Esercizi sugli integrali tripli

Luca Bisconti

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
FIRENZE

Disclaimer

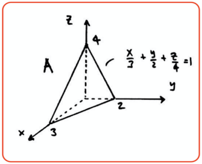
Per l'attribuzione, l'autore del contenuto è: **Luca Bisconti**

Firenze, 14/04/2020

Esempi riguardo gli integrali tripli

Esempio 1

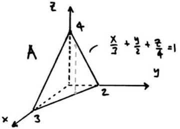
Calcolare l'integrale $\iiint_A y \, dx\, dy\, dz$ dove $A = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ \frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} \leq 1 \right\}$



Esempi riguardo gli integrali tripli

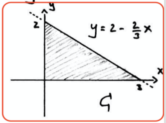
Esempio 1

Calcolare l'integrale $\iiint\limits_A y \, dx \, dy \, dz$ dove $A = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, \ y \geq 0, \ z \geq 0, \ \frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} \leq 1 \right\}$



Il dominio è z-semplice (normale rispetto al piano xy); infatti se consideriamo la sua proiezione C sul piano xy abbiamo:

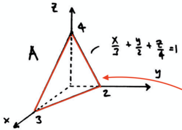
$$\boxed{C = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3, \ 0 \leq y \leq 2 - \frac{2x}{3} \right\}}$$



Esempi riguardo gli integrali tripli

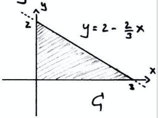
Esempio 1

Calcolare l'integrale $\iiint_A y \, dx \, dy \, dz$ dove $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} \leq 1\}$



Il dominio è z-semplice (normale rispetto al piano xy); infatti se consideriamo la sua proiezione C sul piano xy abbiamo:

$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3, \ 0 \leq y \leq 2 - \frac{2x}{3}\}$



Quindi dalla definizione di A segue che:

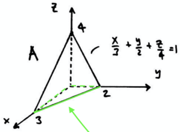
$\boxed{f_2(x,y) = 4 - \frac{4}{3}x - 2y}$ e $f_2 : C \to \mathbb{R}$

e $\boxed{f_1(x,y) = 0}$, $f_1 : C \to \mathbb{R}$

Esempi riguardo gli integrali tripli

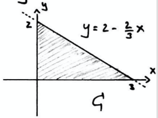
Esempio 1

Calcolare l'integrale $\iiint_A y \, dx \, dy \, dz$ dove $A = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} \leq 1 \right\}$



Il dominio è z-semplice (normale rispetto al piano xy); infatti se consideriamo la sua proiezione G sul piano xy abbiamo:

$C = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3, \ 0 \leq y \leq 2 - \frac{2x}{3} \right\}$



Quindi delle definizione di A segue che:

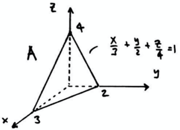
$\boxed{f_2(x,y) = 4 - \frac{4}{3}x - 2y}$ e $f_2 : G \to \mathbb{R}$

e $\boxed{f_1(x,y) = 0}$, $f_1 : G \to \mathbb{R}$

Esempi riguardo gli integrali tripli

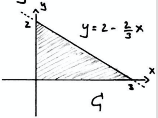
Esempio 1

Calcolare l'integrale $\iiint_A y\,dx\,dy\,dz$ dove $A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0,\ \frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}\leq 1\right\}$



Il dominio è z-semplice (normale rispetto al piano xy); infatti se consideriamo la sua proiezione C sul piano xy abbiamo:

$C=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\leq x\leq 3,\ 0\leq y\leq 2-\frac{2x}{3}\right\}$



Quindi dalla definizione di A segue che:

$f_2(x,y)=4-\frac{4}{3}x-2y$ e $f_2 : C\to\mathbb{R}$

e $f_1(x,y)=0$, $f_1 : C\to\mathbb{R}$

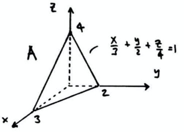
L'insieme A si può riscrivere come $\boxed{A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in C,\ 0\leq z\leq 4-\frac{4}{3}x-2y\right\}}$

