21 aprile 2020 - lezione 2

Avvertenza importante!

Questo pdf contiene indicativamente il materiale della seconda ora di lezione di martedì 21 aprile 2020. La forma è volutamente discorsiva, cercando di imitare lo stile che avrei utilizzato nella lezione “dal vivo”. Per lo studio, si raccomanda di utilizzare gli appunti di “Logica” disponibili in rete nella pagina e-learning (“Moodle”) di questo insegnamento. Il materiale contenuto negli appunti è più che sufficiente per lo studio della materia!

Stiamo cercando di capire, data una qualsiasi formula in un linguaggio della logica dei predicati, come costruire un’altra formula ad essa logicamente equivalente che sia in forma normale prenessa. Vi ricordo la definizione:

Una formula della logica dei predicati si dice *in forma normale prenessa* se si scrive come

$$(\mathrm{Q}_1 x_1)(\mathrm{Q}_2 x_2)\ldots(\mathrm{Q}_s x_s)\varphi$$

dove ciascun Q_j è un quantificatore (cioè è $\forall$ oppure $\exists$) e φ è una formula nella cui espressione non compaiono quantificatori.

Se riesco a farvi vedere ***come*** da una formula se ne ottiene un’altra ad essa logicamente equivalente che sia in forma normale prenessa, automaticamente ho anche dimostrato ***che la cosa si può fare***! Beh, che la cosa si possa fare ha ovviamente per un matematico un profondo interesse teorico, ma sapere *come* si possa fare è di certo ancora meglio!

Ogni formula della logica dei predicati si ottiene dalle formule atomiche mediante connettivi logici (che sono gli stessi della logica proposizionale, e quanto all’assegnazione dei valori di verità si comportano esattamente allo stesso modo!) e anche mediante quantificatori (universali o esistenziali). Se vogliamo costruire una formula logicamente equivalente a quella data che sia in forma normale prenessa, dobbiamo trovare il modo di “portare a sinistra” i quantificatori rispetto a tutti i connettivi logici.

Non ***veramente tutti*** i connettivi logici, perché dai nostri studi di logica proposizionale sappiamo che ogni formula è logicamente equivalente a un’altra nella quale compaiono soltanto $\neg$, $\wedge$ e $\vee$. E nella precedente ora (virtuale) di lezione abbiamo visto come interagiscono i due quantificatori col connettivo $\neg$ e abbiamo anche visto come dobbiamo comportarci se abbiamo la congiunzione (meglio!) ma anche la negazione (peggio…) di due formule della forma $(\forall x)\varphi(x)$ e $(\forall x)\psi(x)$ (dico “peggio” nel secondo caso perché si è visto che bisogna introdurre una nuova variabile individuale, e alla fine di tutto vedremo che quante più variabili proposizionali ci sono tanto peggio siamo messi… ma non corriamo troppo!).

Adesso resta da capire che cosa succede se abbiamo la congiunzione o la disgiunzione di due formule introdotte entrambe da un quantificatore *esistenziale*. La situazione, come forse potrete immaginare, è abbastanza simmetrica a quella del quantificatore universale.

Per capire in che modo è simmetrica, riprendiamo il caso (moooolto particolare, l’ho già detto e lo ribadisco!) in cui nella struttura Σ in cui interpretiamo la nostra formula ci sia un numero finito n di elementi che chiameremo x_1, x_2, x_3, $\dots, x_n$. Sotto questa ipotesi, affermare che è vera la formula $(\exists x)\varphi(x)$ equivale ad affermare che è vera la formula $\varphi(x_1) \vee \varphi(x_2) \vee \varphi(x_3) \vee \dots \vee \varphi(x_n)$; ed affermare che è vera la formula $(\exists x)\psi(x)$ equivale ad affermare che è vera la formula $\psi(x_1) \vee \psi(x_2) \vee \psi(x_3) \vee \dots \vee \psi(x_n)$. Quindi, affermare che è vera la formula

