Integrazione multipla in $\mathbb{R}^3$ (Integrali tripli) -parte 4-

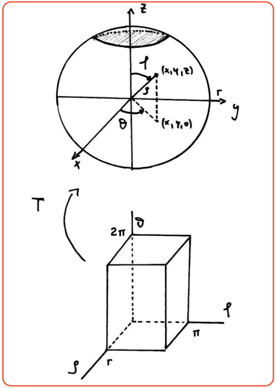
Luca Bisconti

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Disclaimer

Il presente contenuto è stato prodotto per far fronte alle esigenze di didattica a distanza resasi necessarie per l'emergenza legata alla diffusione del virus COVID-19.

Firenze, 14/04/2020



Cambiamento di variabili

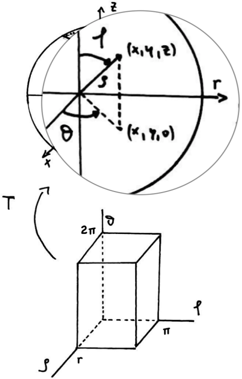
Coordinate sferiche

Consideriamo la mappa così definita da

$$T : [0,+\infty) \times [0,\pi] \times [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad \text{(I)}$$

$$(\rho, \varphi, \theta) \longmapsto T(\rho,\varphi,\theta)$$

$$\boxed{T(\rho,\varphi,\theta) = (\rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta, \rho \cos\varphi)}$$



Cambiamento di variabili

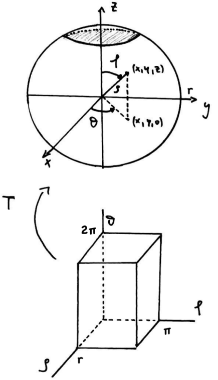
Coordinate sferiche

Consideriamo la mappa così definita da

$$T : [0,+\infty) \times [0,\pi] \times [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad \text{(I)}$$

$$(\rho, \varphi, \theta) \longmapsto T(\rho,\varphi,\theta)$$

$$T(\rho,\varphi,\theta) = (\rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta, \rho\cos\varphi)$$



Cambiamento di variabili

Coordinate sferiche

Consideriamo la mappa così definita da

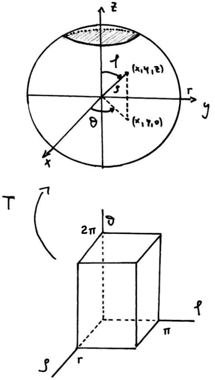
$$T : \underbrace{[0,+\infty) \times [0,\pi] \times [0,2\pi]}_{S=} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad \textbf{(I)}$$

$$(\rho, \varphi, \theta) \longmapsto T(\rho,\varphi,\theta)$$

$$T(\rho,\varphi,\theta) = (\rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta, \rho\cos\varphi)$$

$$\boxed{J_T(\rho,\varphi,\theta) = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta & \rho\cos\varphi\operatorname{sen}\theta & \rho\operatorname{sen}\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -\rho\operatorname{sen}\varphi & 0 \end{bmatrix}}$$

quindi $\det J_T(\rho,\varphi,\theta) = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi > 0$ in $S\setminus\partial S$



Cambiamento di variabili

Coordinate sferiche

Consideriamo la mappa così definita da

$$T : [0,+\infty) \times [0,\pi] \times [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad \textbf{(I)}$$

$$(\rho, \varphi, \theta) \longmapsto T(\rho,\varphi,\theta)$$

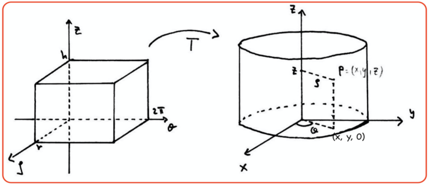
$$T(\rho,\varphi,\theta) = (\rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta, \rho \cos\varphi)$$

$$J_T(\rho,\varphi,\theta) = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta & \rho\cos\varphi\operatorname{sen}\theta & \rho\operatorname{sen}\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -\rho\operatorname{sen}\varphi & 0 \end{bmatrix}$$

and $\det J_T(\rho,\varphi,\theta) = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi$

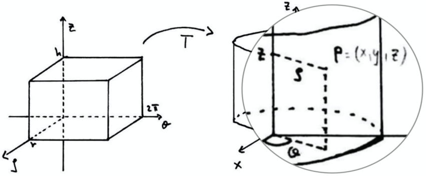
Coordinate cilindriche $(\rho \geq 0,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ z \in \mathbb{R})$

$T(\rho,\theta,z) = (\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta, z)$ $\qquad J_T(\rho,\theta,z) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\det J_T = \rho$.

