Successione di Mayer-Vietoris

Sia $M = U \cup V$ unione di due aperti.

$$M \xleftarrow{\;i_{U \sqcup V}\;} U \sqcup V \underset{\partial_1}{\overset{\partial_0}{\leftleftarrows}} U \cap V$$

Proposizione:

la successione

$$0 \to \Omega^*(M) \xrightarrow{\;i^*_{U \sqcup V}\;} \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \xrightarrow{\;\delta\;} \Omega^*(U \cap V) \to 0$$

$$(\omega, \tau) \longmapsto \tau - \omega$$

$$\partial_1^* \tau - \partial_0^* \omega$$

è esatta.

SUCCESSIONI ESATTE

successione di spazi vettoriali

$$\longrightarrow V_{i-1} \xrightarrow{f_i} V_i \xrightarrow{f_{i+1}} V_{i+1} \longrightarrow$$

f_i lin.

si dice esatta se $\forall\, i$

$$\mathrm{Im}\, f_{i-1} = \mathrm{Ker}\, f_{i+1}$$

una successione esatta corta

è una successione esatta

del tipo

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

ossia

- f iniettiva
- g suriettiva
- $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\, g$

Dimostrazione della proposizione

- denotiamo

$$U \xhookrightarrow{i} M$$

$$V \xhookrightarrow{j} M$$

sia $\alpha \in \Omega^q(M)$

consideriamo $(i^*\alpha, j^*\alpha)$

se $i^*\alpha = 0$ e $j^*\alpha = 0$

allora $\alpha = 0$

perché $M = U \cup V$

quindi la prima mappa è iniettiva.

- $i_{U\sqcup V} : U \sqcup V \longrightarrow M$

$$\operatorname{Ker}(\delta) = \operatorname{Im}(i^*_{U\sqcup V})$$

$(\omega, \eta) \in \operatorname{Ker}(\delta)$ se

$$j_1^* \eta = j_0^* \omega \quad \text{su}$$

$U \cap V$ ossia η e ω sono uguali nell'intersezione quindi danno luogo a una forma globalmente definita α. Quindi

$$i^*_{U\sqcup V}(\alpha) = (\omega, \eta) \in \operatorname{Im} i^*_{U\sqcup V}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Ker}\delta \subseteq \operatorname{Im} i^*_{U\sqcup V}$$

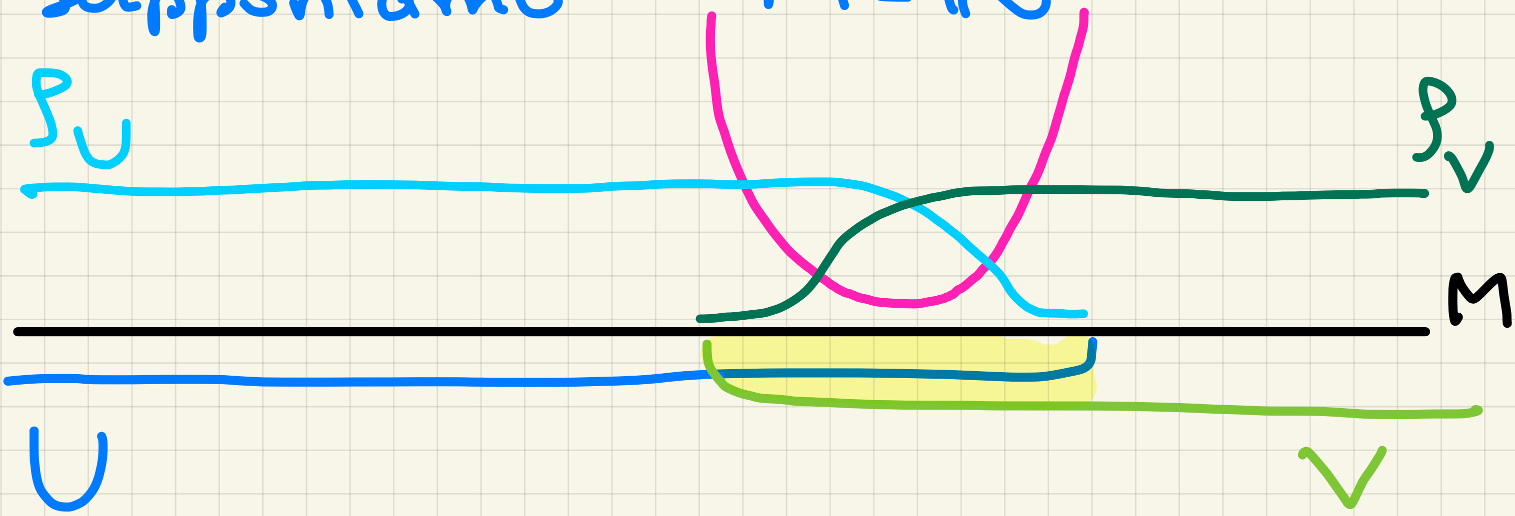
$$\operatorname{Im} i^*_{U\sqcup V} \subseteq \operatorname{Ker}\delta$$

è immediato.