Di conseguenza: $\iiint_A y\,dx\,dy\,dz=\iint_C\left(\int_0^{4-4/3x-2y} y\,dz\right)dx\,dy=\iint_C(4-4/3x-2y)\,y\,dx\,dy$

Esempi riguardo gli integrali tripli

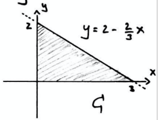
Esempio 1

Calcolare l'integrale $\iiint_A y \, dx \, dy \, dz$ dove $A = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \ \frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} \leq 1 \right\}$



Il dominio è z-semplice (normale rispetto al piano xy); infatti se consideriamo la sua proiezione C sul piano xy abbiamo:

$C = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3, \ 0 \leq y \leq 2 - \frac{2x}{3} \right\}$



Quindi dalla definizione di A segue che:

$f_2(x,y) = 4 - \frac{4}{3}x - 2y$ e $f_2 : C \to \mathbb{R}$

e $f_1(x,y) = 0$, $f_1 : C \to \mathbb{R}$

L'insieme A si può riscrivere come $A = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in C, \ 0 \leq z \leq 4 - \frac{4}{3}x - 2y \right\}$

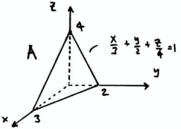
Di conseguenza: $\iiint_A y \, dx \, dy \, dz = \iint_C \left(\int_0^{4 - 4/3 x - 2y} y \, dz \right) dx \, dy = \iint_C (4 - 4/3 x - 2y) \, y \, dx \, dy =$

$$\boxed{= \int_0^3 \left(\int_0^{2 - 2/3 x} \left(4y - \frac{4}{3}xy - 2y^2\right) dy \right) dx = 2 \int_0^3 \left(y^2 - \frac{x}{3}y^2 - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^{2 - \frac{2}{3}x} dx = 2 \int_0^3 y^2\left(1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{3}\right)\Big|_0^{2 - \frac{2}{3}x} dx =}$$

Esempi riguardo gli integrali tripli

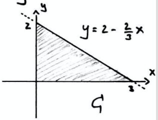
Esempio 1

Calcolare l'integrale $\iiint_A y \, dx\, dy\, dz$ dove $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} \leq 1\}$



Il dominio è z-semplice (normale rispetto al piano xy); infatti se consideriamo la sua proiezione $\mathcal{C}$ sul piano xy abbiamo:

$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3, \ 0 \leq y \leq 2 - \frac{2x}{3}\}$



Quindi dalla definizione di A segue che:

$f_2(x,y) = 4 - \frac{4}{3}x - 2y$ e $f_2 : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$

e $f_1(x,y) = 0$, $f_1 : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$

L'insieme A si può riscrivere come $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \mathcal{C}, \ 0 \leq z \leq 4 - \frac{4}{3}x - 2y\}$

Di conseguenza: $\iiint_A y \, dx\, dy\, dz = \iint_C \left(\int_0^{4-4/3x-2y} y \, dz \right) dx\, dy = \iint_{\mathcal{C}} (4 - 4/3x - 2y)\, y \, dx\, dy =$

$$= \int_0^3 \left(\int_0^{2-2/3x} (4y - \tfrac{4}{3}xy - 2y^2)\, dy \right) dx = 2 \int_0^3 \left(y^2 - \frac{x}{3}y^2 - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^{2-\frac{2}{3}x} dx = 2 \int_0^3 y^2\left(1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{3}\right)\Big|_0^{2-\frac{2}{3}x} =$$

$$\boxed{= 2 \int_0^3 \left(2 - \tfrac{2}{3}x\right)^2 \left(1 - \frac{x}{3} - \frac{2}{3} + \frac{2x}{9}\right) dx = 8 \int_0^3 \left(1 - \frac{x}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{x}{9}\right) dx = \frac{8}{3} \int_0^3 \left(1 - \frac{x}{3}\right)^3 dx = -2 \left(1 - \frac{x}{3}\right)^4 \Big|_0^3 = 2}$$ ■

