Capitolo 3
Processi stocastici

per gli studenti del corso di
Stima e identificazione

Luigi Chisci, 28 Febbraio 2019

Generalità sui processi stocastici

I *processi stocastici* costituiscono uno strumento per rappresentare in modo probabilistico quantità incerte che dipendono dal tempo (*segnali*) nello stesso modo in cui le *variabili aleatorie* sono utilizzate per descrivere quantità incerte che non dipendono dal tempo (*parametri*). Da un punto di vista formale, un processo stocastico $X(t, \xi)$ può essere visto come funzione di due variabili: $t \in T$, che indica il tempo nell'insieme dei tempi $T \subseteq \mathbb{R}$, e $\xi \in \Xi$ che, viceversa, indica l'esperimento nello spazio campione Ξ. Fissato l'esperimento $\xi \in \Xi$, il processo stocastico si riduce ad un segnale definito sull'insieme dei tempi T, detto anche *realizzazione* del processo stocastico. Viceversa, fissato l'istante temporale $t \in T$, esso si riduce ad una *variabile aleatoria*. Pertanto un processo stocastico può essere interpretato come una famiglia di segnali definiti su un comune insieme dei tempi oppure, in modo duale, come una famiglia di variabili aleatorie definite su un comune spazio di probabilità. In analogia con quanto fatto per le variabili aleatorie, l'argomento ξ verrà sempre omesso ed un processo stocastico sarà indicato con la notazione $\{X(t)\}_{t \in T}$ o, più semplicemente, con $X(t)$ assumendo che, per ogni istante temporale $t \in T$, $X(t)$ è una variabile aleatoria definita sullo stesso spazio di probabilità qualunque sia t. A seconda che *l'insieme dei tempi* sia *continuo* o *discreto* si parla di

- *processo stocastico a tempo-continuo*, in cui l'insieme dei tempi coincide con l'insieme dei numeri reali, i.e. $T = \mathbb{R}$;
- *processo stocastico a tempo-discreto*, in cui l'insieme dei tempi coincide senza perdita di generalità con l'insieme dei numeri interi, i.e. $T = \mathbb{Z} \stackrel{\triangle}{=} \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$.

Benché tutti i segnali del mondo reale siano a tempo-continuo, i segnali registrati dai moderni sistemi elettronici di acquisizione sono, nella maggior parte dei casi, campionati ad istanti di campionamento successivi $\cdots \leq t_{-1} < t_0 < t_1 < \cdots$ e si presentano, quindi, come sequenze di variabili aleatorie $\{X_k = X(t_k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ definite sull'insieme dei tempi discreto $\mathbb{Z}$ coincidente con l'insieme dei numeri interi.

Caratterizzazione di un processo stocastico

Si ricorda che una variabile aleatoria X è completamente caratterizzata dal punto di vista probabilistico dalla sua PDF $f_X(\cdot)$. Viene dunque naturale chiedersi cosa occorra, viceversa, per caratterizzare completamente un processo stocastico $\{X(t)\}_{t \in T}$. A tale proposito, risulta che tale processo è completamente caratterizzato da tutte le PDF congiunte delle variabili aleatorie $X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_n)$ qualunque sia l'intero $n \geq 1$ e qualunque sia la n-pla di istanti $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in T^n$. Tali PDF verranno di seguito indicate con la notazione

$$f_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n) \qquad t_1, \ldots, t_n \in T, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

e denominate *PDF di ordine n* del processo stocastico $X(t)$. Si noti come la caratterizzazione statistica di un processo stocastico sia, in generale, assai più complessa di quella di una variabile aleatoria. Infatti, mentre una variabile aleatoria richiede una unica PDF, un processo stocastico ne richiede, in generale, infinite, precisamente

- ∞ PDF del primo ordine $f_t(x)$ qualunque sia $t \in T$;
- ∞^2 PDF del secondo ordine $f_{t_1,t_2}(x_1, x_2)$ qualunque siano $t_1, t_2 \in T$;
- $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$
- ∞^n PDF di ordine n, $f_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n)$, qualunque siano $t_1, \ldots, t_n \in T$;
- $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

Esistono tuttavia processi stocastici di natura particolare per i quali la descrizione statistica si semplifica drasticamente, come ad esempio per i processi stocastici *Indipendenti & Identicamente Distribuiti (IID)* di seguito definiti.

Definizione - Un processo stocastico $\{X(t)\}_{t \in T}$ dicesi IID se soddisfa le seguenti condizioni:

(i) le variabili aleatorie $X(t)$ e $X(\tau)$ sono indipendenti qualunque siano $t, \tau \in T$ con $t \neq \tau$;

(ii) tutte le variabili aleatorie $X(t)$ hanno la stessa distribuzione, i.e. $X(t) \sim f(\cdot)$, qualunque sia $t \in T$. $\square$

È immediato constatare come tutte le PDF di ordine finito del processo IID possano essere determinate come segue

$$f_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \;=\; \prod_{i=1}^{n} f_{t_i}(x_i) \;=\; \prod_{i=1}^{n} f(x_i) \tag{1.1}$$

dove nel primo passaggio si è sfruttata la condizione (i) di indipendenza delle variabili aleatorie $X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)$ mentre nel secondo passaggio è stata utilizzata la condizione (ii) di identica distribuzione delle medesime. Da (1.1) risulta evidente come tutte le PDF di un processo stocastico IID dipendano soltanto dalla funzione $f(\cdot)$ e che, quindi, tale processo stocastico è completamente caratterizzato da una unica PDF in modo analogo a quanto accade per una variabile aleatoria.

Due processi stocastici $\{X(t)\}_{t\in T}$ e $\{Y(t)\}_{t\in T}$ si dicono *indipendenti* se le loro PDF congiunte soddisfano la proprietà di separazione

$$\begin{aligned} & f_{X(t_1),\ldots,X(t_n);Y(t'_1),\ldots,Y(t'_m)}\left(x_1,\ldots,x_n;y_1,\ldots,y_m\right) \;= \\ & f_{X(t_1),\ldots,X(t_n)}\left(x_1,\ldots,x_n\right) f_{Y(t'_1),\ldots,Y(t'_m)}\left(y_1,\ldots,y_m\right) \end{aligned}$$

qualunque siano n, m interi positivi e $t_1, \ldots, t_n, t'_1, \ldots, t'_m \in T$.

Stazionarietà

In molti contesti, *stazionarietà* è sinonimo di invarianza delle caratteristiche rispetto a traslazioni temporali. Nel contesto specifico dei processi stocastici, si ha la seguente definizione.

