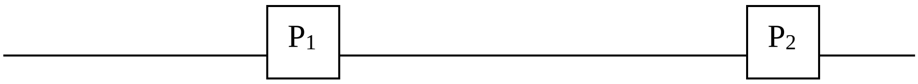
Capitolo IV

Definizione di derivata.

Le origini del concetto di derivata sono di natura geometrica: tracciamento di una retta tangente ad una curva e fisica: determinazione della velocità istantanea di un punto materiale che si muove di moto rettilineo.
Cominciamo da quest'ultima.
Sia P un punto materiale che si muove su di una retta di moto vario. Fissiamo un'origine dei tempi e degli spazi percorsi e sia s(t) la funzione che descrive lo spazio percorso s dal punto in funzione del tempo t, tale funzione si chiama funzione posizione.
Supponiamo che il punto P si trovi nella posizione P_1 avendo percorso uno spazio s_1 in un tempo t_1 e che successivamente al tempo t_2 si trovi nella posizione P_2 avendo percorso uno spazio s_2.



Si definisce **velocità media** $v_m = \dfrac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$ cioè lo spazio percorso passando dalla posizione P_1 alla posizione P_2 diviso il tempo impiegato a percorrerlo. Pensiamo adesso di considerare intervalli di tempo $[t_1,t_2]$ sempre più brevi e di calcolare la velocità media per questi intervalli; variando l'ampiezza di questi intervalli varierà la velocità media che , se immaginiamo fisso t_1 e variabile t_2 , sarà funzione di t_2. Si può pensare di vedere cosa succede al tendere di t_2 a t_1 , cioè di calcolare il $\lim\limits_{t_2 \to t_1} \dfrac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$**.** Se tale limite esiste ed è un numero tale numero è per definizione la **velocità istantanea** $\mathbf{v_i}$ del punto materiale in P_1 cioè al tempo t_1.

Esempio: supponiamo di conoscere la funzione posizione s = s(t) di P e sia $s = 10\,t^2$ e si voglia calcolare la velocità istantanea di P in $t_1 = 2$s. Essendo s(2) = 40 m si ha

$$v_i = \lim_{t\to 2}\frac{10t^2 - 40}{t-2} = \lim_{t\to 2}\frac{10(t^2-4)}{t-2} = \lim_{t\to 2}\frac{10(t+2)(t-2)}{t-2} = \lim_{t\to 2}10(t+2) = 40 \text{ m/s.}$$

Vogliamo adesso affrontare il problema di tracciare la **retta tangente** ad una curva. Nel caso in cui la curva sia una conica il problema del tracciamento della retta tangente è risolto: basta imporre che conica e retta tangente abbiano una intersezione doppia ovvero che il sistema di secondo grado tra l'equazione della conica (equazione di 2°grado) e l'equazione della retta (equazione di 1°grado) abbia una sola soluzione. Il che si ottiene imponendo che il delta dell'equazione di 2° grado risolvente il sistema sia uguale a zero. La cosa si complica se invece di una conica

abbiamo una cubica o una qualunque altra funzione trascendentale. Non si può più parlare di grado del sistema perché non abbiamo più un'equazione di 2° grado a rappresentare la curva, dunque non si può più utilizzare la definizione di retta tangente data per le coniche.
Vediamo dunque di dare una definizione di retta tangente che sia più generale.

Sia y = f(x) una funzione definita in un insieme A e sia x_0 un punto interno ad A. Sia I un intorno di x_0 contenuto in A e sia $x \in I$. Si consideri la retta "secante"che unisce i punti $P_0 = (x_0, f(x_0))$ e P = (x,f(x)). Tale retta ha coefficiente angolare $m = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, m è la tangente dell'angolo α nel triangolo PQP_0 e come tale $tg\alpha = PQ/P_0Q$.

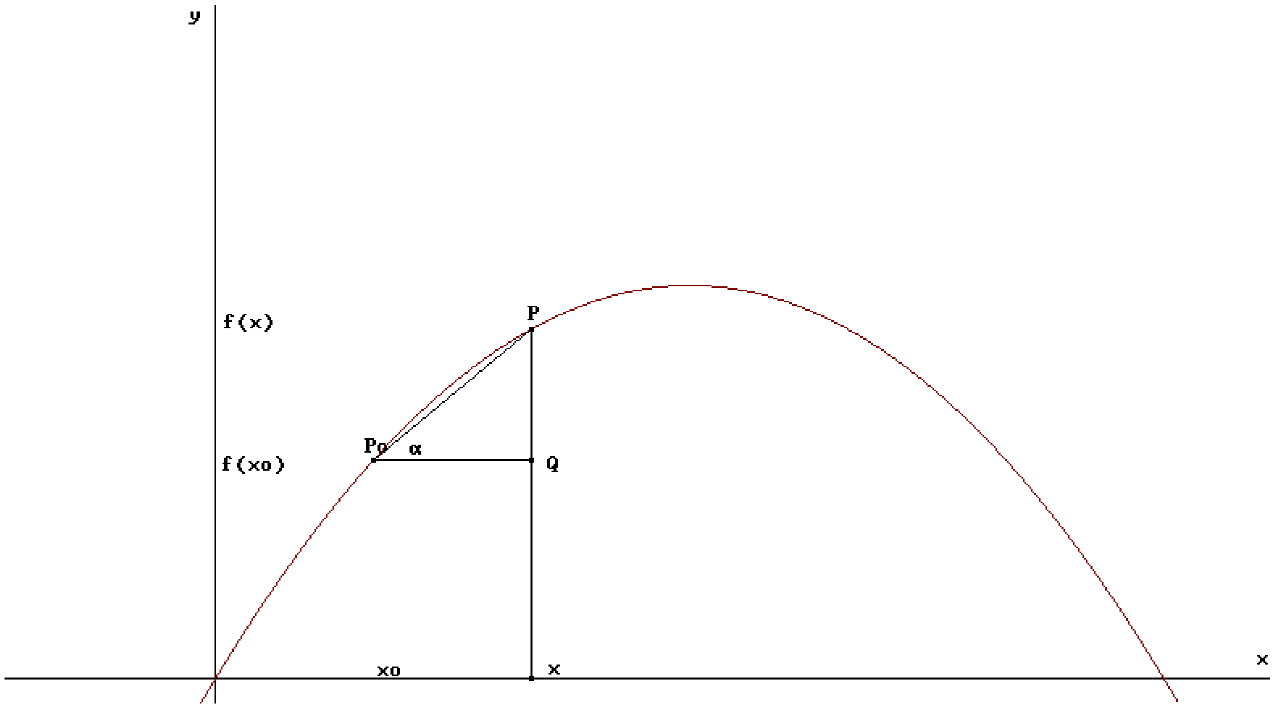


Fig. n. 81 – Retta secante il grafico di una funzione assegnata

Se prendiamo un altro x nell'intorno I e ripetiamo il ragionamento otteniamo un'altra retta secante che esce da P_0 cioè un'altra retta del fascio di centro P_0 con coefficiente angolare analogo al precedente ma diverso perché diversa è la x . Tali coefficienti angolari dipendono dalla scelta di x e quindi sono funzioni di x cioè m = m(x). Siamo interessati a vedere cosa succede a queste rette del fascio man mano che si considerano valori della x sempre più prossimi a x_0 . Se esiste finito il limite per x che tende a x_0 di questi coefficienti angolare tale limite si assume per definizione essere il coefficiente angolare di una retta "posizione limite" detta **retta tangente** al grafico della funzione y = f(x) in P_0. Dunque la retta tangente è una retta del fascio di centro P_0 che ha come coefficiente angolare il seguente limite se esiste finito

$$\lim_{x \to x_0} m(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

tale limite (se è un numero) si chiama la **derivata della funzione in x_0** e si indica con il simbolo $f'(x_0)$ e la funzione si dice derivabile in x_0.

Il rapporto $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ si chiama **rapporto incrementale** tra i due incrementi (ma che possono essere anche decrementi) $f(x)-f(x_0)$ e $x- x_0$.

Il rapporto $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ si chiama anche **tasso medio di variazione** ed in tal caso la derivata è **il tasso istantaneo di variazione.**

Pertanto l'equazione della retta tangente al grafico di una funzione $y = f(x)$ nel suo punto di ascissa x_0 è l'equazione di una retta del fascio di centro $P_0 = (x_0,f(x_0))$ con coefficiente angolare $f'(x_0)$, ovvero

$$\mathbf{y = f(x_0)+f'(x_0)(x- x_0).}$$

Si può dimostrare che tale definizione di retta tangente è una generalizzazione della definizione di retta tangente nota per le coniche, infatti nel caso che f(x) sia un ramo di conica le due definizioni coincidono.

Esempio: si trovi la retta tangente alla parabola $y = x^2-2x$ nel suo punto di ascissa $x = 3$.

Nel primo caso si dovrà considerare il fascio di rette uscenti da $(3,f(3)) = (3, 3)$ ovvero

$y = 3+m(x-3)$, fare il sistema con la parabola, scrivere l'equazione risolvente il sistema $x^2-2x = 3+m(x-3)$, ovvero $x^2-(m+2)x -3+3m = 0$ e imporre il Δ uguale a zero, cioè $\Delta = (m+2)^2-4(-3+3m) = 0$, ovvero $m^2+16-8m = 0$ cioè $m = 4$.

Pertanto l'equazione della retta tangente è $y = 3+4(x-3)$ ovvero $y = 4x-9$.

Nel secondo caso $(3, f(3)) = (3, 3)$ e $f'(3)$ è dato da

$$f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} = \frac{0}{0},$$

per togliere l'indeterminazione scomponiamo il numeratore

$$f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{(x+1)(x-3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3}(x+1) = 4.$$

Sostituendo nell'equazione $y = f(x_0)+f'(x_0)(x- x_0)$ si ha $y = 3+4(x-3)$ ovvero la stessa retta tangente.

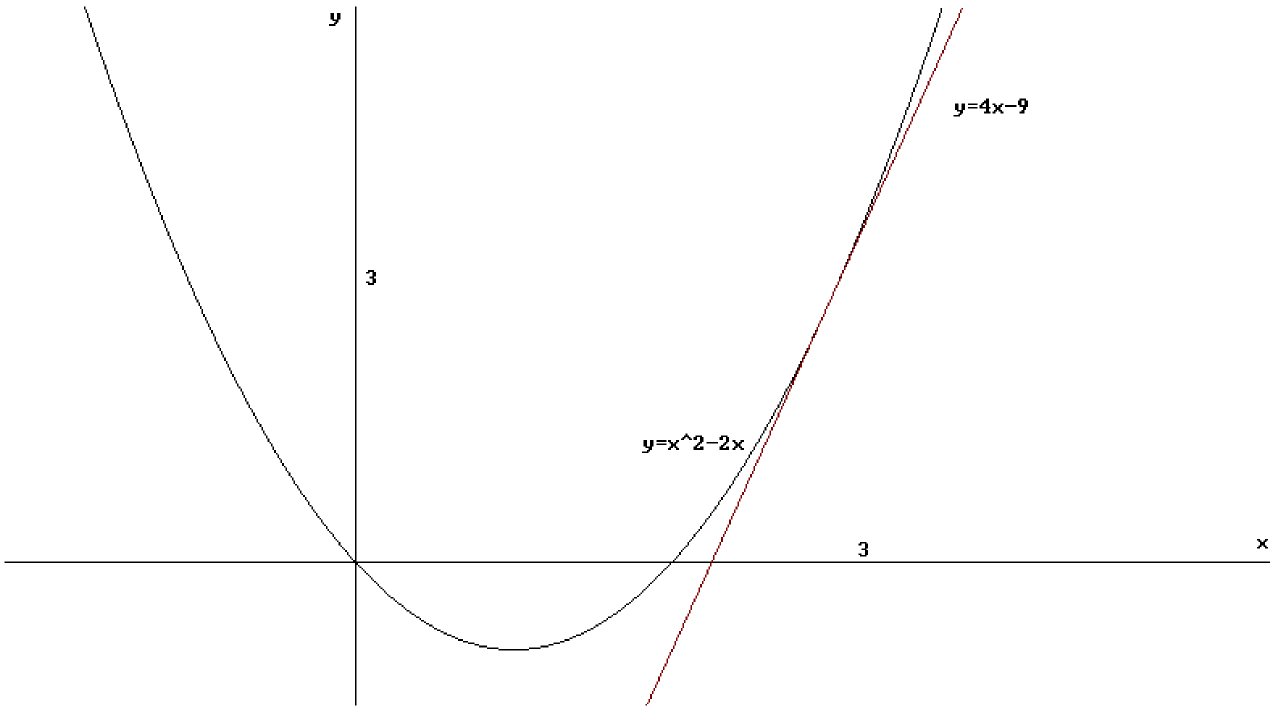


Fig. n. 82 – Grafici di $y = x^2-2x$ e della sua retta tangente $y = 4x-9$ in $x = 3$

Osservazione: se indichiamo con $h = x- x_0$, allora si ha $f(x) = f(x_0+h)$ e quando x tende a x_0 h tende a zero e la derivata si può scrivere nel modo seguente

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Nel caso poi che il limite del rapporto incrementale non esista ma esistano finiti i due limiti destro e sinistro, cioè

$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ e $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, si parlerà di **derivata destra e di derivata sinistra**, di **tangente destra e di tangente sinistra diverse in x_0.**

Esempio: $y = |x|$ non è derivabile nell'origine, infatti

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$, tale limite (come abbiamo già visto) non esiste,

ma esistono i due limiti destro e sinistro e sono diversi $\lim_{x \to 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$ e

$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$. Pertanto la funzione $y = |x|$ non ha nell'origine retta tangente, ma ha retta tangente sinistra con coefficiente angolare –1 e retta tangente destra con coefficiente angolare 1 , cioè a sinistra la retta tangente è $y = -x$ e a destra è $y = x$..

Le due tangenti destra e sinistra formano un angolo nell'origine e per questo l'origine si chiama punto "angoloso" per la funzione.

Definizione: un punto x_0 si dice **punto angoloso** per una funzione y = f(x) se è un punto di continuità per f(x) e inoltre in quel punto non esiste la derivata cioè non esiste retta tangente, ma esistono la derivata destra e la derivata sinistra cioè la tangente destra e la tangente sinistra e queste formano un angolo.

Se invece esiste il limite del rapporto incrementale ma è +∞ oppure -∞ , si dice che la funzione presenta in quel punto una tangente verticale.

