Equazione del trasporto

$$\partial_t u + \vec{b} \cdot \nabla_x u = 0 \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

$$\vec{b} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$u(x, t_0) = u_0(x)$$

Cerchiamo una soluz. dell'equazione

definisco $\gamma(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

consideriamo $h(t) \doteq u(\gamma(t), t)$

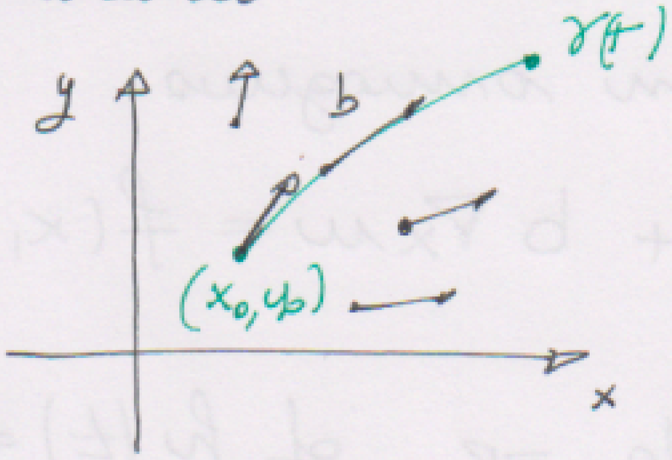
Calcoliamo $\frac{d}{dt} h = \nabla_x u \cdot \dot{\gamma} + \partial_t u = \nabla_x u \cdot (\dot{\gamma} - b)$

Scegliamo γ: $\dot{\vec{\gamma}} = \vec{b}$

ovvero una curva la cui velocità

è data dal campo $\vec{b}$: γ è la curva

integrale di $\vec{b}$



Fissato un tempo t.

la curva $\gamma(t)$ con C.I $\vec{x}$

può essere vista come una Trasformazione $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

che associa alle coord. iniz $\vec{x}$ il pt di arrivo $\vec{x}(t) = \vec{\gamma}(t)$

Cambio di variabili $x_i = x_i(\bar{x}_0, t) = \gamma_i(x_0, t)$

con questa scelta $\frac{dh}{dt} = 0 \Rightarrow$ ~~h(t)~~ $h(t_0) = u(x_0, t_0)$

otteniamo

$$u(\gamma(t), t) = u(\bar{x}_0, t_0)$$

considerando un x generico $\quad x = \gamma(t, x_0)$

$$\Rightarrow x_0 = \gamma^{-1}(t, x)$$

$$u(x,t) = u(\gamma^{-1}(t,x), t_0) = u_0(\gamma^{-1}(t,x))$$

Caso particolare $\quad \vec{b} = \text{costante}$

$$\dot{\gamma} = \vec{b} \Rightarrow \quad \gamma(t) = \vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \vec{b}(t-t_0)$$

$$\vec{x}_0 = \vec{x} - \vec{b}(t-t_0)$$

$$\boxed{u(\vec{x},t) = u_0(\vec{x} - \vec{b}(t-t_0))}$$

Caso non omogeneo

$$\partial_t u + b \nabla_x u = f(x,t)$$

Ripetendo $\Rightarrow \quad \frac{d}{dt} h(t) = f(x(t), t)$

$$h(t) = \int_{t_0}^{t} f(x(t'), t')\, dt' + h(t_0)$$

$\vec{b}$ costante $\qquad x(t) = x_0 + b(t-t_0)$

$$x_0 = x(t) - b(t-t_0)$$

$$h(t) = w(x(t), t)$$

$$h(t_0) = w(x_0, t_0)$$

Notiamo $\vec{x}(t') = \vec{x_0} + \vec{b}(t' - t_0)$

$$x(t) = \vec{x_0} + \vec{b}(t - t_0)$$

$$x(t') - x(t) = \vec{b}(t' - t)$$

$$w(x(t), t) = \int_{t_0}^{t} f(x(t) + b(t' - t), t')\, dt + w_0(x(t) - b(t - t_0))$$

prendendo $x(t) = x$ generico e $t_0 = 0$

$$\boxed{w(x, t) = \int_{0}^{t} f(\vec{x} + \vec{b}(t' - t), t')\, dt' + w_0(\vec{x} - \vec{b}t)}$$

*

Equazioni delle onde in $\mathbb{R}^{n+1}$

Eq. omogenea : $\partial_t^2 u - \Delta_x u = 0$ con $x \in U$

$t \in [0, +\infty)$

con $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto connesso, limitato o non limitato