Esempio 2

Consideriamo l'integrale triplo $\boxed{\iiint_A x \, dx \, dy \, dz}$ dove $\boxed{A = \{ (x,y,z) : (x-2)^2+(y-2)^2 \le 1 , \ 0 \le z \le 1 \}}$

Esempio 2

Consideriamo l'integrale triplo $\iiint_A x \, dx \, dy \, dz$ dove $A = \{ (x,y,z) : (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 1 , \ 0 \leq z \leq 1 \}$

Effettuiamo un primo cambio di variabili

$$\begin{cases} u = x-2 \\ v = y-2 \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \det \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

quindi $x = u+2$, $y = v+2$

$T(u,v,z) = (u+2, v+2, z)$

Di conseguenza: $\boxed{\iiint_A x \, dx \, dy \, dz = \iiint_{A'} (u+2) \, du \, dv \, dz}$ con $\boxed{A' = \{ (u,v,z) : u^2 + v^2 \leq 1 , \ 0 \leq z \leq 1 \}}$

Esempio 2

Consideriamo l'integrale triplo $\iiint_A x \, dx\, dy\, dz$ dove $A = \{(x,y,z) : (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1\}$

Effettuiamo un primo cambio di variabili
$$\begin{cases} u = x-2 \\ v = y-2 \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \det \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

quindi $x = u+2$, $y = v+2$

$$T(u,v,z) = (u+2, v+2, z)$$

Di conseguenza: $\iiint_A x \, dx\, dy\, dz = \iiint_{A'} (u+2)\, du\, dv\, dz$ con $A' = \{(u,v,z) : u^2+v^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1\}$

Passando in coordinate cilindriche $u = \rho\cos\theta$, $v = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta$, $z = z$ otteniamo $(D = \overset{\rho}{[0,1]} \times \overset{\theta}{[0,2\pi]} \times \overset{z}{[0,1]})$

$$\boxed{\iiint_A x \, dx\, dy\, dz = \iiint_{A'} (u+2)\, du\, dv\, dz = \iiint_D (2 + \rho\cos\theta)\rho \, d\rho\, d\theta\, dz = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \rho(\rho\cos\theta + 2)\, dz \right) d\theta \right) d\rho}$$

Esempio 2

Consideriamo l'integrale triplo $\iiint_A x \, dx\, dy\, dz$ dove $A = \{(x,y,z) : (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 1 ,\ 0 \leq z \leq 1\}$

Effettuiamo un primo cambio di variabili $\begin{cases} u = x-2 \\ v = y-2 \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \det \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

quindi $x = u+2$, $y = v+2$

$T(u,v,z) = (u+2, v+2, z)$

Di conseguenza: $\iiint_A x\, dx\, dy\, dz = \iiint_{A'} (u+2)\, du\, dv\, dz$ con $A' = \{(u,v,z) : u^2+v^2 \leq 1 ,\ 0 \leq z \leq 1\}$

Passando in coordinate cilindriche $u = \rho\cos\theta$, $v = \rho \operatorname{sen}\theta$, $z = z$ otteniamo $\left(D = \overset{\rho}{[0,1]} \times \overset{\theta}{[0,2\pi]} \times \overset{z}{[0,1]}\right)$

$$\iiint_A x\, dx\, dy\, dz = \iiint_{A'} (u+2)\, du\, dv\, dz = \iiint_D (2+\rho\cos\theta)\rho\, d\rho\, d\theta\, dz = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \rho(\rho\cos\theta+2)\, dz \right) d\theta \right) d\rho$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \rho(\rho\cos\theta+2)\, d\theta \right) d\rho = \int_0^1 \rho(\rho \operatorname{sen}\theta + 2\theta)\Big|_0^{2\pi} d\rho = \int_0^1 4\pi\rho\, d\rho = 2\pi\rho^2\Big|_0^1 = 2\pi \quad \blacksquare$$

Esempio 2

Consideriamo l'integrale triplo $\iiint_A x \, dx \, dy \, dz$ dove $A = \{ (x, y, z) : (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 1 , \; 0 \leq z \leq 1 \}$

