

Esercizi sugli integrali tripli

Luca Bisconti



Disclaimer

Il presente contenuto è stato prodotto per far fronte alle esigenze di didattica a distanza resasi necessarie per l'emergenza legata alla diffusione del virus COVID-19.

Il contenuto ha una finalità esclusivamente didattica, e viene rilasciato in uso agli studenti e alle studentesse sotto licenza:

Creative Commons BY-NC-ND

Attribuzione – Non commerciale – Non opere derivate



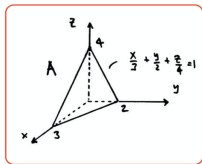
Per l'attribuzione, l'autore del contenuto è: **Luca Bisconti**

Esempi riguardo gli integrali tripliEsempio 1

Calcolare l'integrale

$$\iiint_A y \, dx \, dy \, dz \quad \text{dove}$$

$$A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} \leq 1 \right\}$$



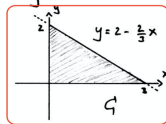
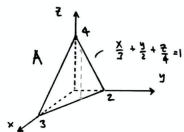
Esempi riguardo gli integrali tripliEsempio 1

Calcolare l'integrale

$$\iiint_A y \, dx \, dy \, dz \quad \text{dove } A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} \leq 1 \right\}$$

Il dominio è z -semplice (normale rispetto al piano xy); infatti se consideriamo la sua proiezione C sul piano xy abbiamo:

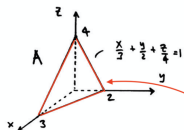
$$C = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2 - \frac{2x}{3} \right\}$$



Esempi riguardo gli integrali tripliEsempio 1

Calcolare l'integrale

$$\iiint_A y \, dx \, dy \, dz \quad \text{dove } A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} \leq 1 \right\}$$



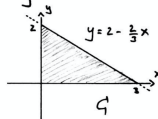
Il dominio è z -semplice (normale rispetto al piano xy); infatti se consideriamo la sua proiezione C sul piano xy abbiamo:

$$C = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2 - \frac{2x}{3} \right\}$$

Quindi dalla definizione di A segue che:

$$f_2(x, y) = 4 - \frac{4}{3}x - 2y \quad \text{e } f_2: C \rightarrow \mathbb{R}$$

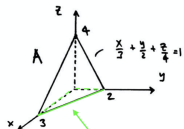
$$\text{e } f_1(x, y) = 0, \quad f_1: C \rightarrow \mathbb{R}$$



Esempi riguardo gli integrali tripliEsempio 1

Calcolare l'integrale

$$\iiint_A y \, dx \, dy \, dz \quad \text{dove } A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} \leq 1 \right\}$$



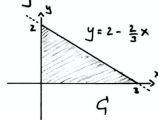
Il dominio è z -semplice (normale rispetto al piano xy); infatti se consideriamo la sua proiezione C sul piano xy abbiamo:

$$C = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2 - \frac{2x}{3} \right\}$$

Quindi dalla definizione di A segue che:

$$f_2(x, y) = 4 - \frac{4}{3}x - 2y \quad \text{e } f_2: C \rightarrow \mathbb{R}$$

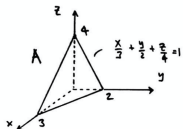
$$\text{e } f_1(x, y) = 0, \quad f_1: C \rightarrow \mathbb{R}$$



Esempi riguardo gli integrali tripliEsempio 1

Calcolare l'integrale

$$\iiint_A y \, dx \, dy \, dz \quad \text{dove } A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} \leq 1 \right\}$$



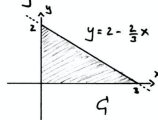
Il dominio è z -semplice (normale rispetto al piano xy); infatti se consideriamo la sua proiezione C sul piano xy abbiamo:

$$C = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2 - \frac{2}{3}x \right\}$$

Quindi dalla definizione di A segue che:

$$f_z(x, y) = 4 - \frac{4}{3}x - 2y \quad \text{e } f_z: C \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{e } f_1(x, y) = 0, \quad f_1: C \rightarrow \mathbb{R}$$



L'insieme A si può riscrivere come

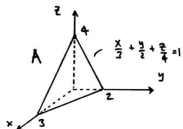
$$A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in C, 0 \leq z \leq 4 - \frac{4}{3}x - 2y \right\}$$

Di conseguenza:
$$\iiint_A y \, dx \, dy \, dz = \iint_C \left(\int_0^{4 - \frac{4}{3}x - 2y} y \, dz \right) dx \, dy = \iint_C (4 - \frac{4}{3}x - 2y) y \, dx \, dy$$

Esempi riguardo gli integrali tripliEsempio 1

Calcolare l'integrale

$$\iiint_A y \, dx \, dy \, dz \quad \text{dove } A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} \leq 1 \right\}$$



