24 aprile 2020 - lezione 1

Avvertenza importante!

Questo pdf contiene indicativamente il materiale della prima ora di lezione di venerdì 24 aprile 2020. La forma è volutamente discorsiva, cercando di imitare lo stile che avrei utilizzato nella lezione “dal vivo”. Per lo studio, si raccomanda di utilizzare gli appunti di “Logica” disponibili in rete nella pagina e-learning (“Moodle”) di questo insegnamento. Il materiale contenuto negli appunti è più che sufficiente per lo studio della materia!

Martedì scorso abbiamo visto che qualsiasi formula di un linguaggio della logica dei predicati è logicamente equivalente a una formula (dello stesso linguaggio, ovviamente!) in forma normale prenessa (e, già che ci siamo, con la parte della formula che segue i quantificatori in forma normale congiuntiva).

Prima di vedere come possiamo liberarci dei quantificatori esistenziali (perché, ricordate?, lo scorso venerdì 17 aprile 2020 ci siamo ripromessi di ricondurci a una formula non soltanto in FNP ma addirittura senza quantificatori esistenziali… oggi vedremo in che senso possiamo “ricondurci” a una formula di quel tipo), prima di vedere questo, dicevo, vale la pena di osservare che la forma normale prenessa non è unica, ma anzi si può presentare in modi non solo oggettivamente diversi ma anche con proprietà sostanzialmente non equivalenti ai fini di quello che intendiamo fare. Lo so, mi sto tenendo sul vago, ma al momento non posso fare altro. Ricordate sempre che il nostro ultimo scopo è decidere se una certa formula è o non è soddisfacibile, e per arrivare a questa decisione ci sono strade più facili e strade meno facili, come oggi vi mostrerò.

Facciamo dunque un esempio per capire che cosa sto dicendo; un esempio con formule di struttura molto semplice, perché non c’è bisogno di formule complesse per capire il gioco delle possibili trasformazioni in FNP. Se vogliamo trovare una formula in FNP che sia logicamente equivalente alla

$$(\forall x)\varphi(x) \wedge (\exists y)\psi(y)$$

possiamo applicare i teoremi 3.6.4 e 3.6.13 nell’ordine che vogliamo.

Se applichiamo prima il teorema 3.6.4 e poi il teorema 3.6.13, otteniamo che

$$(\forall x)\varphi(x) \wedge (\exists y)\psi(y) \equiv (\forall x)(\varphi(x) \wedge (\exists y)\psi(y)) \equiv (\forall x)(\exists y)(\varphi(x) \wedge \psi(y)),$$

ma se invece applichiamo prima il teorema 3.6.13 e poi il teorema 3.6.4 troviamo che

$$(\forall x)\varphi(x) \wedge (\exists y)\psi(y) \equiv (\exists y)((\forall x)\varphi(x) \wedge \psi(y)) \equiv (\exists y)(\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(y)).$$

Nella prima formula in FNP, il quantificatore universale precede quello esistenziale, mentre nella secondo formula in FNP lo segue. Come vedremo fra poco, per “eliminare il quantificatore esistenziale” in questi due casi si devono seguire strade sostanzialmente diverse che, come cercherò di spiegare nella seconda ora di oggi, hanno conseguenze clamorosamente diverse nei calcoli successivi per decidere la soffisfacibilità.

Vediamo ora di capire come facciamo a “eliminare i quantificatori esistenziali”, e ***in che senso*** li “eliminiamo”. Ricordiamo sempre che a noi interessa decidere se una certa formula φ è o non è soddisfacibile.