Esempio: $y = (x)^{1/3}$, tale funzione è continua nell'origine e se calcoliamo il limite del rapporto incrementale in 0 si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}}{x}=\lim_{x\to 0}x^{-2/3}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=+\infty.$$

Dunque la funzione ha nell'origine una retta tangente verticale cioè la retta x = 0 come si vede dalla figura

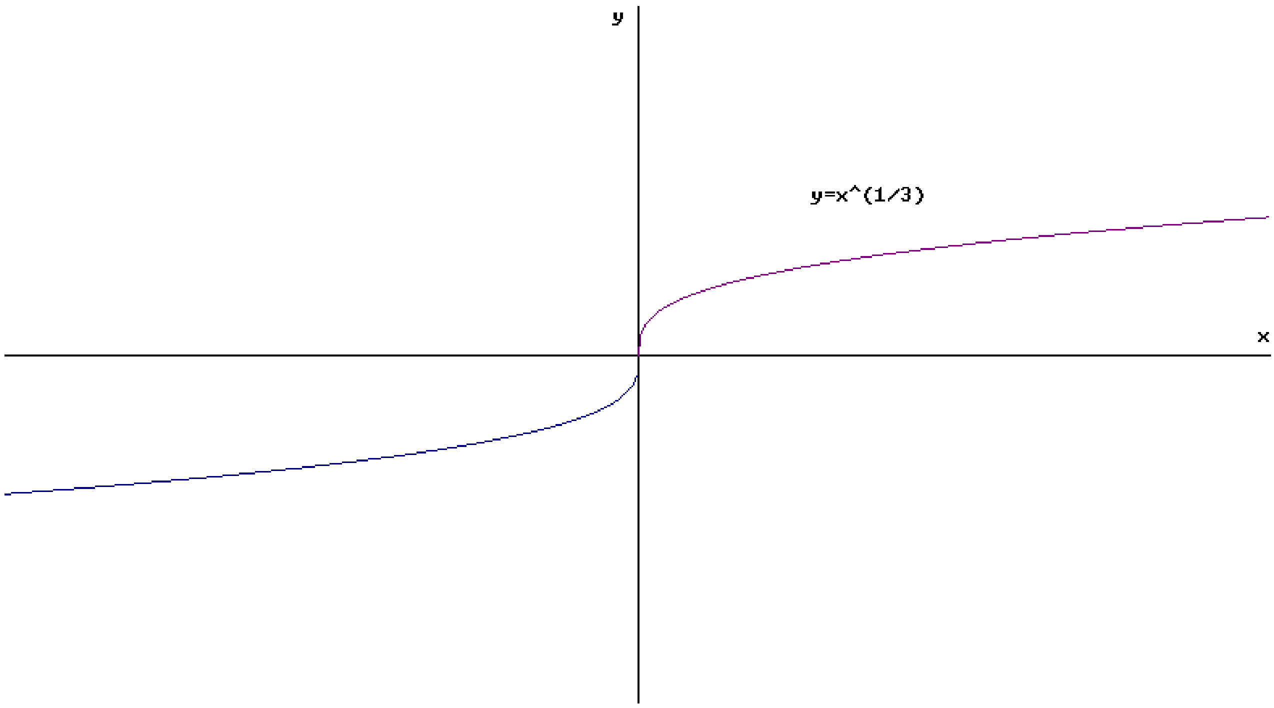


Fig. n. 83 – Grafico di $y = (x)^{1/3}$

Attenzione: la retta tangente può attraversare il grafico della funzione come in questo caso.

Definizione: un punto x_0 si dice una **cuspide** per una funzione y = f(x) se è un punto di continuità per f(x) e inoltre in quel punto non esiste la derivata cioè non esiste retta tangente, ed inoltre le due derivate destra e sinistra sono una +∞ e l'altra -∞ cioè la tangente destra e la tangente sinistra sono entrambe verticali in quel punto cioè si sovrappongono.

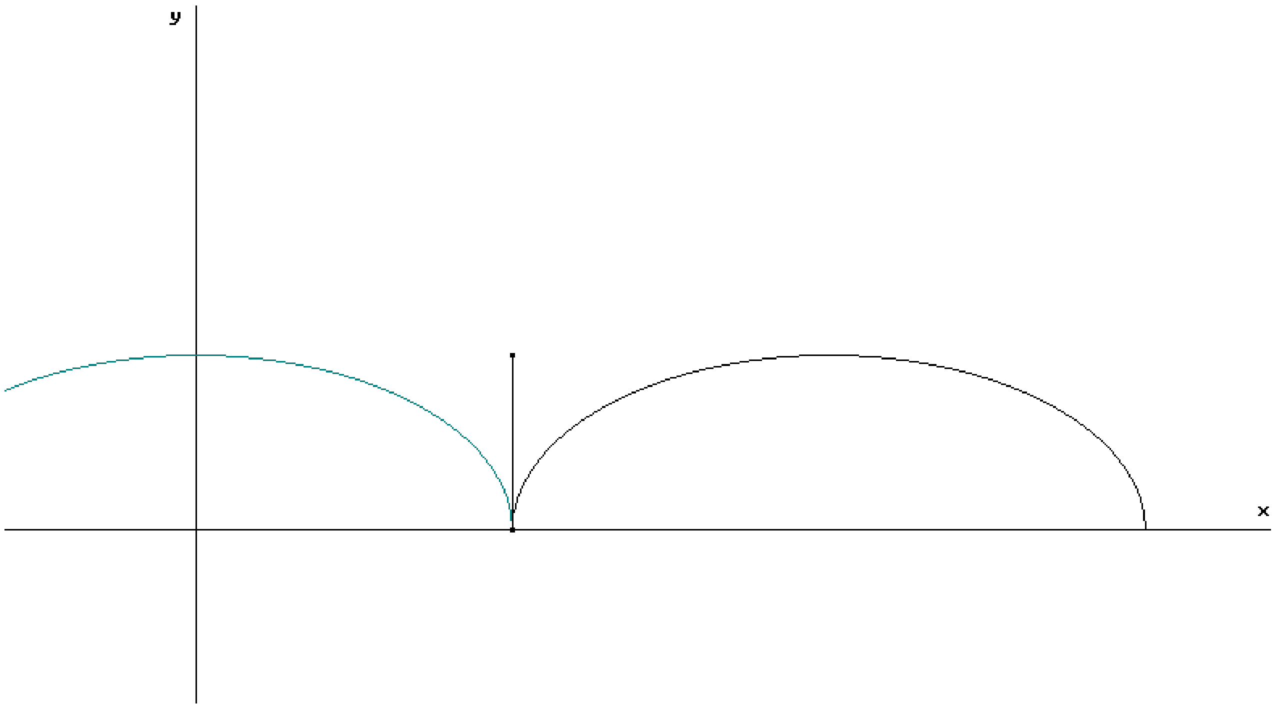


Fig. n.84 – Grafico di funzione con punto di cuspide

Esempio: la funzione y = √(|3-4x^2|) il cui grafico è riportato in figura presenta due cuspidi in √3/2 ed in -√3/2.
Infatti detti punti sono punti di continuità per la funzione ed inoltre il limite destro ed il limite sinistro del rapporto incrementale valgono uno + ∞ e l'altro -∞.
Vediamo ad esempio i due limiti in x = √3/2

$$\lim_{x\to(\frac{\sqrt{3}}{2})^+}\frac{f(x)-f(\frac{\sqrt{3}}{2})}{x-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\lim_{x\to(\frac{\sqrt{3}}{2})^+}\frac{\sqrt{\left|3-4x^2\right|}-0}{x-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\lim_{x\to(\frac{\sqrt{3}}{2})^+}\frac{\sqrt{-3+4x^2}}{x-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\lim_{x\to(\frac{\sqrt{3}}{2})^+}\frac{2\sqrt{-\frac{3}{4}+x^2}}{x-\frac{\sqrt{3}}{2}}=$$

$$\lim_{x\to(\frac{\sqrt{3}}{2})^+}\frac{2\sqrt{(x-\frac{\sqrt{3}}{2})(x+\frac{\sqrt{3}}{2})}}{x-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\lim_{x\to(\frac{\sqrt{3}}{2})^+}2\sqrt{\frac{(x-\frac{\sqrt{3}}{2})(x+\frac{\sqrt{3}}{2})}{(x-\frac{\sqrt{3}}{2})^2}}=\lim_{x\to(\frac{\sqrt{3}}{2})^+}2\sqrt{\frac{(x+\frac{\sqrt{3}}{2})}{(x-\frac{\sqrt{3}}{2})}}=+\infty.$$

Nei calcoli precedenti si è osservato che |3-4x^2| coincide con 3-4x^2 per valori interni a ±√3/2 e con –3+4 x^2 per valori esterni e poiché si calcola il limite per x che tende a √3/2 da destra (cioè per valori più grandi e quindi esterni all'intervallo) ecco che si è considerata la seconda espressione al posto del valore assoluto. Inoltre poiché nelle

ipotesi fatte x-√3/2 è una quantità positiva, abbiamo potuto metterla sotto il segno di radice semplicemente innalzandola al quadrato.
Dunque il limite destro del rapporto incrementale vale +∞.
Vediamo il limite sinistro, tenendo conto che questa volta x tende a √3/2 da sinistra cioè per valori più piccoli e quindi il valore assoluto coincide con $3-4x^2$ e che questa volta x-√3/2 è negativo per cui possiamo metterlo sotto radice a patto di mettere un segno - in evidenza.

$$\lim_{x\to(\frac{\sqrt{3}}{2})^-}\frac{f(x)-f(\frac{\sqrt{3}}{2})}{x-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\lim_{x\to(\frac{\sqrt{3}}{2})^-}\frac{\sqrt{|3-4x^2|}-0}{x-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\lim_{x\to(\frac{\sqrt{3}}{2})^-}\frac{\sqrt{3-4x^2}}{x-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\lim_{x\to(\frac{\sqrt{3}}{2})^-}\frac{2\sqrt{\frac{3}{4}-x^2}}{x-\frac{\sqrt{3}}{2}}=$$

$$\lim_{x\to(\frac{\sqrt{3}}{2})^-}\frac{2\sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2}-x)(\frac{\sqrt{3}}{2}+x)}}{x-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\lim_{x\to(\frac{\sqrt{3}}{2})^-}-2\sqrt{\frac{(\frac{\sqrt{3}}{2}-x)(x+\frac{\sqrt{3}}{2})}{(x-\frac{\sqrt{3}}{2})^2}}=\lim_{x\to(\frac{\sqrt{3}}{2})^-}-2\sqrt{\frac{(\frac{\sqrt{3}}{2}-x)(x+\frac{\sqrt{3}}{2})}{(\frac{\sqrt{3}}{2}-x)^2}}=$$

$$\lim_{x\to(\frac{\sqrt{3}}{2})^-}-2\sqrt{\frac{(x+\frac{\sqrt{3}}{2})}{(-x+\frac{\sqrt{3}}{2})}}=-\infty.$$

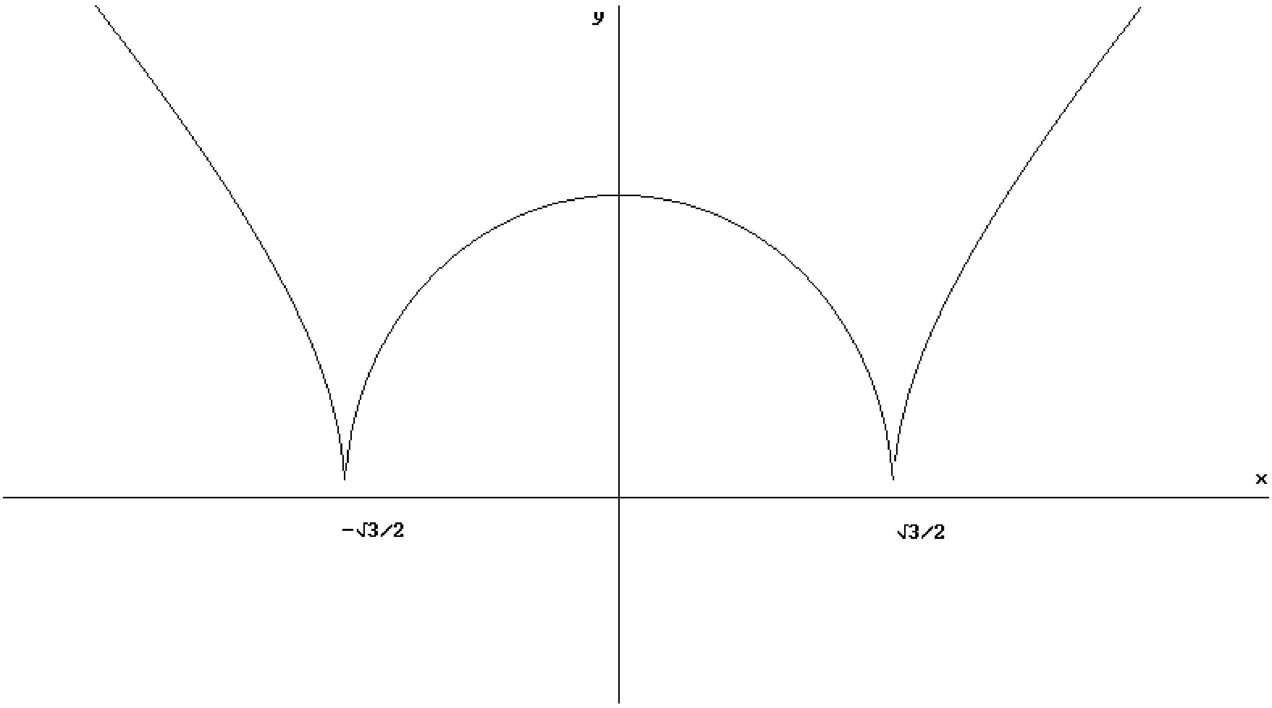


Fig. n. 85 – Grafico di $y = \sqrt{(|3-4x^2|)}$

Vediamo un'applicazione dei concetti di rapporto incrementale o tasso medio di variazione e di tasso istantaneo di variazione.
Secondo la legge di Boyle se si mantiene costante la temperatura T di un gas allora è costante il prodotto della pressione P per il volume V. Supponiamo che per un certo gas sia PV = 800 atmosfere per metri cubi.