$$(\exists x)\varphi(x) \vee (\exists x)\psi(x)$$

equivale ad affermare che è vera la formula

$$\big(\varphi(x_1) \vee \varphi(x_2) \vee \varphi(x_3) \vee \dots \vee \varphi(x_n)\big) \vee \big(\psi(x_1) \vee \psi(x_2) \vee \psi(x_3) \vee \dots \vee \psi(x_n)\big)$$

la quale, per le regole di calcolo che abbiamo visto nella logica proposizionale (e che valgono, come si è detto, anche nella logica dei predicati) è logicamente equivalente alla

$$\big(\varphi(x_1) \vee \psi(x_1)\big) \vee \big(\varphi(x_2) \vee \psi(x_2)\big) \vee \dots \vee \big(\varphi(x_n) \vee \psi(x_n)\big)$$

ossia, sempre nell’ipotesi che gli unici elementi della struttura Σ siano x_1, x_2, x_3, $\dots, x_n$, alla

$$(\exists x)(\varphi(x) \vee \psi(x)).$$

Eh, sì, allo stesso modo in cui possiamo pensare al quantificatore universale $\forall$ come a una generalizzazione del connettivo di congiunzione logica $\wedge$, possiamo anche pensare al quantificatore esistenziale $\exists$ come a una generalizzazione del connettivo di disgiunzione logica (non esclusiva) $\vee$. E quindi non vi stupirete che valgano i seguenti risultati (della cui dimostrazione ancora una volta, per evitare eccessive sofferenze, non ci preoccuperemo, fidandoci di chi l’ha fatta prima di noi!):

Teorema 3.6.9

Per ogni variabile individuale x e per ogni scelta delle formule φ e ψ, le formule

$$(\exists x)\varphi \vee (\exists x)\psi \quad \text{e} \quad (\exists x)(\varphi \vee \psi)$$

sono logicamente equivalenti.

Teorema 3.6.10

Per ogni variabile individuale x e per ogni scelta delle formule φ e ψ, se x non compare in ψ le formule

$$(\exists x)\varphi \vee \psi \quad \text{e} \quad (\exists x)(\varphi \vee \psi)$$

sono logicamente equivalenti.

La simmetria di situazione fra (da una parte) il quantificatore universale rispetto ai connettivi $\wedge$ e $\vee$ e (dall’altra) il quantificatore esistenziale rispetto ai connettivi $\vee$ e $\wedge$ è piuttosto precisa. Nella precedente ora (virtuale) di lezione, abbiamo visto che le formule $(\forall x)\varphi \vee (\forall x)\psi$ e $(\forall x)(\varphi \vee \psi)$ non sono in generale logicamente equivalenti; lo stesso esempio che abbiamo usato in quell’occasione ci convince anche che le formule

$$(\exists x)\varphi \wedge (\exists x)\psi \qquad \text{e} \qquad (\exists x)(\varphi \wedge \psi)$$

non sono in generale logicamente equivalenti. Infatti, sia $\varphi := \mathrm{P}(x)$ e sia $\psi := \mathrm{D}(x)$ con P e D simboli di predicati unari; interpretiamo P e D nell’insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali rispettivamente come “essere pari” e “essere dispari”. Allora $(\exists x)\varphi \wedge (\exists x)\psi$ è vera (esiste un numero pari ed esiste un numero dispari!) ma $(\exists x)(\varphi \wedge \psi)$ è falsa (non esiste alcun numero che sia pari e dispari).

E come nel caso precedente vi lascio come esercizio dimostrare che per ogni variabile individuale x e per ogni scelta delle formule φ e ψ si ha

$$(\exists x)(\varphi \wedge \psi) \vDash (\exists x)\varphi \wedge (\exists x)\psi\,.$$

Allora certamente a questo punto avete capito come ci si deve comportare se abbiamo una *congiunzione* di formule in entrambe le quali la stessa variabile individuale è vincolata dal quantificatore esistenziale; i risultati che ci servono sono esattamente i “simmetrici” di quelli visti per la disgiunzione di formule col quantificatore universale, e ancora una volta li accettiamo senza entrare nei dettagli della dimostrazione:

$\boxed{\text{Teorema 3.6.13}}$

Per ogni variabile individuale x e per ogni scelta delle formule φ e ψ, se x non compare libera in ψ le formule

$$(\exists x)\varphi \wedge \psi \quad \text{e} \quad (\exists x)(\varphi \wedge \psi)$$

sono logicamente equivalenti.