Definizione (Processo stocastico stazionario) - Un processo stocastico $\{X(t)\}_{t\in T}$ dicesi *stazionario* se tutte le sue PDF di qualunque ordine sono invarianti rispetto a traslazioni temporali, ovvero

$$f_{t_1,\ldots,t_n}(x_1,\ldots,x_n) \;=\; f_{t_1+\tau,\ldots,t_n+\tau}(x_1,\ldots,x_n) \qquad \forall t_1,\ldots,t_n,\tau \in T.$$

Come immediata conseguenza della suddetta definizione, per un processo stocastico stazionario vale quanto segue:

- tutte le PDF del primo ordine risultano uguali, i.e. $f_t(x) = f(x)$ qualunque sia $t \in T$;
- le PDF del secondo ordine relative a coppie di istanti (t_1, t_2) dipendono soltanto dalla differenza $t_2 - t_1$, i.e. $f_{t_1,t_2}(x_1, x_2) = f_{0,t_2-t_1}(x_1, x_2) = f_{t_2-t_1}(x_1, x_2)$;
- le PDF di ordine n relative ad n-ple di istanti $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ dipendono soltanto dalle $n-1$ differenze $t_2 - t_1, \ldots, t_n - t_1$, i.e.

  $$f_{t_1,t_2,\ldots,t_n}\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right) = f_{0,t_2-t_1,\ldots,t_n-t_1}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = f_{t_2-t_1,\ldots,t_n-t_1}(x_1,x_2,\ldots,x_n).$$

Due processi stocastici $\{X(t)\}_{t\in T}$ e $\{Y(t)\}_{t\in T}$ si dicono *congiuntamente stazionari* se tutte le loro PDF congiunte di $X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n); Y(t'_1), Y(t'_2), \ldots, Y(t'_m)$ sono invarianti rispetto a traslazioni temporali.

Momenti di un processo stocastico

Analogamente a quanto fatto per le variabili aleatorie, risulta conveniente introdurre i momenti di un processo stocastico. Anche in questo caso, ci si limiterà a definire ed utilizzare momenti del primo e del secondo ordine. In primo luogo, per un processo stocastico $\{X(t)\}_{t\in T}$ a valori in $\mathbb{R}^n$ si definisce la *funzione di media*, o *momento del primo ordine*, $m_X(\cdot) : T \to \mathbb{R}^n$ come segue

$$m_X(t) \;=\; E\left[X(t)\right] = \int x\, f_t(x)\, dx\,.$$

Inoltre si introduce la *funzione di auto-covarianza*, o *momento del secondo ordine*, $R_X(\cdot,\cdot) : T^2 \to \mathbb{R}^{n\times n}$ definita come

$$\begin{aligned} R_X(t,s) &= cov\left(X(t), X(s)\right) \triangleq E\left[\left(X(t)-m_X(t)\right)\left(X(s)-m_X(s)\right)^T\right] \\ &= \int \left(x-m_X(t)\right)\left(\xi-m_X(s)\right)^T\, f_{t,s}(x,\xi)\, dx\, d\xi\,. \end{aligned}$$

Si definisce anche la *funzione di varianza* $\Sigma_X(\cdot) : T \to \mathbb{R}^{n\times n}$ come

$$\Sigma_X(t) = R_X(t,t) = var\left(X(t)\right) \triangleq E\left[\left(X(t)-m_X(t)\right)\left(X(t)-m_X(t)\right)^T\right]\,.$$

Dati due processi stocastici $\{X(t)\in\mathbb{R}^n\}_{t\in T}$ e $\{Y(t)\in\mathbb{R}^p\}_{t\in T}$, è conveniente introdurre la loro *funzione di cross-covarianza* $R_{XY}(\cdot,\cdot) : T^2 \to \mathbb{R}^{n\times p}$ data da

$$R_{XY}(t,s) \;=\; cov\left(X(t), Y(s)\right) \triangleq E\left[\left(X(t)-m_X(t)\right)\left(Y(s)-m_Y(s)\right)^T\right]\,.$$

I due processi stocastici si dicono *incorrelati* se $R_{XY}(t,s) = 0$ per ogni $(t,s)\in T^2$. Due processi stocastici indipendenti sono, a maggior ragione, incorrelati mentre il viceversa, in generale, non vale: due processi possono essere incorrelati senza essere indipendenti.

Dalle suddette definizioni, risulta immediato verificare le seguenti proprietà

$$\begin{aligned} R_X(t,s) &= R_X^T(s,t) && (1.2)\\ \Sigma_X(t) &= \Sigma_X^T(t) \geq 0 && (1.3)\\ R_{XY}(t,s) &= R_{YX}^T(s,t)\,. && (1.4) \end{aligned}$$

Si può dimostrare che la funzione di auto-covarianza di un processo stocastico scalare soddisfa la seguente proprietà di positività

$$|R_X(t,s)| \leq \sqrt{\Sigma_X(t)\Sigma_X(s)} \qquad \forall t,s\in T\,. \tag{1.5}$$

Infatti, definito il vettore aleatorio bi-dimensionale $Z = [X(t), X(s)]^T$ con matrice di covarianza

$$\begin{aligned}\Sigma_Z &= E\begin{bmatrix} (X(t)-m_X(t))^2 & (X(t)-m_X(t))(X(s)-m_X(s)) \\ (X(s)-m_X(s))(X(t)-m_X(t)) & (X(s)-m_X(s))^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} R_X(t,t) & R_X(t,s) \\ R_X(s,t) & R_X(s,s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_X(t) & R_X(t,s) \\ R_X(t,s) & \Sigma_X(s) \end{bmatrix} \geq 0,\end{aligned}$$

applicando il criterio di Sylvester alla matrice Σ_Z si deve avere, qualunque sia $(t,s) \in T^2$, $\Sigma_X(t)\Sigma_X(s) - R_X^2(t,s) \geq 0$ da cui $-\sqrt{\Sigma_X(t)\Sigma_X(s)} \leq R_X(t,s) \leq \sqrt{\Sigma_X(t)\Sigma_X(s)}$ che coincide con (1.5). In modo analogo, si verifica che la funzione di cross-covarianza di due processi stocastici scalari soddisfa la relazione

$$|R_{XY}(t,s)| \leq \sqrt{\Sigma_X(t)\Sigma_Y(s)} \qquad \forall t,s \in T\,. \tag{1.6}$$

Nel caso scalare, risulta conveniente definire la *funzione di auto-correlazione* $\varrho_X(\cdot,\cdot) : T^2 \to \mathbb{R}$ come

$$\varrho_X(t,s) = \frac{R_X(t,s)}{\sqrt{\Sigma_X(t)\Sigma_X(s)}}$$

e la *funzione di cross-correlazione* $\varrho_{X,Y}(\cdot,\cdot) : T^2 \to \mathbb{R}$ come

$$\varrho_{XY}(t,s) = \frac{R_{XY}(t,s)}{\sqrt{\Sigma_X(t)\Sigma_Y(s)}}$$

che, in virtù di (1.5), sono entrambe vincolate ad assumere valori nell'intervallo $[-1,1]$ con $\varrho_X(t,s) = 1$ quando $t = s$.