Supponiamo che la formula $(\exists x)\varphi(x)$ sia soddisfacibile. Ciò significa che esistono una struttura Σ adeguata al nostro linguaggio, una interpretazione (e, se ci sono in φ variabili libere, una assegnazione di valore a tali variabili libere) che rende vera la $\varphi(x)$; cioè esiste in Σ un elemento x_0 tale che $\varphi(x_0)$ è vera in tale interpretazione. Se estendiamo il nostro linguaggio di logica dei predicati aggiungendo un simbolo di costante c ed interpretiamo tale c in x_0, la formula del “nuovo” linguaggio ottenuta sostituendo ovunque a x il simbolo di costante c risulta soddisfacibile. Ma, viceversa, se tale formula del linguaggio “ampliato” con l’aggiunta di c è soddisfacibile vuol dire che esistono una struttura Σ adeguata a tale nuovo linguaggio (ma quindi inevitabilmente anche adeguata al “vecchio” linguaggio, che rispetto ad esso aveva in meno il simbolo di costante c), una interpretazione (e, se ci sono in φ variabili libere, una assegnazione di valore a tali variabili libere) che rende vera la $\varphi(x)$ sotto l’assegnazione a x dell’elemento di Σ nel quale viene interpretato il simbolo di costante c; e quindi anche $(\exists x)\varphi(x)$ è soddisfacibile!

Ci sono due cose importanti da osservare.

La prima è che la nuova formula, ottenuta eliminando $(\exists x)$ e sostituendo ovunque in φ alla variabile individuale x il simbolo di costante c ***non è***, e non potrebbe in alcun modo essere, ***logicamente equivalente*** alla formula $(\exists x)\varphi(x)$. Si tratta infatti di formule che ***appartengono a due linguaggi diversi*** della logica dei predicati, e quindi non possono essere logicamente equivalenti. Però la formula $(\exists x)\varphi(x)$ è soddisfacibile se e soltanto se è soddisfacibile la nuova formula: in questo senso, abbiamo ricondotto la soddisfacibilità della nostra formula in FNP alla soddisfacibilità di una formula in FNP priva del quantificatore esistenziale $(\exists x)$.

La seconda cosa importante da osservare è che non sempre questo procedimento funziona. Considerate la formula

$$\varphi(x,y) := (\forall y)(\exists x)\mathrm{M}(y,x)$$

che è soddisfacibile in $\mathbb{N}$ interpretando il simbolo di predicato binario M come “strettamente minore di”; essa infatti significa allora che per ogni numero naturale y esiste un numero naturale x_0 tale che y è strettamente minore di x_0. Con tale interpretazione, non potreste introdurre un simbolo di costante da interpretare in x_0; perché non esiste un numero naturale x_0 tale che ogni numero naturale y è strettamente minore di x_0. La differenza col caso precedente è che questa volta il quantificatore esistenziale che vincola la variabile individuale x è preceduto da un quantificatore universale che vincola la variabile individuale y: e il valore x_0 ***dipende*** da quale y stiamo considerando!

Se il quantificatore esistenziale $(\exists x)$ è preceduto nella FNP da uno (o più) quantificatori universali (che vincolano le variabili individuali $x_1, x_2, \dots, x_n$) per eliminarlo non possiamo sostituire la x con un simbolo di costante ma dobbiamo farlo con un simbolo di funzione di arietà n che dipende dalle variabili individuali $x_1, x_2, \dots,$ x_n.

Adesso possiamo enunciare il risultato che ci interessa, cominciando con la definizione della forma alla quale vogliamo arrivare.

Una formula della logica dei predicati si dice *in forma di Skolem* ([1]) se si scrive come

$$(\forall x_1)(\forall x_2)\dots(\forall x_s)\varphi$$

dove φ è una formula nella cui espressione non compaiono quantificatori.

Teorema 3.7.1 (Skolem)

Siano A un alfabeto per la logica dei predicati e φ una formula di A. Esistono un alfabeto A^* con $\mathrm{A} \subset \mathrm{A}^*$ e una formula φ^* in forma di Skolem su A^* tali che

$$\varphi \text{ è soddisfacibile se e soltanto se } \varphi^* \text{ è soddisfacibile.}$$

[1] in onore del matematico norvegese Albert Thoralf Skolem, nato a Sandsvær (l’odierna Kongsberg) il 23 maggio 1887 e morto a Oslo il 23 marzo 1963.