Si trovi

a) il tasso di variazione medio di P quando V passa da 200 m^3 a 250 m^3.
b) l'espressione di V in funzione di P e si mostri che il tasso di variazione istantaneo di V rispetto a P è inversamente proporzionale al quadrato di P.

Dimostrazione:

a) il tasso di variazione medio è $\dfrac{P_2 - P_1}{V_2 - V_1} = \dfrac{\dfrac{800}{V_2} - \dfrac{800}{V_1}}{V_2 - V_1} = \dfrac{800(V_1 - V_2)}{(V_2 - V_1)V_2 V_1} = -\dfrac{800}{V_2 V_1}$,
b) l'espressione di P in funzione di V è ovviamente P = 800/V e il tasso di variazione istantaneo è dato da

$$\lim_{V_2 \to V_1} \frac{P_2 - P_1}{V_2 - V_1} = \lim_{V_2 \to V_1} \frac{\dfrac{800}{V_2} - \dfrac{800}{V_1}}{V_2 - V_1} = \lim_{V_2 \to V_1} \frac{800(V_1 - V_2)}{(V_2 - V_1)V_2 V_1} = \lim_{V_2 \to V_1} -\frac{800}{V_2 V_1} = \frac{-800}{V_1^2}.$$

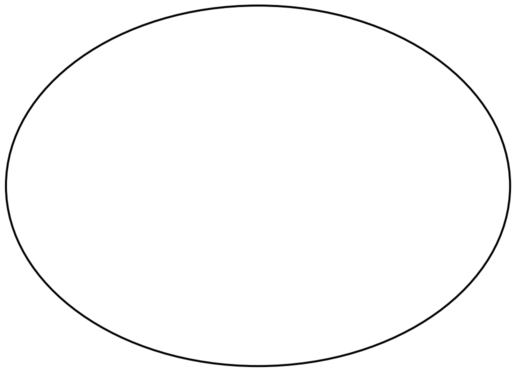
Se pensiamo V_1 variabile si ha l'asserto.

Esiste una relazione tra derivabilità e continuità e precisamente si ha il seguente

Teorema:

"sia y = f(x) derivabile in [a,b] allora f(x) è continua in [a,b]."

Tale proposizione non può essere rovesciata nel senso che esistono funzioni continue che non sono derivabili in qualche punto un esempio è dato dalla funzione valore assoluto di x che è continua su tutta la retta reale ma non è derivabile in zero.
Altri esempi si possono ottenere combinando funzioni continue con il valore assoluto.
Se utilizziamo i diagrammi di Venn i due insiemi si possono rappresentare nel modo seguente evidenziando che l'insieme delle funzioni derivabili è un sottoinsieme dell'insieme delle funzioni continue.



Definizione: una funzione si dice derivabile in un intervallo I se è derivabile in ogni punto dell'intervallo I e la funzione che si ottiene associando ad ogni $x \in I$ la derivata in x si chiama la **funzione derivata.**

Esempio: consideriamo $y = x^2$, tale funzione è definita su tutto **R** e la sua derivata in un generico punto x_0 e data da

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - {x_0}^2}{x - x_0} = \frac{0}{0}.$$

Per risolvere l'indeterminazione scomponiamo il numeratore

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - {x_0}^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0.$$

Pertanto la derivata di $y = x^2$ in x_0 è data da $2x_0$ e quindi se consideriamo x_0 variabile in **R** otteniamo la funzione derivata y = 2x.
Si procede in maniera analoga per calcolare la funzione derivata della maggior parte delle funzioni elementari e che riportiamo nella seguente tabella.

y = f(x)	**y = f'(x)**	**y =f(x)**	**y = f'(x)**	**y = f(x)**	**y = f'(x)**
$y = k$, $k \in$ **R**	y = 0	y =1/x	$y = -1/x^2$	y = senx	y = cosx
y = x	y = 1	y = log x	y = 1/x	y = cosx	y = -senx
$y = x^2$	y = 2x	$y = \log_a x$	$y = (\log_a e)/x$	y = tgx	$y = 1 + tg^2 x$
$y = x^\alpha$	$y = \alpha x^{\alpha-1}$	$y = e^x$	$y = e^x$	y = cotgx	$y = -1/sen^2 x$
$y = \sqrt{x}$	$y = 1/2\sqrt{x}$	$y = a^x$	$y = a^x \log a$	$y = x^{1/3}$	$y = (x^{-2/3})/3$

Che la derivata di una funzione costante sia zero è immediato se si pensa al significato geometrico di derivata cioè coefficiente angolare della retta tangente. Se la funzione è essa stessa una retta (come nel caso di una funzione costante) la tangente è la retta stessa per cui la derivata ne è il coefficiente angolare e nel caso specifico è zero.
Nel caso di y = x la retta tangente è y = x e quindi la derivata vale 1.
Per dimostrare che la derivata di y = log x è y = 1/x e che la derivata di $y = e^x$ è $y = e^x$ si usa la definizione ed i limiti notevoli:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\log(x_0+h)-\log(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\log\frac{(x_0+h)}{x_0}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\log(1+\frac{h}{x_0})}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\log(1+\frac{h}{x_0})}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\log(1+\frac{h}{x_0})}{x_0\frac{h}{x_0}}=\frac{1}{x_0}.$$

Analogamente nel caso della funzione esponenziale:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{(x_0+h)}-e^{x_0}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x_0}(e^h-1)}{h}=e^{x_0}.$$

Dunque possiamo immaginare un operatore detto **operatore derivata** che ad ogni funzione derivabile associa la sua derivata:

$$D: \quad y = f(x) \;\to\; y = f'(x).$$

Esaminiamo le **proprietà** di tale operatore.

Tale operatore derivata è un operatore “lineare” nell’insieme delle funzioni derivabili cioè gode delle seguenti proprietà

a) la derivata di una somma di funzioni derivabili è la somma delle derivate
   $D(f(x)+g(x)) = Df(x)+Dg(x)$
b) la derivata del prodotto di una funzione derivabile per una costante c coincide con il prodotto della costante per la derivata della funzione
   $Dcf(x) = cDf(x)$.

Questa proprietà di linearità ci permette di calcolare la derivata di funzioni del tipo seguente

$$D(7x^5+3\mathrm{sen}x) = 7Dx^5 +3D\mathrm{sen}x = 7(5x^4)+3\cos x = 35x^4+3\cos x.$$

Purtroppo la derivata di un prodotto di funzioni derivabili **non** è il prodotto delle derivate, ma si può dimostrare ricorrendo alla definizione ed alla continuità delle funzioni derivabili che vale la seguente formula

$$D(f(x)g(x)) = (Df(x))g(x)+f(x)Dg(x),$$

cioè la derivata di un prodotto è il prodotto della derivata della prima funzione per la seconda non derivata più la prima funzione per la derivata della seconda.

Esempio $D(3^x\sqrt{x}) = 3^x\log 3\sqrt{x}+3^x/(2\sqrt{x})$.
Sia y = f(x) derivabile e non identicamente nulla, allora la derivata del suo reciproco è data dalla seguente formula

$$D1/f(x) = -Df(x)/f^2(x).$$

Esempio:

$D\frac{1}{5^x} = \frac{-5^x \log 5}{5^{2x}} = -\frac{\log 5}{5^x}$; allo stesso risultato si arrivava osservando che $\frac{1}{5^x} = (\frac{1}{5})^x$ e quindi derivandola come funzione esponenziale

$D\frac{1}{5^x} = D(\frac{1}{5})^x = (\frac{1}{5})^x \log\frac{1}{5} = -(\frac{1}{5})^x \log 5 = -\frac{\log 5}{5^x}$.

Infine la derivata di un quoziente di due funzioni derivabili di cui la funzione al denominatore non nulla si può interpretare come la derivata del prodotto di una funzione per il reciproco dell'altra e ottenere

$$D\frac{f(x)}{g(x)} = D(f(x)\frac{1}{g(x)}) = (Df(x))\frac{1}{g(x)} + f(x)D\frac{1}{g(x)} = (Df(x))\frac{1}{g(x)} + f(x)(\frac{-Dg(x)}{g^2(x)}) = \frac{(Df(x))g(x) - f(x)Dg(x)}{g^2(x)}.$$

Esempio:

$$Dtgx = D\frac{senx}{\cos x} = \frac{(\cos x)(\cos x) - (senx)(-senx)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + sen^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x.$$

Nel caso infine che si abbia una composizione di funzioni derivabili la derivata della funzione composta è uguale alla derivata della funzione più esterna nella composizione calcolata nello stesso argomento per la derivata dell'argomento, in formule

$$Df(g(x))=f'(g(x))Dg(x).$$

Esempio: D senx^2 = 2xcosx^2, infatti la funzione è composta dalla funzione seno e dalla parabola x^2, ed il seno è la funzione più esterna nella composizione.
Invece D sen^2x= D$(senx)^2$ = 2(senx)(cosx), infatti la funzione è composta dalla funzione potenza e dalla funzione seno, e la potenza è la funzione più esterna nella composizione.
La regola di derivazione di funzione composta continua a valere anche se la funzione è composta da tre o più funzioni, esempio:

$D\sqrt{sen3x^2} = \frac{1}{2\sqrt{sen3x^2}}(\cos 3x^2)6x = \frac{3x\cos 3x^2}{\sqrt{sen3x^2}}$.

In particolare se la funzione y = f(x) oltre ad essere derivabile è anche invertibile, la funzione inversa è derivabile secondo la formula seguente.
Per semplicità indichiamo con x = g(y) la funzione inversa, quindi g(f(x)) = x per definizione stessa di funzione inversa. Se deriviamo ambo i membri si ottiene g'(f(x))f'(x) = 1, ovvero g'(f(x)) = 1/ f'(x), ma poiché f(x) = y e x = g(y), possiamo scrivere
g'(y) = 1/ f'(g(y)), dunque

$$Dg(y) = 1/f'(g(y)).$$

Esempio :

la funzione y = senx è invertibile in $[-\pi/2,\pi/2]$ e la sua inversa è x = arcseny, dunque

$$Darcseny = \frac{1}{\cos arcseny} = \frac{1}{\sqrt{1-sen^2 arcseny}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Abbiamo utilizzato la formula fondamentale della trigonometria per esprimere il coseno in funzione del seno, cioè $\cos\alpha = \pm\sqrt{(1-sen^2\alpha)}$, la scelta del segno + dipende dal fatto che
$x\in[-\pi/2,\pi/2]$ e in questo intervallo il coseno è positivo. Inoltre per definizione di funzione inversa sen arcsen y = y. In maniera analoga si calcolano le derivate dell'arcotangente e dell'arcocoseno.
Nella tabella delle derivate dobbiamo aggiungere le seguenti:

D arcsen x = $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, D arctg x = $\frac{1}{1+x^2}$ e D arccos x = $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Esercizio: si determini la retta tangente al grafico di $y = \log(1-5x) + 7x^2+3x+4$ nel suo punto di ascissa 0.
L'equazione della retta tangente ad y = f(x) in x_0 è:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x- x_0),$$

in tal caso $x_0 = 0$ e $f(x_0) = \log 1+4 = 4$, $f'(x) = -5/(1-5x) + 14x+3$ e dunque $f'(0) = -5+3 = -2$.
L'equazione della retta tangente è

$$y = 4-2(x-0)$$

cioè

$$y = 4-2x.$$

Esercizio: si calcoli D x^{senx}. Trattandosi di una potenza con base ed esponente variabile prima di derivare dobbiamo riscrivere la funzione nel modo seguente D x^{senx} = D $e^{senx\log x}$ =
$e^{senx\log x}\left(\frac{senx}{x}+\cos x\log x\right) = x^{senx}\left(\frac{senx}{x}+\cos x\log x\right)$.

Definizione : data y = f(x) derivabile in x_0 si chiama **differenziale** di f(x) in x_0 il prodotto della derivata di f(x) in x_0 per l'incremento $(x- x_0)$ ovvero

$$df = f'(x_0)(x- x_0).$$

Dal punto di vista geometrico il differenziale è l'incremento letto sulla retta tangente ad f(x) in x_0 quando si passa da x_0 a x.

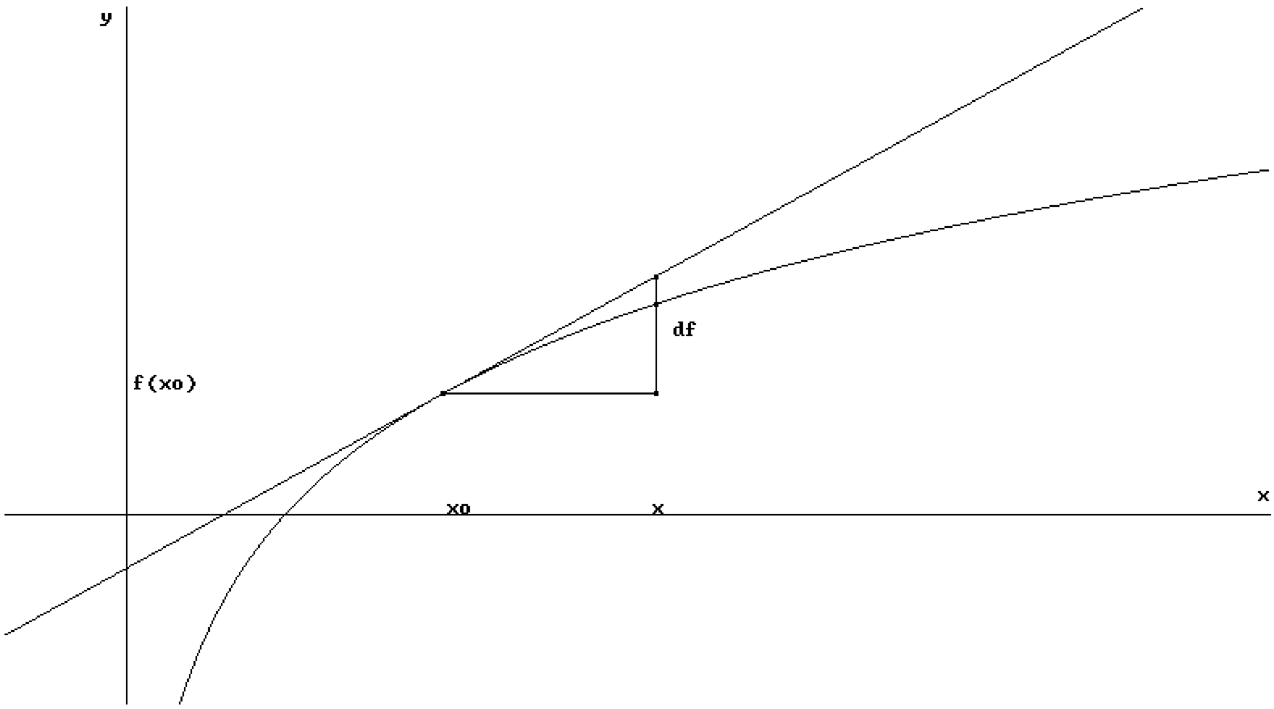


Fig. n. 86 – Significato geometrico del differenziale

La definizione di differenziale è valida per tutte le funzioni derivabili, in particolare se f(x) = x si ha dx = 1(x-x_0) essendo la derivata di y = x costantemente uguale ad 1, e quindi possiamo scrivere

$$df = f'(x_0)dx$$

ovvero la derivata è un quoziente di differenziali

$$\frac{df}{dx} = f'(x_0)\,.$$

Definizione di massimo e di minimo relativo per una funzione y = f(x).

