Integrazione multipla in $\mathbb{R}^3$ (Integrali tripli) -parte 1-

Luca Bisconti

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Disclaimer

Firenze, 14/04/2020

Integrali Tripli

Una partizione di un parallelepipedo $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \subseteq \mathbb{R}^3$ è una terna $\underline{P = (P_1, P_2, P_3)}$ di partizioni: P_1 per $[a_1, b_1]$, P_2 per $[a_2, b_2]$ e P_3 per $[a_3, b_3]$ rispettivamente.

Integrali Tripli

Una partizione di un parallelepipedo $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \subseteq \mathbb{R}^3$ è una terna $P = (P_1, P_2, P_3)$ di partizioni: P_1 per $[a_1, b_1]$, P_2 per $[a_2, b_2]$ e P_3 per $[a_3, b_3]$ rispettivamente. Date tre partizioni $P_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_{n_1}\}$ di $[a_1, b_1]$, $P_2 = \{y_0, y_1, \dots, y_{n_2}\}$ e $P_3 = \{z_0, z_1, \dots, z_{n_3}\}$ relative a $[a_3, b_3]$ allora il parallelepipedo Q viene suddiviso in numero $n_1 n_2 n_3$ di sotto parallelepipedi:

$$\boxed{Q_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]}$$

di volume $V(Q_{ijk}) = (\Delta x)_i (\Delta y)_j (\Delta z)_k = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1})$.

Integrali Tripli

Una partizione di un parallelepipedo $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \subseteq \mathbb{R}^3$ è una terna $P = (P_1, P_2, P_3)$ di partizioni: P_1 per $[a_1, b_1]$, P_2 per $[a_2, b_2]$ e P_3 per $[a_3, b_3]$ rispettivamente. Date tre partizioni $P_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_{n_1}\}$ di $[a_1, b_1]$, $P_2 = \{y_0, y_1, \dots, y_{n_2}\}$ e $P_3 = \{z_0, z_1, \dots, z_{n_3}\}$ relativa a $[a_3, b_3]$ allora il parallelepipedo Q viene suddiviso in numero $n_1 n_2 n_3$ di sottoparallelepipedi:

$$Q_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$$

di volume $V(Q_{ijk}) = (\Delta x)_i (\Delta y)_j (\Delta z)_k = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1})$. In ogni parallelepipedo Q_{ijk} scegliamo un punto $(\xi_{ijk}, \eta_{ijk}, \tau_{ijk})$ e l'insieme S di tali punti si chiama "scelta di punti" nella partizione $P = (P_1, P_2, P_3)$ di Q. Le coppie $\boxed{(Q_{ijk}, (\xi_{ijk}, \eta_{ijk}, \tau_{ijk}))}$ si chiama parallelepipedo puntato. La coppia $\pi = (P, S)$ si chiama partizione puntata di Q.

Integrali Tripli

Una partizione di un parallelepipedo $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \subseteq \mathbb{R}^3$ è una terna $P = (P_1, P_2, P_3)$ di partizioni: P_1 per $[a_1, b_1]$, P_2 per $[a_2, b_2]$ e P_3 per $[a_3, b_3]$ rispettivamente. Date tre partizioni $P_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_{n_1}\}$ di $[a_1, b_1]$, $P_2 = \{y_0, y_1, \dots y_{n_2}\}$ e $P_3 = \{z_0, z_1, \dots, z_{n_3}\}$ relativa a $[a_3, b_3]$ allora il parallelepipedo Q viene suddiviso in numero $n_1 n_2 n_3$ di sottoparallelepipedi:

$$Q_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$$

di volume $V(Q_{ijk}) = (\Delta x)_i (\Delta y)_j (\Delta z)_k = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1})$. In ogni parallelepipedo Q_{ijk} scegliamo un punto $(\xi_{ijk}, \eta_{ijk}, \tau_{ijk})$ e l'insieme S di tali punti si chiama "scelta di punti" nella partizione $P = (P_1, P_2, P_3)$ di Q. Le coppie $(Q_{ijk}, (\xi_{ijk}, \eta_{ijk}, \tau_{ijk}))$ si chiama parallelepipedo puntato. La coppia $\alpha = (P, S)$ si chiama partizione puntata di Q.

- Il parametro di finezza $|\alpha|$, relativo a $\alpha = (P, S)$, è la massima ampiezza dei lati di tutti i possibili sottoparallelepipedi individuati dalla partizione P.

