Omologia simpliciale e coomologia di de Rham.

Def Una varietà liscia triangolata in modo liscio è una terna (M, K, h) con

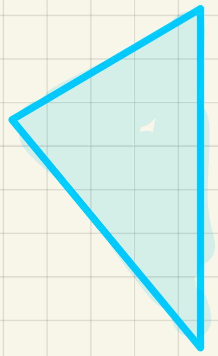
- M varietà C^∞
- K complesso simpliciale
- $h : [K] \longrightarrow M$ omeomorfismo tale che

$\forall\ s \in K$ $h|_{(s)}$ si estende a un intorno U di $[s]$ nel sottospazio di (s) e

pagina aggiuntiva

significato di "si estende":

esempio:

$S =$  triangolo aperto

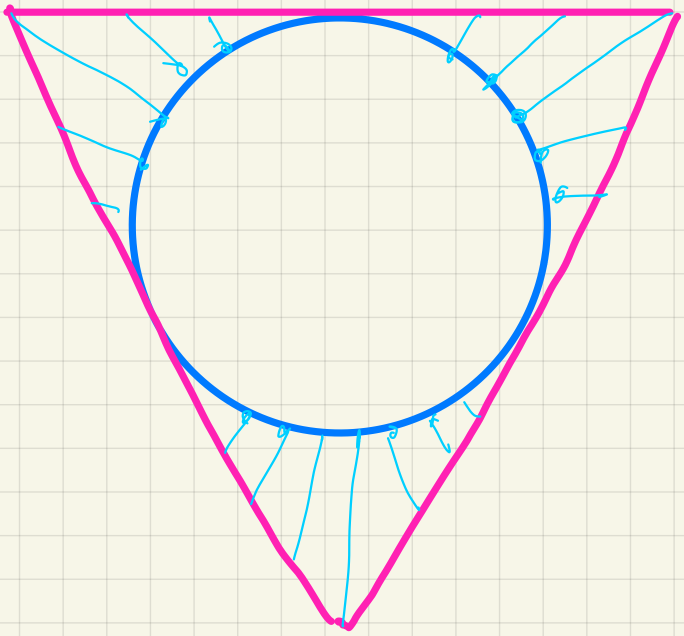
$$h : [S] \longrightarrow M$$

chiediamo che esiste una applicazione $\bar{h} : U \longrightarrow M$ con U aperto del piano contenente il triangolo t.c.

- $h = \bar{h}$ sul triangolo
- $h(U)$ sottovarietà liscia di M.

$h : U \longrightarrow M$ è una sottovarietà liscia.

Esempio $S^n \subseteq \Delta^{n+1}$



Fatto: ogni varietà compatta liscia può essere triangolata in modo liscio.

Coomologia simpliciale di un complesso simpliciale K.

co-catene

$$C^{\ell}(K,\mathbb{R}) = \left(C_{\ell}(K,\mathbb{R})\right)^{*}$$

$$\partial : C_{\ell}(K,\mathbb{R}) \longrightarrow C_{\ell-1}(K,\mathbb{R})$$

$$\partial^{*} : C^{\ell-1}(K,\mathbb{R}) \longrightarrow C^{\ell}(K,\mathbb{R})$$

$$(\partial^{*})^{2} = 0$$

$$\to C^{e-1} \xrightarrow{\partial^*} C^{e} \xrightarrow{\partial^*} C^{e+1} \to$$

co-cicli

$$Z^e(K,\mathbb{R}) = \left\{ \varphi \in C^e(K,\mathbb{R}) \mid \partial^*\varphi = 0 \right\}$$

co-bordi

$$B^e(K,\mathbb{R}) = \left\{ \partial^*\varphi \mid \varphi \in C^{e-1}(K,\mathbb{R}) \right\}$$

$$H^e(K,\mathbb{R}) = \frac{Z^e(K,\mathbb{R})}{B^e(K,\mathbb{R})}$$

coomologia simpliciale di K.

$$H^{\ell}(K,\mathbb{R}) \simeq \left(H_{\ell}(K,\mathbb{R})\right)^{*}$$

isomorfismo

Teorema di de Rham

Sia M una varietà liscia, triangolata in modo liscio, allora

$$H^\ell_{dR}(M) \simeq \underbrace{H^\ell(K)}_{\text{coomologia simpliciale}}$$

isomorfismo

$$\forall \quad 0 \leq \ell \leq \dim M$$

Dimostrazione

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r] & \Omega^\ell(M) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f_\ell"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \Omega^{\ell+1}(M) \arrow[r] \arrow[d, "f_{\ell+1}"'] & {} \\
\arrow[r] & C^\ell(K) \arrow[r, "\partial^*"] & C^{\ell+1}(K) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

sia $\omega \in \Omega^\ell(M)$

sia $\langle s \rangle \in C_\ell(K)$

allora $\omega \overset{f_\ell}{\longmapsto} \left(\langle s \rangle \longrightarrow \int_{\langle s \rangle} h^*(\omega) \right)$

per linearità questo definisce

$f_\ell(\omega) : C_\ell(K) \longrightarrow \mathbb{R}$

il diagramma commuta (applicazione del teorema di Stokes) : $\omega \in \Omega^\ell(M)$

$$\partial^* \circ f_\ell = f_{\ell+1} \circ d$$

$$\Big(f_{\ell+1}(d\omega)\Big)(\langle s \rangle) =$$

dim $= \ell+1$

$$= \int_{\langle s \rangle} h^*(d\omega) = \int_{\langle s \rangle} d(h^*\omega) =$$

Stokes

$$= \int_{\partial\langle s \rangle} h^*\omega = f_\ell(\omega)\big(\partial\langle s \rangle\big) =$$

per def. di f_ℓ

$$= \big(\partial^* \circ f_\ell\big)(\langle s \rangle)$$ per def. di ∂^*.

Poiché il diagramma commuta f_ℓ induce un omomorfismo

$$\tilde{f}_\ell : H^\ell_{dR}(M) \longrightarrow H^\ell(K, \mathbb{R})$$

Si dimostra che $\tilde{f}_\ell$ un isomorfismo per ogni $0 \leq \ell \leq \dim M$.

OSSERVAZIONI

- Sia (M, K, h) una varietà triangolata.

Chiamiamo

$$H^{\ell}_{simpl}(M, \mathbb{R}) = H^{\ell}(K, \mathbb{R})$$

coomologia simpliciale di M con la triangolazione (K, h).

Il teorema mostra che

$$H^{\ell}_{simpl}(M, \mathbb{R})$$

NON dipende dalla

triangolazione (K, h).

- $H^1_{dR}(M) \simeq H^1_{simpl}(M, \mathbb{R}) \simeq$

$\simeq H_1(K, \mathbb{R}) \simeq$ abelianizzazione

di $\pi_1(K) \simeq$ abelianizzazione $\pi_1(M)$.