Esercizi sugli integrali doppi

Luca Bisconti

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Disclaimer

Firenze, 14/04/2020

Esempi Integrali Doppi

Esempio (importante)

Usando gli integrali doppi si può provare che $\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$.

Esempi Integrali Doppi

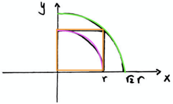
Esempio (importante)

Usando gli integrali doppi si può provare che $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Sia $r>0$ e consideriamo il rettangolo $\boxed{R = [0,r]\times[0,r]}$. Inoltre sia $\boxed{A_r = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq r^2,\ x\geq 0,\ y\geq 0\}}$

e in maniera simile $\boxed{A_{\sqrt{2}r} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 2r^2,\ x\geq 0,\ y\geq 0\}}$

Si ha ovviamente che $A_r \subset R \subset A_{\sqrt{2}r}$ da cui segue:



$$\boxed{\iint_{A_r} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \leq \iint_R \underbrace{e^{-(x^2+y^2)}}\,dx\,dy \leq \iint_{A_{\sqrt{2}r}} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy} \qquad (I)$$

consideriamo questa nuova funzione di due variabili

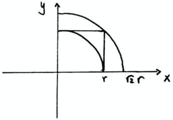
Esempi Integrali Doppi

Esempio (importante)

Usando gli integrali doppi si può provare che $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Sia $r>0$ e consideriamo il rettangolo $R=[0,r]\times[0,r]$. Inoltre sia $A_r=\{(x,y): x^2+y^2\le r^2,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$ e in maniera simile $A_{\sqrt{2}r} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2\le 2r^2,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$

Si ha ovviamente che $A_r\subset R\subset A_{\sqrt{2}r}$ da cui segue:



$$\iint_{A_r} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \le \iint_{R} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \le \iint_{A_{\sqrt{2}r}} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \qquad (\mathrm{I})$$

Passando in coordinate polari segue che:

$$\iint_{A_r} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2}\int_0^r e^{-\rho^2}\rho\,d\rho\,d\vartheta = \frac{\pi}{4}\left(-e^{-r^2}+1\right)$$

$$\iint_{A_{\sqrt{2}r}} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \frac{\pi}{4}\left(-e^{-2r^2}+1\right) \quad \text{e} \quad \iint_R e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \left(\int_0^r e^{-x^2}dx\right)\underbrace{\left(\int_0^r e^{-y^2}dy\right)}_{y=x} = \left(\int_0^r e^{-x^2}dx\right)^2$$

Esempi Integrali Doppi

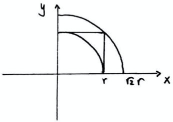
Esempio (importante)

Usando gli integrali doppi si può provare che $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Sia $r>0$ e consideriamo il rettangolo $R = [0,r]\times[0,r]$. Inoltre sia $A_r = \{(x,y) : x^2+y^2 \le r^2,\ x\ge 0,\ y \ge 0\}$

e in maniera simile $A_{\sqrt{2}r} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 2r^2,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$

Si ha ovviamente che $A_r \subset R \subset A_{\sqrt{2}r}$ da cui segue:



$$\iint_{A_r} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \le \iint_R e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \le \iint_{A_{\sqrt{2}r}} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \qquad (I)$$

Passando in coordinate polari segue che:

$$\iint_{A_r} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2}\int_0^r e^{-\rho^2}\rho\,d\rho\,d\theta = \frac{\pi}{4}\left(-e^{-r^2}+1\right)$$

$$\iint_{A_{\sqrt{2}r}} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \frac{\pi}{4}\left(-e^{-2r^2}+1\right) \quad \text{e} \quad \iint_R e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \left(\int_0^r e^{-x^2}dx\right)\Big(\int_0^r \underbrace{e^{-y^2}dy}_{y=x}\Big) = \left(\int_0^r e^{-x^2}dx\right)^2$$

Allora dalla (I) segue che

$$\boxed{\frac{\pi}{4}\left(-e^{-r^2}+1\right) \le \left(\int_0^r e^{-x^2}dx\right)^2 \le \frac{\pi}{4}\left(-e^{-2r^2}+1\right) \iff \sqrt{\frac{\pi}{4}\left(-e^{-r^2}+1\right)} \le \int_0^r e^{-x^2}dx \le \sqrt{\frac{\pi}{4}\left(-e^{-2r^2}+1\right)}}$$

Passando al limite per $r \to +\infty$ e ricordando il teorema dei carabinieri, si ottiene che:

$$\boxed{\lim_{r \to +\infty} \int_0^r e^{-x^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}} \quad \blacksquare$$

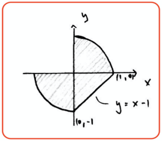
Passando al limite per $r \to +\infty$ e ricordando il teorema dei carabinieri, si ottiene che:

$$\lim_{r \to +\infty} \int_0^r e^{-x^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \blacksquare$$