Effettuiamo un primo cambio di variabili $\begin{cases} u = x-2 \\ v = y-2 \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \det \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

quindi $x = u+2 , \; y = v+2$

$T(u, v, z) = (u+2, v+2, z)$

Di conseguenza: $\iiint_A x \, dx \, dy \, dz = \iiint_{A'} (u+2) \, du \, dv \, dz$ con $A' = \{ (u, v, z) : u^2 + v^2 \leq 1 , \; 0 \leq z \leq 1 \}$

Passando in coordinate cilindriche $u = \rho \cos\theta , \; v = \rho \,\text{sen}\,\theta , \; z = z$ otteniamo $\left(D = \overset{\rho}{[0,1]} \times \overset{\theta}{[0,2\pi]} \times \overset{z}{[0,1]} \right)$

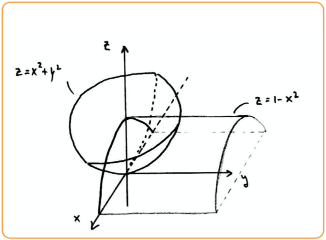
$$\iiint_A x \, dx \, dy \, dz = \iiint_{A'} (u+2) \, du \, dv \, dz = \iiint_D (2 + \rho\cos\theta)\rho \, d\rho \, d\theta \, dz = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \rho(\rho\cos\theta + 2) \, dz \right) d\theta \right) d\rho$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \rho(\rho\cos\theta + 2) \, d\theta \right) d\rho = \int_0^1 \rho(\rho \,\text{sen}\,\theta + 2\theta) \Big|_0^{2\pi} d\rho = \int_0^1 4\pi\rho \, d\rho = 2\pi\rho^2 \Big|_0^1 = 2\pi \; ■$$

- Si poteva anche usare direttanente: $\boxed{(x = 2 + \rho\cos\vartheta , \; y = 2 + \rho\sin\vartheta , \; z = z)}$

Esempio 3

Calcolare il volume del dominio $A = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \underset{\substack{\uparrow \\ \text{interno di un paraboloide ellittico}}}{x^2+y^2 \leq z} , \underset{\substack{\uparrow \\ \text{interno di un cilindro a sezione parabolica}}}{z \leq 1-x^2} \}$



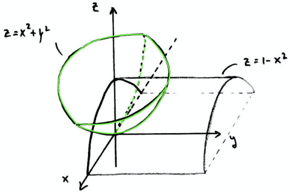
Esempio 3

interno di un paraboloide ellittico

interno di un cilindro a sezione parabolica

Calcolare il volume del dominio $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \underset{\downarrow}{x^2+y^2 \leq z} \ , \ \underset{\downarrow}{z \leq 1-x^2}\}$

- La prima disequazione $x^2+y^2 \leq z$ individua l'interno di un paraboloide ellittico



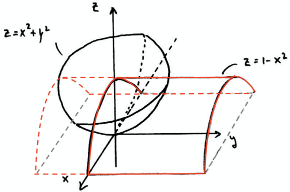
Esempio 3

interno di un paraboloide ellittico

interno di un cilindro a sezione parabolica

Calcolare il volume del dominio $A = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \underset{\downarrow}{x^2+y^2 \leq z} \,,\ \underset{\downarrow}{z \leq 1-x^2} \}$

- La prima disequazione $x^2+y^2 \leq z$ individua l'interno di un paraboloide ellittico
- La seconda disequazione $z \leq 1-x^2$ individua l'interno di un cilindro a sezione parabolica



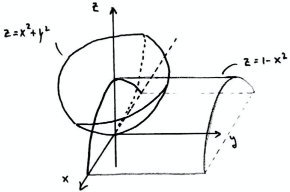
Esempio 3

interno di un paraboloide ellittico

interno di un cilindro a sezione parabolica

Calcolare il volume del dominio $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq z \ , \ z \leq 1-x^2\}$

- La prima disequazione $x^2+y^2 \leq z$ individua l'interno di un paraboloide ellittico
- La seconda disequazione $z \leq 1-x^2$ individua l'interno di un cilindro a sezione parabolica



Per calcolare $\iiint_A 1 \, dx\, dy\, dz$ effettuiamo una integrazione per fili.