Dimostrazione – Per il teorema 3.6.15, possiamo supporre che φ sia in forma normale prenessa. Sia x una variabile individuale vincolata in φ da un quantificatore esistenziale; distinguiamo due casi:

se nella scrittura di φ il quantificatore $\exists$ che vincola x non è preceduto da alcun quantificatore universale, sopprimiamo la scrittura $(\exists x)$ introducendo un nuovo simbolo di costante c col quale sostituiamo la x ogni volta che appare in φ ;

se nella scrittura di φ il quantificatore $\exists$ che vincola x è preceduto da k quantificatori universali che vincolano le variabili individuali x_1, x_2, $\ldots$, x_k, sopprimiamo la scrittura $(\exists x)$ introducendo un nuovo simbolo di funzione f e sostituiamo la x ogni volta che appare in φ con la scrittura $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$.

Sia A^* l’alfabeto ottenuto da A aggiungendo simboli di costante e simboli di funzione come sopra descritto, e sia φ^* la formula ottenuta da φ con le sostituzioni sopra descritte. È chiaro che φ^* è in forma di Skolem; omettiamo i dettagli della dimostrazione del fatto che φ è soddisfacibile se e soltanto se φ^* è soddisfacibile.

Sia φ una formula della logica dei predicati, e sia $\overline{\varphi}$ una formula in forma normale prenessa logicamente equivalente a $\overline{\varphi}$ nella quale la parte che segue i quantificatori è in forma normale congiuntiva (cfr. teorema 3.6.16). Anche nella formula φ^* ottenuta da $\overline{\varphi}$ con l’algoritmo descritto nella dimostrazione del teorema 3.7.1 la parte che segue i quantificatori è in forma normale congiuntiva: tale formula φ^* si dice *skolemizzazione* di φ .

Riprendiamo gli esempi visti nella seconda ora (virtuale) di lezione dello scorso martedì 21 aprile 2020.

$\boxed{\text{Esempio 1}}$

Sia x una variabile individuale e siano P, Q simboli di predicato unario. Abbiamo trasformato la formula

$$(\forall x)\mathrm{P}(x) \to (\forall x)\mathrm{Q}(x)$$

nella formula

$$(\exists x)(\forall y)\big(\mathrm{P}(x) \to \mathrm{Q}(y)\big)$$

in forma normale prenessa ad essa logicamente equivalente.

Per la skolemizzazione, in questo caso, è sufficiente introdurre un simbolo di costante c e sostituirlo alla variabile individuale x, ottenendo così

$$(\forall y)\big(\mathrm{P}(c) \to \mathrm{Q}(y)\big)\,.$$

Esercizio

Avevate fatto l’esercizio? Vediamolo insieme, arrivando alla skolemizzazione.

La formula
$$(\exists x)\mathrm{P}(x) \to (\exists x)\mathrm{Q}(x)$$
diventa
$$\neg(\exists x)\mathrm{P}(x) \vee (\exists x)\mathrm{Q}(x) \equiv (\forall x)\neg\mathrm{P}(x) \vee (\exists x)\mathrm{Q}(x) \equiv (\forall x)\neg\mathrm{P}(x) \vee (\exists y)\mathrm{Q}(y) \equiv$$
$$\equiv (\exists y)(\forall x)\big(\neg\mathrm{P}(x) \vee \mathrm{Q}(y)\big)$$
per la cui skolemizzazione è sufficiente introdurre un simbolo di costante c col quale sostituire la y, ottenendo
$$(\forall x)\big(\neg\mathrm{P}(x) \vee \mathrm{Q}(c)\big)\,.$$
La formula
$$(\forall x)\mathrm{P}(x) \to (\exists x)\mathrm{Q}(x)$$
diventa
$$\neg(\forall x)\mathrm{P}(x) \vee (\exists x)\mathrm{Q}(x) \equiv (\exists x)\neg\mathrm{P}(x) \vee (\exists x)\mathrm{Q}(x) \equiv (\exists x)\big(\neg\mathrm{P}(x) \vee \mathrm{Q}(x)\big)$$
per la cui skolemizzazione è di nuovo sufficiente introdurre un simbolo di costante c col quale sostituire la x, ottenendo
$$\neg\mathrm{P}(c) \vee \mathrm{Q}(c)\,.$$
Infine, la formula
$$(\exists x)\mathrm{P}(x) \to (\forall x)\mathrm{Q}(x)$$
diventa
$$\neg(\exists x)\mathrm{P}(x) \vee (\forall x)\mathrm{Q}(x) \equiv (\forall x)\neg\mathrm{P}(x) \vee (\forall x)\mathrm{Q}(x) \equiv (\forall x)\neg\mathrm{P}(x) \vee (\forall y)\mathrm{Q}(y) \equiv$$
$$\equiv (\forall x)(\forall y)\big(\neg\mathrm{P}(x) \vee \mathrm{Q}(y)\big)$$
che è già in forma di Skolem essendo priva di quantificatori esistenziali.