Integrali Tripli

Una partizione di un parallelepipedo $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \subseteq \mathbb{R}^3$ è una terna $P = (P_1, P_2, P_3)$ di partizioni: P_1 per $[a_1, b_1]$, P_2 per $[a_2, b_2]$ e P_3 per $[a_3, b_3]$ rispettivamente. Date tre partizioni $P_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_{n_1}\}$ di $[a_1, b_1]$, $P_2 = \{y_0, y_1, \dots y_{n_2}\}$ e $P_3 = \{z_0, z_1, \dots, z_{n_3}\}$ relativa a $[a_3, b_3]$ allora il parallelepipedo Q viene suddiviso in numero $m_1 m_2 m_3$ di sotto parallelepipedi:

$$Q_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$$

di volume $V(Q_{ijk}) = (\Delta x)_i (\Delta y)_j (\Delta z)_k = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1})$. In ogni parallelepipedo Q_{ijk} scegliamo un punto $(\xi_{ijk}, \eta_{ijk}, \sigma_{ijk})$ e l'insieme S di tali punti si chiama "scelta di punti" nella partizione $P = (P_1, P_2, P_3)$ di Q. Le coppie $(Q_{ijk}, (\xi_{ijk}, \eta_{ijk}, \sigma_{ijk}))$ si chiama parallelepipedo puntato. La coppia $\alpha = (P, S)$ si chiama partizione puntata di Q.

- Il parametro di finezza $|\alpha|$, relativo a $\alpha = (P, S)$, è la massima ampiezza dei lati di tutti i possibili sottoparallelepipedi individuati dalla partizione P.
- Sia $f : Q \to \mathbb{R}$ una funzione definita in Q. Ad ogni partizione puntata $\alpha = (P, S)$ possiamo associare il numero:

$$\boxed{\Sigma(\alpha) = \sum_{(i,j,k) \in K} f(\xi_{ijk}, \eta_{ijk}, \sigma_{ijk}) (\Delta x)_i (\Delta y)_j (\Delta z)_k \quad \text{dove } K = \{(i,j,k) \in \mathbb{N}^3 : 1 \le i \le m_1,\ 1 \le j \le m_2,\ 1 \le k \le m_3\}.} \qquad \textbf{(I)}$$

- L'integrale triplo della funzione f su Q è dato, quando esiste, dal valore limite che si ottiene facendo tendere a zero i lati dei sottoparallelepipedi individuati dalle possibili partizioni puntate $\alpha = (P, S)$ di Q.

- L'integrale triplo della funzione f su Q è dato, quando esiste, dal valore limite che si ottiene facendo tendere a zero i lati dei sottoparallelepipedi individuati dalle possibili partizioni puntate $\alpha = (P, S)$ di Q. Diremo che il numero L è l'integrale triplo di f in Q se, fissato un "errore" $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che, comunque si assegni una partizione puntata α con parametro di finezza $|\alpha| < \delta$ $\Rightarrow$ la somma $\Sigma(\alpha)$, definita in (I), dista da L meno di ε $\left(|\Sigma(\alpha) - L| < \varepsilon \right)$. Se ciò accade si scrive:

(II) $\boxed{\lim_{|\alpha| \to 0} \Sigma(\alpha) = L}$ e la funzione f si dice integrabile in Q.

- L'integrale triplo della funzione f su Q è dato, quando esiste, dal valore limite che si ottiene facendo tendere a zero i lati dei sottoparallelepipedi individuati dalle possibili partizioni puntate $\alpha = (P, S)$ di Q. Diremo che il numero L è l'integrale triplo di f in Q se, fissato un "errore" $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che, comunque si assegni una partizione puntata α con parametro di finezza $|\alpha| < \delta \Rightarrow$ le somma $\Sigma(\alpha)$, definita in (I), dista da L meno di ε $\left(|\Sigma(\alpha) - L| < \varepsilon \right)$. Se ciò accade si scrive:

(II) $$\lim_{|\alpha| \to 0} \Sigma(\alpha) = L$$ e la funzione f si dice integrabile in Q.