Eq non omogenea $\partial_t^2 u - \Delta_x u = f$ in $U \times [0, \infty)$

Caso $n = 1$: Formula di d'Alambert

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = g \quad \partial_t u = h & \text{per } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Caso non limitato nello spazio

Ho un'eq. del II ordine: mi aspetto 2 c.I. da poter imporre (tipo $\ddot{x} = g \Rightarrow x(0) = x_0 \quad \dot{x}(0) = v_0$)

Notiamo $0 = \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) u}_{\overset{\shortparallel}{v(x,t)}}$

Ottengo l'eq. per v

$\partial_t v + \partial_x v = 0$ eq. di Trasporto

Soluzione $v(x,t) = v(x-t; t=0) \equiv v_0(x-t)$

C.I. $v(x,0) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,t)\Big|_{t=0} =$

$$= \frac{\partial}{\partial t}u\Big|_{t=0} - \frac{\partial}{\partial x}u\Big|_{t=0} = h(x) - g'(x)$$

$$v(x,t) = h(x-t) - g'(x-t)$$

Equazione per $u(x,t)$

$$\partial_t u - \partial_x u = v(x,t) = v_0(x-t)$$

uso la formula * dell'eq. trasp. con $b=-1$

$$u(x,t) = \int_0^t \underbrace{v(x-(t'-t), t')}_{\substack{\parallel \\ v_0(x-(t'-t)-t')}} \, dt' + u_0(x+t)$$

$$= \int_0^t v_0(\underbrace{x+t-2t'}_{\substack{y = x+t-2t' \\ dy = -2dt'}}) \, dt' + u_0(x+t) =$$

$$= +\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} v_0(y) \, dy + u_0(x+t)$$

$$v_0(y) = h(y) - g'(y) \qquad u_0(x+t) = g(x+t)$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y) - \frac{1}{2}\left(g(x+t) - g(x-t)\right) + g(x+t)$$

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)\,dy + \frac{1}{2}\left(g(x+t) + g(x-t)\right)}$$

Interpretazione della soluzione di d'Alambert

Sia $F(x)$ la primitiva di h $\quad F(x) = \int^x h\,dx$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[F(x+t) - F(x-t) + g(x+t) + g(x-t)\right]$$