Esempio 2

Nel secondo esempio abbiamo considerato un linguaggio per la logica dei predicati al quale appartengono un simbolo di funzione f di arietà 1, un simbolo di predicato P di arietà 1, un simbolo di predicato Q di arietà 2 e due variabili individuali x, y, e abbiamo trasformato la formula
$$\big((\exists x)(\neg P(x)) \vee ((\forall x)P(x) \to (\exists y)\mathrm{Q}(f(y), y))\big) \wedge \big((\forall x)\neg((\forall y)\,\mathrm{Q}(x, y))\big)\,.$$
nella formula
$$(\exists x)(\forall z)(\exists y)\big((\neg P(x) \vee \mathrm{Q}(f(x), x)\big) \wedge \neg\mathrm{Q}(z, y)\big)$$
in forma normale prenessa, ad essa logicamente equivalente.

Per la skolemizzazione, introduciamo un simbolo di costante c col quale sostituiamo la variabile individuale x e un simbolo di funzione unaria $g(z)$ col quale sostituiamo la variabile individuale y, ottenendo
$$(\forall z)\big((\neg P(c) \vee \mathrm{Q}(f(c), c)\big) \wedge \neg\mathrm{Q}(z, g(z))\big)\,.$$

Facciamo due ultimi esempi di skolemizzazione. Vi dico francamente che esercizi di questo tipo mi stanno antipatici, anche se capisco che sono necessari per prendere confidenza con le tecniche di calcolo. Preferisco vedere la skolemizzazione (con tutto quel che ne segue, e che scopriremo nella prossima ora virtuale di lezione) nella verifica di conseguenze logiche, che è poi lo scopo di tutto questo ambaradan. Gli esercizi di skolemizzazione stanno alle modellizzazioni dei ragionamenti un po’ come quelle lunghe espressioni algebriche che ci facevano semplificare nel biennio della scuola secondaria superiore (ricordate?) stanno ai problemi di matematica (geometria, ma anche altre cose): sono certamente utili per esercitarsi però in sé sono piuttosto aridi e danno poca soddisfazione, non vi pare?

Esempio 3.7.2

In un opportuno linguaggio della logica dei predicati, siano x, y, z, t variabili individuali, sia P un simbolo di predicato binario e siano f, g simboli di funzioni binarie. Trasformiamo la formula

$$\varphi := (\exists x)(\exists y)(\forall z)\big(\mathrm{P}(f(x,z),z) \wedge \mathrm{P}(g(y,z),z) \wedge \big(\neg\mathrm{P}(x,z) \rightarrow (\exists t)\mathrm{P}(g(z,t),y)\big)\big)$$

in una sua skolemizzazione.

Come primo passo, troviamo una formula in forma normale prenessa logicamente equivalente a φ.