- Il numero L in (II) si chiama "integrale triplo" di f in Q e si denota con:

$$\boxed{L = \iiint_Q f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \quad , \quad L = \iiint_Q f\,dx\,dy\,dz \quad \text{oppure} \quad L = \int_Q f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz .}$$

- L'integrale triplo della funzione f su Q è dato, quando esiste, dal valore limite che si ottiene facendo tendere a zero i lati dei sottoparallelepipedi individuati dalle possibili partizioni puntate $\alpha = (P, S)$ di Q. Diremo che il numero L è l'integrale triplo di f in Q se, fissato un "errore" $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che, comunque si assegni una partizione puntata α con parametro di finezza $|\alpha| < \delta$ $\Rightarrow$ la somma $\Sigma(\alpha)$, definita in (I), dista da L meno di ε $\left(|\Sigma(\alpha) - L| < \varepsilon \right)$. Se ciò accade si scrive:

(II) $\quad \lim_{|\alpha| \to 0} \Sigma(\alpha) = L \quad$ e la funzione f si dice integrabile in Q.

- Il numero L in (II) si chiama "integrale triplo" di f in Q e si denota con:

$$L = \iiint_Q f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \quad , \quad L = \iiint_Q f\,dx\,dy\,dz \quad \text{oppure} \quad L = \int_Q f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

- Analogamente a quanto abbiamo visto per gli integrali doppi, una funzione $f = f(x,y,z)$ è integrabile su un parallelepipedo Q se e solo se è limitata e l'insieme dei suoi punti di discontinuità è trascurabile.

- L'integrale triplo della funzione f su Q è dato, quando esiste, dal valore limite che si ottiene facendo tendere a zero i lati dei sottoparallelepipedi individuati dalle possibili partizioni puntate $\alpha = (P, S)$ di Q. Diremo che il numero L è l'integrale triplo di f in Q se, fissato un "errore" $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che, comunque si assegni una partizione puntata α con parametro di finezza $|\alpha| < \delta \Rightarrow$ la somma $\Sigma(\alpha)$, definita in (I), dista da L meno di ε $\left(|\Sigma(\alpha) - L| < \varepsilon \right)$. Se ciò accade si scrive:

$$\text{(II)} \qquad \lim_{|\alpha| \to 0} \Sigma(\alpha) = L$$

e la funzione f si dice integrabile in Q.

- Il numero L in (II) si chiama "integrale triplo" di f in Q e si denota con:

$$L = \iiint_Q f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \,, \quad L = \iiint_Q f\,dx\,dy\,dz \quad \text{oppure} \quad L = \int_Q f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz .$$

- Analogamente a quanto abbiamo visto per gli integrali doppi, una funzione $f = f(x,y,z)$ è integrabile su un parallelepipedo Q se e solo se è limitata e l'insieme dei suoi punti di discontinuità è trascurabile.

- Come nel caso di $\mathbb{R}^2$, un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ si dice trascurabile o di misura tridimensionale nulla se $\forall \varepsilon > 0$ può essere ricoperto con una famiglia (al più) numerabile di parallelepipedi di volume totale minore o uguale a ε>0.

- L'integrale triplo della funzione f su Q è dato, quando esiste, dal valore limite che si ottiene facendo tendere a zero i lati dei sottoparallelepipedi individuati dalle possibili partizioni puntate $\alpha = (P, S)$ di Q. Diremo che il numero L è l'integrale triplo di f in Q se, fissato un "errore" $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che, comunque si assegni una partizione puntata α con parametro di finezza $|\alpha| < \delta$ $\Rightarrow$ la somma $\Sigma(\alpha)$, definita in (I), dista da L meno di ε $\left(|\Sigma(\alpha) - L| < \varepsilon \right)$. Se ciò accade si scrive:

$$\text{(II)} \qquad \lim_{|\alpha| \to 0} \Sigma(\alpha) = L$$

e la funzione f si dice integrabile in Q.

- Il numero L in (II) si chiama "integrale triplo" di f in Q e si denota con:

$$L = \iiint_Q f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \;,\; L = \iiint_Q f\,dx\,dy\,dz \quad \text{oppure } L = \int_Q f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz .$$

- Analogamente a quanto abbiamo visto per gli integrali doppi, una funzione $f = f(x,y,z)$ è integrabile su un parallelepipedo Q se e solo se è limitata e l'insieme dei suoi punti di discontinuità è trascurabile.

- Come nel caso di $\mathbb{R}^2$, un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ si dice trascurabile o di misura tridimensionale nulla se $\forall \varepsilon > 0$ può essere ricoperto con una famiglia (al più) numerabile di parallelepipedi di volume totale minore o uguale a $\varepsilon > 0$.

- L'unione finita (o, addirittura, numerabile) di insiemi trascurabili è ancora un insieme trascurabile.