Esempio

Calcolare l'integrale I su $\boxed{D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1,\ xy \geq 0\} \cup \{(x,y) : x-1 \leq y \leq 0,\ x \geq 0\}}$

$$I = \iint_D xy \, dx\, dy$$



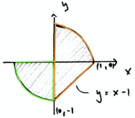
Passando al limite per $r \to +\infty$ e ricordando il teorema dei Carabinieri, si ottiene che:

$$\lim_{r \to +\infty} \int_0^r e^{-x^2}\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad \blacksquare$$

<u>Esempio</u>

Calcolare l'integrale I su $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 1,\ xy \ge 0\} \cup \{(x,y) : x-1 \le y \le 0,\ x \ge 0\}$

$$I = \iint_D xy\,dx\,dy$$



Allora
$$\iint_D xy\,dx\,dy = \boxed{\int_{-1}^{0}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} xy\,dy\right)dx} + \boxed{\int_0^1\left(\int_{x-1}^{\sqrt{1-x^2}} xy\,dy\right)dx}$$

$$= \int_{-1}^{0}\left(x\frac{y^2}{2}\right)_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} dx + \int_0^1 \left(x\,\frac{y^2}{2}\right)_{x-1}^{\sqrt{1-x^2}} dx$$

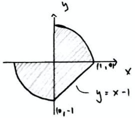
Passando al limite per $r \to +\infty$ e ricordando il teorema dei Carabinieri, si ottiene che:

$$\lim_{r \to +\infty} \int_0^r e^{-x^2}\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \blacksquare$$

<u>Esempio</u>

Calcolare l'integrale I su $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1,\ xy \geq 0\} \cup \{(x,y) : x-1 \leq y \leq 0,\ x \geq 0\}$

$$I = \iint_D xy\,dx\,dy$$



Allora
$$\iint_D xy\,dx\,dy = \int_{-1}^{0}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} xy\,dy\right)dx + \int_0^1\left(\int_{x-1}^{\sqrt{1-x^2}} xy\,dy\right)dx$$

$$= \int_{-1}^{0}\left(x\frac{y^2}{2}\right)_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} dx + \int_0^1 \left(x\frac{y^2}{2}\right)_{x-1}^{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \int_{-1}^{0} \frac{x}{2}(1-x^2)\,dx + \int_0^1\left(x\frac{1-x^2}{2} - \frac{x(x-1)^2}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0}(x-x^3)\,dx + \frac{1}{2}\int_{-1}^{0}(x-x^3-x^3+2x^2-x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{0} + \int_0^1 (x^2-x^3)\,dx = \frac{1}{8} + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)_0^1 = \frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{24}$$

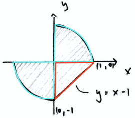
Passando al limite per $r \to +\infty$ e ricordando il teorema dei Carabinieri, si ottiene che:

$$\lim_{r \to +\infty} \int_0^r e^{-x^2}\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad \blacksquare$$

<u>Esempio</u>

Calcolare l'integrale I su $D = \underbrace{\{(x,y) : x^2+y^2 \le 1,\ xy \ge 0\}}_{D_1} \cup \underbrace{\{(x,y) : x-1 \le y \le 0,\ x \ge 0\}}_{D_2}$

$$I = \iint_D xy\,dx\,dy$$



Allora
$$\iint_D xy\,dx\,dy = \int_{-1}^{0}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} xy\,dy\right)dx + \int_0^1\left(\int_{x-1}^{\sqrt{1-x^2}} xy\,dy\right)dx$$

$$= \int_{-1}^{0}\left(x\frac{y^2}{2}\right)_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} dx + \int_0^1 \left(x\,\frac{y^2}{2}\right)_{x-1}^{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \int_{-1}^{0} \frac{x}{2}(1-x^2)\,dx + \int_0^1\left(x\,\frac{1-x^2}{2} - \frac{x(x-1)^2}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0}(x-x^3)\,dx + \frac{1}{2}\int_{-1}^{0}(x-x^3-x^3+2x^2-x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{0} + \int_0^1 (x^2-x^3)\,dx = \frac{1}{8} + \left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)_0^1 = \frac{1}{8}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4} = \frac{5}{24}$$

<u>osservazione</u>

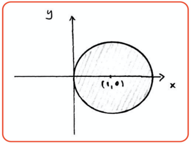
Usando le simmetrie di D_1 rispetto a $S_0(x,y) = (-x,-y)$ e al fatto che $f(x,y) = xy$ è pari rispetto a S_0

$$\boxed{\iint_D xy\,dx\,dy = \iint_{D_1} xy\,dx\,dy + \iint_{D_2} xy\,dx\,dy = 2\int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy\,dy\right)dx + \int_0^1\left(\int_{x-1}^{0} xy\,dy\right)dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{24} = \frac{5}{24}}$$ ■

$$\iint_D xy\,dx\,dy = \iint_{D_1} xy\,dx\,dy + \iint_{D_2} xy\,dx\,dy = 2\int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy\,dy\right)dx + \int_0^1\left(\int_{x-1}^{0} xy\,dy\right)dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{24} = \frac{5}{24} \quad \blacksquare$$