• step significativo

δ suriettiva :

supponiamo $M = \mathbb{R}$



$M = U \cup V$

partizione subordinata

ρ_U e ρ_V

sia $f \in \Omega^0(U \cap V)$

$$(-\rho_V f, \rho_U f) \longrightarrow \rho_U f - (-\rho_V f) = f$$

Per una varietà generale M se $\omega \in \Omega^q(U \cap V)$ allora

$$(-\rho_V \omega, \rho_U \omega) \longrightarrow \omega$$

La successione esatta corta di Mayer - Vietoris

$$0 \to \Omega^*(M) \to \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \to \Omega^*(U \cap V) \to 0$$

induce una successione esatta lunga in coomologia, chiamata, anche questa, successione di Mayer-Vietoris.

$$\begin{tikzcd}
H^{q+1}(M) \arrow[r] & H^{q+1}(U) \oplus H^{q+1}(V) \arrow[r] & H^{q+1}(U \cap V) \\
H^{q}(M) \arrow[r] & H^{q}(U) \oplus H^{q}(V) \arrow[r] & H^{q}(U \cap V) \arrow[uull, "d^*"']
\end{tikzcd}$$

la successione esatta corta

dà luogo a un diagramma

con righe esatte e diagrammi

che commutano perché d

commuta con il pull-back.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega^{q+1}(M) \arrow[r] & \Omega^{q+1}(U)\oplus\Omega^{q+1}(V) \arrow[r] & \Omega^{q+1}(U\cap V) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega^{q}(M) \arrow[r] \arrow[u, "d"] & \Omega^{q}(U)\oplus\Omega^{q}(V) \arrow[r] \arrow[u, "d"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & \Omega^{q}(U\cap V) \arrow[r] \arrow[u, "d"] \arrow[ull, bend left, "d^*"] & 0
\end{tikzcd}$$

sia $\omega \in \Omega^q(U\cap V)$ CHIUSA

$d\omega = 0$

esiste

$\xi = (-\rho_V\,\omega,\ \rho_U\,\omega)$ t.c.

- $\xi \to \omega$
- $d\xi \to 0$ perchè il diagramma è commutativo.

ossia $d\xi \in \operatorname{Ker} \delta$

quindi esiste $\alpha \in \Omega^{q+1}(M)$

- $\alpha \to d\xi$ con $d\alpha = 0$

definiamo

$$d^*[\omega] = [\alpha]$$

non dipende dalle scelte fatte

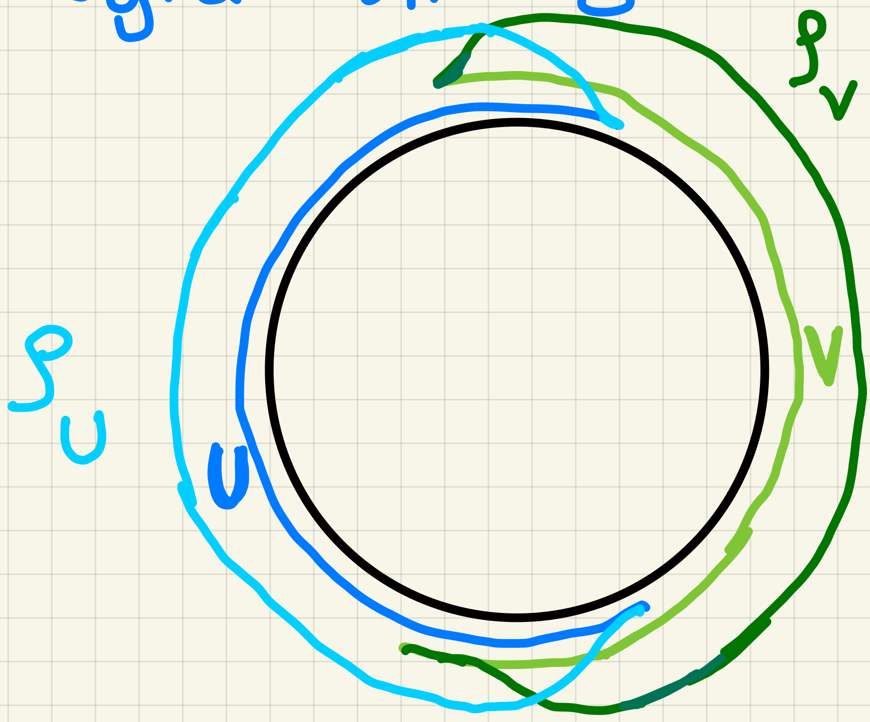
$$d^*[\omega] = \begin{cases} [-d(\rho_V \omega)] & \text{su } U \\ [d(\rho_U \omega)] & \text{su } V \end{cases}$$