Si ha

$$\begin{aligned}\neg\mathrm{P}(x,z) \rightarrow (\exists t)\mathrm{P}(g(z,t),y) &\equiv \mathrm{P}(x,z) \vee (\exists t)\mathrm{P}(g(z,t),y) \equiv \\ &\equiv (\exists t)\big(\mathrm{P}(x,z) \vee \mathrm{P}(g(z,t),y)\big)\end{aligned}$$

e dunque

$$\varphi \equiv (\exists x)(\exists y)(\forall z)(\exists t)\big(\mathrm{P}(f(x,z),z) \wedge \mathrm{P}(g(y,z),z) \wedge \big(\mathrm{P}(x,z) \vee \mathrm{P}(g(z,t),y)\big)\big)\,.$$

Si è così ottenuta una formula in forma normale prenessa logicamente equivalente a φ nella quale la parte che segue i quantificatori è in forma normale congiuntiva.

Per procedere alla sua skolemizzazione introduciamo due simboli di costante c_1 e c_2 e un simbolo di funzione unaria h, e sostituiamo la variabile individuale x col simbolo di costante c_1, la variabile individuale y col simbolo di costante c_2 e la variabile individuale t col termine $h(z)$, ottenendo così

$$(\forall z)\big(\mathrm{P}(f(c_1,z),z) \wedge \mathrm{P}(g(c_2,z),z) \wedge \big(\mathrm{P}(c_1,z) \vee \mathrm{P}(g(z,h(z)),c_2)\big)\big)\,.$$

Esempio 4

In un opportuno linguaggio della logica dei predicati, siano x, y variabili individuali, sia P un simbolo di predicato binario, sia Q un simbolo di predicato unario e sia g un simbolo di funzione unaria.

Skolemizziamo la formula

$$((\forall x)\neg((\forall y)P(x,y))) \wedge (((\exists x)\neg Q(x)) \vee ((\forall x)Q(x) \to (\exists y)P(g(y),y)))\,.$$

In primo luogo, trasformiamola in forma normale prenessa. Essa è formata con un “ $\wedge$ ” a partire dalle due formule

$$\alpha := (\forall x)\neg((\forall y)P(x,y))$$

e

$$\beta := ((\exists x)\neg Q(x)) \vee ((\forall x)Q(x) \to (\exists y)P(g(y),y))$$

ciascuna delle quali va trasformata in forma normale prenessa.

La forma normale prenessa di α è

$$(\forall x)(\exists y)\neg P(x,y) \equiv (\forall z)(\exists w)\neg \mathrm{Q}(z,w)\,.$$

La formula β è formata con un “ $\vee$ ” a partire dalle due formule

$$\beta_1 := (\exists x)(\neg Q(x)) \text{ (già in FNP)}$$

$$\beta_2 := (\forall x)Q(x) \to (\exists y)P(f(y),y) \equiv \neg(\forall x)Q(x) \vee (\exists y)P(f(y),y) \equiv$$

$$\equiv (\exists x)\neg Q(x) \vee (\exists y)\mathrm{Q}(f(y),y) \equiv (\exists x)\neg Q(x) \vee (\exists x)\mathrm{Q}(f(x),x) \equiv$$

$$\equiv (\exists x)(\neg Q(x) \vee \mathrm{Q}(f(x),x)) \text{ (ora in FNP)}$$

e dunque la forma normale prenessa di β è

$$(\exists x)((\neg Q(x)) \vee (\neg Q(x) \vee \mathrm{Q}(f(x),x))) \equiv (\exists x)(\neg Q(x) \vee \mathrm{Q}(f(x),x))$$

cosicché la FNP di $\alpha \wedge \beta$ è

$$(\exists x)(\forall z)(\exists w)((\neg Q(x) \vee \mathrm{Q}(f(x),x)) \wedge \neg \mathrm{Q}(z,w))\,.$$

Infine, per la skolemizzazione basterà introdurre una costante c in luogo di x e una funzione unaria $g(z)$ in luogo di w, ottenendo

$$(\forall z)((\neg P\mathrm{Q}(c) \vee \mathrm{Q}(f(c),c)) \wedge \neg \mathrm{Q}(z,g(z)))\,.$$