__Esempio__

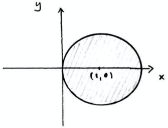
Calcolare l'integrale doppio $\boxed{\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy}$ sull'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2+y^2 \leq 1\}$



$$\iint_D xy\,dx\,dy = \iint_{D_1} xy\,dx\,dy + \iint_{D_2} xy\,dx\,dy = 2\int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy\,dy\right)dx + \int_0^1\left(\int_{x-1}^0 xy\,dy\right)dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{24} = \frac{5}{24} \quad \blacksquare$$

<u>Esempio</u>

Calcolare l'integrale doppio $\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$ sull'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2+y^2 \leq 1\}$



Passando in coordinate polari $\begin{cases} x = 1 + \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$ $\rho \in [0,1]$, $\theta \in [0, 2\pi]$

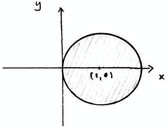
si ha che $x^2+y^2 = (1+\rho\cos\theta)^2 + \rho^2\,\text{sen}^2\theta = 1 + \rho^2(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta) + 2\rho\cos\theta$
$= 1 + \rho^2 + 2\rho\cos\theta$

Quindi l'integrale diventa:

$$\iint_D xy\,dx\,dy = \iint_{D_1} xy\,dx\,dy + \iint_{D_2} xy\,dx\,dy = 2\int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy\,dy\right)dx + \int_0^1\left(\int_{x-1}^0 xy\,dy\right)dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{24} = \frac{5}{24} \quad ■$$

<u>Esempio</u>

Calcolare l'integrale doppio $\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$ sull'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2+y^2 \le 1\}$



Passando in coordinate polari $\begin{cases} x = 1+\rho\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$ $\rho \in [0,1]$, $\theta \in [0,2\pi]$

si ha che $x^2+y^2 = (1+\rho\cos\theta)^2 + \rho^2\,\mathrm{sen}^2\theta = 1+\rho^2(\cos^2\theta+\mathrm{sen}^2\theta)+2\rho\cos\theta$
$= 1+\rho^2+2\rho\cos\theta$

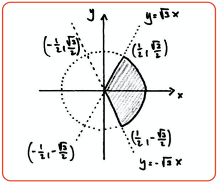
Quindi l'integrale diventa:

$$\boxed{\begin{aligned}\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \rho(1+2\rho\cos\theta+\rho^2)\,d\rho\right)d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1(\rho+2\rho^2\cos\theta+\rho^3)\,d\rho\right)d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{\rho^2}{2}+2\cos\theta\frac{\rho^3}{3}+\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\cos\theta+\frac{1}{4}\right)d\theta = \frac{3}{4}2\pi + \frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta = \frac{3}{2}\pi + 0 = \frac{3}{2}\pi \quad ■\end{aligned}}$$

Esempio

Calcolare l'integrale doppio

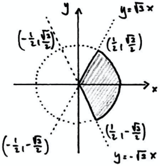
$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1, \ -\sqrt{3}x \leq y \leq \sqrt{3}x, \ x \geq 0 \}$$



$$\boxed{I = \iint_A x e^{\sqrt{x^2+y^2}} \, dx\,dy}$$

Esempio

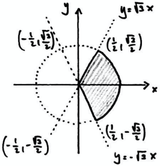
Calcolare l'integrale doppio I su $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1,\ -\sqrt{3}x \le y \le \sqrt{3}x,\ x \ge 0\}$



Il dominio è sicuramente regolare e per andare ad effettuare l'integrazione usiamo le coordinate polari $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$ con $\rho \in [0,1]$

Esempio

Calcolare l'integrale doppio I su $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1,\ -\sqrt{3}x \leq y \leq \sqrt{3}x,\ x \geq 0\}$



Il dominio è sicuramente regolare e per andare ad effettuare l'integrazione usiamo le coordinate polari $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$ con $\rho \in [0,1]$

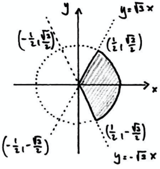
Per determinare dove varia θ osserviamo che $\frac{y}{x} = \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \mathrm{tan}\,\theta$

Dato che $y = \sqrt{3}x \Rightarrow \frac{y}{x} = \sqrt{3} = \tan\theta = \underbrace{\frac{\sqrt{3}/2}{1/2}}_{\theta = \frac{\pi}{3}} = \underbrace{\frac{-\sqrt{3}/2}{-1/2}}_{\theta = \frac{4}{3}\pi}$ | Nel primo quadrante $\Rightarrow \theta = \pi/3$

