\forall x)(\varphi \vee \psi)\,.$$

Naturalmente, che valga questa conseguenza logica per noi non ha interesse, perché il nostro scopo è trasformare qualsiasi formula in una formula in forma normale prenessa ad essa *logicamente equivalente*!

Come ci dobbiamo allora comportare di fronte alla disgiunzione di due formule come $(\forall x)\varphi$ e $(\forall x)\psi$?

Beh, le cose non vanno poi male nel caso in cui la variabile individuale $x$ non compaia in una delle due, ad esempio la $\psi$:

Teorema 3.6.7

Per ogni variabile individuale $x$ e per ogni scelta delle formule $\varphi$ e $\psi$, se $x$ non compare libera in $\psi$ le formule

$$(\forall x)\varphi \vee \psi \qquad \text{e} \qquad (\forall x)(\varphi \vee \psi)$$

sono logicamente equivalenti.

Non entriamo nei dettagli della dimostrazione, che prendiamo per buona, ma il principio che le sta alla base è in fondo lo stesso cui abbiamo già accennato all'inizio dei questa trattazione, quando cioè abbiamo enunciato il teorema 3.5.9: se $x$ non compare in $\psi$, il valore di verità di $\psi$ non può in nessun modo dipendere da una assegnazione di valore alla $x$.

E se invece la $x$ compare effettivamente, libera, nella $\psi$? Ma è semplice, le cambiamo di nome e ci riconduciamo al teorema 3.6.7. Nei dettagli:

Corollario 3.6.8

Per ogni variabile individuale $x$ e per ogni scelta delle formule $\varphi$ e $\psi$, se $y$ non compare né in $\varphi$ né in $\psi$ le formule

$$(\forall x)\varphi(x) \vee (\forall x)\psi(x) \quad \text{e} \quad (\forall x)(\forall y)(\varphi(x) \vee \psi(y))$$

sono logicamente equivalenti.

*Dimostrazione* – Per il teorema 3.5.10, poiché $y$ non compare in $\psi(x)$ le formule $(\forall x)\psi(x)$ e $(\forall y)\psi(y)$ sono logicamente equivalenti, dunque

$$(\forall x)\varphi(x) \vee (\forall x)\psi(x) \quad \text{e} \quad (\forall x)\varphi(x) \vee (\forall y)\psi(y)$$

sono logicamente equivalenti. Poiché $x$ non compare in $\psi(y)$, per il teorema 3.6.7 le formule

$$(\forall x)\varphi(x) \vee (\forall y)\psi(y) \quad \text{e} \quad (\forall x)\big(\varphi(x) \vee (\forall y)\psi(y)\big)$$

sono logicamente equivalenti.

Ancora per il teorema 3.6.7, poiché $y$ non compare in $\varphi(x)$ le formule

$$\varphi(x) \vee (\forall y)\psi(y) \quad \text{e} \quad (\forall y)\big(\varphi(x) \vee \psi(y)\big)$$

sono logicamente equivalenti. Dunque anche

$$(\forall x)\big(\varphi(x) \vee (\forall y)\psi(y)\big) \quad \text{e} \quad (\forall x)(\forall y)\big(\varphi(x) \vee \psi(y)\big)$$

sono logicamente equivalenti, e infine si ha l’asserto.

Nella prossima ora vedremo come si comporta con i connettivi $\vee$ e $\wedge$ il quantificatore esistenziale. A quel punto sapremo gestire le interazioni di $\forall$ ed $\exists$ con i connettivi $\neg$, $\vee$ ed $\wedge$; e siccome sappiamo (da quanto visto a ottobre in logica proposizionale) che il connettivo $\rightarrow$ (e di fatto *ogni possibile connettivo logico*!) si può esprimere mediante $\neg$, $\vee$ ed $\wedge$, avremo dato un dimostrazione (costruttiva!) del fatto che ogni formula di ogni linguaggio della logica dei predicati è logicamente equivalente a una formula in forma normale prenessa!