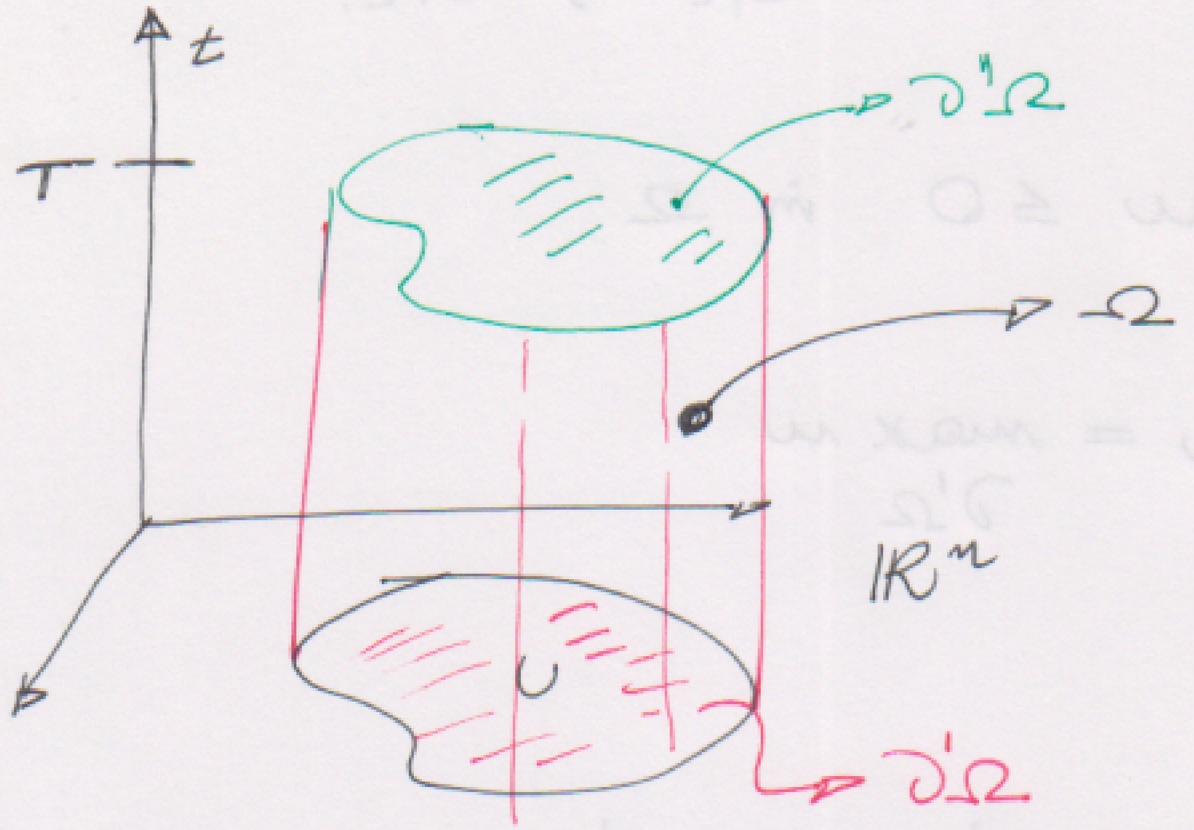
Eq. Calore: principio massimo debole in domini limitati

Consideriamo il seguente dominio cilindrico



Interp. fisica

$t=0$: CI

$t=T$: Tempo finale osservato

Sup. laterale: parete mantenuta a T assegnata

U aperto limitato connesso di $\mathbb{R}^n$

Cilindro $\Omega \in \mathbb{R}^{n+1}$ $\Omega = \left\{ (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in U \; 0 < t < T \right\}$

$\downarrow$ aperto

$\partial\Omega$ = Bordo di Ω $\qquad \partial\Omega \doteq \partial'\Omega + \partial''\Omega$

Dove $\partial'\Omega = \left\{ (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \partial U, \; t \in [0,T] \; \cup \; x \in U \;\; t = 0 \right\}$

$$\partial''\Omega = \left\{ (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in U, \; t = T \right\}$$

Dimostriamo questo Th di massimo debole per una classe più ampia di eq. risp. a eq. calore.

Th: Sia $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C_1^2(\Omega)$ t.c.

$$\partial_t u - \Delta_x u \leq 0 \quad \text{in } \Omega$$

Allora $\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial'\Omega} u$

OSS.

Nota che il max a dx è preso su $\partial'\Omega$ non su $\partial\Omega$

Utilità applicativa: u in $\partial'\Omega$ non è noto

inoltre ci aspettiamo che la temperatura max sia imposta dai valori al bordo e iniziali e che tali valori facciano da limite superiore ai valori di temperatura assunti dal sistema.