Per un processo stocastico stazionario, è immediato constatare quanto segue.

- La funzione di media non dipende dal tempo t, infatti $m_X(t) = \int x\, f_t(x)\, dx = \int x\, f(x)\, dx = m_X$ qualunque sia $t \in T$.
- La funzione di varianza non dipende dal tempo t, infatti $\Sigma_X(t) = \int (x - m_X)(x - m_X)^T f_t(x) dx = \int (x - m_X)(x - m_X)^T f(x) dx = \Sigma_X$ qualunque sia $t \in T$.
- La funzione di auto-covarianza $R_X(t,s)$ è funzione unicamente della distanza temporale $s - t$, infatti $R_X(t,s) = \int (x - m_X)(\xi - m_X)^T f_{t,s}(x,\xi)\, dx\, d\xi = \int (x - m_X)(\xi - m_X)^T f_{s-t}(x,\xi)\, dx\, d\xi = R_X(s-t)$ qualunque siano $t,s \in T$.

Riassumendo, un *processo stocastico stazionario* (p.s.s.) $X(t)$ è caratterizzato, per quanto riguarda i momenti del primo e secondo ordine, da funzioni di media m_X e di varianza Σ_X costanti nonché da una funzione di auto-covarianza $R_X(\cdot)$ dipendente da un unico argomento temporale $t \in T$ che rappresenta la distanza fra gli istanti temporali considerati. Si noti, in particolare, che $\Sigma_X = R_X(0) \geq 0$, ovvero la varianza coincide con il valore in

$t = 0$ della funzione di auto-covarianza. Da (1.2) è immediato constatare che la funzione di auto-covarianza di un processo stazionario soddisfa la seguente proprietà di simmetria

$$R_X(t) \;=\; R_X^T(-t) \tag{1.7}$$

dalle quale si deduce che, nel caso scalare ($n = 1$), $R_X(\cdot)$ è una funzione pari. Da (1.5) si può facilmente dedurre che la funzione di auto-covarianza di un p.s.s. scalare soddisfa la seguente proprietà di positività:

$$|R_X(t)| \leq R_X(0) = \Sigma_X \qquad \forall t \in T \tag{1.8}$$

ovvero la funzione di auto-covarianza ha sempre un picco in corrispondenza di $t = 0$. La corrispondente funzione di auto-correlazione $\varrho_X(t) \stackrel{\triangle}{=} R_X(t)/R_X(0)$ soddisfa dunque le proprietà che $\varrho_X(0) = 1$ e $\varrho_X(t) \in [-1, 1]$ per ogni $t \in T$.

Dati due processi stocastici $X(t)$ e $Y(t)$ congiuntamente stazionari, la loro funzione di cross-covarianza $R_{XY}(t, s) = R_{XY}(s - t)$ è funzione dell'unico argomento $s - t$ e, in virtù di (1.4), soddisfa la proprietà di simmetria

$$R_{XY}(t) \;=\; R_{YX}^T(-t) \tag{1.9}$$

e, nel caso scalare, la proprietà di positività

$$|R_{XY}(t)| \leq \sqrt{\Sigma_X \Sigma_Y} \qquad \forall t \in T \tag{1.10}$$

da cui la funzione di cross-correlazione $\varrho_{XY}(t) \stackrel{\triangle}{=} R_{XY}(t)/\sqrt{\Sigma_X \Sigma_Y}$ soddisfa $|\varrho_{XY}(t)| \leq 1$.

Stazionarietà in senso debole

Si noti che un processo stocastico può avere caratteristiche di stazionarietà per quanto riguarda le statistiche del primo e secondo ordine (i.e., funzione di media costante e funzione di auto-covarianza dipendente da un unico argomento temporale) senza che necessariamente queste caratteristiche si estendano ad ordini superiori al secondo. Poiché nei problemi di stima e di elaborazione dei segnali, ci si limita spesso a considerare esclusivamente statistiche del primo e del secondo ordine, risulta conveniente introdurre la seguente forma più debole di stazionarietà.

Definizione (Processo stocastico stazionario in senso debole) - Un processo stocastico $\{X(t)\}_{t \in T}$ dicesi *stazionario in senso debole* o anche *stazionario in senso lato* o anche *stazionario (fino) al secondo ordine*, se valgono le seguenti condizioni:

1. **Stazionarietà del primo ordine** : la funzione di media $m_X(t) = m_X$ è costante;

2. **Stazionarietà del secondo ordine** : la funzione di auto-covarianza $R_X(t, s) = R_X(s - t)$ è funzione di un unico argomento temporale.

Analisi in frequenza di processi stocastici stazionari

Dagli sviluppi precedenti è emerso che la statistica del secondo ordine di un processo stazionario in senso lato è completamente descritta, nel dominio del tempo, dalla funzione di auto-covarianza. In alternativa, come si vedrà di seguito, si può ricorrere ad una descrizione equivalente nel dominio della frequenza mediante lo *spettro* o la *densità spettrale di potenza*. Si procederà separatamente per i processi stocastici a tempo-discreto ed a tempo-continuo per i quali la definizione di spettro richiede due strumenti matematici diversi, la *trasformata zeta* o rispettivamente la *trasformata di Laplace*.