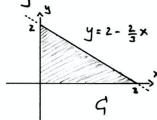
Il dominio è z -semplice (normale rispetto al piano xy); infatti se consideriamo la sua proiezione C sul piano xy abbiamo:

$$C = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2 - \frac{2}{3}x \right\}$$

Quindi dalla definizione di A segue che:

$$f_z(x, y) = 4 - \frac{4}{3}x - 2y \quad \text{e } f_z: C \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{e } f_1(x, y) = 0, \quad f_1: C \rightarrow \mathbb{R}$$



L'insieme A si può riscrivere come $A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in C, 0 \leq z \leq 4 - \frac{4}{3}x - 2y \right\}$

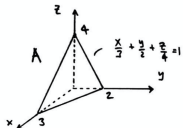
Di conseguenza:
$$\iiint_A y \, dx \, dy \, dz = \iint_C \left(\int_0^{4 - \frac{4}{3}x - 2y} dz \right) dx \, dy = \iint_C (4 - \frac{4}{3}x - 2y) y \, dx \, dy =$$

$$= \int_0^3 \left(\int_0^{2 - \frac{2}{3}x} (4y - \frac{4}{3}xy - 2y^2) dy \right) dx = 2 \int_0^3 \left(y^2 - \frac{x}{3}y^2 - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^{2 - \frac{2}{3}x} dx = 2 \int_0^3 y^2 \left(1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{3} \right) \Big|_0^{2 - \frac{2}{3}x} dx =$$

Esempi riguardo gli integrali tripliEsempio 1

Calcolare l'integrale

$$\iiint_A y \, dx \, dy \, dz \quad \text{dove } A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} \leq 1 \right\}$$



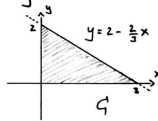
Il dominio è z -semplice (normale rispetto al piano xy); infatti se consideriamo la sua proiezione C sul piano xy abbiamo:

$$C = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2 - \frac{2}{3}x \right\}$$

Quindi dalla definizione di A segue che:

$$f_z(x, y) = 4 - \frac{4}{3}x - 2y \quad \text{e } f_z: C \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{e } f_1(x, y) = 0, \quad f_1: C \rightarrow \mathbb{R}$$



L'insieme A si può riscrivere come $A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in C, 0 \leq z \leq 4 - \frac{4}{3}x - 2y \right\}$

$$\begin{aligned} \text{Di conseguenza: } \iiint_A y \, dx \, dy \, dz &= \iint_C \left(\int_0^{4 - \frac{4}{3}x - 2y} dz \right) dx \, dy = \iint_C (4 - \frac{4}{3}x - 2y) y \, dx \, dy = \\ &= \int_0^3 \left(\int_0^{2 - \frac{2}{3}x} (4 - \frac{4}{3}x - 2y) y \, dy \right) dx = 2 \int_0^3 \left(y^2 - \frac{x}{3} y^2 - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^{2 - \frac{2}{3}x} dx = 2 \int_0^3 y^2 \left(1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{3} \right) \Big|_0^{2 - \frac{2}{3}x} dx = \end{aligned}$$

$$= 2 \int_0^3 \left(2 - \frac{2}{3}x \right)^2 \left(1 - \frac{x}{3} - \frac{2}{3} + \frac{2x}{9} \right) dx = 8 \int_0^3 \left(1 - \frac{x}{3} \right)^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{x}{3} \right) dx = \frac{8}{3} \int_0^2 \left(1 - \frac{x}{3} \right)^2 dx = -2 \left(1 - \frac{x}{3} \right)^3 \Big|_0^2 = 2$$

Esempio 2

Consideriamo l'integrale triplo $\iiint_A x \, dx \, dy \, dz$ dove $A = \{ (x, y, z) : (x-z)^2 + (y-z)^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1 \}$

Esempio 2

Consideriamo l'integrale triplo $\iiint_A x \, dx \, dy \, dz$ dove $A = \{(x, y, z) : (x-z)^2 + (y-z)^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$

Effettuiamo un primo cambio di variabili:

$$\begin{cases} u = x-z \\ v = y-z \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \det \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

quindi: $x = u+z, y = v+z$

$$T(u, v, z) = (u+z, v+z, z)$$

Di conseguenza:

$$\iiint_A x \, dx \, dy \, dz = \iiint_{A'} (u+z) \, du \, dv \, dz$$

$$\text{con } A' = \{(u, v, z) : u^2 + v^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$$

Esempio 2

Consideriamo l'integrale triplo $\iiint_A x \, dx \, dy \, dz$ dove $A = \{(x, y, z) : (x-z)^2 + (y-z)^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$