Un punto x_0 interno al dominio A di y = f(x) si dice di **minimo relativo** per f(x) se esiste un intorno I di x_0 , $I \subseteq A$ tale che per ogni $x \in I$ si ha $f(x) \geq f(x_0)$.

Un punto x_0 interno al dominio A di y = f(x) si dice di **massimo relativo** per f(x) se esiste un intorno I di x_0 , $I \subseteq A$ tale che per ogni $x \in I$ si ha $f(x) \leq f(x_0)$.

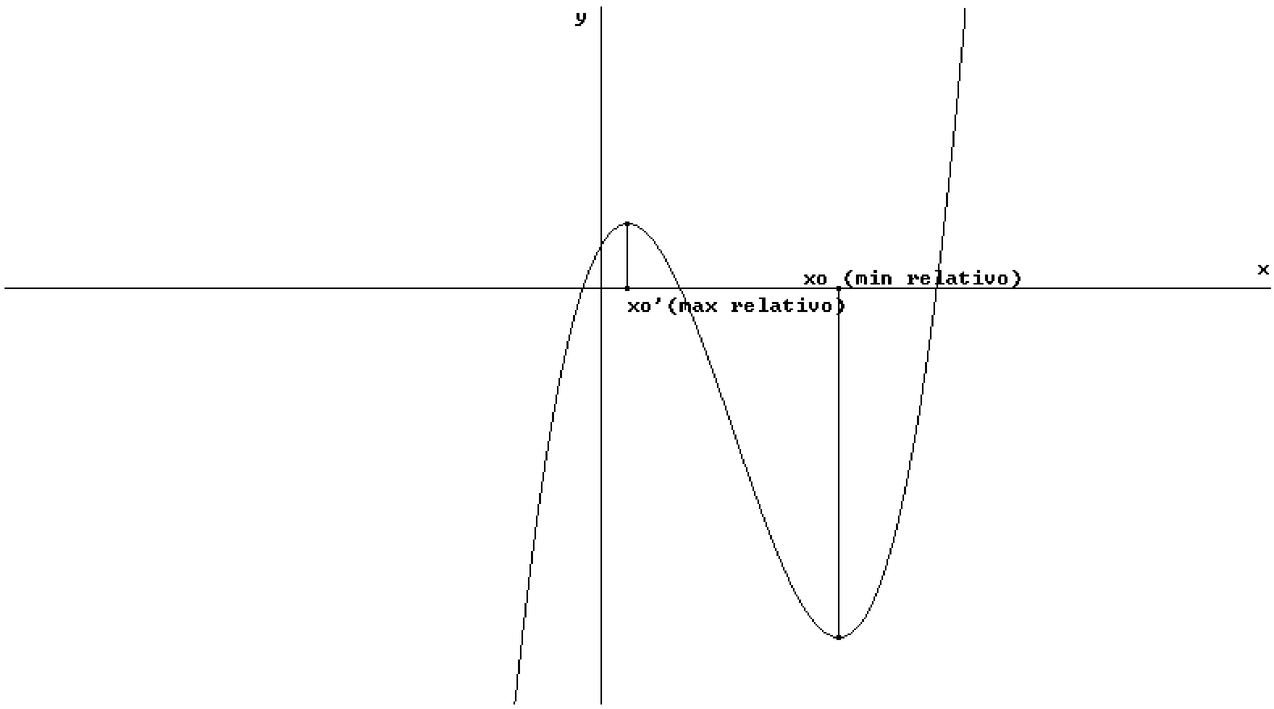


Fig. n. 87 – Grafico di funzione con massimo e minimo relativi

Esempi: la funzione y = |x| ha un minimo relativo in 0 e 0 è anche minimo assoluto. La funzione $y = |x^2-9|$ ha in 0 un massimo relativo e due minimi relativi in x = 3 ed x = -3 che coincidono con il minimo assoluto, inoltre la funzione non ha massimo assoluto, ma ha estremo superiore $+\infty$.

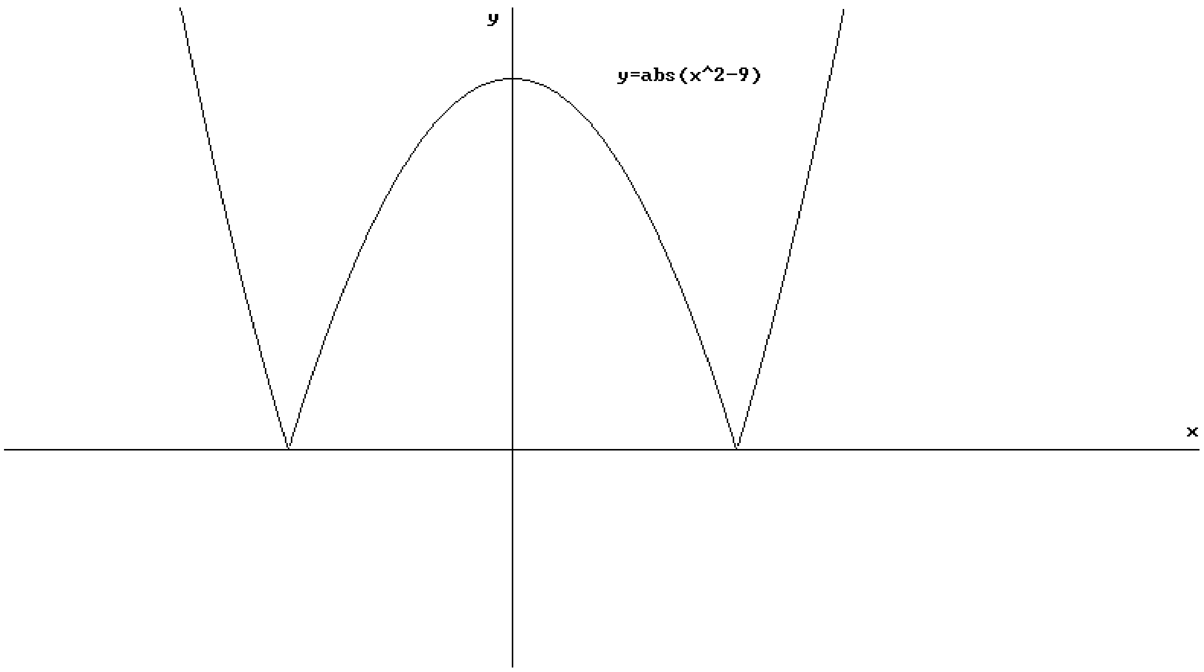


Fig. n. 88 – Grafico di $y = |x^2-9|$

La funzione y = arcsen x non ha massimi e minimi relativi ma ha massimo assoluto uguale a 1 e minimo assoluto uguale a –1.
La funzione y = sen x ha infiniti punti di massimo e di minimo relativi che coincidono con il massimo ed il minimo assoluti.

Teorema di Fermat:

"Sia y = f(x) una funzione derivabile in x_0 e sia x_0 un punto di massimo(o di minimo) relativo, allora f '(x_0) = 0".

Cioè se la funzione è derivabile nei punti di massimo e minimo relativo allora in questi punti la retta tangente al grafico della funzione è orizzontale.

Attenzione esistono punti di max o min relativi in cui non esiste retta tangente ed esistono punti in cui la retta tangente è orizzontale e non sono punti di massimo e di minimo relativo.
Esempio:
la funzione y = |x| ha nell'origine un minimo relativo e questo punto è un punto angoloso per la funzione cioè non esiste tangente.
La funzione $y = x^3$ ha nell'origine un punto a tangente orizzontale, infatti $D\ x^3 = 3x^2 = 0$ per x = 0, ma il punto 0 non è né di massimo né di minimo relativo, ma come vedremo in seguito è un punto di flesso cioè un punto in cui la funzione cambia di concavità.

Dunque i punti di massimo e minimo relativo di una funzione vanno ricercati tra gli zeri della derivata prima e nei punti in cui la funzione non è derivabile.
Dalla definizione di punto di massimo e minimo relativo discende che tali punti non possono essere punti di frontiera per il dominio della funzione, cioè non possono cadere agli estremi dell'intervallo di definizione. Infatti nella definizione di max (o min) relativo si richiede che esista tutto un intorno del punto in cui la funzione si trova a quota più bassa (o più alta) o coincidente con il valore della funzione in quel punto.
Il seguente teorema ci dà informazioni sui punti a tangente orizzontale:

Teorema di Rolle:

"Sia y = f(x) continua in [a,b] e derivabile in (a,b) e sia inoltre f(a) = f(b) allora esiste almeno un punto c interno ad (a,b) in cui f '(c) = 0, cioè dove la tangente al grafico della funzione è orizzontale".
Anche il teorema di Rolle è un teorema di esistenza e non di unicità. Ad esempio se la funzione f(x) è costante essa soddisfa tutte le ipotesi del teorema di Rolle e i punti a tangente orizzontale sono tutti i punti dell'intervallo [a,b] cioè infiniti.

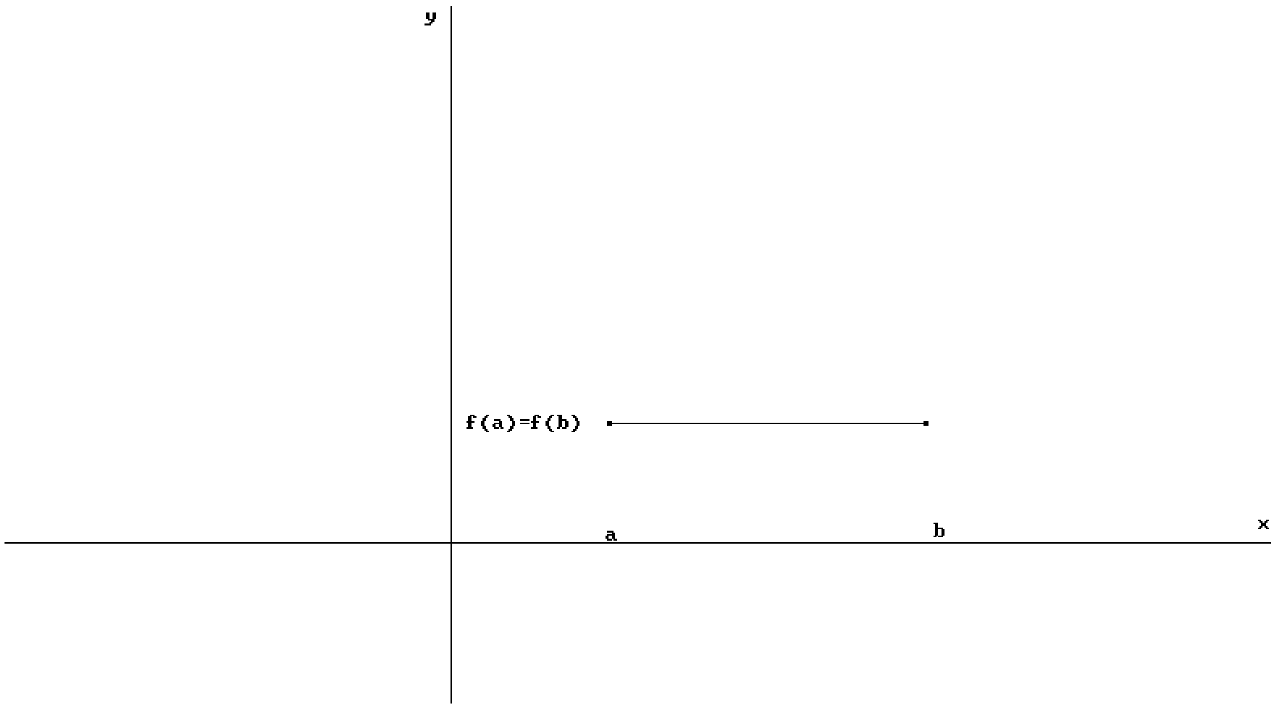


Fig. n. 89 – Grafico di funzione costante in un intervallo limitato e chiuso

Se indeboliamo le ipotesi del teorema le conclusioni non sono più valide e si portano dei controesempi:

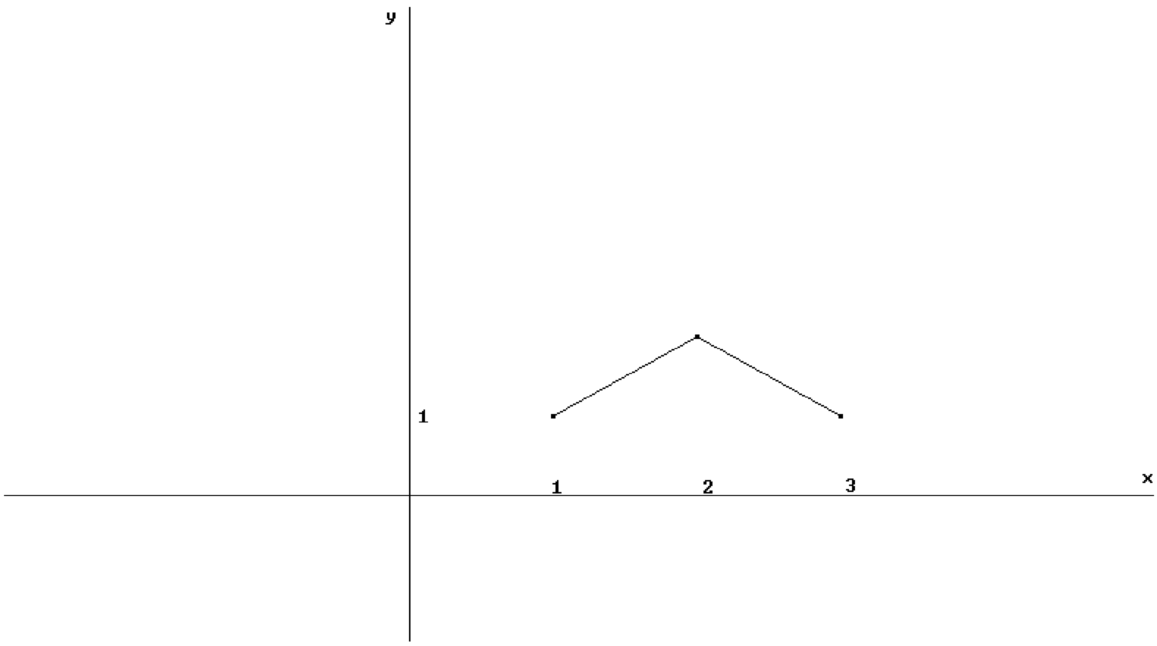


Fig. n. 90 – Grafico di funzione continua in [1,3] ma non ovunque derivabile in (1,3)

La funzione riportata nella figura precedente è continua in [1,3], soddisfa la condizione f(a) = f(b), in questo caso f(1) = f(3) = 1, però non è derivabile in tutto l’intervallo (1,3) avendo in 2 un punto angoloso e come si vede dalla figura non ci sono punti a tangente orizzontale.