Caso tempo-discreto

Dato un processo stocastico stazionario in senso lato a tempo-discreto $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ se ne definisce lo *spettro complesso*, o semplicemente *spettro*, $\Phi_X(\cdot)$, mediante la *trasformata zeta bilatera* della *successione di auto-covarianza* $R_X(\cdot)$, i.e.

$$\begin{aligned} \Phi_X(z) = &= \mathcal{Z}\{R_X(t)\} \stackrel{\triangle}{=} \sum_{t\in\mathbb{Z}} R_X(t) z^{-t} = \sum_{t=-\infty}^{\infty} R_X(t) z^{-t} \\ &= R_X(0) + \sum_{t=1}^{\infty} \left[R_X(t) z^{-t} + R_X^T(t) z^{t} \right] \end{aligned} \tag{1.11}$$

se la serie in (1.11) converge per qualche valore di $z \in \mathbb{C}$. È immediato verificare che lo spettro soddisfa la seguente proprietà di simmetria

$$\Phi_X(z) \;=\; \Phi_X^T\left(z^{-1}\right) . \tag{1.12}$$

Nel caso particolare di processo scalare, si ha

$$\Phi_X(z) = R_X(0) + \sum_{t=1}^{\infty} R_X(t)\left(z^t + z^{-t}\right) \tag{1.13}$$

con proprietà di simmetria

$$\Phi_X(z) = \Phi_X\left(z^{-1}\right) . \tag{1.14}$$

Dati due p.s.s. congiuntamente stazionari $X(\cdot)$ e $Y(\cdot)$, se ne definisce lo *spettro incrociato* o *cross-spettro*

$$\Phi_{XY}(z) = \mathcal{Z}\{R_{XY}(t)\} = \sum_{t=-\infty}^{\infty} R_{XY}(t) z^{-t} \tag{1.15}$$

per cui vale la seguente proprietà di simmetria

$$\Phi_{XY}(z) \;=\; \Phi_{YX}^T\left(z^{-1}\right) \tag{1.16}$$

che, nel caso di processi scalari, si riduce più semplicemente a

$$\Phi_{XY}(z) \;=\; \Phi_{YX}\left(z^{-1}\right). \tag{1.17}$$

Per l'analisi in frequenza, risulta conveniente associare al processo stocastico stazionario in senso lato $X(\cdot)$ la sua *densità spettrale di potenza* o semplicemente *densità spettrale* definita come segue

$$\begin{aligned}\varphi_X(\omega) \;&=\; \mathcal{F}\left\{R_X(t)\right\} \stackrel{\triangle}{=} \sum_{t\in\mathbb{Z}} R_X(t)e^{-j\omega t} = \Phi_X(z)\big|_{z=e^{j\omega}} \\ &=\; R_X(0) + \sum_{t=1}^{\infty}\left[R_X(t)e^{-j\omega t} + R_X^T(t)e^{j\omega t}\right]\,.\end{aligned} \tag{1.18}$$

Si noti che la densità spettrale definita in (1.18) non è altro che la *trasformata di Fourier bilatera discreta* della successione di auto-covarianza $R_X(\cdot)$ o, equivalentemente, coincide con lo spettro $\Phi_X(z)$ valutato sul cerchio unitario ($z = e^{j\omega}$). Poiché $e^{j(\omega+2k\pi)} = e^{j\omega}e^{j2k\pi} = e^{j\omega}$ qualunque sia l'intero k, da (1.18) si deduce che la densità spettrale di un segnale aleatorio a tempo-discreto è periodica di periodo 2π, ovvero

$$\varphi_X(\omega) = \varphi_X(\omega + 2k\pi), \qquad \forall k \in \mathbb{Z}\,. \tag{1.19}$$

In virtù della proprietà di periodicità (1.19), è sufficiente considerare la densità spettrale di un segnale tempo-discreto per valori $\omega \in (-\pi, \pi]$. Si fa presente che, per segnali a tempo-discreto, la variabile reale ω rappresenta la pulsazione discreta o normalizzata (misurata in radianti). Nel caso in cui il segnale a tempo-discreto sia stato ottenuto da un segnale a tempo-continuo mediante campionamento regolare con intervallo di campionamento $T_s > 0$, la pulsazione effettiva ω_e (misurata in rad/s) è legata a quella normalizzata dalla relazione $\omega = \omega_e T_s$, per cui $\omega = \pi$ corrisponde alla pulsazione effettiva $\omega_e = \frac{\pi}{T_s}$ $[rad/s]$ coincidente con la pulsazione di Nyquist $\omega_N = \omega_s/2$, dove $\omega_s = 2\pi/T_s$ è la pulsazione di campionamento.

Dalla teoria della trasformata di Fourier risulta la seguente relazione fondamentale, nota come *identità di Parseval*:

$$R_X(0) = \Sigma_X \stackrel{\triangle}{=} E\left[\widetilde{X}(t)\widetilde{X}^T(t)\right] \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_X(\omega)\, d\omega \tag{1.20}$$

dove $\widetilde{X}(t) \stackrel{\triangle}{=} X(t) - m_X$. L'espressione (1.20) sancisce che la potenza media del segnale, i.e. $E\left[\widetilde{X}(t)\widetilde{X}^T(t)\right]$, è ottenuta integrando la densità spettrale su tutta la gamma delle pulsazioni $[-\pi, \pi]$, e pertanto giustifica il termine *densità spettrale di potenza* attribuito alla funzione $\varphi_X(\omega)$. Poiché la potenza media (media del quadrato del segnale) è una quantità positiva, la densità spettrale deve anche soddisfare la seguente proprietà di *non-negatività*

$$\varphi_X(\omega) \geq 0, \qquad \forall\omega. \tag{1.21}$$

Una giustificazione intuitiva di (1.21) può essere ottenuta con le argomentazioni che seguono. Fissata una arbitraria pulsazione ω_0, si consideri un filtro ideale passa-banda a banda molto stretta $[\omega_0-\varepsilon,\omega_0+\varepsilon]$ centrata su ω_0. Applicando tale filtro al segnale $X(t)$, il segnale $Y(t)$ in uscita avrà densità spettrale

$$\varphi_Y(\omega)=\begin{cases}\varphi_X(\omega), & \omega\in[\omega_0-\varepsilon,\omega_0+\varepsilon]\\ 0, & \omega\notin[\omega_0-\varepsilon,\omega_0+\varepsilon]\,.\end{cases}$$

Applicando l'identità di Parseval al segnale $Y(t)$ ed assumendo $\varepsilon>0$ sufficientemente piccolo da poter ipotizzare $\varphi_X(\omega)\cong\varphi_X(\omega_0),\forall\omega\in[\omega_0-\varepsilon,\omega_0+\varepsilon]$, si ha

$$\begin{aligned}R_Y(0) &\stackrel{\triangle}{=} E\left[\widetilde{Y}(t)\widetilde{Y}^T(t)\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_Y(\omega)d\omega\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_0-\varepsilon}^{\omega_0+\varepsilon}\varphi_X(\omega)d\omega\cong\frac{\varepsilon\varphi_X(\omega_0)}{\pi}\geq 0\Rightarrow\varphi_X(\omega_0)\geq 0,\ \forall\omega_0\,.\end{aligned}$$

