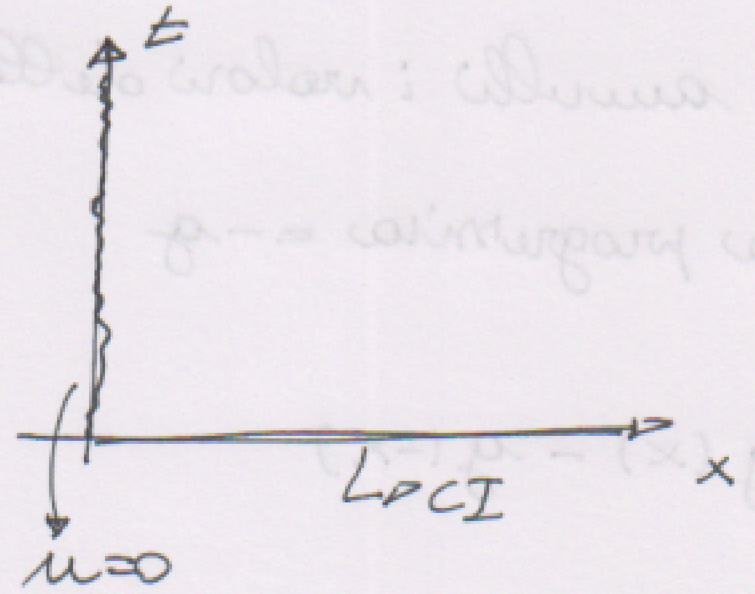
Equazione delle onde in $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$: metodo della riflessione

Risolviamo il seguente sistema

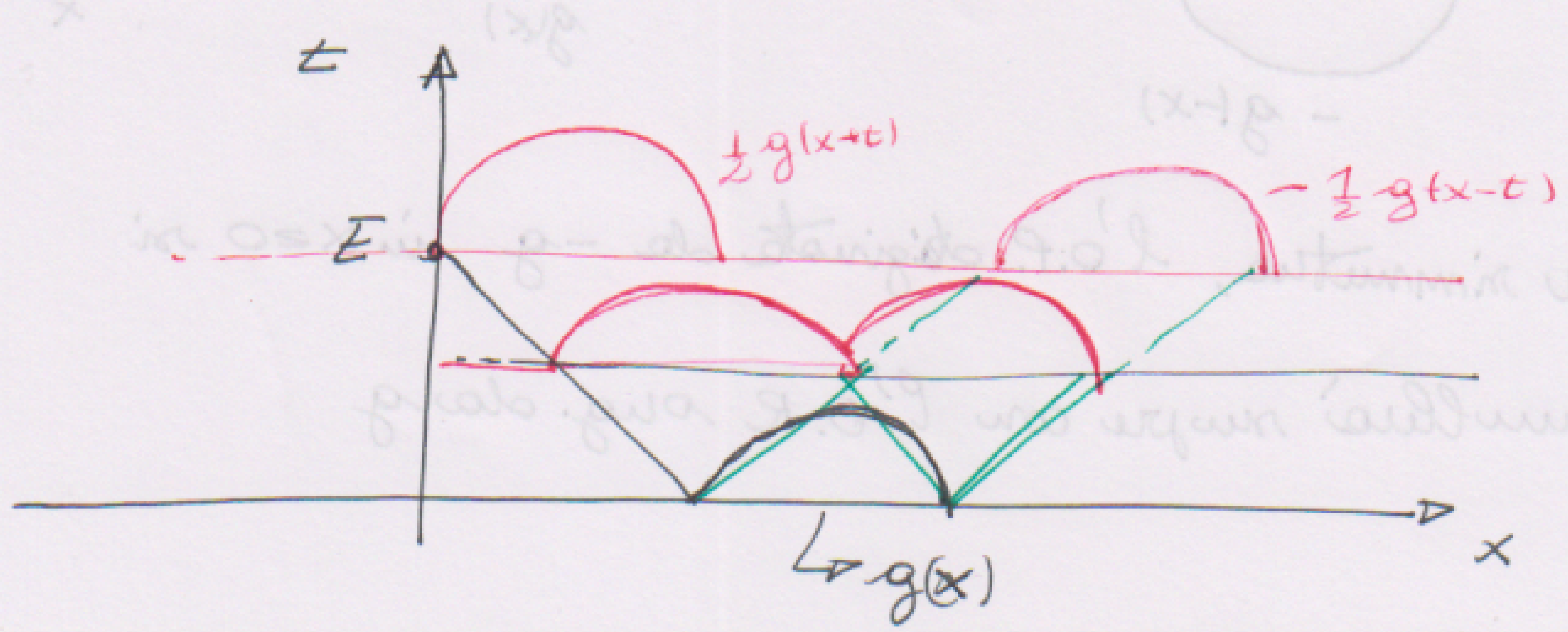
$$\mathrm{I}\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0 & \mathbb{R}^+ \times (0,+\infty) \\ u = g \quad \partial_t u = h & \mathbb{R}^+ \times \{t=0\} \\ u = 0 & \text{in } \{x=0\} \times (0,+\infty) \end{cases}$$