- Il seguente risultato riduce il calcolo di un integrale triplo a due successive integrazioni: una semplice seguita da una doppia, oppure una doppia seguita da una semplice.

Teorema di Fubini (per gli integrali tripli)

Sia $f = f(x,y,z)$ funzione definita in un parallelepipedo $Q = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times [a_3,b_3]$.

Allora, "quando ha senso", risulta che:

$$(\overline{\text{VI}_2}) \qquad \boxed{\iiint_Q f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_R \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy} \quad \text{dove } R = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2]$$

- Il seguente risultato riduce il calcolo di un integrale triplo a due successive integrazioni: una semplice seguita da una doppia, oppure una doppia seguita da una semplice.

<u>Teorema di Fubini</u> (per gli integrali tripli)

Sia $f = f(x,y,z)$ funzione definita in un parallelepipedo $Q = [a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]$.

Allora, "quando ha senso", risulta che:

$$(\text{VI a})\qquad \iiint_Q f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_R \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dz\right)dx\,dy \quad \text{dove } R = [a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$$

$$(\text{VI b})\qquad \boxed{\iiint_Q f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{a_3}^{b_3}\left(\iint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\right)dz} \quad \text{dove } R = [a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$$

- Il seguente risultato riduce il calcolo di un integrale triplo a due successive integrazioni: una semplice seguita da una doppia, oppure una doppia seguita da una semplice.

<u>Teorema di Fubini</u> (per gli integrali tripli)

Sia $f = f(x,y,z)$ funzione definita in un parallelepipedo $Q = [a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]$.

Allora, "quando ha senso", risulta che:

$$(\mathrm{VI}\,a) \qquad \boxed{\iiint_Q f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_R \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy} \quad \text{dove } R = [a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$$

$$(\mathrm{VI}\,b) \qquad \iiint_Q f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{a_3}^{b_3} \left(\iint_R f(x,y,z)\,dx\,dy \right) dz \quad \text{dove } R = [a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$$

- La formula (VI a) afferma che per effettuare il calcolo dell'integrale triplo di f su Q è possibile integrare prima in $[a_3,b_3]$ la funzione $f(x,y,z)$ rispetto alla variabile z, ottenendo la funzione: $g(x,y) = \int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dz$ e integrare poi $g(x,y)$ sul rettangolo $R = [a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$

- Il seguente risultato riduce il calcolo di un integrale triplo a due successive integrazioni: una semplice seguita da una doppia, oppure una doppia seguita da una semplice.

Teorema di Fubini (per gli integrali tripli)

Sia $f = f(x,y,z)$ funzione definita in un parallelepipedo $Q = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times [a_3,b_3]$.
Allora, "quando ha senso", risulta che:

$$(\text{VI}a) \qquad \iiint_Q f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_R \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy \quad \text{dove } R = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2]$$

$$(\text{VI}b) \qquad \boxed{\iiint_Q f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{a_3}^{b_3} \left(\iint_R f(x,y,z)\,dx\,dy \right) dz} \quad \text{dove } R = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2]$$

- La formula (VI a) afferma che per effettuare il calcolo dell'integrale triplo di f su Q è possibile integrare prima in $[a_3,b_3]$ la funzione $f(x,y,z)$ rispetto alla variabile z, ottenendo la funzione: $\quad g(x,y) = \int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dz \quad$ e integrare poi $g(x,y)$ sul rettangolo $R = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2]$

- La formula (VI b) afferma che si ha lo stesso risultato integrando prima $f(x,y,z)$ sul rettangolo $R = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2]$ rispetto alle variabili x e y, ottenendo: $h(z) = \iint_R f(x,y,z)\,dx\,dy$ e integrando poi $h(z)$ nell'intervallo $[a_3,b_3]$.

- Dalla definizione data in (II), segue subito che l'integrale di f su Q, quando $\exists$, è unico (grazie all'unicità del limite).

- Dalla definizione data in (II), segue subito che l'integrale di f su Q, quando $\exists$, è unico (grazie all'unicità del limite).

Inoltre, dalle proprietà del limite, si deduce che se f e g sono due funzioni integrabili su un parallelepipedo Q e α e β sono due numeri, allora $\alpha f + \beta g$ è integrabile e

$$\boxed{\iiint_Q (\alpha f + \beta g)\,dx\,dy\,dz = \alpha \iiint_Q f\,dx\,dy\,dz + \beta \iiint_Q g\,dx\,dy\,dz} \quad \text{(linearità)} \quad \text{(III)}$$

- Dalla definizione data in (II), segue subito che l'integrale di f su Q, quando $\exists$, è unico (grazie all'unicità del limite).