La proiezione sul piano xy è $C = \{(x,y) : 2x^2+y^2 \leq 1\}$

ottenute risolvendo $\begin{cases} z = x^2+y^2 \\ z = 1-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x^2+y^2 \\ x^2+y^2 = 1-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x^2+y^2 \\ 2x^2+y^2 = 1 \end{cases}$

e proiettando su $z=0$: $\{2x^2+y^2=1\} \cap \{z=0\} = \partial C$

frontiera di C

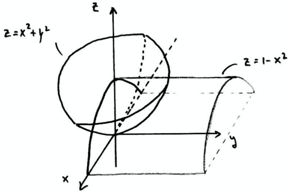
Esempio 3

interno di un paraboloide ellittico

interno di un cilindro a sezione parabolica

Calcolare il volume del dominio $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le z \,,\ z \le 1-x^2\}$

- La prima disequazione $x^2+y^2 \le z$ individua l'interno di un paraboloide ellittico
- La seconda disequazione $z \le 1-x^2$ individua l'interno di un cilindro a sezione parabolica



Per calcolare $\iiint_A 1 \, dx\, dy\, dz$ effettuiamo una integrazione per fili.

La proiezione sul piano xy è $C_1 = \{(x,y) : 2x^2+y^2 \le 1\}$

ottenuta risolvendo $\begin{cases} z = x^2+y^2 \\ z = 1-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x^2+y^2 \\ x^2+y^2 = 1-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x^2+y^2 \\ 2x^2+y^2 = 1 \end{cases}$

e proiettando su $z=0$: $\{2x^2+y^2=1\} \cap \{z=0\} = \partial C_1$

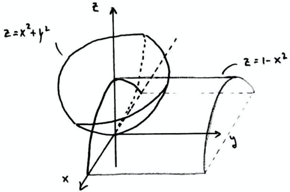
Allora

$$\boxed{\iiint_A 1 \, dx\,dy\,dz = \iint_{C_1} \left(\int_{x^2+y^2}^{1-x^2} dz \right) dx\, dy = \iint_{C_1} (1-x^2-x^2-y^2)\, dx\, dy = \iint_{C_1} (1-2x^2-y^2)\, dx\, dy}$$

Esempio 3

Calcolare il volume del dominio $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \underset{\substack{\uparrow \\ \text{interno di un paraboloide ellittico}}}{x^2+y^2 \leq z} , \ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{interno di un cilindro a sezione parabolica}}}{z \leq 1-x^2} \}$

- La prima disequazione $x^2+y^2 \leq z$ individua l'interno di un paraboloide ellittico
- La seconda disequazione $z \leq 1-x^2$ individua l'interno di un cilindro a sezione parabolica



Per calcolare $\iiint_A 1 \, dx\,dy\,dz$ effettuiamo una integrazione per fili.

La proiezione sul piano xy è $C_1 = \{(x,y) : 2x^2+y^2 \leq 1\}$

ottenuta risolvendo $\begin{cases} z = x^2+y^2 \\ z = 1-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x^2+y^2 \\ x^2+y^2 = 1-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x^2+y^2 \\ 2x^2+y^2 = 1 \end{cases}$

e proiettando su $z=0$: $\{2x^2+y^2=1\} \wedge \{z=0\} = \partial C_1$

Allora $\iiint_A 1 \, dx\,dy\,dz = \iint_{C_1} \left(\int_{x^2+y^2}^{1-x^2} dz \right) dx\,dy = \iint_{C_1} (1-x^2-x^2-y^2)\,dx\,dy = \iint_{C_1} (1-2x^2-y^2)\,dx\,dy$;

$$\boxed{\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \rho \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases} \quad 0 \leq \rho \leq 1, \ 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad \text{coordinate ellittiche}}$$

$$\boxed{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{coordinate ellittiche}}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1-\rho^2)\rho \, d\rho \, d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \int_0^1 (\rho - \rho^3)\,d\rho = \sqrt{2}\pi \left(\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \sqrt{2}\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}\pi}{4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}}$$

■