La forma del dominio è importante! il Th in generale non vale per domini più complicati

Freccia temporale: Il teorema mostra un'asimmetria del comportamento della soluzione per $t=0$ e $t=T$

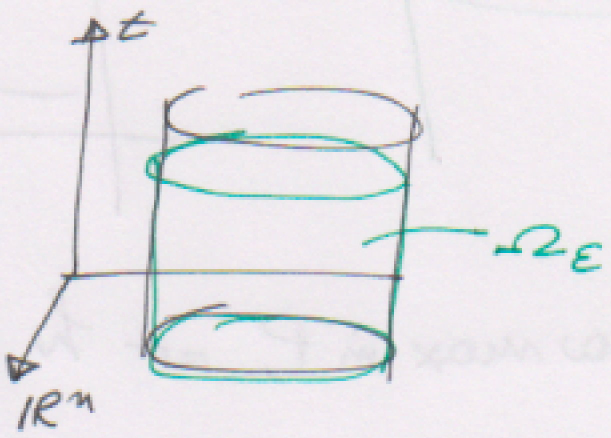
Non posso scambiare la "base" col "tappo"

Dimostrazione

Consideriamo prima il caso $\partial_t u - \Delta u \overset{①}{<} 0$ in Ω

Poichè nel Th si esclude la sezione $t=T$ considero il dominio ridotto

$$\Omega_\varepsilon = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \quad x \in U \quad t \in]0, T-\varepsilon)\}$$



Poichè $u \in C^0(\overline{\Omega}_\varepsilon)$ esiste almeno un punto $P=(x_0, t_0) \in \overline{\Omega}_\varepsilon$ t.c. $u(P) = \max\limits_{\overline{\Omega}_\varepsilon} u$

2 casi ① $P \in \Omega_\varepsilon$ oppure ② $P \in \partial\Omega_\varepsilon$

caso ① $\Rightarrow$ P è un estremo $\Rightarrow$ condiz. necessaria

$$\nabla_{\mathbb{R}^{n+1}} u\Big|_P = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \partial_t u \\ \partial_{x_1} u \\ \partial_{x_2} \\ \partial_{x_n} u \end{pmatrix} \begin{matrix} =0 \\ =0 \\ =0 \\ =0 \end{matrix} \Rightarrow \partial_t u = 0$$

P è anche max $\Rightarrow \Delta_x u \leq 0$ infatti se considero

$g(x) = u(x, t_0) \Rightarrow g(x)$ ha un max in x_0

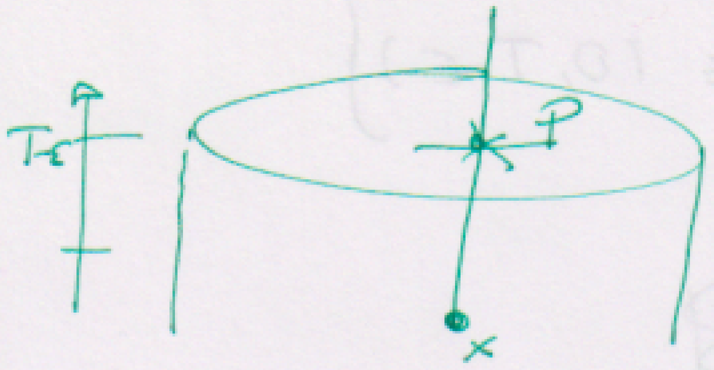
$$\Rightarrow \Delta g \leq 0$$

in $P=(x_0,t_0)$: $\partial_t u = 0$ $\Delta u \leq 0 \Rightarrow \partial_t u - \Delta u \geq 0$ contro Hp ①

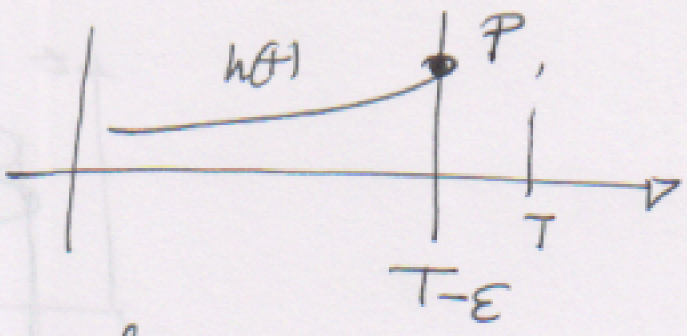
Nel caso 2 ipotizziamo $P \in \partial''\Omega_\varepsilon$ (bordo superiore)