Così pure se f(x) è derivabile in (a,b) e quindi continua in (a,b) ma non in [a,b] con f(a) = f(b) può non avere punti a tangente orizzontale come si vede nella figura seguente:

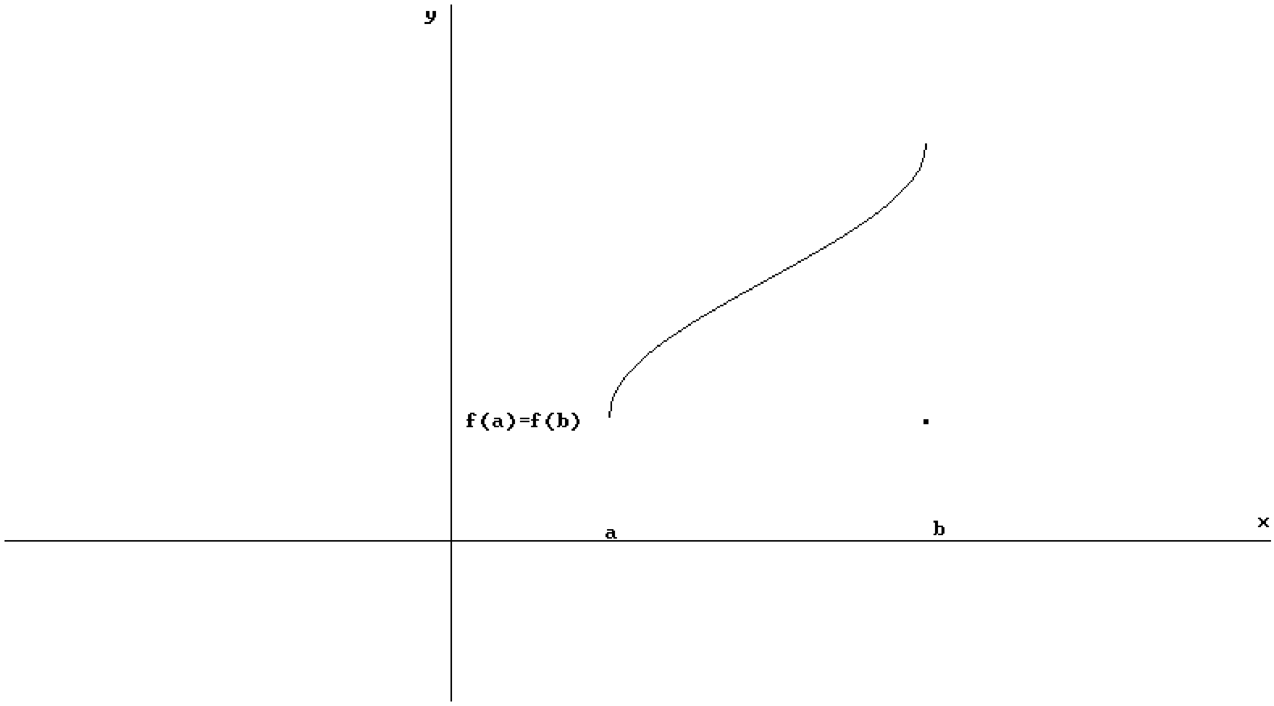


Fig. n. 91 – Grafico di funzione discontinua in un estremo

Il teorema di Rolle si può interpretare anche nel modo seguente:

sia y = f(x) continua in [a,b] e derivabile in (a,b) e sia inoltre f(a) = f(b) allora esiste almeno un punto c interno ad (a,b) in cui la tangente al grafico della funzione è parallela alla retta che congiunge i punti di coordinate (a,f(a)) e (b,f(b)) cioè alla retta y = f(a).

Teorema di Lagrange:

"Sia y = f(x) continua in [a,b] e derivabile in (a,b) allora esiste almeno un punto c interno ad (a,b) in cui la retta tangente al grafico della funzione è parallela alla retta che congiunge i punti di coordinate (a,f(a)) e (b,f(b)) , ovvero le due rette hanno lo stesso coefficiente angolare $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ ".

Anche il teorema di Lagrange è un teorema di esistenza e non di unicità. Nel caso in cui la funzione sia un segmento i punti c sono infiniti come si può vedere dalla figura

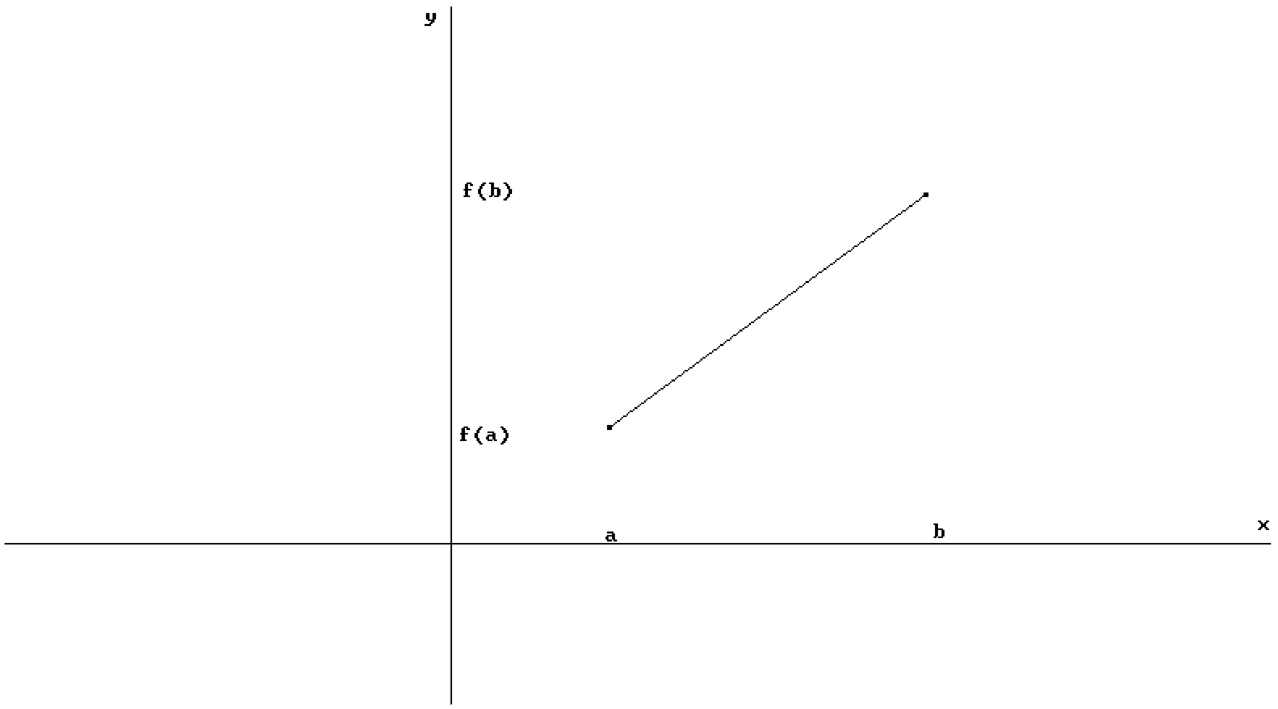


Fig. n. 92 – Grafico di funzione lineare

In generale si ha una situazione del tipo in figura

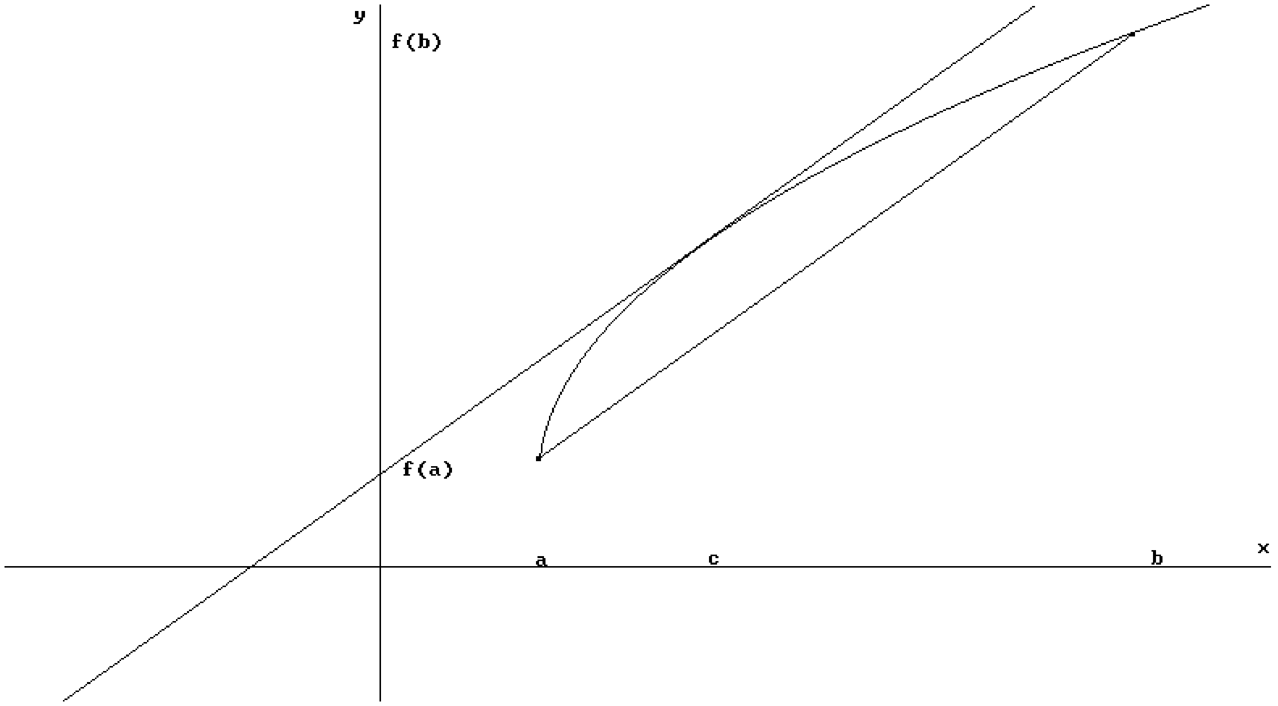


Fig. n. 93 – Significato geometrico del teorema di Lagrange

Il teorema di Lagrange ha importanti corollari.

Corollario:

“Sia y = f(x) tale che f ‘(x) ≡ 0 in [a,b] (cioè la funzione identicamente nulla) allora f(x) è costante”.

Questo corollario ci permette di invertire la proposizione “se una funzione è costante allora la sua derivata è nulla” in “se una funzione ha la derivata nulla in un intervallo limitato e chiuso allora è costante”.

Dimostrazione del corollario. Poichè f ‘(x) ≡ 0 in [a,b] si ha che f ‘(x) ≡ 0 in qualunque sottointervallo di [a,b] quindi anche in [a,x] con [a,x] $\subseteq$ [a,b]. In tale sottointervallo sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Lagrange per cui possiamo dire che esiste almeno un c interno ad [a,x] per cui $f'(c) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, ma f ‘(x) ≡ 0 dunque $f'(c) = 0$, cioè f(x)-f(a) = 0, ovvero f(x) = f(a) per ogni x appartenente ad [a,b] cioè costante.