Nota

$$\mathrm{supp}(d^*\omega) = \overline{\{p \in M \mid d^*\omega \neq 0\}}$$

$$\mathrm{supp}(d^*\omega) \subset U \cap V$$

La coomologia di S^1



	S^1	$U \sqcup V$	$U \cap V$
H^2	0	0	0
H^1	?	0	0
H^0	?	$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$

$$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{\delta} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{d^*} H^1(S^1)$$

$$(\omega, z) \mapsto (z-\omega, z-\omega)$$

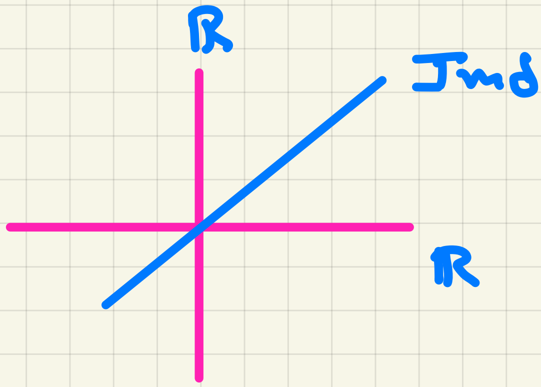
costanti

$$\Rightarrow \quad H^0(S^1) = \mathbb{R}$$

$$H^1(S^1) = \mathbb{R}$$

Infatti:

dim $\mathrm{Im}\,\delta = 1$



dunque, poiché $\ker d^* = \mathrm{Im}\,\delta$, si ha

$\dim \ker d^* = 1$

ma $\dim \mathrm{Im}\, d^* + \dim \ker d^* = 2$

(teorema di algebra lineare)

quindi $\dim \mathrm{Im}\, d^* = 1$

ma $H^1(S^1) = \mathrm{Im}\, d^*$

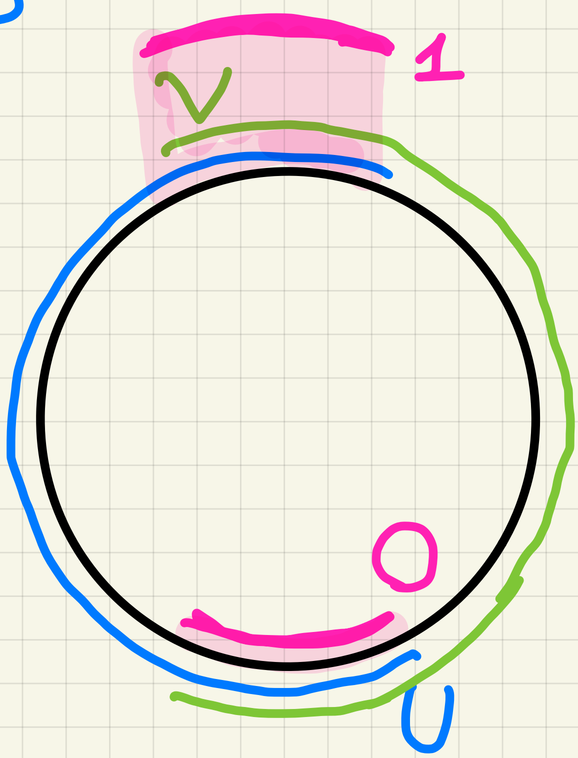
quindi $\dim H^1(S^1) = \mathbb{R}$.

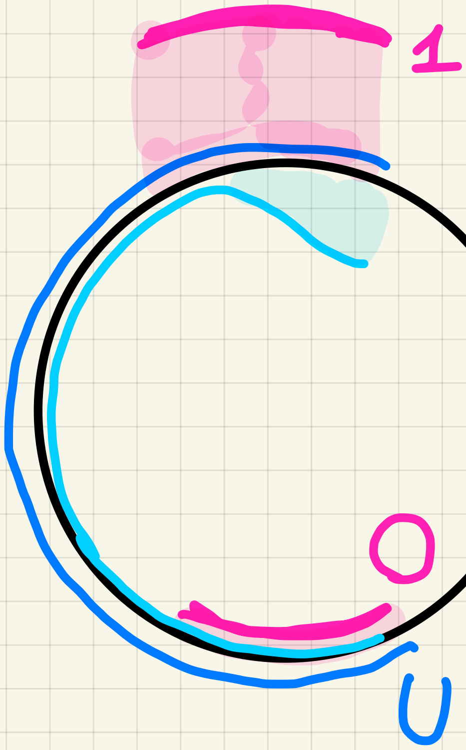
Per $H^0(S^1)$ si procede analogamente.