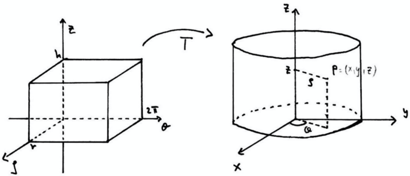


$$T(\rho, \theta, z) = (\rho \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta, z) \qquad (\mathrm{II})$$

$$\det J_T = \rho > 0 \text{ per } \rho > 0$$



$$\boxed{\begin{gathered} T(\rho, \theta, z) = (\rho\cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta, z) \\ \det J_T = \rho \end{gathered}} \qquad (\mathrm{II})$$



$$T(\rho, \theta, z) = (\rho \cos\theta, \rho \,\mathrm{sen}\,\theta, z) \qquad (\mathrm{II})$$

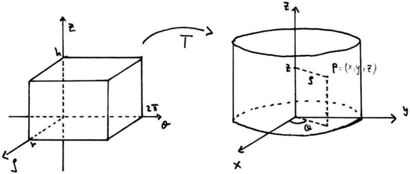
$$\det J_T = \rho$$

Teorema (di cambiamento di variabili per gli integrali tripli)

Sia $T(u,v,w) = (T_1(u,v,w), T_2(u,v,w), T_3(u,v,w))$ una applicazione continua da un insieme chiuso e limitato $D \subseteq \mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ $(T: D \to \mathbb{R}^2)$. Supponiamo che le frontiere di D e di $T(D)$ siano trascurabili e che T sia C^1, $\det J_T \neq 0$ e T è iniettiva in $\mathring{D}$.

Allora, data una funzione di tre variabili f continua su $T(D)$, allora risulta:

interno di D



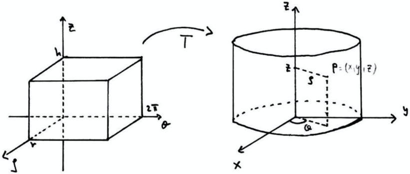
$$T(\rho,\theta,z)=(\rho\cos\theta,\ \rho\,\mathrm{sen}\,\theta,\ z) \qquad (\mathrm{II})$$

$$\det J_T=\rho$$

Teorema (di cambiamento di variabili per gli integrali tripli)

Sia $T(u,v,w)=(T_1(u,v,w),T_2(u,v,w),T_3(u,v,w))$ una applicazione continua da un insieme chiuso e limitato $D\subseteq\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ ($T: D\to\mathbb{R}^3$). Supponiamo che le frontiere di D e di $T(D)$ siano trascurabili e che T sia C^1, $\det J_T\neq 0$ e T è iniettiva in $\mathring{D}$. Allora, data una funzione di tre variabili f continua su $T(D)$, allora risulta:

$$(\mathrm{III}) \qquad \boxed{\iiint_{T(D)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iiint_D f(T_1(u,v,w),T_2(u,v,w),T_3(u,v,w))\,|\det J_T(u,v,w)|\,du\,dv\,dw}$$



$$T(\rho, \theta, z) = (\rho\cos\theta, \rho\,\text{sen}\,\theta, z) \qquad (\text{II})$$

$$\det J_T = \rho$$

<u>Teorema</u> (di cambiamento di variabili per gli integrali tripli)

Sia $T(u,v,w) = (T_1(u,v,w), T_2(u,v,w), T_3(u,v,w))$ una applicazione continua da un insieme chiuso e limitato $D \subseteq \mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ $(T: D \to \mathbb{R}^3)$. Supponiamo che le frontiere di D e di $T(D)$ siano trascurabili e che T sia C^1, $\det J_T \neq 0$ e T è iniettiva in $\mathring{D}$.
Allora, data una funzione di tre variabili f continua su $T(D)$, allora risulta:

$$(\text{III}) \qquad \iiint_{T(D)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_D f(T_1(u,v,w), T_2(u,v,w), T_3(u,v,w))\,|\det J_T(u,v,w)|\,du\,dv\,dw$$

<u>Esempio</u>

Calcoliamo il volume V di una sfera di raggio r usando le coordinate sferiche.