Inoltre, dalle proprietà del limite, si deduce che se f e g sono due funzioni integrabili su un parallelepipedo Q e α e β sono due numeri, allora $\alpha f + \beta g$ è integrabile e

$$\iiint_Q (\alpha f + \beta g)\, dx\, dy\, dz = \alpha \iiint_Q f \, dx\, dy\, dz + \beta \iiint_Q g \, dx\, dy\, dz \quad (\text{linearità}) \quad (\text{III})$$

- Sempre dalla definizione di integrale si deduce che se f è integrabile su Q e $f(x,y,z) \geq 0$ $\forall (x,y,z) \in Q$ allora:

$$\boxed{\iiint_Q f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \geq 0} \qquad (\text{IV})$$

- Dalla definizione data in (II), segue subito che l'integrale di f su Q, quando $\exists$, è unico (grazie all'unicità del limite).

 Inoltre, dalle proprietà del limite, si deduce che se f e g sono due funzioni integrabili su un parallelepipedo Q e α e β sono due numeri, allora $\alpha f + \beta g$ è integrabile e

$$\iiint_Q (\alpha f + \beta g)\, dx\, dy\, dz = \alpha \iiint_Q f\, dx\, dy\, dz + \beta \iiint_Q g\, dx\, dy\, dz \quad \text{(linearità)} \quad \text{(III)}$$

- Sempre dalla definizione di integrale si deduce che se f è integrabile su Q e $f(x,y,z) \geq 0$ $\forall (x,y,z) \in Q$ allora:

$$\iiint_Q f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \geq 0 \qquad \text{(IV)}$$

- In particolare, dalla (IV) (tenendo conto della linearità in (III)) si deduce la seguente proprietà dell'integrale triplo: Siano f, g integrabili in un parallelepipedo Q.

 Se $f(x,y,z) \leq g(x,y,z)$, $\forall (x,y,z) \in Q$, allora vale che:

$$\boxed{\iiint_Q f\, dx\, dy\, dz \leq \iiint_Q g\, dx\, dy\, dz} \quad \text{(monotonia)} \quad \text{(V)}$$

- Ovviamente, nel teorema di Fubini in $\mathbb{R}^3$ i ruoli delle variabili x, y, z possono essere permutati, si ha per esempio (quando ha senso):

$$(\text{VII}a) \qquad \boxed{\iiint_Q f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{\hat{R}} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x,y,z)\,dx \right) dy\,dz} \quad \text{dove } \hat{R} = [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$$

$$(\text{VII}b) \qquad \boxed{\iiint_Q f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{a_1}^{b_1} \left(\iint_{\hat{R}} f(x,y,z)\,dy\,dz \right) dx} \quad \text{dove } \hat{R} = [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$$

- Stessa cosa integrando prima rispetto ad y e poi rispetto a x z (o viceversa).

- Ovviamente, nel teorema di Fubini in $\mathbb{R}^3$ i ruoli delle variabili x, y, z possono essere permutati, si ha per esempio (quando ha senso):

$$(\text{VII}a) \qquad \iiint_Q f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{\hat{R}} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x,y,z)\,dx \right) dy\,dz \quad \text{dove } \hat{R} = [a_2,b_2]\times[a_3,b_3]$$

$$(\text{VII}b) \qquad \iiint_Q f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{a_1}^{b_1} \left(\iint_{\hat{R}} f(x,y,z)\,dy\,dz \right) dx \quad \text{dove } \hat{R} = [a_2,b_2]\times[a_3,b_3]$$

- Stessa cosa integrando prima rispetto ad y e poi rispetto a xz (o viceversa).
- L'affermazione "quando ha senso" nel teorema di Fubini in $\mathbb{R}^3$ si riferisce - come in $\mathbb{R}^2$ - al fatto che siano definiti gli integrali semplici e doppi coinvolti nelle formule precedenti

- Ovviamente, nel teorema di Fubini in $\mathbb{R}^3$ i ruoli delle variabili x, y, z possono essere permutati, si ha per esempio (quando ha senso):

$$(\text{VII a}) \qquad \iiint_Q f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{\hat{R}} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x,y,z)\,dx \right) dy\,dz \quad \text{dove } \hat{R} = [a_2,b_2]\times[a_3,b_3]$$

$$(\text{VII b}) \qquad \iiint_Q f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{a_1}^{b_1} \left(\iint_{\hat{R}} f(x,y,z)\,dy\,dz \right) dx \quad \text{dove } \hat{R} = [a_2,b_2]\times[a_3,b_3]$$