Si nota da (1.18) che la densità spettrale soddisfa la seguente proprietà di simmetria:

$$\varphi_X(\omega) = \varphi_X^T(-\omega). \tag{1.22}$$

Si noti anche che, nel caso scalare, (1.18) si riduce a

$$\varphi_X(\omega)=R_X(0)+2\sum_{t=1}^{\infty}R_X(t)\ cos\,\omega t \tag{1.23}$$

con proprietà di simmetria

$$\varphi_X(\omega) = \varphi_X(-\omega). \tag{1.24}$$

Pertanto, nel caso scalare la densità spettrale è una funzione pari della pulsazione ω. Per due processi stocastici congiuntamente stazionari $X(\cdot)$ e $Y(\cdot)$ si definisce la loro densità spettrale incrociata

$$\varphi_{XY}(\omega)\stackrel{\triangle}{=}\mathcal{F}\left\{R_{XY}(t)\right\}=\sum_{t=-\infty}^{\infty}R_X(t)e^{-j\omega t}=\left.\Phi_{XY}(z)\right|_{z=e^{j\omega}}$$

che soddisfa la proprietà di simmetria

$$\varphi_{XY}(\omega) = \varphi_{YX}^T(-\omega). \tag{1.25}$$

Per due processi stocastici incorrelati, risulta ovviamente che $\Phi_{XY}(z)\equiv 0$ e $\varphi_{XY}(\omega)\equiv 0$.

Caso tempo-continuo

Per definire lo spettro di un segnale casuale stazionario a tempo-continuo si usa, viceversa, la *trasformata di Laplace bilatera* della funzione di auto-covarianza $R_X(\cdot)$, i.e.

$$\begin{aligned} \Phi_X(s) &= \mathcal{L}\{R_X(t)\} \triangleq \int_{\mathbb{R}} R_X(t)e^{-st}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(t)e^{-st}\,dt \\ &= \int_0^{\infty} \left[R_X(t)e^{-st} + R_X^T(t)e^{st}\right]\,dt\,. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Anche in questo caso, lo spettro (1.26) risulta ben definito se l'integrale improprio converge per qualche valore di $s \in \mathbb{C}$. Conseguentemente, si ha la seguente definizione di *densità spettrale*

$$\begin{aligned} \varphi_X(\omega) &= \mathcal{F}\{R_X(t)\} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} R_X(t)e^{-j\omega t}\,dt = \Phi_X(s)|_{s=j\omega} \\ &= \int_0^{\infty} \left[R_X(t)e^{-j\omega t} + R_X^T(t)e^{j\omega t}\right]\,dt \end{aligned} \tag{1.27}$$

dove la stessa notazione $\mathcal{F}(\cdot)$, precedentemente usata a indicare la trasformata di Fourier discreta, indica adesso la *trasformata di Fourier continua o integrale*. Inoltre, se $X(\cdot)$ e $Y(\cdot)$ sono segnali casuali congiuntamente stazionari, se ne definiscono lo spettro e, rispettivamente, la densità spettrale incrociati come:

$$\Phi_{XY}(s) = \mathcal{L}\{R_{XY}(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(t)e^{-st}\,dt \tag{1.28}$$

$$\varphi_{XY}(\omega) = \mathcal{F}\{R_{XY}(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(t)e^{-j\omega t}\,dt = \Phi_{XY}(s)|_{s=j\omega}\,. \tag{1.29}$$

Analogamente al caso tempo-discreto, è possibile verificare le seguenti proprietà degli spettri/densità spettrali a tempo-continuo:

$$\Phi_X(s) = \Phi_X^T(-s) \tag{1.30}$$

$$\Phi_{XY}(s) = \Phi_{YX}^T(-s) \tag{1.31}$$

$$\varphi_X(\omega) \geq 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \tag{1.32}$$

$$\varphi_X(\omega) = \varphi_X^T(-\omega) \tag{1.33}$$

$$\varphi_{XY}(\omega) = \varphi_{YX}^T(-\omega)\,. \tag{1.34}$$

Si noti come nel caso tempo-continuo, diversamente da quello tempo-discreto, la densità spettrale non è più periodica. Nel caso particolare di processi scalari, si ha

$$\Phi_X(s) = \Phi_X(-s) = \int_0^{\infty} R_X(t) \left(e^{st} + e^{-st}\right) \, dt \tag{1.35}$$

$$\Phi_{XY}(s) = \Phi_{YX}(-s) \tag{1.36}$$

$$\varphi_X(\omega) = \varphi_X(-\omega) = 2 \int_0^{\infty} R_X(t) \, cos \, \omega t \, dt \tag{1.37}$$

$$\varphi_{XY}(\omega) = \varphi_{YX}(-\omega) \, . \tag{1.38}$$

Alcuni processi stocastici

Rumore bianco

Un *rumore bianco* $\{X(t)\}_{t \in T}$ è un processo stocastico con funzione di auto-covarianza impulsiva, i.e.

$$R_X(t,s) = \Sigma_X(t) \, \delta(t-s) \tag{1.39}$$

dove nel caso tempo-continuo $\delta(\cdot)$ è la *delta di Dirac* definita tramite

$$\begin{cases} \delta(t) = 0, \ \forall t \neq 0 \\ \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} f(t) \, \delta(t) \, dt = f(0) & \text{per ogni funzione } f(\cdot) \text{ continua in } t = 0 \text{ e} \\ & \text{per ogni intervallo } [t_1, t_2] \text{ contenente } t = 0 \end{cases}$$

mentre nel caso tempo-discreto $\delta(\cdot)$ è la *delta di Kronecker* definita da

$$\delta(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \, . \end{cases}$$

Nel caso in cui la funzione di varianza $\Sigma_X(t)$ non dipenda dal tempo t, si ha un *rumore bianco stazionario* con funzione di auto-covarianza

$$R_X(t) = \Sigma_X \, \delta(t) \, . \tag{1.40}$$

Il corrispondente spettro, nel caso tempo-discreto, è dato da

$$\Phi_X(z) = R_X(0) = \Sigma_X, \qquad \forall z \in \mathbb{C} \tag{1.41}$$

e la densità spettrale da

$$\varphi_X(\omega) = R_X(0) = \Sigma_X, \qquad \forall \omega \in [-\pi, \pi] \, . \tag{1.42}$$