Idea del metodo: prendiamo $h=0$

la soluz. di d'Alambert (in $\mathbb{R} \times (0,\infty)$) diventa

$$u = \frac{1}{2}\left(g(x+t) + g(x-t) \right)$$

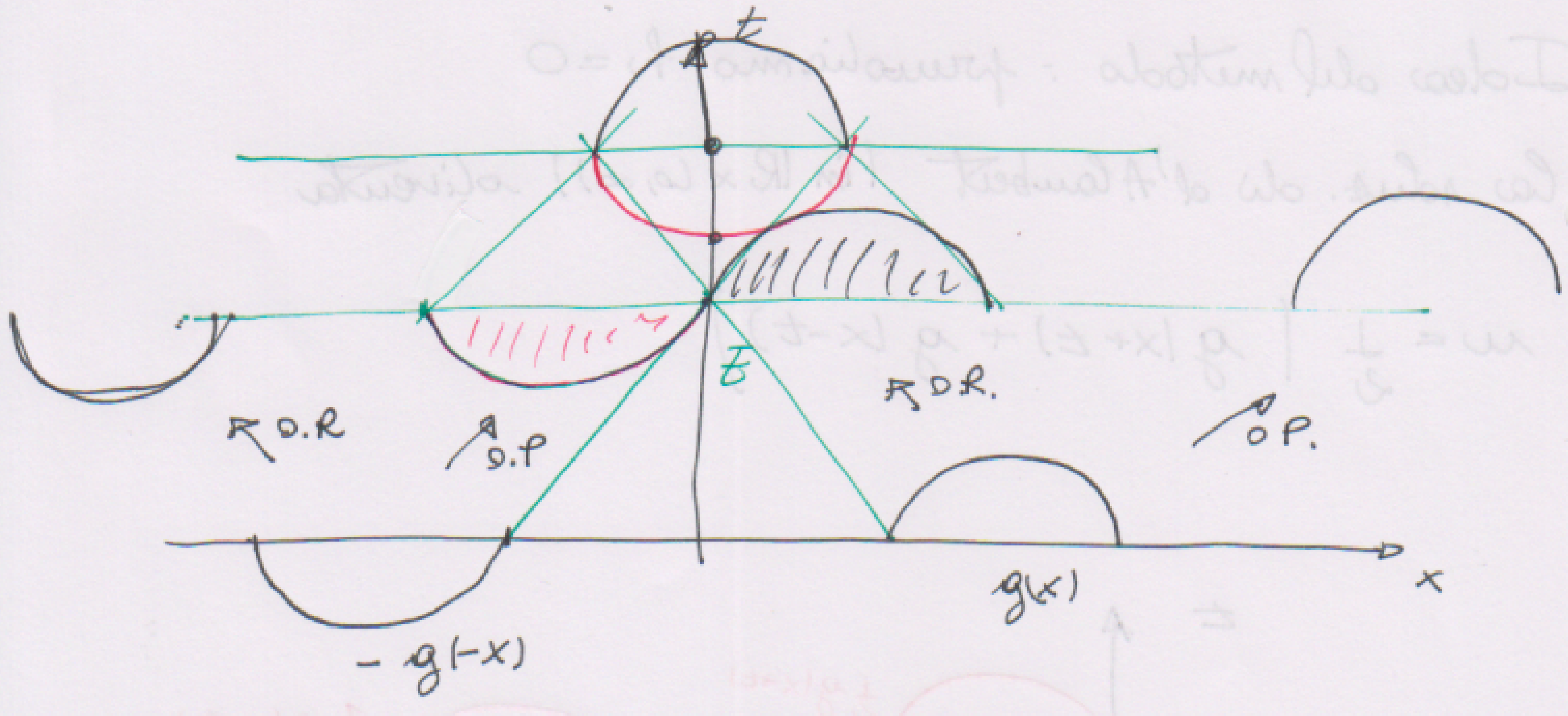


In questo caso particolare, fino al tempo $\bar{t}$, la soluz. d'Alambert è anche soluz. del prob. I

Per tempi maggiori la soluzione d'Al. non può più essere accettata in quanto prevede un valore $u(0,t) \neq 0$. contrario alle cond. al contorno. Come evitare il problema!

Si potrebbe inserire una C. I. diversa da zero per le $x < 0$ e tale che annulli i valori dell'onda regressiva in $x = 0$ $\Rightarrow$ onda progressiva $= -g$

C. I $\quad g'(x) = g(x) - g(-x)$



Per simmetria, l'O.P. originata da $-g$ in $x=0$ si annullerà sempre con l'O. R orig. da g

Passiamo al caso generale. Le considerazioni precedenti suggeriscono di definire le seguenti funzioni

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & x \geq 0 \\ -g(-x) & x \leq 0 \end{cases}$$

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} h(x) & x \geq 0 \\ -h(-x) & x \leq 0 \end{cases}$$

Nota; in principio h e g sono definite solo per $x \geq 0$

Risolviamo l'eq. delle onde in $\mathbb{R}$

$$\text{II} \begin{cases} \partial_t^2 \tilde{u} - \partial_x^2 \tilde{u} = 0 & \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ \tilde{u} = \tilde{g} \quad \partial_t \tilde{u} = \tilde{h} & \mathbb{R} \times \{t=0\} \end{cases}$$

La soluzione di II è data dalla formula di Alembert

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2}\left[\tilde{g}(x+t) + \tilde{g}(x-t)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(y)\,dy$$

Valutiamo $\tilde{u}$ lungo l'asse $x=0$

$$\tilde{u}(0,t) = \frac{1}{2}\left[\tilde{g}(t) + \tilde{g}(-t)\right] + \frac{1}{2}\int_{-t}^{t} \tilde{h}(y)\,dy$$

$$t > 0 \Rightarrow \tilde{g}(t) = g(t) \quad \tilde{g}(-t) = -g(t)$$

$$\tilde{u}(0,t) = \frac{1}{2}\left[\int_0^t \tilde{h}(y)\,dy + \int_{-t}^{0} \tilde{h}(y)\,dy\right] =$$

$$\tilde{u}(0,t) = \frac{1}{2}\int_0^t h(y)\,dy + \underbrace{\frac{1}{2}\int_{-t}^{0}(-)\,h(-y)\,dy}_{= -\int_0^t h(y)\,dy} = 0$$

Se restringo la soluzione $\tilde{u}(x,t)$ al semipiano $x \geq 0$

$\tilde{u}$ fornisce una soluzione del prob. I

Verifichiamo le C. I. $(x \geq 0)$

$$\tilde{u}(x,0) = \frac{1}{2}\left[\tilde{g}(x) + \tilde{g}(x)\right] = \tilde{g}(x) = g(x)$$

$$\partial_t \tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2}\left[\tilde{g}'(x+t) - \tilde{g}'(x-t)\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\tilde{h}(x+t) + \tilde{h}(x-t)\right] \xrightarrow{t=0} \partial_t \tilde{u}(x,0) = \tilde{h}(x) = h(x)$$

Quindi $\tilde{u}$ soddisfa Eq. onde in $R^+ \times (0,\infty)$, C.C. e C.I.