Poniamo $\boxed{A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq r^2\}}$ e osserviamo che $A = T(D)$ con T in (I) ovvero $\boxed{T(\rho, \varphi, \theta) = (\rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta, \rho \cos\varphi)}$ dove D è il parallelepipedo chiuso e limitato $D = \{(\rho, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le \rho \le r, 0 \le \varphi \le \pi, 0 \le \theta \le 2\pi\}$. Inoltre T è continua su D e di classe C^1 con $\det J_T \neq 0$ e iniettiva su D (non è iniettiva su ∂D).

ovvero $T(\rho,\varphi,\theta)=(\rho\,\text{sen}\,\varphi\cos\theta,\ \rho\,\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\theta,\ \rho\cos\varphi)$ dove D è il parallelepipedo chiuso e limitato $D=\{(\rho,\varphi,\theta)\in\mathbb{R}^3:\ 0\le\rho\le r,\ 0\le\varphi\le\pi,\ 0\le\theta\le 2\pi\}$. Inoltre T è continua su D e di classe C^1 con $\det J_T\neq 0$ e iniettiva su $\mathring{D}$ (non è iniettiva su ∂D).

Applicando le formule (III) nel teorema di cambio di variabili, otteniamo:

$$V=\underset{\substack{A\\ \shortparallel\\ T(D)}}{\iiint} 1\,dx\,dy\,dz=\iiint_D \rho^2|\text{sen}\,\varphi|\,d\rho\,d\varphi\,d\theta=\int_0^{\pi}\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{r}\rho^2\,\text{sen}\,\varphi\,d\rho\right)d\theta\right)d\varphi=$$

$$=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{r}\rho^2\,\text{sen}\,\varphi\,d\rho\,d\theta\,d\varphi=\frac{2}{3}\pi r^3\int_0^{\pi}\text{sen}\,\varphi\,d\varphi=\frac{2}{3}\pi r^3\left(-\cos\varphi\right)_0^{\pi}=\frac{4}{3}\pi r^3.$$

ovvero $T(\rho,\varphi,\theta) = (\rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta, \rho\cos\varphi)$ dove D è il parallelepipedo chiuso e limitato $D = \{(\rho,\varphi,\theta) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le \rho \le r,\ 0 \le \varphi \le \pi,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$. Inoltre T è continua su D e di classe C^1 con $\det J_T \ne 0$ e iniettiva su $\mathring{D}$ (non è iniettiva su ∂D).

Applicando le formule (III) nel teorema di cambio di variabili, otteniamo:

$$V = \iiint_{\substack{A \\ \| \\ T(D)}} 1\, dx\, dy\, dz = \iiint_D \rho^2 |\operatorname{sen}\varphi|\, d\rho\, d\varphi\, d\theta = \int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^r \rho^2 \operatorname{sen}\varphi\, d\rho \right) d\theta \right) d\varphi =$$

$$= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^r \rho^2 \operatorname{sen}\varphi\, d\rho\, d\theta\, d\varphi = \frac{2}{3}\pi r^3 \int_0^\pi \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi = \frac{2}{3}\pi r^3 (-\cos\varphi)\Big|_0^\pi = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

<u>Alcune applicazioni</u> (degli integrali tripli)

Sia $\rho = \rho(x,y,z)$ la densità di un solido A (assumiamo $\rho \ge 0$ in A) allora

$$\boxed{m = \iiint_A \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz}$$ è la massa del solido A.

ovvero $T(\rho, \varphi, \theta) = (\rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta, \rho \cos\varphi)$ dove D è il parallelepipedo chiuso e limitato $D = \{(\rho, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le \rho \le r, \ 0 \le \varphi \le \pi, \ 0 \le \theta \le 2\pi\}$. Inoltre T è continua su D e di classe C^1 con $\det J_T \ne 0$ e iniettiva su $\mathring{D}$ (non è iniettiva su ∂D).

Applicando la formula (III) nel teorema di cambio di variabili, otteniamo:

$$V = \iiint_{\substack{A \\ \| \\ T(D)}} 1 \, dx\,dy\,dz = \iiint_D \rho^2 |\operatorname{sen}\varphi| \, d\rho\, d\varphi\, d\theta = \int_0^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^r \rho^2 \operatorname{sen}\varphi \, d\rho \right) d\theta \right) d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^r \rho^2 \operatorname{sen}\varphi \, d\rho\, d\theta\, d\varphi = \frac{2}{3}\pi r^3 \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi = \frac{2}{3}\pi r^3 \left(-\cos\varphi\right)_0^{\pi} = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

<u>Alcune applicazioni</u> (degli integrali tripli)

Sia $\rho = \rho(x, y, z)$ la densità di un solido A (assumiamo $\rho \ge 0$ in A) allora

$m = \iiint_A \rho(x,y,z)\, dx\,dy\,dz$ è la massa del solido A. Inoltre si ha che dette (x_c, y_c, z_c) le coordinate del baricentro di A, segue che:

$$\boxed{x_c = \frac{1}{m} \iiint_A x\, \rho(x,y,z)\, dx\,dy\,dz \ ; \ y_c = \frac{1}{m} \iiint_A y\, \rho(x,y,z)\, dx\,dy\,dz \ ; \ z_c = \frac{1}{m} \iiint_A z\, \rho(x,y,z)\, dx\,dy\,dz}$$