Per un rumore bianco stazionario a tempo-continuo, in modo analogo, si ha

$$\Phi_X(s) = \varphi_X(\omega) = R_X(0) = \Sigma_X, \qquad \forall s \in \mathbb{C}, \forall \omega \in (-\infty, \infty) \; . \tag{1.43}$$

Pertanto il rumore bianco ha una auto-covarianza impulsiva (cioè risulta incorrelato per ogni coppia di istanti distinti) alla quale corrisponde, nel caso stazionario, una densità spettrale uniforme (piatta) su tutta la gamma delle frequenze. È proprio da quest'ultima caratteristica di densità spettrale costante su tutto lo spettro di frequenza che deriva l'aggettivo *bianco* per analogia con la radiazione elettromagnetica a densità spettrale costante nello spettro della luce visibile che apparirebbe all'occhio umano come luce bianca. Si noti che, in modo particolare nel caso a tempo-continuo, l'assunzione che un segnale sia scorrelato anche ad istanti temporali molto prossimi o, equivalentemente, nel dominio della frequenza che abbia una banda infinita, risulta piuttosto irrealistica. Ciononostante, il rumore bianco viene frequentemente impiegato nelle applicazioni ingegneristiche per modellare segnali con finestre di auto-correlazione molto strette o, equivalentemente, a banda molto larga quali il rumore termico negli apparati elettronici, o più in generale il rumore di misura che caratterizza l'osservazione di variabili d'interesse. Un ulteriore elemento a supporto dell'importanza pratica del rumore bianco è il seguente risultato che verrà dimostrato in seguito: elaborando un segnale di rumore bianco con un opportuno filtro lineare tempo-invariante (digitale o analogico) si può ottenere in uscita dal filtro un segnale stazionario con densità spettrale (funzione di auto-covarianza) pressoché arbitraria.

Nel seguito si userà la notazione $X(t) = wn\,(m_X(t), \Sigma_X(t))$ a indicare che il processo stocastico $X(t)$ è un rumore bianco con funzione di media $m_X(\cdot)$ e funzione di varianza $\Sigma_X(\cdot)$; se, in particolare, tali funzioni risultano costanti rispetto al tempo t si parla di rumore bianco stazionario indicato più semplicemente come $X = swn\,(m_X, \Sigma_X)$.

Rumore esponenzialmente correlato

L'ipotesi di bianchezza (soprattutto per segnali analogici e/o campionati a frequenze elevate) risulta poco realistica in molti casi pratici. Una situazione più realistica è certamente quella in cui la funzione di auto-covarianza $R_X(t,s)$ del segnale decresce esponenzialmente a zero quando la distanza temporale tende all'infinito, i.e. $|t-s| \to \infty$. Un processo stocastico con questa caratteristica prende il nome di *rumore esponenzialmente correlato* ed è caratterizzato da una funzione di auto-covarianza della forma

$$R_X(t,s) = \begin{cases} \varrho^{|s-t|}\,\Sigma_X(t), & \varrho \in (-1,1) \quad \text{nel caso tempo-discreto} \\ e^{-\frac{|s-t|}{\tau}}\,\Sigma_X(t), & \tau > 0 \qquad\quad\;\; \text{nel caso tempo-continuo}\,. \end{cases} \tag{1.44}$$

Nel caso particolare di funzione di varianza $\Sigma_X(t) = \Sigma_X = R_X(0)$ non dipendente dal tempo t, si ha un *rumore esponenzialmente correlato stazionario* con funzione di auto-covarianza

$$R_X(t) = \begin{cases} \varrho^{|t|}\, R_X(0), & \varrho \in (-1,1) \quad \text{nel caso tempo-discreto} \\ e^{-\frac{|t|}{\tau}}\, R_X(0), & \tau > 0 \quad\quad\quad \text{nel caso tempo-continuo}\,. \end{cases} \tag{1.45}$$

Di seguito, si procede al calcolo dello spettro e della densità spettrale del rumore esponenzialmente correlato stazionario nei casi tempo-discreto e tempo-continuo.

Caso tempo-discreto

Dalla definizione di spettro a tempo-discreto

$$\begin{aligned} \Phi_X(z) &= \sum_{t=-\infty}^{\infty} R_X(t) z^{-t} = R_X(0) \sum_{t=-\infty}^{\infty} \varrho^{|t|} z^{-t} = R_X(0) \left[1 + \sum_{t=1}^{\infty} \varrho^t z^{-t} + \sum_{t=-\infty}^{-1} \varrho^{-t} z^{-t} \right] \\ &= R_X(0) \left[1 + \underbrace{\sum_{t=1}^{\infty} \left(\varrho z^{-1}\right)^t}_{S_1} + \underbrace{\sum_{t=1}^{\infty} \left(\varrho z\right)^t}_{S_2} \right]. \end{aligned} \tag{1.46}$$

Si ricorda che la serie geometrica $\sum_{t=1}^{\infty} x^t$ converge al valore $(1-x)^{-1} - 1 = x(1-x)^{-1}$ se e solo se $|x| < 1$. Pertanto:

- la serie S_1 converge se e solo se $|\varrho z^{-1}| < 1$ ovvero per $|z| > |\varrho|$;
- la serie S_2 converge se e solo se $|\varrho z| < 1$ ovvero per $|z| < \dfrac{1}{|\varrho|}$.

Quindi, per valori di z nella corona circolare del piano complesso $|\varrho| < |z| < |\varrho|^{-1}$, entrambe le serie geometriche S_1 e S_2 in (1.46) risultano convergenti da cui si evince l'esistenza dello spettro del rumore esponenzialmente correlato stazionario dato da

$$\Phi_X(z) = \left[1 + \frac{\varrho z^{-1}}{1 - \varrho z^{-1}} + \frac{\varrho z}{1 - \varrho z} \right] R_X(0) = \frac{1 - \varrho^2}{\left(1 - \varrho z^{-1}\right)\left(1 - \varrho z\right)}\, R_X(0) \tag{1.47}$$

da cui, a sua volta, si deduce la corrispondente densità spettrale

$$\varphi_X(\omega) = \Phi_X\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1 - \varrho^2}{\left(1 - \varrho e^{-j\omega}\right)\left(1 - \varrho e^{j\omega}\right)}\, R_X(0) = \frac{1 - \varrho^2}{1 + \varrho^2 - 2\varrho \cos\omega}\, R_X(0)\,. \tag{1.48}$$

Si noti che

$$\frac{d\varphi_X}{d\omega}(\omega) = \frac{-2\varrho(1-\varrho^2) R_X(0)\, sin\,\omega}{(1 + \varrho^2 - 2\varrho\, cos\,\omega)^2} \begin{cases} < 0 \;\; \forall\omega, & \text{se } \varrho \in (0,1) \\ > 0 \;\; \forall\omega, & \text{se } \varrho \in (-1,0)\,. \end{cases}$$

Quindi, la densità spettrale ha un andamento monotòno decrescente corrispondente ad una maggiore densità di potenza alle basse frequenze per $0 < \varrho < 1$ e, viceversa, un andamento monotòno crescente corrispondente ad una maggiore densità di potenza alle alte frequenze per $-1 < \varrho < 0$. Si ricorda che valori di ϱ per cui $|\varrho| \geq 1$ sono esclusi dalla condizione che la funzione di auto-covarianza $R_X(t)$ svanisca asintoticamente, i.e. $\lim_{t\to\infty} R_X(t) = 0$.