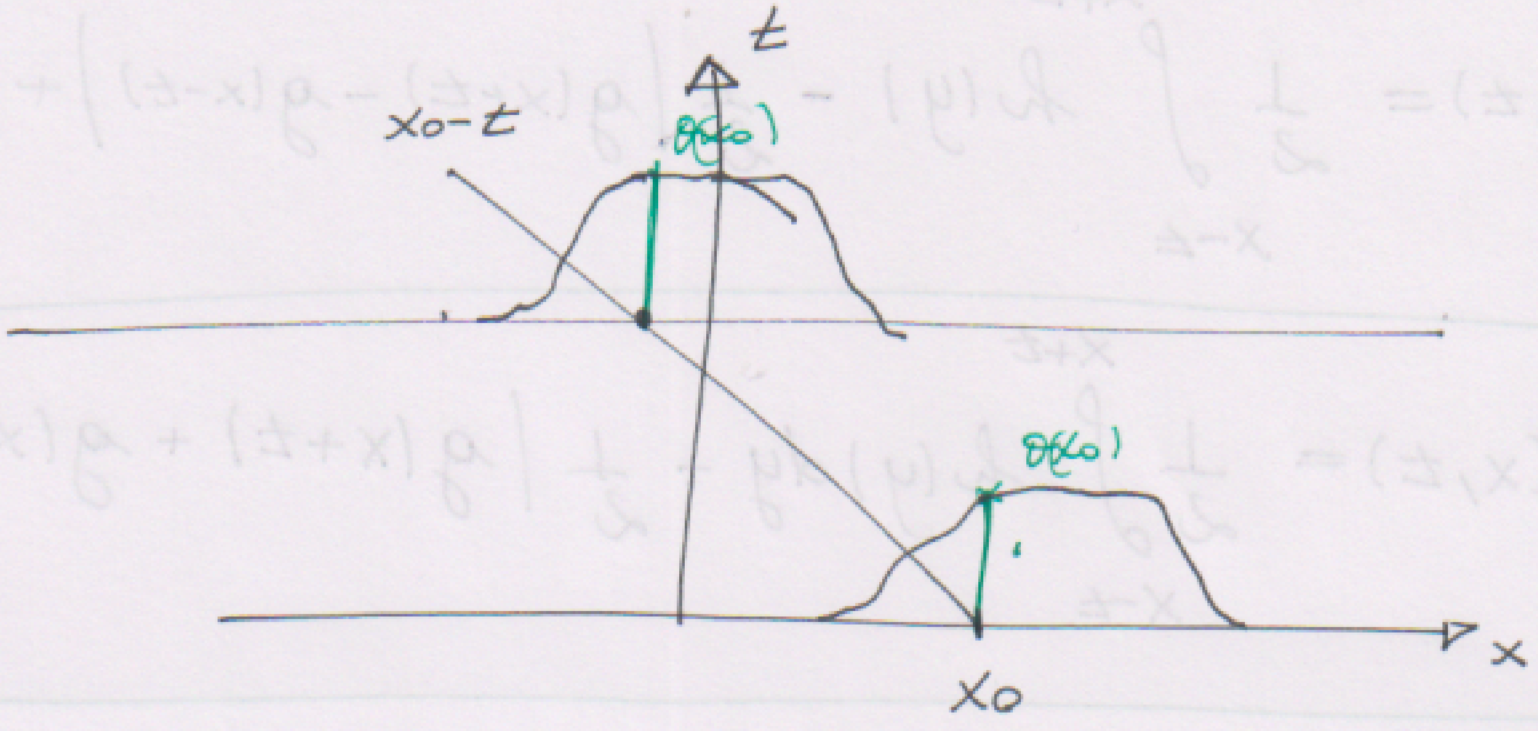
$$= \theta(x+t) + \eta(x-t)$$

onda regressiva

onda progressiva

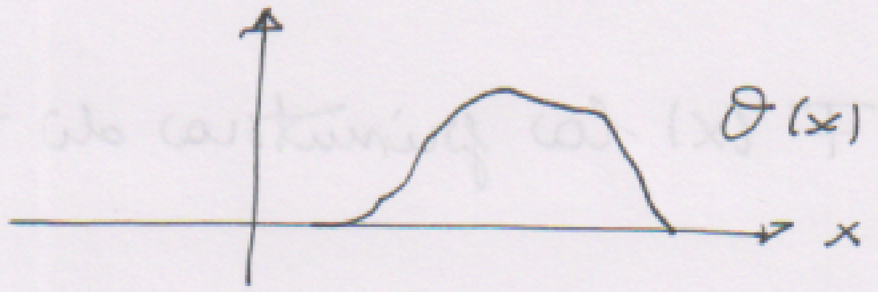
$$\theta = \frac{1}{2}(F+g) \qquad \eta = \frac{1}{2}(-F+g)$$

Disegniamo il grafico di $\theta(x+t)$ in $\mathbb{R}^2$



$f(x,t) = \theta(x+t)$

$f(x,0) = \theta(x)$

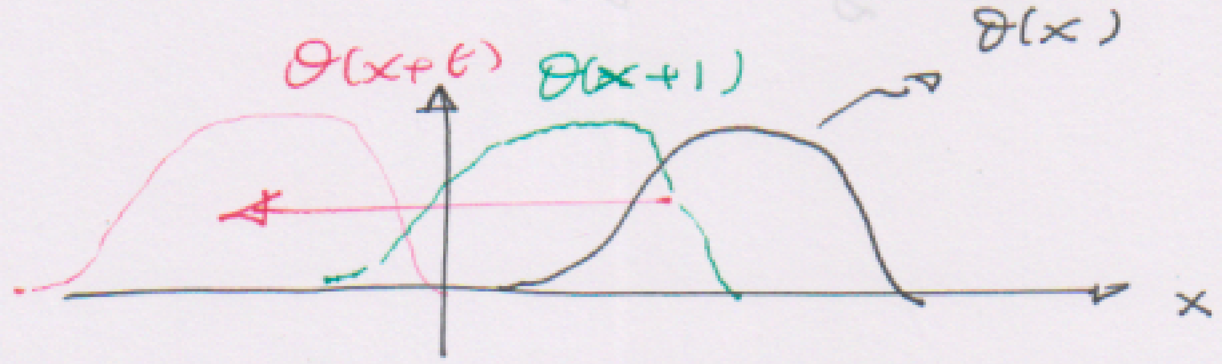


$f(x',t) = \theta(\underbrace{x'+t}_{\equiv\, x_0}) = \theta(x_0)$

$x'+t = x_0 \Rightarrow x' = x_0 - t$

$f(x_0-t, t) = \theta(x_0)$

Il grafico di $\theta(x+t)$ non è altro che una traslaz. rigida verso sx di $\theta(x)$



ONDA REGRESSIVA

$w(x,t) = \theta(x+t) + \eta(x-t)$