Integrazione su varietà:

Sia f una funzione C^∞ a supporto compatto su $\mathbb{R}^n$.

È ben definito l'integrale di Riemann:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, dx^1 \dots dx^n$$

Sia $\omega = f \, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ una n-forma su $\mathbb{R}^n$ a supporto compatto.

Definiamo

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} f \, dx^1 \ldots dx^n}_{\text{integrale di Riemann}}$$

<u>Nota</u> se prendiamo

$$\omega = f \, dx^{\sigma(1)} \wedge \quad \wedge dx^{\sigma(n)}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega = \operatorname{sgn}(\sigma) \int_{\mathbb{R}^n} f \, dx^1 \ldots dx^n$$

- Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un diffeomorfismo:

$$T^i(x^1, \ldots, x^n) = (Y^i \circ T)(x^1, \ldots, x^n)$$

- sia $\omega = f\, dy^1 \wedge \quad \wedge dy^n$

allora

$$T^*\omega = (f\circ T)\, dT^1 \wedge \quad \wedge dT^n =$$

$$(f\circ T)\, \det\left(\mathrm{Jac}\,(T)\right) dx^1 \wedge \quad \wedge dx^n$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} T^*\omega = \int_{\mathbb{R}^n} (f\circ T) \det\left(\mathrm{Jac}(T)\right) dx^1 \wedge \quad \wedge dx^n$$

d'altra parte la formula del cambiamento di variabili per l'integrale di Riemann è:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega = \int_{\mathbb{R}^n} f\, dy^1 \dots dy^n = \int (f\circ T) \left|\det(J(T))\right| dx^1 \dots dx^n$$

dunque

$$\int_{\mathbb{R}^n} T^* \omega = \pm \int_{\mathbb{R}^n} \omega$$

dove il segno dipende da segno del $\det(J(T))$.

Se $\det(J(T)) > 0$ è positivo ovunque allora T si dice che preserva l'orientazione.

Una varietà M si dice orientabile se ammette un atlante $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ tale che le funzioni di transizione (cambiamenti di carte) preservano l'orientazione.

Prop M è orientabile se e solo se ammette una n-forma che non si annulla mai

Nota una n-forma che non si annulla mai fornisce un modo di orientare tutte le carte coerentemente.

Siano ω_1 e ω_2 in $\Omega^n(M)$

tali che $\omega_1|_p \neq 0$

e $\quad \forall\, p \in M$

$\omega_2|_p \neq 0$

allora esiste $f \in C^\infty(M)$ t.c.

$$\omega_1 = f\omega_2$$

si ha $f(p) \neq 0 \quad \forall\, p \in M$

se M è connessa, allora

$f > 0$ ovunque

o

$f < 0$ ovunque

se $f>0$ si dice che

ω_1 e ω_2 sono equivalenti.

Quindi se M è connessa e orientabile le n-forme

si suddividono in due classi di equivalenza.

Ciascuna classe è chiamata una orientazione di M.

Indichiamo la scelta di una orientazione con $[M]$.

Dato $[M]$ di dimensione n, connessa, e dato $\tau \in \Omega^n_c(M)$,

$\uparrow$ c

definiamo il suo integrale a supporto compatto

- $$\int_{[M]} \tau = \sum_\alpha \int_{U_\alpha} \underbrace{\rho_\alpha \tau}$$

ha supporto compatto, perché è chiuso in $\text{supp}(\tau)$

dove ■ $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ è un atlante orientato di M

■ $\{\rho_\alpha\}$ una partizione dell'unità subordinata

■ $$\int_{U_\alpha} \rho_\alpha \tau = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{(\phi_\alpha^{-1})^* (\rho_\alpha \tau)}$$

ha supporto compatto

Prop l'integrale così definito non dipende né dall'atlante né dalla partizione dell'unità.

Teorema di Stokes

Se $\omega \in \Omega_c^{n-1}(M)$ orientata $\dim M = n$

∂M con orientazione indotta:

cosa significa M con bordo?

M con bordo significa che M è dotata di un atlante $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ tale che

$$U_\alpha \simeq \mathbb{R}^n$$

oppure

$$U_\alpha \simeq \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\} = \mathbb{H}^n$$

$$\boxed{\partial M = \{ p \in M \mid x^n(p) = 0 \}}$$

- Il bordo di M è una varietà di dimensione $n-1$.

<u>Lemma</u>: Sia $T : \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$ un diffeomorfismo con $\det(J(T)) > 0$. Allora

- T induce una mappa $\overline{T} : \partial \mathbb{H}^n \to \partial \mathbb{H}^n$
- $\overline{T}$ è un diffeo di $\mathbb{R}^{n-1}$ con $\det(J(\overline{T})) > 0$

Il lemma implica che un atlante orientato di M induce un atlante orientato di ∂M.

Orientazione indotta su bordo:

su $\mathbb{H}^n$ si considera l'orientazione standard.

$$dx^1 \wedge \quad \wedge dx^n$$

Per definizione l'orientazione indotta sul bordo $\partial \mathbb{H}^n = \{x^n = 0\}$ è

$$(-1)^n dx^1 \wedge \quad \wedge dx^{n-1} \qquad n \geq 2$$

$$-1 \qquad n = 1$$

Se M è orientata,

l'orientazione indotta su

∂M è quella tale che

$$\phi^*[\partial \mathbb{H}^n] = [\partial M]\Big|_{\partial U}$$

con $\phi : U \longrightarrow \mathbb{H}^n$

che preserva l'orientazione

e $\partial U = (\partial M) \cap U$.

Teorema di Stokes

Sia ω una $(n-1)$-forma a supporto compatto su una varietà orientata M di dimensione n e sia ∂M dotato dell'orientazione indotta. Allora

$$\boxed{\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega}$$