Ragionando come prima $\Rightarrow$ $\Delta u|_{(x_0,T-\varepsilon)} \le 0$

Riguardo alle derivate temporali



so fisso x_0 $\quad h(t)=u(x_0,t)$



Poiché u ha max in P, $\Rightarrow$ h deve essere non decrescente (altrimenti troverei dei tempi $t^* < T-\varepsilon$ t.c. $h(t^*) > h(T-\varepsilon)$)

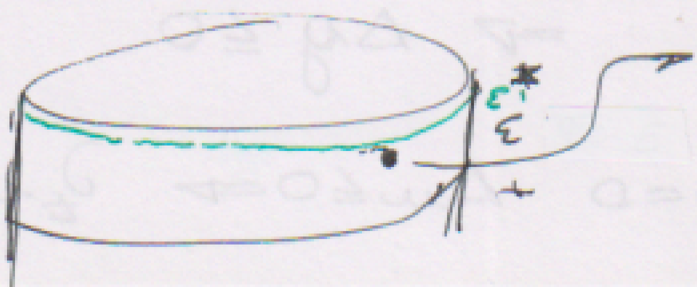
$\Rightarrow$ $\partial_t u \ge 0$

$\Rightarrow$ in $P \in \partial''\Omega_\varepsilon$ $\Rightarrow$ ho $\partial_t u - \Delta u \ge 0$ in contraddiz. con (1)

L'unica possibilità rimasta è che il max sia in $\partial'\Omega_\varepsilon$

$$\Rightarrow \quad \max_{\overline{\Omega}_\varepsilon} u = \underset{A}{\max_{\partial'\Omega_\varepsilon} u} \le \underset{B}{\max_{\partial'\Omega} u}$$

ε è arbitrario: ogni punto in $\overline{\Omega}$ con $t<T$ appartiene a $\overline{\Omega}_\varepsilon$ per un certo ε, inoltre u è continua in Ω $\Rightarrow$ mandando $\varepsilon \to 0$ la condiz. A coincide con B



se il max sta qua, prendo un ε più piccolo che è quello della dimostrazione

Caso 2 $\partial_t u - \Delta_x u \leq 0$ in Ω

Definiamo la funzione ausiliaria

$$v(x,t) = u(x,t) - kt \quad \text{con } k \text{ arbitrario}$$

$$\partial_t v - \Delta v = \partial_t u - \Delta u - k < 0$$

Applico il caso precedente a v

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\bar{\Omega}} (v + kt) \leq \max_{\bar{\Omega}} |v| + kT$$

$$= \max_{\partial'\Omega} v + kT \leq \max_{\partial'\Omega} u + kT$$

$$v = u - kt \leq u$$

Mandando $k \to 0$ ad ogni passaggio "$\leq$" diventa "$=$"

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial'\Omega} u$$

Applicazione Th max debole: l'eq. del calore in domini limitati ammette al max una soluzione

UNICITA'

Th: Sia $u, v \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2_1(\Omega)$ t.c.

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 & (x,t) \in U \times (0,T] \\ u(x, t=0) = g & \text{in } \partial' \Omega \end{cases} \quad \begin{cases} \partial_t v - \Delta v = 0 & (x,t) \in U \times (0,T] \\ \partial_t v - \Delta v = g & \text{in } \partial' \Omega \end{cases}$$

$\Rightarrow u = v$

Dimo: Considero $w = u - v$

$$\begin{cases} \partial_t w - \Delta w = 0 & \text{in } \Omega \\ w = 0 & \text{in } \partial' \Omega \end{cases}$$

applico princ. max debole a w e $-w$

$$\max_{\bar{\Omega}} (w) = \max_{\bar{\Omega}} (-w) = 0 \Rightarrow w = 0$$

Per l'eq. del calore si può anche dimostrare un risultato di max forte

Th: Sia $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2_1(\Omega)$

t.c. $\partial_t u - \Delta u = 0$ in Ω

Se esiste $P = (x_0, t_0) \in \Omega$ t.c.

$u(x_0, t_0) = \max_{\bar{\Omega}} u \Rightarrow u$ è costante in $\bar{\Omega}$

Metodo dell'energia: Dimostriamo il Th unicità precedente basandoci su considerazioni di tipo energetico

Dimo ②:

Come prima $w = u - v$

Definiamo $E(t) \doteq \int_U w^2(x,t)\, dV(x) \quad 0 \le t \le T$

$$\frac{dE}{dt} = \int_U 2w \frac{\partial w}{\partial t}\, dV(x) = 2\int w \Delta_x w \, dV(x)$$

$$= -2 \int_U \nabla w \nabla w \, dV = -2 \int_U |\nabla w|^2 \le 0$$

↓

th div e w è nullo su ∂U

poichè $E \ge 0$ per def. e $E(0) = 0 \Rightarrow E = 0$ in $[0,T]$

$\Rightarrow w = 0$