Attenzione per poter concludere che f(x) è costante occorre che la derivata sia nulla in un intervallo limitato e chiuso altrimenti si portano dei controesempi del tipo in figura

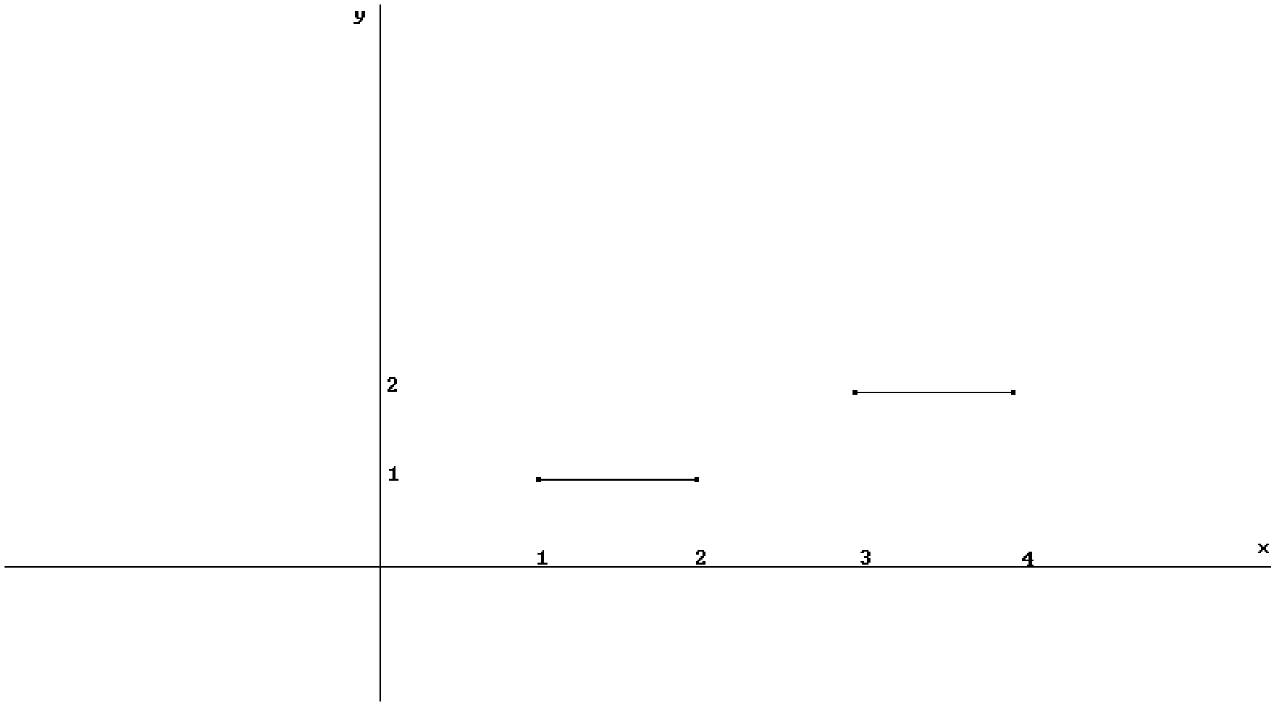


Fig. n. 94 – Grafico di funzione a scalino in [1,2]$\cup$[3,4]

la funzione a scalino sopra riportata è tale che f ‘(x) ≡ 0 in [1,2]$\cup$[3,4] , ma la funzione non è costante, infatti la sua immagine è $\{1,2\}$.

Altro corollario del teorema di Lagrange è il seguente.

Corollario:

" Sia y = f(x)derivabile in [a,b] tale che $f'(x) \geq 0$ in [a,b], allora f(x) è crescente in [a,b]".

Naturalmente se $f'(x) \leq 0$ in [a,b], allora f(x) è decrescente in [a,b].
Dunque il segno della derivata prima ci dà informazioni sulla monotonia della funzione; tale corollario è di grande utilità negli studi di funzione.

Prima di procedere nello studio di una funzione diamo un'altra definizione:
y = f(x) si dice **convessa** in(a,b) se il suo epigrafico è un insieme convesso ovvero se in ogni punto dell'intervallo (a,b) il grafico della funzione è sempre maggiore o uguale ad ogni retta tangente al grafico della funzione in qualsiasi punto.
In formule

$$f(x) \geq f(x_0)+f'(x_0)(x- x_0), \forall x \in [a,b], \forall x_0 \in [a,b].$$

Naturalmente nella definizione ora data occorre che f(x) sia derivabile in tutto [a,b].

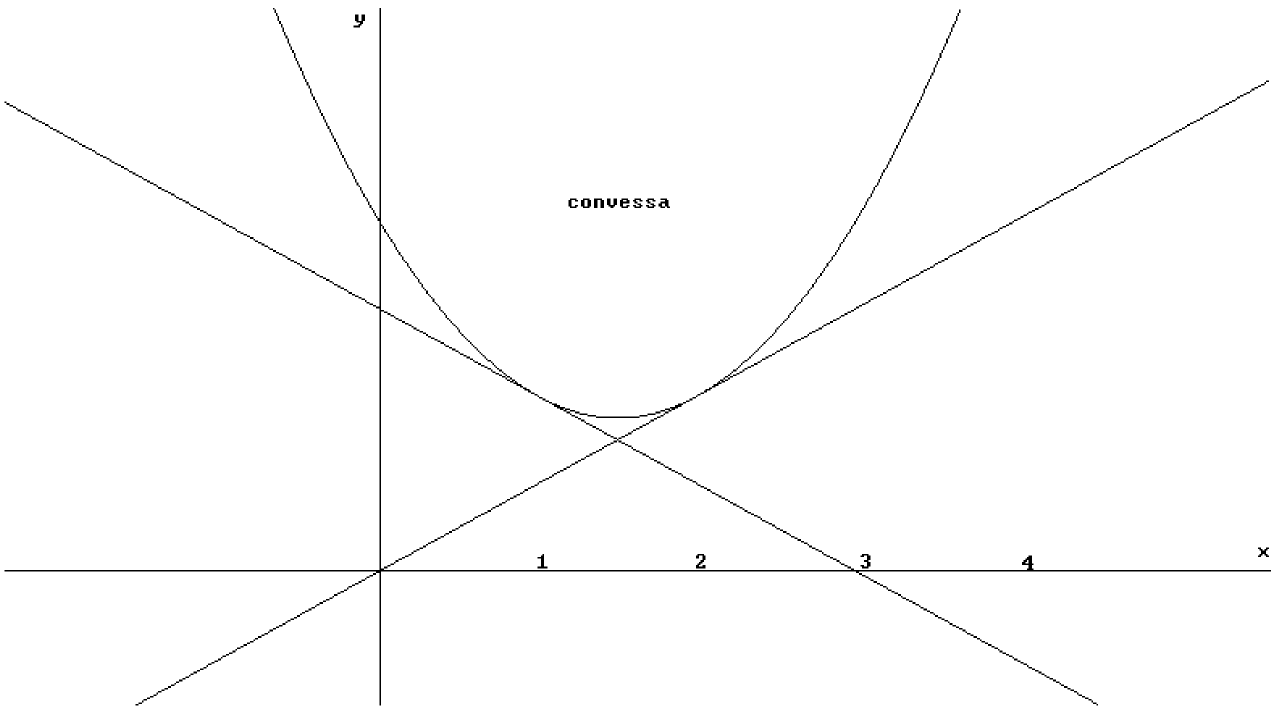


Fig. n. 95 – Grafico di funzione convessa

Analogamente y = f(x) si dice **concava** in(a,b) se il suo epigrafico è un insieme concavo ovvero se in ogni punto dell'intervallo (a,b) il grafico della funzione è sempre minore o uguale ad ogni retta tangente al grafico della funzione in qualsiasi punto.
In formule

$$f(x) \leq f(x_0)+f'(x_0)(x- x_0), \forall x \in [a,b], \forall x_0 \in [a,b].$$

Naturalmente nella definizione ora data occorre che f(x) sia derivabile in tutto [a,b].

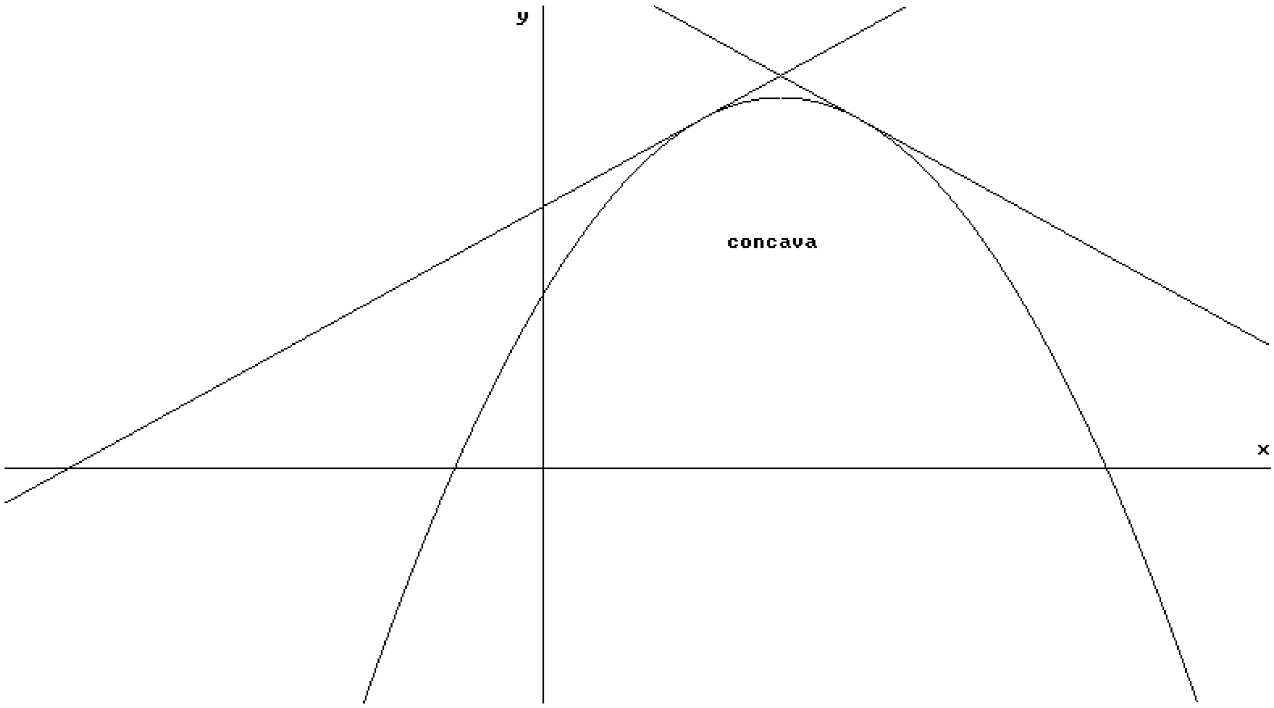


Fig. n. 96 – Grafico di funzione concava

Infine se y = f(x) ammette derivata seconda in [a,b] , cioè se esiste la derivata della funzione derivata prima si ha il seguente

Teorema:

“se $f''(x) \geq 0$ in [a,b], allora la funzione è convessa, cioè il suo grafico rivolge la concavità verso l’alto”.

Analogamente “se $f''(x) \leq 0$ in [a,b], allora la funzione è concava, cioè il suo grafico rivolge la concavità verso il basso”.

Questa volta il segno della derivata seconda ci dà informazioni sulla concavità o convessità della funzione.

Definizione: si chiamano **punti di flesso** i punti in cui la funzione cambia la propria convessità cioè da concava diventa convessa e viceversa.
Vediamo adesso uno schema per effettuare uno

Studio di funzione

a) **Generalità , ovvero tutte le proprietà che si deducono dall'aspetto della funzione: parità, periodicità, positività , particolari simmetrie….**
b) **Insieme di definizione**
c) **Limiti agli estremi dell'insieme di definizione e nei punti in cui la funzione non è definita ma sono di accumulazione per il dominio. Ricerca di eventuali asintoti orizzontali , verticali, obliqui**
d) **Calcolo della derivata prima, intervalli di crescenza o decrescenza, massimi e minimi relativi, punti angolosi o cuspidi**
e) **Calcolo della derivata seconda (se richiesta), intervalli di concavità e convessità, punti di flesso**
f) **Grafico, massimo e minimo assoluti, estremo superiore ed inferiore.**

Esempio: si studi y = $\frac{4x^2}{1+2x^2} - arctg 2x^2$.
Tale funzione è pari, infatti compaiono solo potenze pari di x. Questa osservazione ci permette di studiare la funzione solo per x ≥ 0 . Per avere tutto il grafico basterà fare una simmetria assiale rispetto all'asse delle y.
Il dominio è tutto **R,** infatti il denominatore come somma di quadrati è sempre diverso da zero e l'arcotangente è definita su tutto **R**. La funzione non può avere quindi asintoti verticali.
Calcoliamo $\lim_{x\to+\infty}(\frac{4x^2}{1+2x^2} - arctg 2x^2) = \frac{4}{2} - \frac{\pi}{2} = 2 - \frac{\pi}{2}$,
(analogamente si ha $\lim_{x\to-\infty}(\frac{4x^2}{1+2x^2} - arctg 2x^2) = \frac{4}{2} - \frac{\pi}{2} = 2 - \frac{\pi}{2}$).
La funzione ha un asintoto orizzontale di eqazione y =2-π/2. L'esistenza di un asintoto orizzontale esclude l'esistenza di un asintoto obliquo.
Calcoliamo

$$f'(x) = \frac{8x(1+2x^2) - 4x^2 4x}{(1+2x^2)^2} - \frac{4x}{1+4x^4} = \frac{8x + 16x^3 - 16x^3}{(1+2x^2)^2} - \frac{4x}{1+4x^4} = \frac{8x}{(1+2x^2)^2} - \frac{4x}{1+4x^4} =$$

$$= 4x(\frac{2}{(1+2x^2)^2} - \frac{1}{1+4x^4}) = 4x(\frac{2+8x^4-1-4x^4-4x^2}{(1+2x^2)^2(1+4x^4)}) = 4x(\frac{4x^4-4x^2+1}{(1+2x^2)^2(1+4x^4)}) = 4x(\frac{(2x^2-1)^2}{(1+2x^2)^2(1+4x}$$

, il segno di tale derivata dipende dal fattore 4x essendo la frazione non negativa.