Poi $y = -\sqrt{3}x \Rightarrow \frac{y}{x} = -\sqrt{3} = \tan\theta = \underbrace{\frac{\sqrt{3}/2}{-1/2}}_{\theta = \frac{2}{3}\pi} = \underbrace{\frac{-\sqrt{3}/2}{1/2}}_{\theta = \frac{5}{3}\pi}$ | Nel quarto quadrante $\Rightarrow \theta = \frac{5}{3}\pi$

Esempio

Calcolare l'integrale doppio I su $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1,\ -\sqrt{3}x \le y \le \sqrt{3}x,\ x \ge 0\}$



Il dominio è sicuramente regolare e per andare ad effettuare l'integrazione usiamo le coordinate polari $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$ con $\rho \in [0,1]$

Per determinare dove varia θ osserviamo che $\frac{y}{x} = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$

$$\begin{cases} \text{Dato che } y = \sqrt{3}x \Rightarrow \frac{y}{x} = \sqrt{3} = \tan\theta = \underbrace{\frac{\sqrt{3}/2}{1/2}}_{\theta=\frac{\pi}{3}} = \underbrace{\frac{-\sqrt{3}/2}{-1/2}}_{\theta=\frac{4}{3}\pi} \\ \text{Poi } y = -\sqrt{3}x \Rightarrow \frac{y}{x} = -\sqrt{3} = \tan\theta = \underbrace{\frac{\sqrt{3}/2}{-1/2}}_{\theta=\frac{2}{3}\pi} = \underbrace{\frac{-\sqrt{3}/2}{1/2}}_{\theta=\frac{5}{3}\pi} \end{cases}$$

Nel primo quadrante $\Rightarrow \theta = \pi/3$

Nel quarto quadrante $\Rightarrow \theta = \frac{5}{3}\pi$

Per evitare di considerare $\theta \in [0,\pi/3] \cup [5/3\pi, 2\pi]$

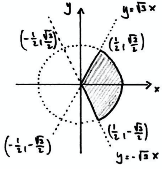
$\Rightarrow \frac{5}{3}\pi - 2\pi = -\frac{\pi}{3}$ quindi $\theta \in [-\pi/3, \pi/3]$ e $\rho \in [0,1]$ come già detto.

$T: D \to T(D) = A$

$D = [0,1] \times [-\pi/3, \pi/3]$

Esempio

Calcolare l'integrale doppio I su $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1,\ -\sqrt{3}x \le y \le \sqrt{3}x,\ x \ge 0\}$



Il dominio è sicuramente regolare e per andare ad effettuare l'integrazione usiamo le coordinate polari $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$ con $\rho \in [0,1]$

Per determinare dove varia θ osserviamo che $\frac{y}{x} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$

$$\begin{cases} \text{Dato che } y=\sqrt{3}x \Rightarrow \frac{y}{x} = \sqrt{3} = \tan\theta = \underset{\theta=\frac{\pi}{3}}{\frac{\sqrt{3}/2}{1/2}} = \underset{\theta=\frac{4}{3}\pi}{\frac{-\sqrt{3}/2}{-1/2}} & \text{Nel primo quadrante} \Rightarrow \theta = \pi/3 \\ \text{Poi } y=-\sqrt{3}x \Rightarrow \frac{y}{x} = -\sqrt{3} = \tan\theta = \underset{\theta=\frac{2}{3}\pi}{\frac{\sqrt{3}/2}{-1/2}} = \underset{\theta=\frac{5}{3}\pi}{\frac{-\sqrt{3}/2}{1/2}} & \text{Nel quarto quadrante} \Rightarrow \theta = \frac{5}{3}\pi \end{cases}$$

Per evitare di considerare $\theta \in [0,\pi/3] \cup [5/3\pi, 2\pi]$

$\Rightarrow \frac{5}{3}\pi - 2\pi = -\frac{\pi}{3}$ quindi $\theta \in [-\pi/3, \pi/3]$ e $\rho \in [0,1]$ come già detto. $T : D \to T(D) = A$

$D = [0,1] \times [-\pi/3, \pi/3]$

$$I = \iint_{T(D)=A} x\, e^{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \left(\int_0^1 \rho\cos\theta\, e^{\rho}\, \rho\, d\rho \right) d\theta = \left(\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \cos\theta\, d\theta \right) \left(\int_0^1 \rho^2 e^{\rho}\, d\rho \right) = \Big(\sin\theta \Big)_{-\pi/3}^{\pi/3} \Big(\rho^2 e^{\rho} - 2\rho e^{\rho} + 2e^{\rho} \Big)_0^1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right) (e-2)$$

$$= \sqrt{3}(e-2).$$