Nel seguito si userà la notazione $X(t) = ecn\,(\varrho, m_X(t), \Sigma_X(t))$ per riferirsi ad un rumore esponenzialmente correlato $X(t)$ a tempo-discreto con coefficiente di correlazione esponenziale $\varrho \in (-1, 1)$, funzione di media $m_X(t)$ e funzione di varianza $\Sigma_X(t)$. Nel caso stazionario si adotterà più semplicemente la notazione $X = ecn\,(\varrho, m_X, \Sigma_X)$.

Caso tempo-continuo

Dalla definizione di spettro a tempo-continuo

$$\begin{aligned}
\Phi_X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_X(t)e^{-st}dt = \\
&= R_X(0)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|/\tau}e^{-st}dt \\
&= R_X(0)\left[\int_0^{\infty} e^{-t/\tau}e^{-st}dt + \int_{-\infty}^{0} e^{t/\tau}e^{-st}dt\right] \\
&= R_X(0)\left[\int_0^{\infty} e^{-t/\tau}e^{-st}dt \;+\; \int_0^{\infty} e^{-t/\tau}e^{st}dt\right] \\
&= R_X(0)\left[\underbrace{\int_0^{\infty} e^{\left(-s-\frac{1}{\tau}\right)t}dt}_{I_1} \;+\; \underbrace{\int_0^{\infty} e^{\left(s-\frac{1}{\tau}\right)t}dt}_{I_2}\right].
\end{aligned} \tag{1.49}$$

Si ricorda che l'integrale improprio $\int_0^{\infty} e^{at}dt$ converge al valore $-a^{-1}$ se e solo se $Re(a) < 0$. Pertanto:

- l'integrale improprio I_1 converge se e solo se $Re\left(-s - \frac{1}{\tau}\right) < 0$ ovvero per $Re(s) > -\frac{1}{\tau}$;
- l'integrale improprio I_2 converge se e solo se $Re\left(s - \frac{1}{\tau}\right) < 0$ ovvero per $Re(s) < \frac{1}{\tau}$.

Quindi, per valori di s nella striscia verticale del piano complesso $-\frac{1}{\tau} < Re(s) < \frac{1}{\tau}$, entrambi gli integrali impropri I_1 e I_2 in (1.49) risultano convergenti da cui si evince l'esistenza dello spettro del rumore esponenzialmente correlato stazionario a tempo-continuo dato da

$$\Phi_X(s) = \left[\frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} + \frac{1}{-s + \frac{1}{\tau}}\right] R_X(0) = \frac{2\,\tau\, R_X(0)}{(1 + \tau s)(1 - \tau s)} \tag{1.50}$$

da cui, a sua volta, si deduce la corrispondente densità spettrale

$$\varphi_X(\omega) = \Phi_X\left(j\omega\right) = \frac{2\,\tau\, R_X(0)}{\left(1 + j\omega\tau\right)\left(1 - j\omega\tau\right)} = \frac{2\,\tau\, R_X(0)}{1+\tau^2\omega^2}\,. \tag{1.51}$$

Quest'ultima presenta, qualunque sia la costante di tempo $\tau > 0$, un andamento monotòno decrescente a zero, a indicare una maggiore densità di potenza alle basse frequenze.

Nel seguito si userà la notazione $X(t) = ecn\left(\tau, m_X(t), \Sigma_X(t)\right)$ per riferirsi ad un rumore esponenzialmente correlato $X(t)$ a tempo-continuo con costante di tempo $\tau > 0$, funzione di media $m_X(t)$ e funzione di varianza $\Sigma_X(t)$. Nel caso stazionario si adotterà più semplicemente la notazione $X = ecn\left(\tau, m_X, \Sigma_X\right)$.

Sinusoide con fase aleatoria

Si consideri il segnale

$$X(t) \;=\; A\,\sin\left(\omega_0 t + \phi\right), \qquad \phi = \mathcal{U}\left([0, 2\pi]\right) \tag{1.52}$$

con andamento sinusoidale di ampiezza $A > 0$ e pulsazione $\omega_0 > 0$ fissate, e fase aleatoria ϕ distribuita uniformemente nell'intervallo $[0, 2\pi]$. In virtù dell'aleatorietà della fase ϕ, il segnale (1.52) risulta un processo stocastico di cui, nel seguito, si procede a calcolare i momenti del primo (funzione di media) e secondo (funzione di auto-covarianza) ordine. In primo luogo, si osserva che $\phi \sim f_\phi(\cdot)$ con PDF

$$f_\phi(\varphi) \;=\; \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}, & \varphi \in [0, 2\pi] \\ 0, & \varphi \notin [0, 2\pi]\,. \end{cases} \tag{1.53}$$

Pertanto la funzione di media è data da

$$\begin{aligned} m_X(t) \;&=\; E\left[X(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} X(t)\; f_\phi(\varphi)\, d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} A\, sin\left(\omega_0 t + \varphi\right)\, d\varphi \\ &=\; -\frac{A}{2\pi}\, cos\left(\omega_0 t + \varphi\right)\Big|_0^{2\pi} \;=\; 0\,. \end{aligned} \tag{1.54}$$

Quindi il segnale (1.52) risulta stazionario in media con media nulla. Per quanto riguarda la funzione di auto-covarianza, si ha

$$\begin{aligned} R_X(t,s) \;&=\; E\left[X(t)X(s)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} X(t)X(s) f_\phi(\varphi)\, d\varphi \\ &=\; \frac{A^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin\left(\omega_0 t + \varphi\right))\; sin\left(\omega_0 s + \varphi\right)\, d\varphi\,. \end{aligned} \tag{1.55}$$