Effettuiamo un primo cambio di variabili: $\begin{cases} u = x-z \\ v = y-z \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \det \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

quindi: $x = u+z, y = v+z$

$T(u, v, z) = (u+z, v+z, z)$

Di conseguenza: $\iiint_A x \, dx \, dy \, dz = \iiint_{A'} (u+z) \, du \, dv \, dz$ con $A' = \{(u, v, z) : u^2 + v^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$

Passando in coordinate cilindriche $u = \rho \cos \theta, v = \rho \sin \theta, z = z$ otteniamo $(D = [0, 1] \times [0, 2\pi] \times [0, 1])$

$$\iiint_A x \, dx \, dy \, dz = \iiint_{A'} (u+z) \, du \, dv \, dz = \iiint_D (z + \rho \cos \theta) \rho \, d\rho \, d\theta \, dz = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (\rho \cos \theta + z) \rho \, d\rho \right) d\theta \right) dz$$

Esempio 2

Consideriamo l'integrale triplo $\iiint_A x \, dx \, dy \, dz$ dove $A = \{(x, y, z) : (x-z)^2 + (y-z)^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$

Effettuiamo un primo cambio di variabili: $\begin{cases} u = x-z \\ v = y-z \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \det \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

quindi: $x = u+z, y = v+z$
 $T(u, v, z) = (u+z, v+z, z)$

Di conseguenza: $\iiint_A x \, dx \, dy \, dz = \iiint_{A'} (u+z) \, du \, dv \, dz$ con $A' = \{(u, v, z) : u^2 + v^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$

Passiamo in coordinate cilindriche $u = \rho \cos \theta, v = \rho \sin \theta, z = z$ otteniamo $(D = [0, 1] \times [0, 2\pi] \times [0, 1])$

$$\iiint_A x \, dx \, dy \, dz = \iiint_{A'} (u+z) \, du \, dv \, dz = \iiint_D (z + \rho \cos \theta) \rho \, d\rho \, d\theta \, dz = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (\rho \cos \theta + z) \, d\rho \right) d\theta \right) dz$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \rho (\rho \cos \theta + z) \, d\theta \right) dz = \int_0^1 \rho (\rho \sin \theta + z\rho) \Big|_0^{2\pi} d\rho = \int_0^1 4\pi \rho \, d\rho = 2\pi \rho^2 \Big|_0^1 = 2\pi$$

Esempio 2

Consideriamo l'integrale triplo $\iiint_A x \, dx \, dy \, dz$ dove $A = \{(x, y, z) : (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$

Effettuiamo un primo cambio di variabili $\begin{cases} u = x-2 \\ v = y-2 \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \det \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

quindi: $x = u+2, y = v+2$
 $T(u, v, z) = (u+2, v+2, z)$

Di conseguenza: $\iiint_A x \, dx \, dy \, dz = \iiint_{A'} (u+2) \, du \, dv \, dz$ con $A' = \{(u, v, z) : u^2 + v^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$

Passiamo in coordinate cilindriche $u = \rho \cos \theta, v = \rho \sin \theta, z = z$ otteniamo $D = [0, 1] \times [0, 2\pi] \times [0, 1]$

$$\begin{aligned} \iiint_A x \, dx \, dy \, dz &= \iiint_{A'} (u+2) \, du \, dv \, dz = \iiint_D (z + \rho \cos \theta) \rho \, d\rho \, d\theta \, dz = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (\rho \cos \theta + z) \, d\rho \right) d\theta \right) dz \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \rho (\rho \cos \theta + z) \, d\theta \right) dz = \int_0^1 \rho (\rho \sin \theta + z\theta) \Big|_0^{2\pi} d\rho = \int_0^1 4\pi \rho \, d\rho = 2\pi \rho^2 \Big|_0^1 = 2\pi \quad \blacksquare \end{aligned}$$

• Si poteva anche usare direttamente:

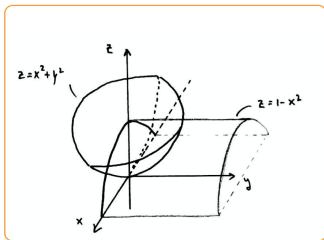
$$(x = 2 + \rho \cos \theta, y = 2 + \rho \sin \theta, z = z)$$

Esempio 3

Calcola il volume del dominio $A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z, z \leq 1 - x^2 \}$

interno di un
paraboloido ellittico
↓

interno di un cilindro
↓ 2 sezioni paraboliche



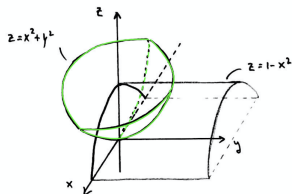
Esempio 3

Calcola il volume del dominio $A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z, z \leq 1 - x^2 \}$

interno di un
paraboloido ellittico
↓

interno di un cilindro
↓ 2 sezioni paraboliche

- La prima disequazione $x^2 + y^2 \leq z$ involuola l'interno di un paraboloido ellittico