Conviene scrivere la soluzione di I in funzione delle sole $g(x)$ e $h(x)$;

Abbiamo $x \geq 0$ $t \geq 0$

Caso $x \geq t \geq 0$ $\quad x - t \geq 0$

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2}\left[\tilde{g}(x+t) + \tilde{g}(x-t)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(y)\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\left[g(x+t) + g(x-t)\right] + \frac{1}{2}\int h(y)\,dy$$

Caso $\quad 0 \le x \le t \qquad x-t \le 0$

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2}\Big[\underset{\underset{\textstyle g(x+t)}{\parallel}}{\tilde{g}(x+t)} + \underset{\underset{\textstyle -g(t-x)}{\parallel}}{\tilde{g}(x-t)}\Big] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(y)\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\Big[g(x+t) - g(t-x)\Big] + \frac{1}{2}\Big[\underbrace{\int_{x-t}^{0} \underset{\underset{\textstyle -h(-y)}{\parallel}}{\tilde{h}(y)}\,dy}_{\underset{\textstyle -\int_0^{t-x} h(y)\,dy}{\parallel}} + \int_0^{x+t} \underset{\underset{\textstyle h(y)}{\parallel}}{\tilde{h}(y)}\,dy\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[g(x+t) - g(t-x)\Big] + \frac{1}{2}\int_{t-x}^{x+t} h(y)\,dy$$

La solut. di I è quindi

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\big[g(x+t) + g(x-t)\big] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)\,dy & 0 \le t \le x \\ \frac{1}{2}\big[g(x+t) - g(t-x)\big] + \frac{1}{2}\int_{t-x}^{t+x} h(y)\,dy & 0 \le x \le t \end{cases}$$

Soluzione equazioni alle onde in $\mathbb{R}^n$

Iniziamo con alcune definizioni

Definiamo

$$U(x,r,t) \doteq \fint_{\partial B(x,r)} u(y,t)\, dS(y)$$

Notiamo come dalla conoscenza di U possiamo ~~facilmente~~ ricavare u

$$\lim_{r\to 0} U(x,r,t) = \lim_{r\to 0} \fint_{\partial B(x,r)} u(y,t) \overset{u\in C^0}{=} u(x,t)$$

Verifichiamo il seguente risultato

Sia $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ soluz. dell'eq. delle onde

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta_x u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = g \quad \partial_t u = h & \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases}$$

Allora $U(x,r,t)$ è soluzione di Eq.

EULERO-POISSON-DARBOUX

$$\text{E-P-D} \begin{cases} \partial_t^2 U - \partial_r^2 U - \frac{n-1}{r}\partial_r U = 0 & \text{in } \mathbb{R}^+ \times (0,\infty) \\ U = G \quad \partial_t U = H & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \{t=0\} \end{cases}$$

in cui in E-P-D $\vec{x} \in \mathbb{R}$ è fissato (ruolo di parametro)

e $\quad H(x,r) = \fint_{\partial B(x,r)} h(y)\, dS(y)$

$$G(x,r) = \fint_{\partial B(x,r)} g(y)\, dS(y)$$

NOTA da Eq. onde a E-P-D siamo passati da un' eq. PDE in $\mathbb{R}^{n+1}$ a $\mathbb{R}^2$. Risolvendo E-P-D per la U ricaviamo $u(x,t)$

Deriviamo Eq. E-P-D

Calcoliamo $\displaystyle \frac{\partial}{\partial r} U(x,r,t) = \frac{\partial}{\partial r} \fint_{\partial B(x,r)} u(\bar{y},t)\, dS(y)$

$$= \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{|\partial B(x,r)|} \int_{\partial B(x,r)} u(y,t)\, dS(y) \qquad z = \frac{y-x}{r}$$

$$dS(z) = \frac{dS(y)}{r^{n-1}}$$

$$= \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\cancel{r^{n-1}}\, n\alpha(n)} \int_{\partial B(0,1)} u(r\bar{z}+\bar{x})\, \cancel{r^{n-1}}\, dS(z)$$

$$= \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(0,1)} \frac{\partial}{\partial r} u(\bar{x}+r\bar{z})\, dS(\bar{z}) = \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(0,1)} \nabla_x u\big|_{(x+r\bar{z})} \cdot \bar{z}\, dS(z)$$

$$\partial_r U(x,r,t) = \frac{1}{r^{n-1} n\alpha(n)} \int_{\partial B(x,r)} \nabla_x u(y) \cdot \frac{y-x}{r} \, dS(y)$$

normale uscente alla palla $B(x,r)$

th. div.

$$= \frac{1}{r^{n-1} n\alpha(n)} \int_{B(x,r)} \Delta u \, dV(y) = \frac{r}{n} ⨍_{B(x,r)} \Delta u \, dV(y)$$

Utilizziamo che u è sol Eq. onde

$$\partial_r U(x,r,t) = \frac{1}{r^{n-1} n\alpha(n)} \int_{B(x,r)} \partial_t^2 u \, dV(y)$$

Quindi

$$r^{n-1} \partial_r U = \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{B(x,r)} \partial_t^2 u \, dV(y)$$

Deriviamo rispetto a r

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1} \partial_r U \right) = \frac{1}{n\alpha(n)} \frac{\partial}{\partial r} \int_{B(x,r)} \partial_t^2 u \, dV(y)$$

Formula coarea

$$= \frac{1}{n\alpha(n)} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^r d\rho \left(\int_{\partial B(x,\rho)} \partial_t^2 u \, dS(y) \right) = \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(x,r)} \partial_t^2 u \, dS(y)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}\partial_r U\right) = \frac{1}{n\alpha(n)}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_{\partial B(x,r)} u \, dS(y)$$

$$r^{n-1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_{\partial B(x,r)} u \, dS(y) = r^{n-1}\partial_t^2 U$$

Quindi $\quad (n-1)\, r^{n-2}\partial_r U + r^{n-1}\partial_r^2 U = r^{n-1}\partial_t^2 U$