Utilizzando la formula trigonometrica $sin(a)\, sin(b) = \frac{1}{2}\, cos(a-b) - \frac{1}{2}\, cos(a+b)$ in (1.55), si ha

$$\begin{aligned} R_X(t,s) &= \frac{A^2}{4\pi}\left[\int_0^{2\pi} cos\left(\omega_0(t-s)\right)\, d\varphi - \int_0^{2\pi} cos\left(\omega_0(t+s)+2\varphi\right)\, d\varphi\right] \\ &= \frac{A^2}{2}\, cos\left(\omega_0(t-s)\right) \end{aligned} \tag{1.56}$$

poiché il secondo integrale in (1.56) risulta nullo. Quindi il segnale (1.52) risulta stazionario anche in auto-covarianza e, quindi, stazionario in senso lato (al secondo ordine) con media nulla e funzione di auto-covarianza

$$R_X(t) = \frac{A^2}{2}\, cos\left(\omega_0 t\right) \tag{1.57}$$

nonché funzione di auto-correlazione

$$\varrho_X(t) \triangleq \frac{R_X(t)}{R_X(0)} = cos\left(\omega_0 t\right). \tag{1.58}$$

Per determinare lo spettro, nel caso tempo-discreto, si usa la definizione

$$\begin{aligned} \Phi_X(z) &= \mathcal{Z}\left\{R_X(t)\right\} = \frac{A^2}{2}\sum_{t=-\infty}^{\infty} cos\left(\omega_0 t\right) z^{-t} \\ &= \frac{A^2}{2}\left[1 + \underbrace{\sum_{t=1}^{\infty} cos\left(\omega_0 t\right) z^{-t}}_{S_1} + \underbrace{\sum_{t=1}^{\infty} cos\left(\omega_0 t\right) z^{t}}_{S_2}\right]. \end{aligned}$$

Si noti che la serie S_1 è convergente se e solo se $|z| > 1$ mentre la serie S_2 è convergente se e solo se $|z| < 1$. Quindi non esistono valori di z che garantiscono la convergenza di entrambe le serie e, di conseguenza, lo spettro del segnale (1.52) non risulta definito. Ciononostante, si può provare a determinare la densità spettrale direttamente dalla sua definizione mediante trasformata di Fourier discreta. Si ha

$$\begin{aligned} \varphi_X(\omega) &= \mathcal{F}\left\{R_X(t)\right\} = \frac{A^2}{2}\sum_{t\in\mathcal{Z}} cos\left(\omega_0 t\right) e^{-j\omega t} \\ &= \frac{A^2}{4}\left[\sum_{t\in\mathcal{Z}} e^{-j(\omega-\omega_0)t} + \sum_{t\in\mathcal{Z}} e^{-j(\omega+\omega_0)t}\right] \\ &= \frac{A^2}{4}\,\delta\left(\omega-\omega_0\right) + \frac{A^2}{4}\,\delta\left(\omega+\omega_0\right). \end{aligned} \tag{1.59}$$

Quindi, la densità spettrale del segnale (1.52) risulta ben definita ed è costituita da due impulsi (delta di Dirac) centrati sui valori di pulsazione $\omega = \omega_0$ e, per simmetria, $\omega = -\omega_0$, fra i quali si ripartisce la potenza totale $A^2/2$ del segnale in due parti uguali. Si dice anche che il segnale sinusoidale (1.52) ha uno *spettro a righe* (per la precisione due righe). Generalizzando in modo ovvio questo risultato, il segnale *multi-sinusoidale*

$$\begin{aligned} X(t) &= A_0 \, sin \, \phi_0 + \sum_{i=1}^{N} A_i \, sin \, (\omega_i t + \phi_i) \qquad 0 < \omega_1 < \cdots < \omega_N \\ \phi_i &= \mathcal{U}\,([0, 2\pi]) \qquad\qquad i = 0, 1, \ldots, N \\ & \phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_N \ \text{ indipendenti} \end{aligned} \tag{1.60}$$

ha densità spettrale

$$\varphi_X(\omega) \;=\; \frac{A_0^2}{2}\,\delta(\omega) + \sum_{i=1}^{N} \frac{A_i^2}{4}\,\left[\delta\,(\omega - \omega_i) \,+\, \delta\,(\omega + \omega_i)\right] \tag{1.61}$$

avente $2N + 1$ righe centrate in $0, \pm\omega_1, \ldots, \pm\omega_N$.

Il teorema del campionamento

Solitamente, i segnali a tempo-discreto sono ottenuti da segnali originariamente a tempo-continuo mediante campionamento. A tale proposito, è opportuno richiamare il ben noto teorema del campionamento in riferimento a segnali stocastici stazionari.

Si consideri un processo stocastico stazionario a tempo continuo $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ con densità spettrale $\varphi(\omega)$. Fissato un intervallo di campionamento $T_s > 0$, si consideri inoltre il segnale $X_s(t)$ ottenuto da $X(t)$ mediante un campionamento regolare ideale, i.e.

$$X_s(t) \;=\; \sum_{k\in\mathbb{Z}} X(kT_s)\,\delta\,(t - kT_s)\ . \tag{1.62}$$

Inoltre si definisce la banda del segnale $X(t)$ come il più piccolo valore di pulsazione ω_B per cui $\varphi(\omega) = 0$ per ogni $\omega > \omega_B$. Allora vale il seguente risultato.

Teorema del campionamento (Shannon, Nyquist, Kotelnikov, Whittaker et al.) - Il segnale campionato (1.62) ha densità spettrale

$$\varphi_s(\omega) \;=\; \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi\,(\omega - k\omega_s) \tag{1.63}$$

dove $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$ è la pulsazione di campionamento. Inoltre, il segnale originario $X(t)$ può essere ricostruito esattamente dai suoi campioni $X_k = X(kT_s)$ se il campionamento è sufficientemente rapido nel senso che

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} > 2\omega_B \quad\Longleftrightarrow\quad \omega_N = \frac{\omega_s}{2} = \frac{\pi}{T_s} > \omega_B\,. \tag{1.64}$$

Si noti che (1.64) esprime il fatto che lo spettro del segnale campionato è la sovrapposizione di infinite repliche (alias) dello spettro del segnale a tempo-continuo originario traslate di multipli interi della pulsazione di campionamento. La condizione di ricostruzione esatta del segnale originario richiede quindi che tali repliche non si sovrappongano permettendo quindi l'estrazione del segnale originario $X(t)$ dal segnale campionato $X_s(t)$ mediante filtraggio passa-basso ideale nella banda base $[-\omega_s/2, \omega_s/2]$.