$\boxed{\text{Corollario 3.6.14}}$

Per ogni variabile individuale x e per ogni scelta delle formule φ e ψ, se y non compare né in φ né in ψ le formule

$$(\exists x)\varphi(x) \wedge (\exists x)\psi(x) \quad \text{e} \quad (\exists x)(\exists y)(\varphi(x) \wedge \psi(y))$$

sono logicamente equivalenti.

L’idea è insomma, come per la disgiunzione di formule nelle quali la stessa variabile individuale x è vincolata dal quantificatore universale $\forall$, semplicemente quella di cambiare nome alla variabile individuale in una delle due formule.

E naturalmente la stessa cosa accade se abbiamo una congiunzione o una disgiunzione di due formule in ciascuna delle quali la stessa variabile individuale x è vincolata da un quantificatore di diverso tipo: dunque

$$(\exists x)\varphi(x) \vee (\forall x)\psi(x) \equiv (\exists x)(\forall y)(\varphi(x) \vee \psi(y))$$

e

$$(\exists x)\varphi(x) \wedge (\forall x)\psi(x) \equiv (\exists x)(\forall y)(\varphi(x) \wedge \psi(y))$$

ma anche (attenzione! saper giostrare fra queste due alternative sarà utile nella prossima lezione!)

$$(\exists x)\varphi(x) \vee (\forall x)\psi(x) \equiv (\forall x)(\exists y)(\varphi(y) \vee \psi(x))$$

e

$$(\exists x)\varphi(x) \wedge (\forall x)\psi(x) \equiv (\forall x)(\exists y)(\varphi(y) \wedge \psi(x))\,.$$

Quest’ultimo fatto è in realtà semplicemente un caso particolare dei teoremi 3.6.7 e 3.6.13, perché certamente la x non compare libera in $(\exists x)\varphi(x)$ e nemmeno compare libera in $(\forall x)\psi(x)$.

Se vogliamo fare bella figura, possiamo a questo punto enunciare il

Teorema 3.6.15

Ogni formula è logicamente equivalente a una formula in forma normale prenessa.

Dimostrazione – Per il teorema 2.4.1, possiamo supporre che gli unici simboli logici che compaiono nella scrittura della formula oltre ai quantificatori siano i connettivi $\neg$, $\wedge$ e $\vee$. I teoremi 3.6.1, 3.6.2, 3.6.3, 3.6.7, 3.6.9 e 3.6.13 permettono allora di trasformare la formula in altra ad essa logicamente equivalente in forma normale prenessa.

Però la cosa veramente importante è che ***sappiamo come si fa*** a trovare una formula che sia in forma normale prenessa e che sia logicamente equivalente a quella data!

Tenendo conto del teorema 2.6.6, possiamo dire qualcosa di più:

Teorema 3.6.16

Ogni formula è logicamente equivalente a una formula in forma normale prenessa nella quale la parte che segue i quantificatori è in forma normale congiuntiva.

Vi ricordo che “in forma normale congiuntiva” significa “congiunzione di disgiunzioni di letterali” e che un letterale è una formula atomica oppure la negazione di una formula atomica. Come si fa a trovare una formula logicamente equivalente a quella data ma che sia in forma normale congiuntiva? Beh, questo l’abbiamo visto a ottobre studiando la logica proposizionale. Vedete? Queste cose della logica proposizionale ce le ritroviamo anche qui, a ogni piè sospinto! E il bello deve ancora venire…

Rispetto all’itinerario che avevo prospettato al termine della seconda ora (virtuale) di lezione venerdì scorso, il prossimo passo sarà “uccidere” i quantificatori esistenziali. Vedremo venerdì prossimo 24 aprile 2020 che cosa fare. Oggi dedichiamo il tempo che resta a qualche esempio che mostri come si applicano le idee fin qui descritte per trasformare una formula in altra formula ad essa logicamente equivalente che sia in forma normale prenessa.