Soluzione Eq. E-P-D caso $n=3$

$$\begin{cases} \partial_t^2 U - \partial_r^2 U - \dfrac{2}{r}\partial_r U = 0 & \mathbb{R}^+ \times (0,\infty) \\ U = G \qquad \partial_t U = H & \mathbb{R}^+ \times \{t=0\} \end{cases}$$

Definiamo $\quad \bar{U} = rU \quad$ e analog. $\bar{G} = rG$, $\bar{H} = rH$

Calcoliamo $\quad \partial_t^2 \bar{U} = r\,\partial_t^2 U = r\left(\partial_r^2 U + \dfrac{2}{r}\partial_r U\right) =$

$$= r\,\partial_r^2 U + 2\,\partial_r U = \frac{\partial}{\partial r}\left(U + r\partial_r U\right)$$

Notiamo $\quad \partial_r \bar{U} = U + r\,\partial_r U$

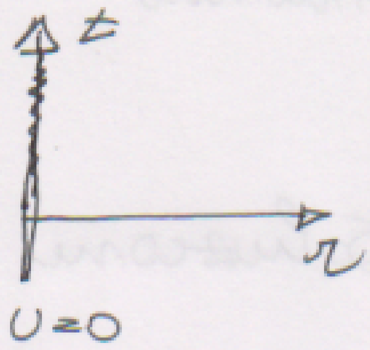
$\partial_t^2 \bar{U} = \partial_r^2 \bar{U} \quad$ eq. onde in $\mathbb{R}^+ \times (0,\infty)$

Per costruzione abbiamo $\lim_{r \to 0} \bar{U}(x,r,t) =$

$$= \lim_{r \to 0} r \underbrace{U(x,r,t)}_{\substack{\downarrow r \to 0 \\ u(x,t) \text{ regolare}}} = 0$$

Quindi abbiamo che $\bar{U}$ è soluz. dell'eq.

$$\begin{cases} \partial_t^2 \bar{U} - \partial_r^2 \bar{U} = 0 & \mathbb{R}^+ \times (0,\infty) \\ \bar{U} = \bar{G} \quad \partial_t \bar{U} = \bar{H} & \mathbb{R}^+ \times \{t=0\} \\ \bar{U} = 0 & \{r=0\} \times (0,\infty) \end{cases}$$



Abbiamo già risolto l'equazione. Poiché siamo interessati a $u(x,t) = \lim_{r \to 0} U(x,r,t)$, possiamo Hp $0 \le r \le t$ nella formula risolutiva

$$\bar{U}(x,r,t) = \frac{1}{2}\left[\bar{G}(r+t) - \bar{G}(t-r) \right] + \frac{1}{2} \int_{t-r}^{t+r} \bar{H}(y)\,dy$$

in cui $\bar{G}(r) = r\,G(r) = r \fint_{\partial B(x,r)} g(y)\,dS(y)$

↳ x è un parametro fissato

Ricaviamo $u(x,t) = \lim_{r \to 0} U(x,r,t) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{r} \bar{U}(x,r,t)$

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{r}\,\bar U(x,r,t) = \underbrace{\lim_{r\to 0} \frac{\bar G(r+t)-\bar G(t-r)}{2r}}_{\frac{\partial}{\partial t}\bar G(t)}$$

$$+ \underbrace{\lim_{r\to 0} \frac{1}{2r}\int_{t-r}^{t+r} \bar H(y)\,dy}_{\bar H(t)}$$

$$w(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(t \fint_{\partial B(x,t)} g(y)\,dS(y)\right) + t \fint_{\partial B(x,t)} h(y)\,dS(y)$$

$$= \fint_{\partial B(x,t)} \big(g(y) + t\,h(y) \big)\,dS(y) + t \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \fint_{\partial B(x,t)} g(y)\,dS(y)}_{I}$$

$$z = \frac{y-x}{t}$$

$$I = \frac{\partial}{\partial t}\, \frac{1}{4\pi t^2} \int_{\partial B(x,t)} g(y)\,dS(y) = \frac{\partial}{\partial t}\, \frac{1}{4\pi}\, \frac{\cancel{t^2}}{\cancel{t^2}} \int_{\partial B(0,1)} g(tz+x)\,dS_z$$

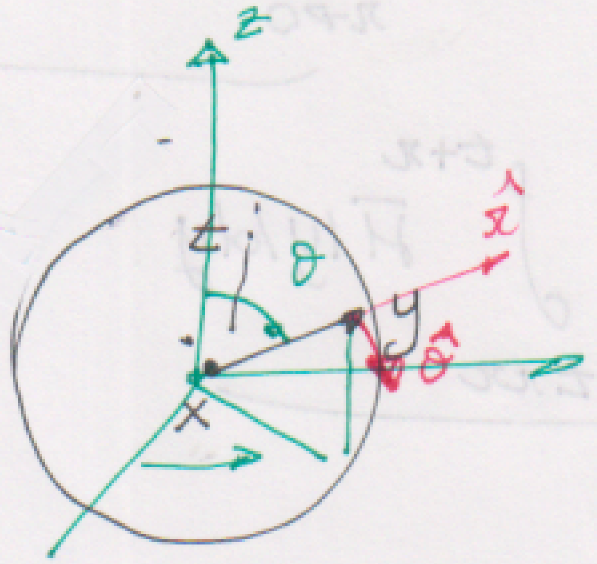
$$= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B(0,1)} \vec\nabla g \Big|_{tz+x} \cdot \vec z\,dS(z) = \frac{1}{4\pi t^2} \int_{\partial B(x,t)} \vec\nabla g \cdot \left(\frac{y-x}{t}\right) dS(y)$$

$$\boxed{\,tI = \cancel{t} \fint_{\partial B(x,t)} \vec\nabla g \cdot \left(\frac{y-x}{\cancel{t}}\right) dS(y)\,}$$

Otteniamo la formula di Kirchhoff

$$u(x,t) = \fint_{\partial B(x,t)} \Big(g(\bar y) + t\,h(\bar y) + \vec\nabla g \cdot (\bar y - \bar x) \Big)\,dS(\bar y)$$

Scriviamo la formula in coord sferiche



grad. in coord. sferiche $\nabla g = (\hat{i}\partial_x + \hat{j}\partial_y + \hat{k}\partial_z)\, g =$

$$\frac{\partial}{\partial r} g\, \hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}\,\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} g\, \hat{\varphi}$$