Troviamo un rappresentante esplicito per il generatore di $H^1(S^1)$.

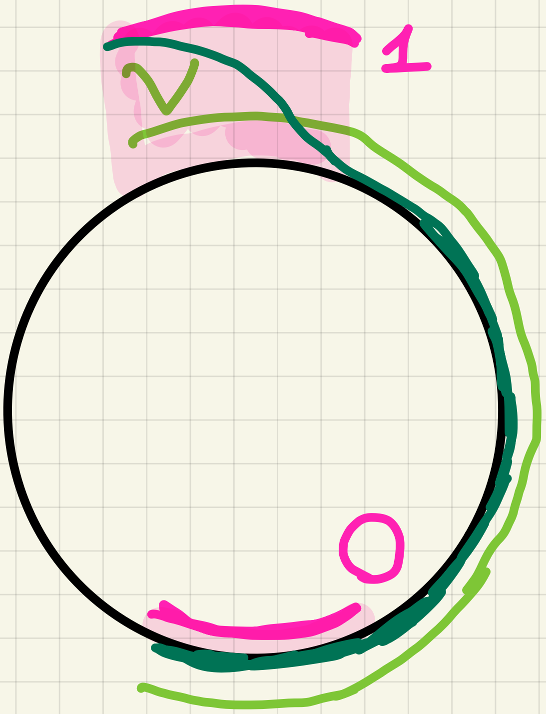
Basta prendere $\alpha \in \Omega^0(U \cap V)$, chiusa, che non sia δ (0-forma chiusa in $\Omega^0(U) \oplus \Omega^0(V)$).

Allora $d^*(\alpha)$ rappresenta un generatore di $H^1(S^1)$

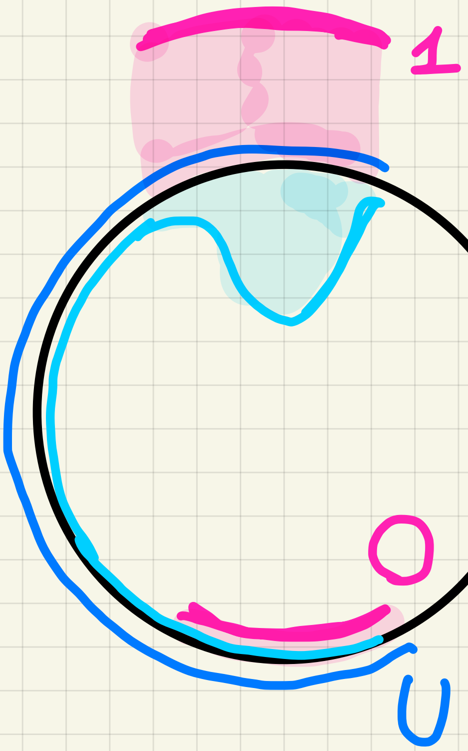
$\alpha =$ 



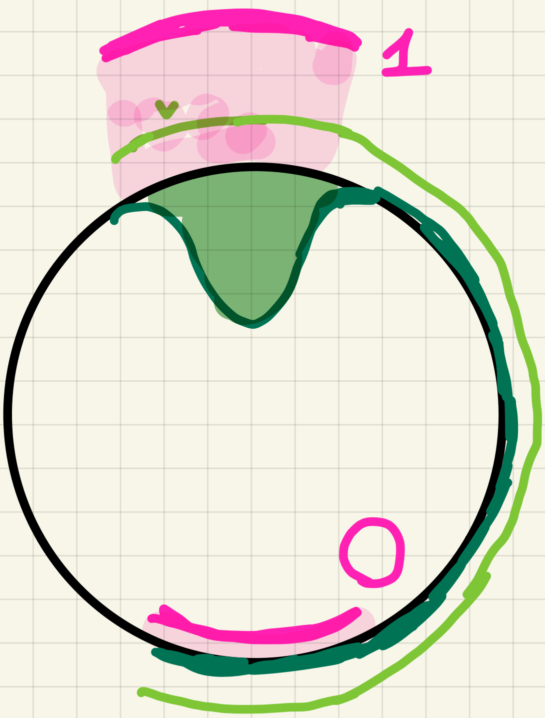
$-\rho^{\alpha}_{V}$



ρ^{α}_{U}



$-d(\rho_V \alpha)$



$d(\rho_U \alpha)$

Si ottiene una "bump 1-form" a supporto in $U \cap V$.