Per cui f '(x) ≥ 0 per x ≥ 0, cioè la funzione è crescente su tutta la semiretta ≥ 0. Naturalmente la funzione sarà decrescente per x ≤ 0, e quindi in 0 si ha un minimo relativo a tangente orizzontale. Il valore della funzione in 0 è 0.
Si osserva che la derivata si annulla in altri due punti: x = $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, ma non sono punti di massimo e minimo relativo , bensì punti di flesso a tangente orizzontale.
Il grafico della funzione è:

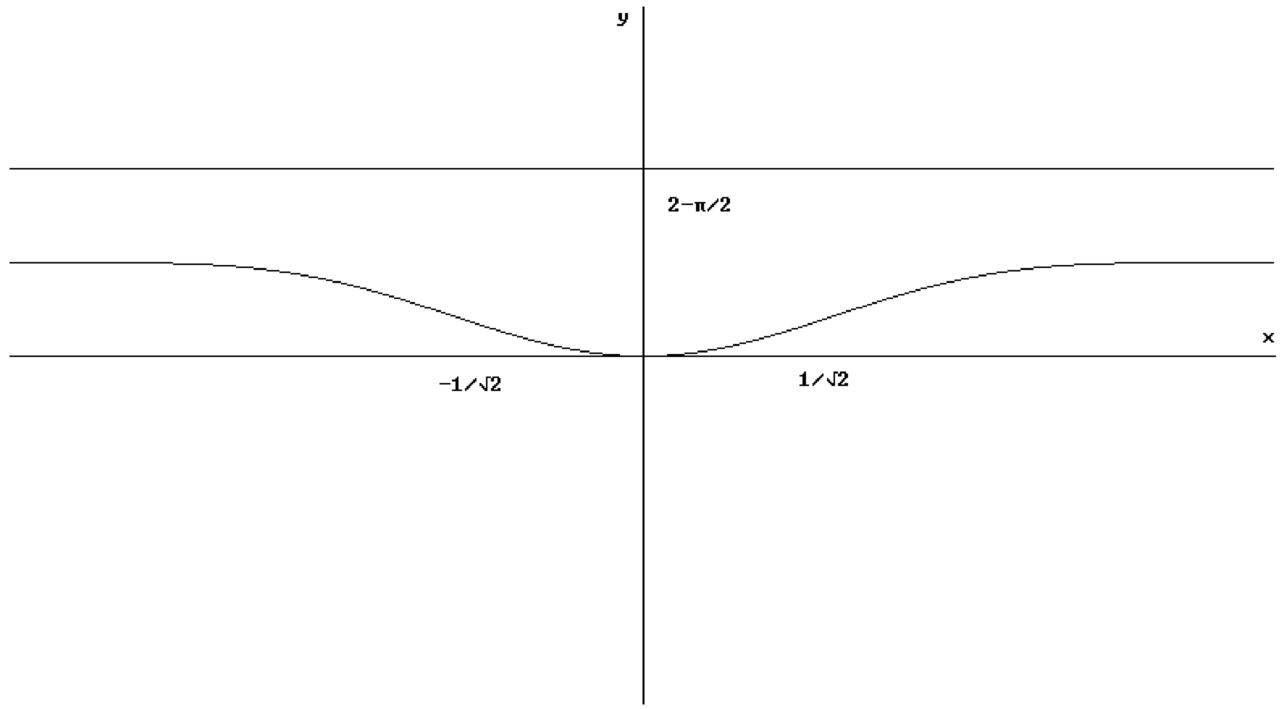


Fig. n. 97 – Grafico di y = $\dfrac{4x^2}{1+2x^2} - arctg 2x^2$

Dal grafico si vede che il punto di minimo relativo cioè 0 è anche punto di minimo assoluto, che la funzione non ha massimo assoluto ma ha estremo superiore 2-π/2. Non ci sono punti angolosi né cuspidi.

Esercizio: si studi y = $\log \dfrac{x}{4-x^2}$.

La funzione è definita se $\dfrac{x}{4-x^2} > 0$, si tratta di una disequazione fratta. Il numeratore è positivo per x > 0 , il denominatore è positivo per –2 < x < 2 . Riassumiamo in un grafico i segni del numeratore e denominatore

-2 2

0

La frazione è positiva per x <-2 e per 0 <x < 2. Pertanto la funzione è definita nell'insieme
(-∞, -2) ∪ (0,2).

Data la semplicità della funzione possiamo studiarne il segno, f(x) ≥ 0 se $\log\frac{x}{4-x^2} \geq 0$ ovvero se

$\frac{x}{4-x^2} \geq 1$, cioè $\frac{x-4+x^2}{4-x^2} \geq 0$. Il numeratore è positivo per valori esterni a x = $\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$ e il denominatore è positivo per valori interni a ± 2. Dunque riportando su di un grafico il segno del numeratore e denominatore si ha

$$\frac{-1-\sqrt{17}}{2} \qquad\qquad \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$$

———————————— - ————————————

- ———————————— -

-2 2

e la frazione risulterebbe positiva negli intervalli $\left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2}, -2\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}, 2\right)$, tale insieme va però intersecato con il dominio$(-\infty, -2) \cup (0,2)$. E' immediato osservare che l'insieme trovato è interamente contenuto nell'insieme di definizione.
Vediamo adesso il comportamento della funzione agli estremi dell'insieme di definizione:

$\lim_{x\to-\infty} \log\frac{x}{4-x^2} = \log 0^+ = -\infty$, (essendo x un infinito di ordine inferiore rispetto ad x^2), e poiché l'infinito proviene da un logaritmo non esiste asintoto obliquo,

$\lim_{x\to-2^-} \log\frac{x}{4-x^2} = \log\frac{-2^+}{0^-} = \log(+\infty) = +\infty$, il grafico della funzione presenta un asintoto verticale per x che tende a -2 da sinistra,

$\lim_{x\to 0^+} \log\frac{x}{4-x^2} = \log 0^+ = -\infty$, il grafico della funzione presenta un asintoto verticale per x che tende a zero da destra,

$\lim_{x\to 2^-} \log\frac{x}{4-x^2} = \log\frac{2}{0^+} = \log(+\infty) = +\infty$, il grafico della funzione presenta un asintoto verticale per x che tende a 2 da sinistra.
Calcoliamo la derivata prima della funzione:

$$f'(x) = \frac{4-x^2}{x}\left(\frac{1(4-x^2)-x(-2x)}{(4-x^2)^2}\right) = \frac{4-x^2}{x}\left(\frac{4-x^2+2x^2}{(4-x^2)^2}\right) = \frac{4-x^2}{x}\left(\frac{4+x^2}{(4-x^2)^2}\right) = \frac{4+x^2}{x(4-x^2)},$$

il numeratore essendo una somma di due quadrati di cui uno 4 è > 0, il denominatore è > 0 nell'insieme di definizione , dunque la derivata prima è maggiore di zero in tutto l'insieme di definizione , per cui la funzione è crescente in $(-\infty,-2)$ e in (0,2),

come si può vedere dal grafico, ma non è globalmente crescente essendo crescente in insiemi disgiunti.
Pertanto la funzione non presenta massimi e minimi relativi,inoltre non ha massimo e minimo assoluto , ha estremo superiore +∞ ed estremo inferiore -∞. Non ci sono punti angolosi ne cuspidi.
Possiamo calcolare la derivata seconda della funzione per vedere intervalli di concavità e convessità e punti di flesso.

$$f''(x) = \frac{2x^2(4-x^2)-(4+x^2)(4-x^2-2x^2)}{x^2(4-x^2)^2} = \frac{8x^2-2x^4-(4+x^2)(4-3x^2)}{x^2(4-x^2)^2} =$$

$$\frac{8x^2-2x^4-16+12x^2-4x^2+3x^4}{x^2(4-x^2)^2} = \frac{-16+16x^2+x^4}{x^2(4-x^2)^2}.$$

La derivata seconda è maggiore o uguale a zero se $-16+16x^2+x^4 \geq 0$ ovvero posto x^2 = z se
$-16+16z+z^2 \geq 0$, cioè per valori esterni alle due radici z = $-8 \pm \sqrt{80}$ cioè $z \leq -8-\sqrt{80}$, $z \geq -8+\sqrt{80}$, ovvero per $x^2 \leq -8-\sqrt{80}$, $x^2 \geq -8+\sqrt{80}$. La prima disequazione non è mai soddisfatta essendo il primo membro non negativo ed il secondo minore di zero. La seconda è soddisfatta per valori esterni alle radici dell'equazione associata $x \leq -\sqrt{-8+\sqrt{80}}, x \geq \sqrt{-8+\sqrt{80}}$. Tali intervalli si devono intersecare con il dominio

-2   0   2

$-\sqrt{-8+\sqrt{80}}$ $+\sqrt{-8+\sqrt{80}}$

Si ottiene che la derivata seconda è maggiore o uguale a zero nei seguenti intervalli (- ∞,-2) ∪ ($\sqrt{-8+\sqrt{80}}$,2) e quindi la funzione è convessa in (- ∞,-2) ∪ ($\sqrt{-8+\sqrt{80}}$,2) come si vede dalla figura seguente.

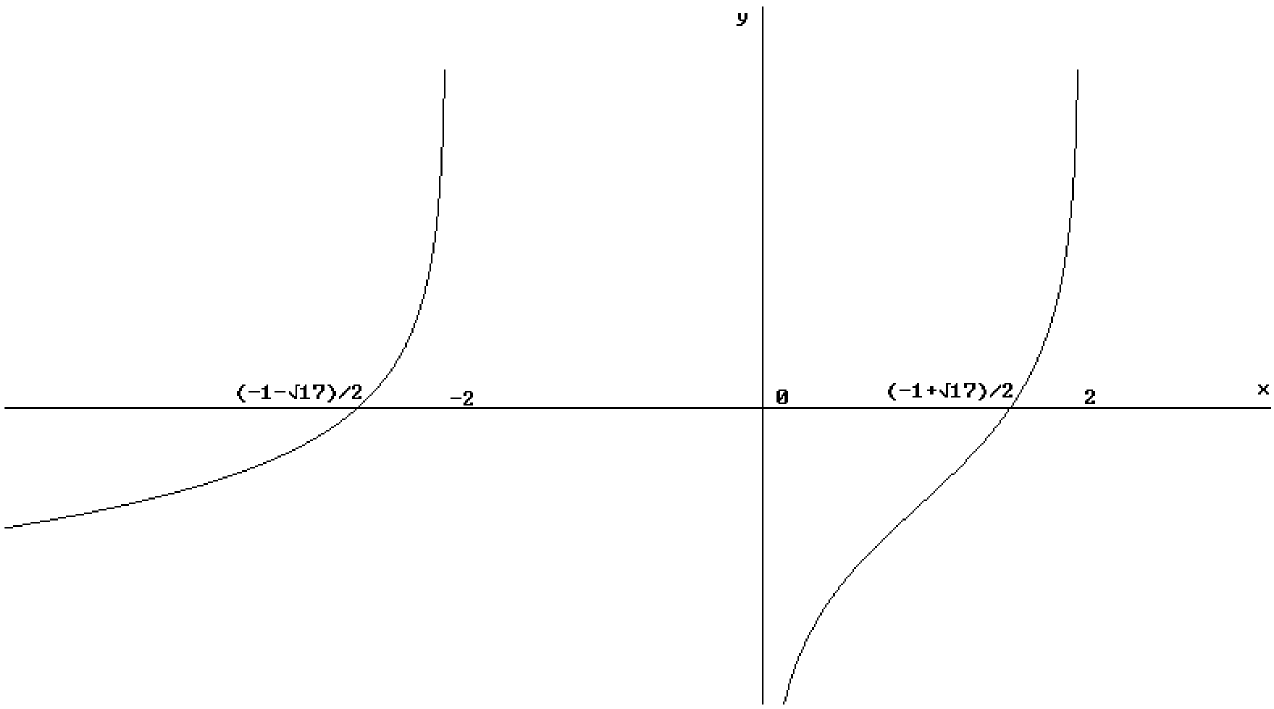


Fig. n. 98 - Grafico di y = $\log\frac{x}{4-x^2}$

Per studiare la funzione y = $\log_{\frac{1}{2}}\frac{x}{4-x^2}$, possiamo partire dal grafico precedente dopo aver osservato che $\log_{\frac{1}{2}}\frac{x}{4-x^2} = \frac{\log\frac{x}{4-x^2}}{\log\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\log 2}(\log\frac{x}{4-x^2})$. Pertanto y = $\log_{\frac{1}{2}}\frac{x}{4-x^2}$ risulta uguale a y = $\log\frac{x}{4-x^2}$ moltiplicata per una costante negativa, dunque il grafico di y = $\log_{\frac{1}{2}}\frac{x}{4-x^2}$ si può ottenere dal precedente moltiplicando le y per una quantità negativa ovvero

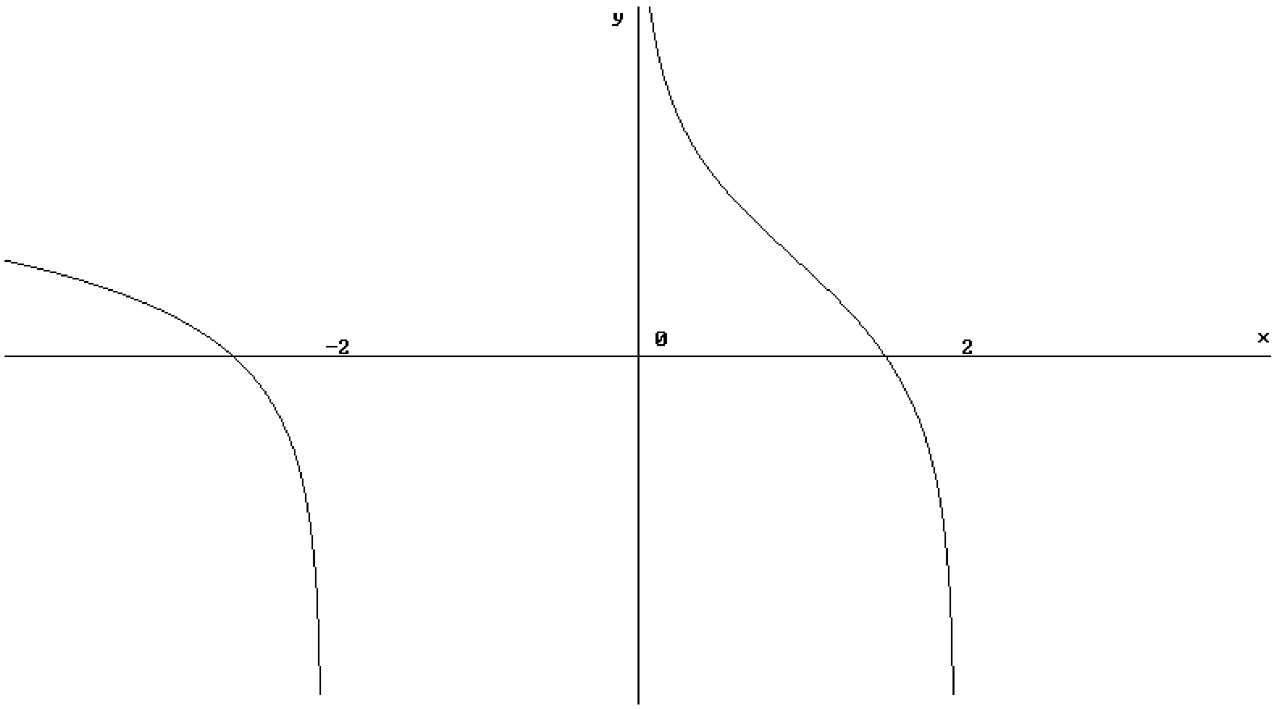


Fig. n. 99 – Grafico di y = $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{x}{4-x^2}$

La funzione y = log x – log (4-x^2) differisce da y = $\log \dfrac{x}{4-x^2}$ per l'insieme di definizione.