$\bar{y} - \bar{x} = \vec{r}$ con $|\vec{r}| = t$

$$\nabla g \cdot (y-x) = \frac{\partial}{\partial r} g\, \hat{r}\cdot\hat{r}\cdot t = t\frac{\partial g}{\partial r}$$

Otteniamo

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi \cancel{t^2}} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left(g + t h + t\frac{\partial g}{\partial r}\right) \underbrace{\cancel{t^2}\sin\theta \, d\theta\, d\varphi}_{dS(y)}$$

Formula cambio di variabili in integrale

$$\int_{\varphi(U)} f(x)\,dS(x) = \int_U f(\varphi(x))\,|J|\,dS(x)$$

$$\downarrow$$

$$\sqrt{\det(J J^t)} \qquad ; \; J = \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{x}}$$

$$\int_{\partial B^3(0,r)} f(x)\,ds = \int_{\varphi^+(B^2)} f(x)\,ds + \int_{\varphi^-(B^2)} f(x)\,ds$$

$$\partial B^3(0,r) = \varphi^+(B^2(0,r)) \cup \varphi^-(B^2(0,r))$$

$$\int_{\varphi^+(B^2)} f(x)\,ds = \int_{B^2(0,r)} f(\varphi^+(x,y))\,|J|\,dx\,dy$$

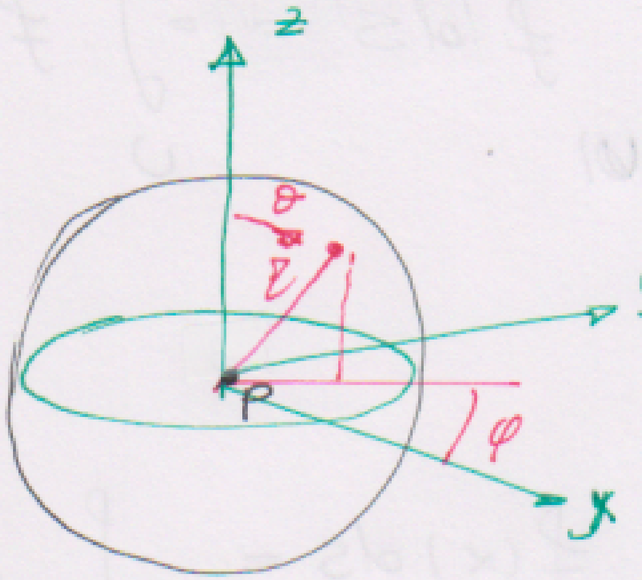
$$J = \frac{\partial(\varphi_x^+, \varphi_y^+, \varphi_z^+)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_x^+}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_y^+}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_z^+}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_x^+}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_y^+}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_z^+}{\partial y} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\partial z^+}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial z^+}{\partial y} \end{pmatrix} \qquad \text{con } z^+ = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$$

$$J J^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\partial z}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 & \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} & 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \end{pmatrix}$$

Ricordiamo la formula per il calcolo di un integrale di una funzione sulla sup. di una sfera in $\mathbb{R}^3$, in coordinate cartesiane

$$\int_{\partial B(0,r)} f(x,y,z)\, dS$$



$$\partial B(0,r) = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = r^2 \}$$

Descriviamo la sup. sferica come il grafico di una funzione $(x,y) \to (x,y,z)$

$$z = \pm\sqrt{r^2-x^2-y^2}$$

$$\partial B(0,r) = \partial^+ B(0,r) \cup \partial^- B(0,r)$$

$$\partial^+ B(0,r) = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{(x,y) \in B^2(0,r)}_{x^2+y^2 \leq r^2},\ z = \sqrt{r^2-x^2-y^2} \}$$

Possiamo definire $\varphi^+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \varphi^+(x,y) = \begin{pmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{r^2-x^2-y^2} \end{pmatrix}$

Abbiamo $\varphi^+(B^2(0,r)) = \partial^+ B^3(0,r)$

analogamente $\varphi^-(B^2(0,r)) = \partial^- B^3(0,r)$

$\hookrightarrow$ rad. negativa di z

$$\det(JJ^+) = \left(1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right)\left(1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right) - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

$$= 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 1 + |\nabla_{x,y} \varphi^+_z|^2$$

otteniamo

$$\int_{B^2(0,r)} f(\varphi^+(x,y))\,|J|\,dx\,dy = \int_{B^2(0,r)} f(x,y,\sqrt{r^2-x^2-y^2}) \cdot \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy$$

In conclusione

$$\int_{\partial B^3(0,r)} f(x,y,z)\,dS = \int_{B^2(0,r)} \left(f(x,y,\sqrt{r^2-x^2-y^2}) + f(x,y,-\sqrt{r^2-x^2-y^2}) \right) \cdot \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy$$

Riscriviamo la formula traslando il centro della sfera. Usiamo la notazione $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$

$\bar{y} = (y_1, y_2, y_3)$

prendiamo $\bar{x} = (x_1, x_2, 0)$

*1

$$\int_{\partial B^3(\bar{x},r)} f(y_1,y_2,y_3)\, dS(\bar{y}) = \int_{B^2((x_1,x_2),r)} \Big(f(y_1,y_2,z) + f(y_1,y_2,-z) \Big) \cdot \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial y_1}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y_2}\right)^2}\; dy_1 dy_2$$

con $z = \sqrt{r^2-(x_1-y_1)^2-(x_2-y_2)^2}$

$$\frac{\partial z}{\partial y_1} = \frac{1 (-) 2 (y_1-x_1)}{2\sqrt{r^2-(x_1-y_1)^2-(x_2-y_2)^2}} = \frac{x_1-y_1}{\sqrt{r^2-(x_1-y_1)^2-(x_2-y_2)^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y_2} = \frac{x_2-y_2}{\sqrt{r^2-(x_1-y_1)^2-(x_2-y_2)^2}}$$

$$1+\left(\frac{\partial z}{\partial y_1}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y_2}\right)^2 = 1+\frac{(x_2-y_2)^2+(x_1-y_1)^2}{r^2-(x_1-y_1)^2-(x_2-y_2)^2} =$$

$$= \frac{r^2}{r^2-(x_1-y_1)^2-(x_2-y_2)^2}$$

$$\boxed{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial y_1}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y_2}\right)^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2-(x_1-y_1)^2-(x_2-y_2)^2}}}$$