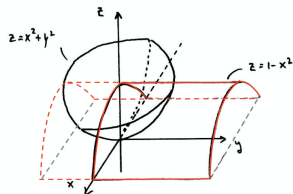
Esempio 3

Calcola il volume del dominio $A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z, z \leq 1 - x^2 \}$

interno di un
paraboloide ellittico
↓

interno di un cilindro
a sezione parabolica
↓

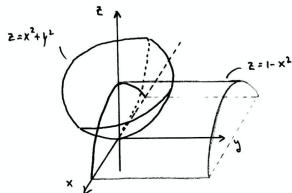
- La prima disuguaglianza $x^2 + y^2 \leq z$ individua l'interno di un paraboloide ellittico
- La seconda disuguaglianza $z \leq 1 - x^2$ individua l'interno di un cilindro a sezione parabolica



Esempio 3

Calcola il volume del dominio $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z, z \leq 1 - x^2\}$

- La prima disuguaglianza $x^2 + y^2 \leq z$ individua l'interno di un paraboloido ellittico
- La seconda disuguaglianza $z \leq 1 - x^2$ individua l'interno di un cilindro a sezione parabolica



Per calcolare $\iiint_A 1 \, dx \, dy \, dz$ effettuiamo una integrazione per fili.

La proiezione sul piano xy è $C = \{(x, y) : z^2 + y^2 \leq 1\}$
 Ottenute risolvendo $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 1 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 = 1 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

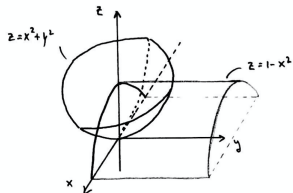
e proiettando su $z=0$: $\{z x^2 + y^2 = 1\} \cap \{z=0\} = \partial C$

↑
frontiera di C

Esempio 3

Calcola il volume del dominio $A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z, z \leq 1 - x^2 \}$

- La prima disuguaglianza $x^2 + y^2 \leq z$ individua l'interno di un paraboloide ellittico
- La seconda disuguaglianza $z \leq 1 - x^2$ individua l'interno di un cilindro a sezione parabolica



Per calcolare $\iiint_A 1 \, dx \, dy \, dz$ effettuiamo una integrazione per fili.

La proiezione sul piano xy è $G = \{ (x, y) : x^2 + y^2 \leq 1 \}$
 ottenute risolvendo $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 1 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 = 1 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

e proiettando su $z = 0 : \{ z x^2 + y^2 = 1 \} \cap \{ z = 0 \} = \emptyset$

$$\text{Allora } \iiint_A 1 \, dx \, dy \, dz = \iint_G \left(\int_{x^2+y^2}^{1-x^2} dz \right) dx \, dy = \iint_G (1 - x^2 - x^2 - y^2) dx \, dy = \iint_G (1 - 2x^2 - y^2) dx \, dy$$

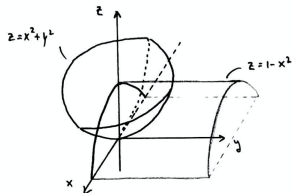
Esempio 3

interno di un
paraboloide ellittico
↓

interno di un cilindro
a sezione parabolica
↓

Calcola il volume del dominio $A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z, z \leq 1 - x^2 \}$

- La prima disuguaglianza $x^2 + y^2 \leq z$ individua l'interno di un paraboloide ellittico
- La seconda disuguaglianza $z \leq 1 - x^2$ individua l'interno di un cilindro a sezione parabolica



Per calcolare $\iiint_A 1 \, dx \, dy \, dz$ effettuiamo una integrazione per fili.

La proiezione sul piano xy è $G = \{ (x, y) : x^2 + y^2 \leq 1 \}$
 ottenute risolvendo $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 1 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 = 1 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ 2x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

e proiettando su $z = 0 : \{ 2x^2 + y^2 = 1 \} \cap \{ z = 0 \} = \partial G$

$$\text{Allora } \iiint_A 1 \, dx \, dy \, dz = \iint_G \left(\int_{x^2+y^2}^{1-x^2} dz \right) dx \, dy = \iint_G (1 - x^2 - x^2 - y^2) dx \, dy = \iint_G (1 - 2x^2 - y^2) dx \, dy;$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - s^2) s \, ds \, d\theta = \frac{2\pi}{\pi} \int_0^1 (s - s^3) \, ds = \sqrt{2}\pi \left(\frac{s^2}{2} - \frac{s^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \sqrt{2}\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}\pi}{4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

coordinate ellittiche

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta \\ y = s \sin \theta \\ 0 \leq s \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

coordinate ellittiche