$\boxed{\text{Esempio 1}}$

Sia x una variabile individuale e siano P, Q simboli di predicato unario. Trasformiamo la formula

$$(\forall x)\mathrm{P}(x) \to (\forall x)\mathrm{Q}(x)$$

in una formula in forma normale prenessa ad essa logicamente equivalente.

Si ha

$$(\forall x)\mathrm{P}(x) \to \big((\forall x)\mathrm{Q}(x)\big) \equiv \neg\big((\forall x)\mathrm{P}(x)\big) \vee \big((\forall x)\mathrm{Q}(x)\big) \equiv$$

$$\equiv \big((\exists x)\neg\mathrm{P}(x)\big) \vee \big((\forall y)\mathrm{Q}(y)\big) \equiv (\exists x)(\forall y)\big(\neg\mathrm{P}(x) \vee \mathrm{Q}(y)\big) \equiv (\exists x)(\forall y)\big(\mathrm{P}(x) \to \mathrm{Q}(y)\big)\,.$$

$\boxed{\text{Esercizio}}$

Sia x una variabile individuale e siano P, Q simboli di predicato unario. Trasformate ciascuna delle seguenti formule

$$(\exists x)\mathrm{P}(x) \to (\exists x)\mathrm{Q}(x)\,;$$

$$(\forall x)\mathrm{P}(x) \to (\exists x)\mathrm{Q}(x)\,;$$

$$(\exists x)\mathrm{P}(x) \to (\forall x)\mathrm{Q}(x)\,;$$

in una formula in forma normale prenessa ad essa logicamente equivalente.

$\boxed{\text{Esempio 2}}$

Si consideri un linguaggio $\mathcal{L}$ per la logica dei predicati al quale appartengono un simbolo di funzione f di arietà 1, un simbolo di predicato P di arietà 1, un simbolo di predicato Q di arietà 2 e due variabili individuali x, y. Si trasformi la seguente formula ben formata di $\mathcal{L}$ in forma normale prenessa:

$$\big((\exists x)(\neg P(x)) \vee ((\forall x)P(x) \to (\exists y)\mathrm{Q}(f(y), y))\big) \wedge \big((\forall x)\neg\big((\forall y)\,\mathrm{Q}(x, y)\big)\big)\,.$$

La formula proposta è formata con un “ $\wedge$ ” a partire dalle due formule

$$\alpha := (\exists x)(\neg P(x)) \vee ((\forall x)P(x) \to (\exists y)Q(f(y), y))$$

e

$$\beta := (\forall x)\neg\big((\forall y)Q(x, y)\big)$$

ciascuna delle quali va trasformata in forma normale prenessa.

La formula α è formata con un “ $\vee$ ” a partire dalle due formule

$$\alpha_1 \coloneqq (\exists x)(\neg P(x)) \text{ (già in FNP)}$$

$$\alpha_2 \coloneqq (\forall x)P(x) \to (\exists y)Q(f(y),y) \equiv \neg(\forall x)P(x) \vee (\exists y)Q(f(y),y) \equiv$$

$$\equiv (\exists x)\neg P(x) \vee (\exists y)Q(f(y),y) \equiv (\exists x)\neg P(x) \vee (\exists x)Q(f(x),x) \equiv$$

$$\equiv (\exists x)(\neg P(x) \vee Q(f(x),x)) \text{ (ora in FNP)}$$

e dunque la forma normale prenessa di α è

$$(\exists x)((\neg P(x)) \vee (\neg P(x) \vee \mathrm{Q}(f(x),x)))$$

che naturalmente può essere semplificata in

$$(\exists x)(\neg P(x) \vee \mathrm{Q}(f(x),x))$$

mentre la forma normale prenessa di β è

$$(\forall x)(\exists y)\neg \mathrm{Q}(x,y) \equiv (\forall z)(\exists y)\neg \mathrm{Q}(z,y)$$

cosicché la FNP di $\alpha \wedge \beta$ è

$$(\exists x)(\forall z)(\exists y)((\neg P(x) \vee \mathrm{Q}(f(x),x)) \wedge \neg \mathrm{Q}(z,y))$$