Utilizziamo questo calcolo per ottenere la soluz. dell' equazione delle onde in dimensione 2

$$(1) \begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^2 \times (0,\infty) \\ u = g \quad \partial_t u = h & \mathbb{R}^2 \times \{t=0\} \end{cases}$$

dove $u = u(x_1, x_2, t)$

definiamo $\bar{u} = \bar{u}(x_1, x_2, x_3, t) \doteq u(x_1, x_2, t)$

$$\bar{g}(x_1, x_2, x_3, t) \doteq g(x_1, x_2, t)$$

$$\bar{h}(x_1 x_2, x_3, t) = h(x_1, x_2, t)$$

Ho introdotto una dipendenza fittizia dalla variabile x_3

formalmente $\bar{u} : \mathbb{R}^{3+1} \to \mathbb{R}$

$$\partial_{x_3} \bar{u} = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{(\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2)}_{\Delta_{x_1 x_2}} u = (\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2)\bar{u} = (\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2)\bar{u}$$

$$= \Delta_{x_1 x_2 x_3} \bar{u}$$

$$\partial_t u = \partial_t \bar{u}$$

Quindi $\bar{u}$ è soluzione di un' eq. onde in $\mathbb{R}^{3+1}$ con c. I. che non dipendono dalla 3ª variabile spaziale

$$\begin{cases} \partial_t^2 \bar{u} - \Delta \bar{u} = 0 & \mathbb{R}^3 \times (0,\infty) \\ \bar{u} = \bar{g} \quad \partial_t \bar{u} = \bar{h} & \mathbb{R}^3 \times \{t=0\} \end{cases}$$

La formula di Kirchhoff fornisce la soluzione $\bar{u}$

$$\bar{u}(x_1, x_2, x_3, t) = \fint_{\partial B^3(\bar{x}, t)} \left(t\bar{h}(y) + \bar{g}(y) + \nabla \bar{g}(y-x) \right) dS(y)$$

Poichè $\bar{u}$ non dipende da x_3 possiamo porre $x_3 = 0$

$$u(x_1, x_2, t) = \bar{u}(x_1, x_2, 0, t) =$$

$$\fint_{\partial B^3((x_1,x_2,0),t)} \Big(t h(y_1, y_2) + g(y_1, y_2) + \frac{\partial}{\partial y_1} g\,(y_1 - x_1) + \frac{\partial g}{\partial y_2}(y_2 - x_2) \Big) dS(y)$$

$\downarrow$

integrale lungo la sup. di una sfera in $\mathbb{R}^3$ di una funzione che dip. solo dalle prime 2 variabili

lo un integrale della forma

$$\frac{1}{4\pi t^2} \int_{\partial B^3((x_1,x_2,0),t)} f(y_1\, y_2)\, dS(y) = *^1$$

$$= \frac{1}{2\,\cancel{4\pi t^2}} \int_{B^2((x_1,x_2),t)} \cancel{t}\, f(y_1,y_2)\, \frac{\cancel{t}}{\sqrt{t^2-(x_1-y_1)^2-(x_2-y_2)^2}}\, dy_1\, dy_2$$

$$= \frac{1}{2} \int_{B^2((x_1,x_2);t)} f(y_1,y_2)\, \frac{t}{\sqrt{t^2-(x_1-y_1)^2-(x_2-y_2)^2}}\, dy_1\, dy_2$$

Otteniamo la formula di Poisson per la soluzione del problema alle onde in dimensione 2

$$u(x_1,x_2,t) = \frac{1}{2} \int_{B^2((x_1,x_2),t)} \frac{t^2 h + t g + t\left(\frac{\partial g}{\partial y_1}(y_1-x_1) + \frac{\partial g}{\partial y_2}(y_2-x_2)\right)}{\sqrt{t^2-(x_1-y_1)^2-(x_2-y_2)^2}}\, dy_1 dy_2$$

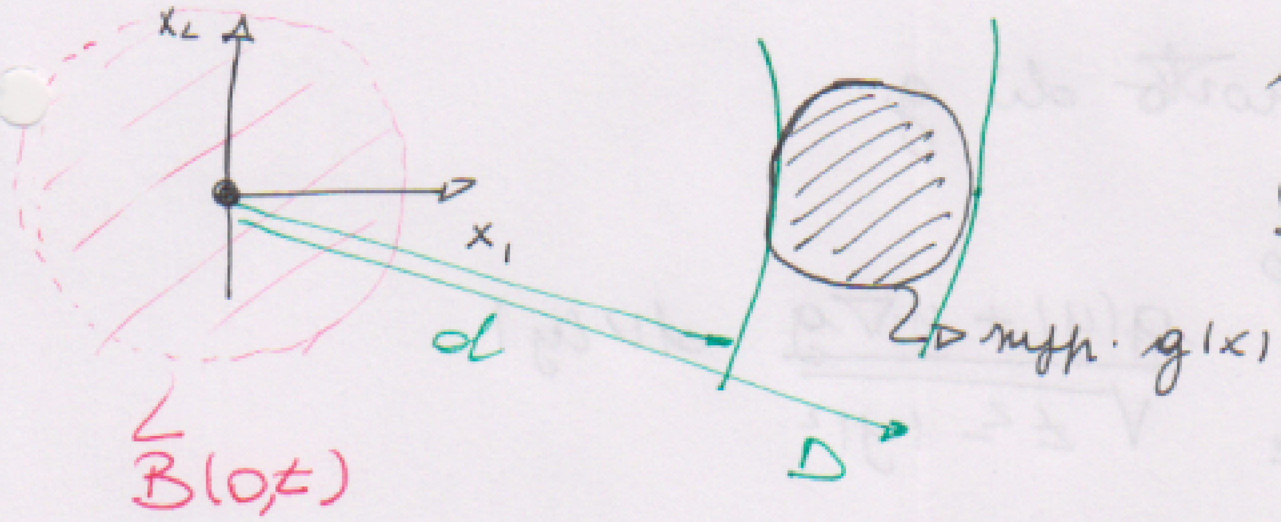
in notazione compatta $\bar{x} = (x_1, x_2)$ $\bar{y} = (y_1, y_2)$