Infatti l'insieme di definizione di y = log x – log (4-x^2) costituito dalle x che soddisfano contemporaneamente le due condizioni: x > 0 e 4- x^2 > 0 cioè l'intervallo (0,2).

Pertanto il grafico di y = logx – log (4-x^2) è il seguente

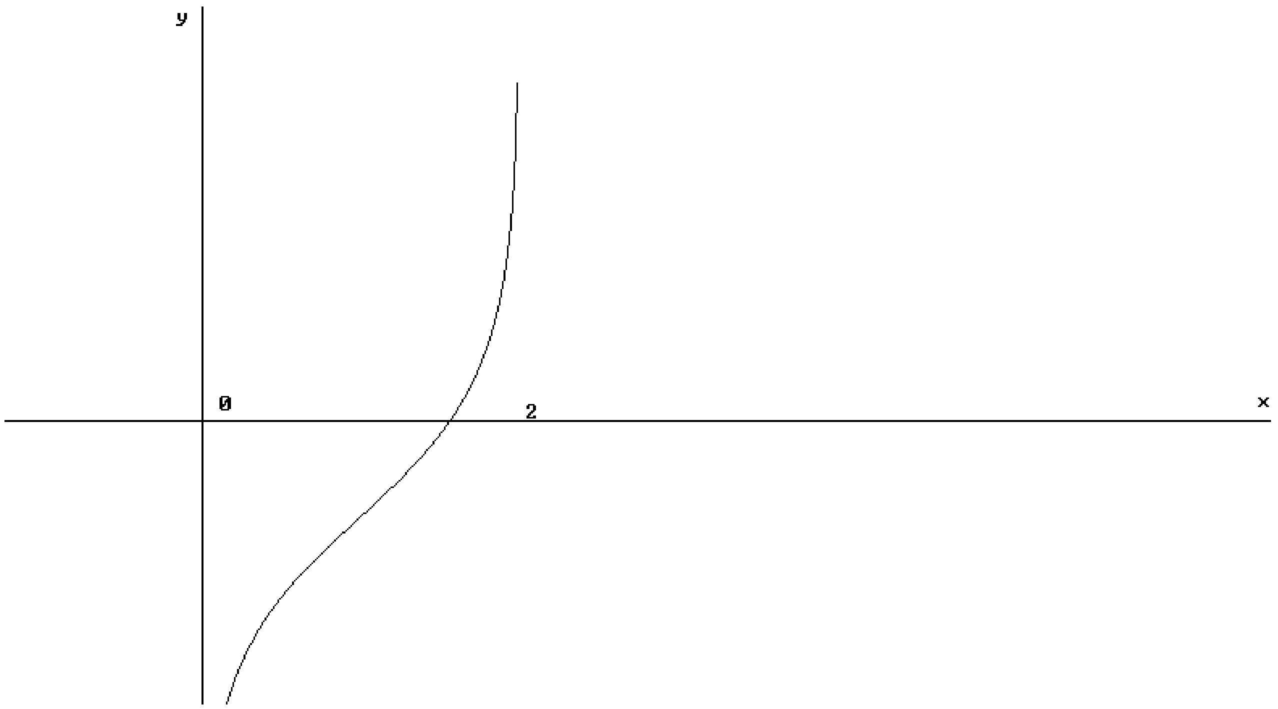


Fig. n. 100 – Grafico di y = logx – log ($4-x^2$)

Esercizio: si studi y = $(x^2-3x+2)e^{-|x+1|}$.

Il dominio è tutto **R.**
Il segno della funzione dipende dal polinomio essendo l'esponenziale sempre maggiore di zero.
Dunque f(x) ≥ 0 se x^2-3x+2 ≥ 0, per x ≤ 1 x ≥ 2.
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty(e^{-\infty}) = \frac{+\infty}{e^{+\infty}} = 0$, l'infinito è di ordine superiore ad ogni potenza.
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty(e^{-\infty}) = \frac{+\infty}{e^{+\infty}} = 0$, la funzione ha un asintoto orizzontale di equazione y = 0.
Non esistono asintoti verticali né obliqui.
Prima di calcolare la derivata occorre studiare il valore assoluto:
|x+1| = x+1 se x ≥-1 e |x+1| = -x-1 se x <-1 , pertanto la funzione coincide con
y = $(x^2-3x+2)e^{-(x+1)}$y = . se x ≥-1 e con
y = $(x^2-3x+2)e^{x+1}$ se x < -1.
Dunque
f '(x) = $(2x-3)e^{-x-1}+(x^2-3x+2)e^{-x-1}(-1) = e^{-x-1}(2x-3-x^2+3x-2) = e^{-x-1}(5x-5-x^2)$,
se x >-1.
f '(x) = $(2x-3)e^{x+1}+(x^2-3x+2)e^{x+1} = e^{x+1}(2x-3+x^2-3x+2) = e^{x+1}(-x-1+x^2)$, se x < -1.
Se x >-1 f '(x) ≥ 0 se 5x-5-x^2 ≥ 0 cioè per valori interni alle due radici dell'equazione associata se esistono, cioè per $\frac{5-\sqrt{5}}{2} \le x \le \frac{5+\sqrt{5}}{2}$

-1 $\qquad \frac{5-\sqrt{5}}{2} \qquad\qquad\qquad \frac{5+\sqrt{5}}{2}$

minimo relativo $\qquad\qquad\qquad$ massimo relativo

Se x <-1 f '(x) ≥ 0 se -x-1+x^2 ≥ 0 cioè per valori esterni alle due radici dell'equazione associata se esistono, cioè per $x \le \frac{1-\sqrt{5}}{2}, x \ge \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Si osserva che $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ > -1 per cui la funzione è crescente per x < -1. Calcoliamo il valore in x = -1, f(-1) = 6.
Il valore del minimo relativo è f($\frac{5-\sqrt{5}}{2}$) ed ilo valore del massimo relativo è f($\frac{5+\sqrt{5}}{2}$).
Calcoliamo la pendenza della retta tangente quando x tende a –1 da destra e da sinistra.

$$\lim_{x\to -1^+} f'(x) = \lim_{x\to -1^+} e^{-x-1}(5x-5-x^2) = -11,$$

$$\lim_{x\to -1^-} f'(x) = \lim_{x\to -1^-} e^{x+1}(-x-1+x^2) = 1.$$

Dunque il punto x = -1 è un punto angoloso.
Il grafico della funzione in un intorno di -1 è riportato in figura

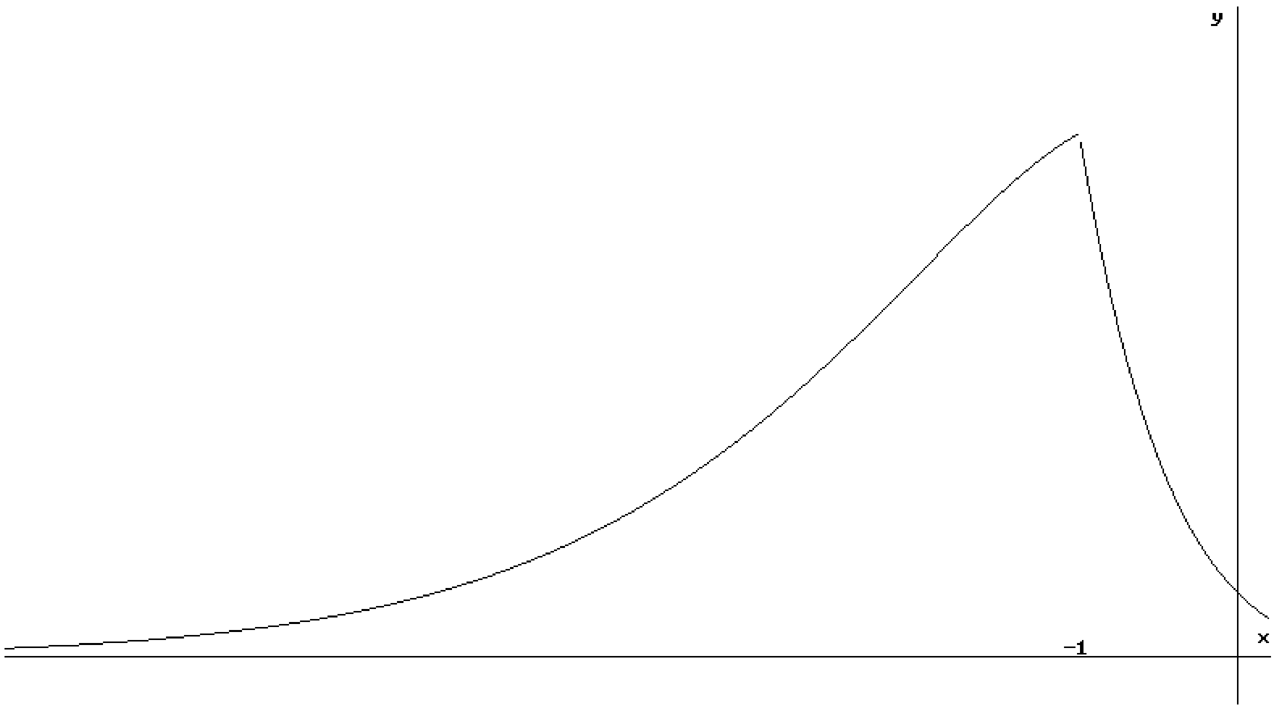


Fig. n. 102 – Grafico di y = $(x^2 - 3x + 2)e^{-|x+1|}$ in un intorno di -1

Il grafico della stessa funzione per x > 0 è riportato di seguito

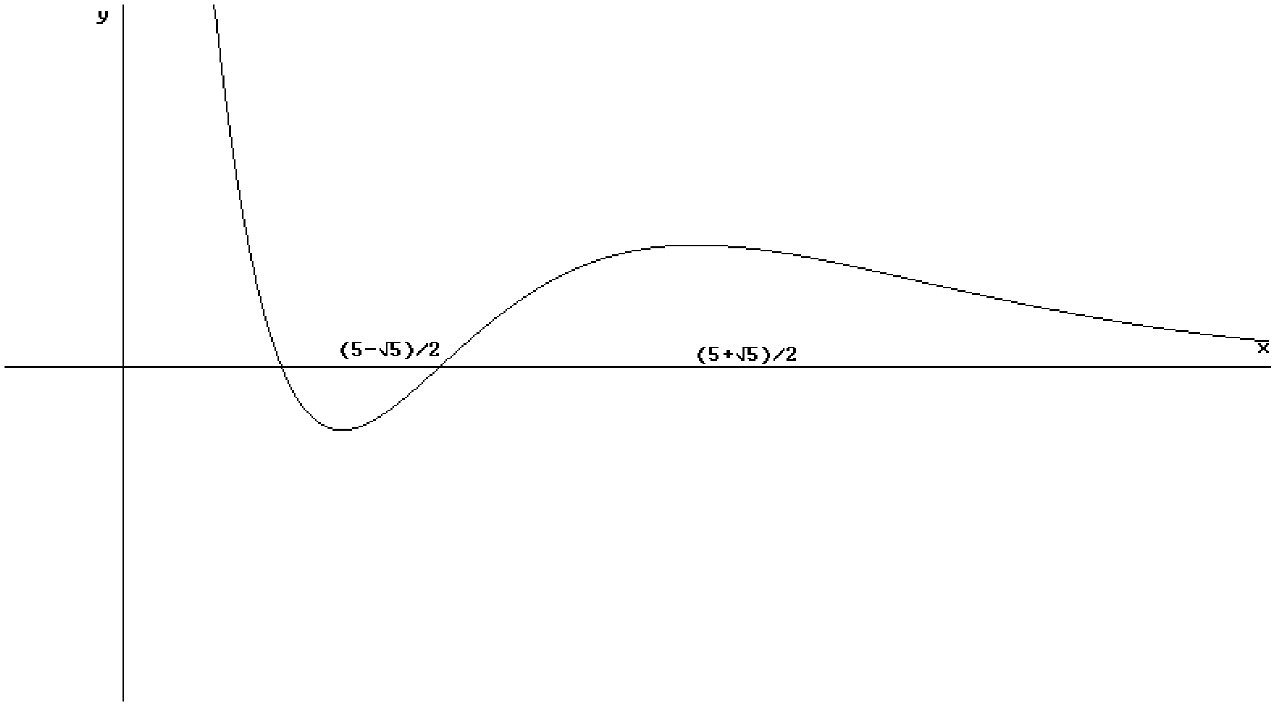
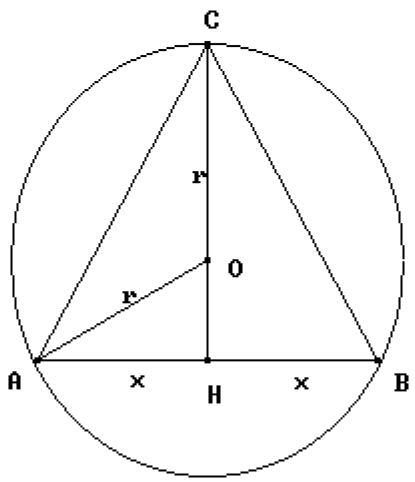


Fig. n. 10 Grafico di y = $(x^2 - 3x + 2)e^{-|x+1|}$ per x > 0

Esercizio:
Problema di ricerca del **massimo assoluto**:
"Tra tutti i triangoli isosceli inscritti in un cerchio si trovi quello di area massima."

Indicato con 2x la base del triangolo isoscele si ha $0 \leq 2x \leq 2r$ (il triangolo deve essere inscritto nel cerchio).



L'altezza CH si ottiene sommando CO ad OH, ove CO = r e OH = $\sqrt{r^2 - x^2}$, pertanto l'area è
S = $x(r + \sqrt{r^2 - x^2})$. Si deve massimizzare tale funzione rispetto ad x e quindi dobbiamo trovare i massimi relativi e confrontarli con il valore della funzione agli estremi dell'intervallo di variazione della x , cioè in 0 e in r.
L'area S per x = 0 vale 0 , l'area S per x = r vale r^2.
La derivata è

$$S' = r + \sqrt{r^2 - x^2} + x\frac{(-2x)}{2\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{2r\sqrt{r^2 - x^2} + 2r^2 - 2x^2 - 2x^2}{2\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{2r\sqrt{r^2 - x^2} + 2r^2 - 4x^2}{2\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Lasciamo al lettore il compito di studiarne il segno e gli zeri.