Inoltre abbiamo che, fissato un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, il momento di inerzia di A rispetto ad un asse passante per il punto P_0

$$\boxed{I = \iiint_A d(P, P_0)^2 \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz}$$

qui $d(P, P_0)$ è la distanza dall'asse di rotazione passante per P_0

Inoltre abbiamo che, fissato un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, il momento di inerzia di A rispetto ad un asse passante per il punto P_0

$$\boxed{I = \iiint_A d(P, P_0)^2 \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_A d^2(x,y,z)\, \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz}$$

qui $d(P, P_0)$ è la distanza dall'asse di rotazione passante per P_0

P_0 è il centro di massa e assumiamo che l'origine degli assi sia in P_0

Inoltre abbiamo che, fissato un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, il momento di inerzia di A rispetto ad un asse passante per il punto P_0

$$I = \iiint_A d(P, P_0)^2 \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_A d^2(x,y,z)\, \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

qui $d(P, P_0)$ è la distanza dall'asse di rotazione passante per P_0

P_0 è il centro di massa e assumiamo che l'origine degli assi sia in P_0

Inoltre: se l'asse di rotazione è l'asse z $\Rightarrow$ $d^2(x,y,z) = x^2 + y^2$

se l'asse di rotazione è l'asse x $\Rightarrow$ $d^2(x,y,z) = y^2 + z^2$

se l'asse di rotazione è l'asse y $\Rightarrow$ $d^2(x,y,z) = x^2 + z^2$.

Inoltre abbiamo che, fissato un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, il momento di inerzia di A rispetto ad un asse passante per il punto P_0

$$I = \iiint_A d(P, P_0)^2 \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_A d^2(x,y,z)\, \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

qui $d(P, P_0)$ è la distanza dall'asse di rotazione passante per P_0

P_0 è il centro di massa e assumiamo che l'origine degli assi sia in P_0

Inoltre: se l'asse di rotazione è l'asse z $\Rightarrow$ $d^2(x,y,z) = x^2 + y^2$

se l'asse di rotazione è l'asse x $\Rightarrow$ $d^2(x,y,z) = y^2 + z^2$

se l'asse di rotazione è l'asse y $\Rightarrow$ $d^2(x,y,z) = x^2 + z^2$.

Esempio: Determinare la massa e il centro di massa di una semisfera di raggio r sapendo che la densità $\delta(x,y,z)$ è proporzionale alla distanza dal centro (origine degli assi)

Allora $\delta(x,y,z) = K\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{M = \iiint_A \delta(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = K \iiint_A \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz =}$

$$\boxed{= 2\pi K \int_0^r \int_0^{\pi/2} \rho^3 \operatorname{sen} \varphi \, d\varphi \, d\rho = \frac{1}{2} K \pi r^4}$$

coordinate sferiche

Inoltre abbiamo che, fissato un punto $P_0=(x_0,y_0,z_0)$, il momento di inerzia di A rispetto ad un asse passante per il punto P_0

$$I = \iiint_A d(P,P_0)^2 \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_A d^2(x,y,z)\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

qui $d(P,P_0)$ è la distanza dall'asse di rotazione passante per P_0

P_0 è il centro di massa e assumiamo che l'origine degli assi sia in P_0

Inoltre: se l'asse di rotazione è l'asse z $\Rightarrow$ $d^2(x,y,z) = x^2+y^2$

se l'asse di rotazione è l'asse x $\Rightarrow$ $d^2(x,y,z) = y^2+z^2$

se l'asse di rotazione è l'asse y $\Rightarrow$ $d^2(x,y,z) = x^2+z^2$.

Esempio: Determinare la massa e il centro di massa di una semisfera di raggio r sapendo che la densità $\delta(x,y,z)$ è proporzionale alla distanza dal centro (origine degli assi)

Allora $\delta(x,y,z) = K\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $\Rightarrow$ $m = \iiint_A \delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = K\iiint_A \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz =$

$$= 2\pi K \int_0^r \int_0^{\pi/2} \rho^3 \operatorname{sen}\varphi\,d\varphi\,d\rho = \frac{1}{2}K\pi r^4.$$

coordinate sferiche

Per simmetria $x_c = y_c = 0$. Allora determiniamo z_c

$$\boxed{z_c = \frac{1}{m}\,2\pi K \int_0^r \int_0^{\pi/2} \rho^4 \cos\varphi \operatorname{sen}\varphi\,d\varphi\,d\rho = \frac{2}{5}r.}$$

∎