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2} \int_{B(x,t)} \frac{t^2 h(y) + t g(y) + t\, \nabla_y g \cdot (y-x)}{\sqrt{t^2-|x-y|^2}}\, dV(y)}$$

Interpretazione della soluzione: proprietà di onde che si propagano sul piano

consideriamo il caso $h=0$ e $g(x)$ a supporto compatto

$$u(\bar{x},t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\pi t^2} \, t \int_{B(x,t)} \frac{g(y) + (y-x)\cdot \nabla g}{\sqrt{t^2 - |x-y|^2}} \, dV(y)$$



d = dist min supp. g da orig.

D = dist max supp g da orig.

$u(x,0) = g(x) \rightarrow$ ex segnale di pressione sulla sup. di un fluido

$g(x)$ rappresenta una perturb. in pressione di un mezzo elastico a $t=0$

Analizziamo il comportamento del segnale di pressione in $x=0$

(posiziono un sensore in $x=0$)

per $t=0$ non rilevo alcun segnale $u(0,0)=0$

$g(0)=0$

Al crescere di t il dominio di integraz. aumenta ma finchè $t<d$ $u(0,t)=0$ $\text{supp}\, g \cap B(0,t)=\emptyset$

per $t>d$ $u(0,t)\neq 0$

$$u(0,t)=\frac{1}{2\pi t}\int_{B(0,t)}\frac{g(y)+y\cdot\nabla g}{\sqrt{t^2-|y|^2}}\,dV(y)$$

Per $t>D$ il dominio di integrazione comprende tutto il supporto di g

$$u(0,t)=\frac{1}{2\pi t}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{g(y)+y\cdot\nabla g}{\sqrt{t^2-|y|^2}}\,dV(y)$$

per $t>>D$

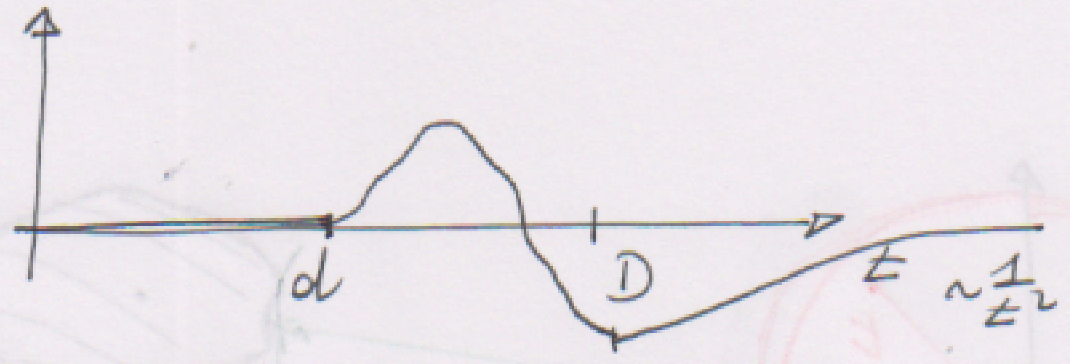
$$\frac{1}{\sqrt{t^2-|y|^2}}=\frac{1}{t\sqrt{1-\left|\frac{|y|}{t}\right|^2}}\xrightarrow{|y|<D}\frac{1}{t}$$

$$u(0,t)\overset{t>>D}{\sim}\frac{1}{2\pi t^2}\int_{\mathbb{R}^2}\left(g(y)+y\cdot\nabla g\right)dV(y)=$$

$$\frac{1}{2\pi t^2}\int_{\mathbb{R}^2}\left(g(y)-g\,\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{y}}_{\sum_i \frac{\partial y_i}{\partial y_i}=2}\right)=-\frac{1}{2\pi t^2}\int_{\mathbb{R}^2}g(y)$$