- Stessa cosa integrando prima rispetto ad y e poi rispetto a $x z$ (o viceversa).
- L'affermazione "quando ha senso" nel teorema di Fubini in $\mathbb{R}^3$ si riferisce - come in $\mathbb{R}^2$ - al fatto che siano definiti gli integrali semplici e doppi coinvolti nelle formule precedenti
- Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^3$ e $f : A \to \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\tilde{f}(x,y,z) := \begin{cases} f(x,y,z) & \text{se } (x,y,z) \in A \\ 0 & \text{se } (x,y,z) \notin A \end{cases}}$ Estensione standard di f (rispetto ad A)

- Ovviamente, nel teorema di Fubini in $\mathbb{R}^3$ i ruoli delle variabili x, y, z possono essere permutati, si ha per esempio (quando ha senso):

$$(\text{VII}\,a) \qquad \iiint_Q f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{\hat{R}} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x,y,z)\,dx \right) dy\,dz \quad \text{dove } \hat{R} = [a_2,b_2]\times[a_3,b_3]$$

$$(\text{VII}\,b) \qquad \iiint_Q f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{a_1}^{b_1} \left(\iint_{\hat{R}} f(x,y,z)\,dy\,dz \right) dx \quad \text{dove } \hat{R} = [a_2,b_2]\times[a_3,b_3]$$

- Stessa cosa integrando prima rispetto ad y e poi rispetto a $x\,z$ (o viceversa).

- L'affermazione "quando ha senso" nel teorema di Fubini in $\mathbb{R}^3$ si riferisce - come in $\mathbb{R}^2$ - al fatto che siano definiti gli integrali semplici e doppi coinvolti nelle formule precedenti.

- Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^3$ e $f : A \to \mathbb{R} \Rightarrow$ $\hat{f}(x,y,z) := \begin{cases} f(x,y,z) & \text{se } (x,y,z) \in A \\ 0 & \text{se } (x,y,z) \notin A \end{cases}$ Estensione standard di f (rispetto ad A)

Sia $f = f(x,y,z)$ definita su $A \subseteq \mathbb{R}^3$ (sottoinsieme limitato).
Sia Q un parallelepipedo (arbitrario) contenente A; allora diremo che f è integrabile in A se $\hat{f}$ è integrabile in Q e in tal caso si ha che:

$$(\text{VIII}) \qquad \boxed{\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz := \iiint_Q \hat{f}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}$$

- Ovviamente, nel teorema di Fubini in $\mathbb{R}^3$ i ruoli delle variabili x, y, z possono essere permutati, si ha per esempio (quando ha senso):

(VII a) $$\iiint_Q f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{\hat{R}} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x,y,z)\,dx \right) dy\,dz \quad \text{dove } \hat{R} = [a_2,b_2]\times[a_3,b_3]$$

(VII b) $$\iiint_Q f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{a_1}^{b_1} \left(\iint_{\hat{R}} f(x,y,z)\,dy\,dz \right) dx \quad \text{dove } \hat{R} = [a_2,b_2]\times[a_3,b_3]$$

- Stessa cosa integrando prima rispetto ad y e poi rispetto a $x\,z$ (o viceversa).
- L'affermazione "quando ha senso" nel teorema di Fubini in $\mathbb{R}^3$ si riferisce - come in $\mathbb{R}^2$ - al fatto che siano definiti gli integrali semplici e doppi coinvolti nelle formule precedenti.
- Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^3$ e $f : A \to \mathbb{R} \Rightarrow$ $$\hat{f}(x,y,z) := \begin{cases} f(x,y,z) & \text{se } (x,y,z)\in A \\ 0 & \text{se } (x,y,z)\notin A \end{cases}$$ Estensione standard di f (rispetto ad A)

Sia $f = f(x,y,z)$ definita su $A \subseteq \mathbb{R}^3$ (sottoinsieme limitato).
Sia Q un parallelepipedo (arbitrario) contenente A; allora diremo che f è integrabile in A se $\hat{f}$ è integrabile in Q e in tal caso si ha che:

(VIII) $$\boxed{\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz := \iiint_Q \hat{f}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}$$

dato che $\hat{f}$ è nulla fuori di $A \Rightarrow$ l'integrale di f in A è ben definito.