Il segnale rilevato in $x=0$ ha il seguente comportamento

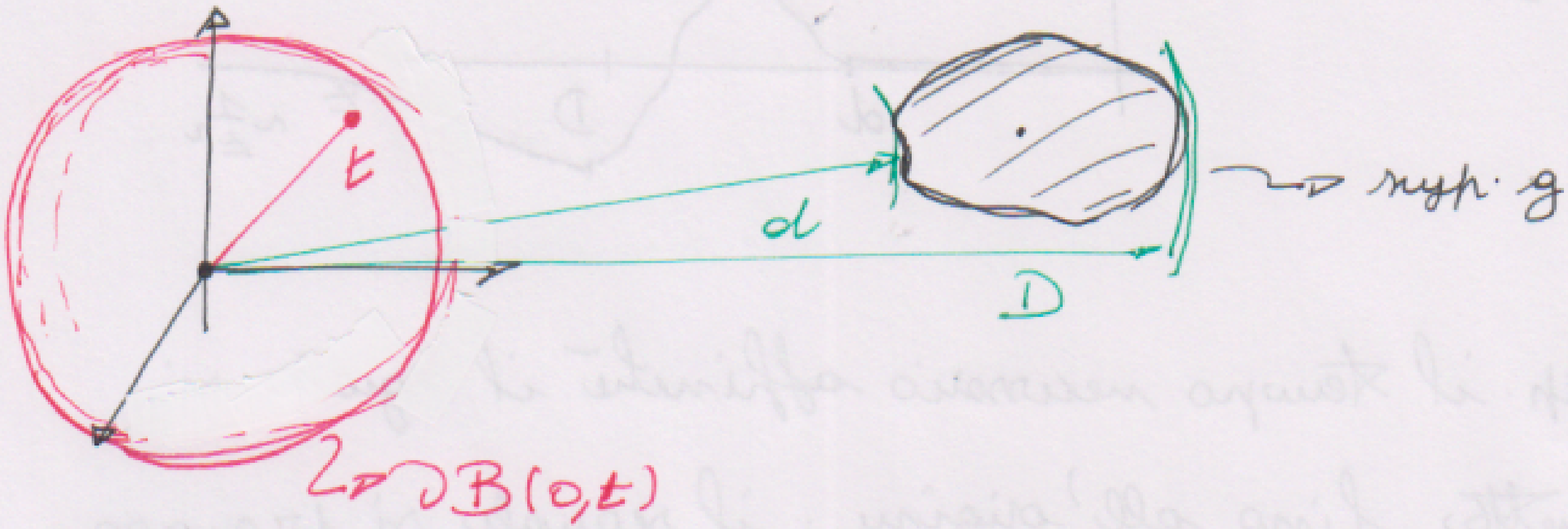
$u(x,t) \Rightarrow$



d rapp. il tempo necessario affinchè il segnale si trasmetta fino all'origine: il segnale si propaga con velocità $v = \frac{d}{t=d} = 1$

Dopo che il fronte d'onda è passato (D è il tempo necessario affinchè la perturb. più lontana dall'origine giunga su origine) il segnale decade come $\frac{1}{t^2}$

Caso $n = 3$ $h = 0$ $g(x, y, z) \neq 0$



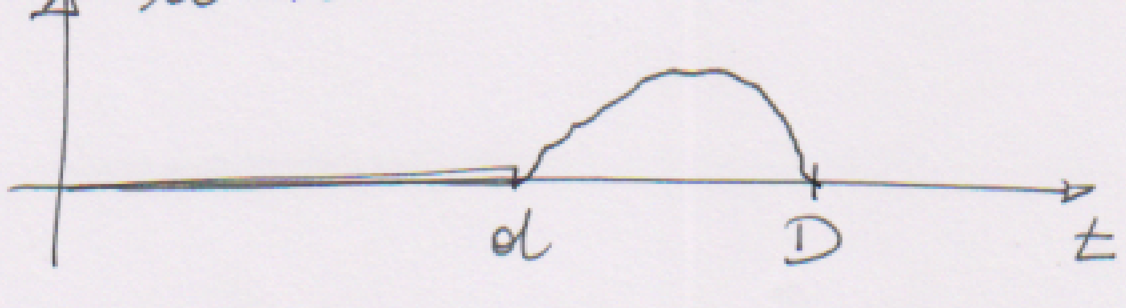
$$u(0,t) = \frac{1}{4\pi t^2} \int_{\partial B(0,t)} \left(g(y) + \vec{\nabla} g \cdot \vec{y} \right) dS(y)$$

$u(0, t) = g(0) = 0$

Per $t < d$ $\quad supp\, g \cap \partial B(0,t) = \emptyset \Rightarrow u(0,t) = 0$

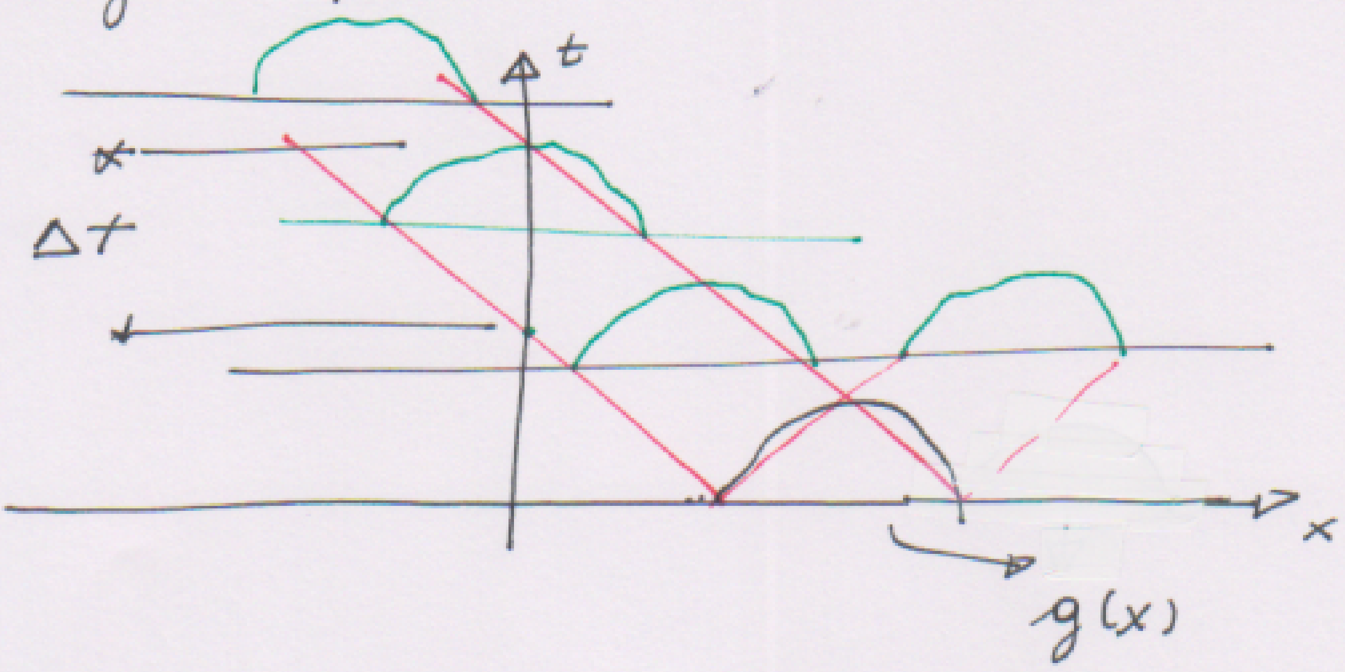
per $d < t < D$ $\quad u(0,t) \neq 0$

per $t > D$ $\quad supp\, g \cap \partial B(0,t) = \emptyset \Rightarrow u(0,t) = 0$



Il segnale si propaga dalla sorgente all'origine con $v = 1$ dopo che il segnale che è partito da D giunge sul rivelatore, non si rileva altro segnale.

Analogo a quanto avviene in $\mathbb{R}$



Solo durante l'intervallo Δt si può rilevare un segnale