Connessioni su fibrati vettoriali.

Sia $\pi : E \longrightarrow M$ un fibrato vettoriale di rango r.

Una connessione ∇ su E è una mappa

$$\mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E) \quad \text{t.c.}$$

$\forall \; X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\forall \; s \in \Gamma(E)$ si ha

1. $\nabla_X s$ è $C^\infty(M)$-lineare in X e $\mathbb{R}$-lineare in s

$f \in C^\infty(M)$

(2) $\nabla_X(fs) = X(f)s + f\nabla_X s$

che, in altri termini, possiamo scrivere

$$\nabla(fs) = df \cdot s + f\nabla s$$

(Leibniz rule)

Possiamo anche vedere una connessione come una mappa da

$$\begin{aligned} \underset{\Gamma(E)}{\underset{\parallel}{\Omega^0(E)}} &\longrightarrow \Omega^1(E) \\ s &\longmapsto \nabla s \end{aligned}$$

con $\nabla s(X) \overset{\text{def}}{=} \nabla_X s \quad \forall\ X \in \mathfrak{X}(M)$.

Consideriamo P, il fibrato dei riferimenti di E.

Consideriamo una sezione locale (U, s) (quindi una banalizzazione locale) si ha

$$s = (s_1, \quad , s_r), \quad \text{con} \quad s_i \in \Gamma(E|_U).$$

Allora

$$\nabla s_i = \sum_{j=1}^{r} s_j \, \omega_{ji}$$

1-forme

$$(\nabla s_1, \dots, \nabla s_r) = (s_1, \dots, s_r)\, \omega$$

matrice $r \times r$ di 1-forme su U

in forma sintetica:

$$\boxed{\nabla \underline{s} = \underline{s}\, \omega}$$

in generale, se $\xi \in \Gamma(E)$, ho
localmente

$$\xi = \sum_i \xi^i s_i$$

ossia $$\xi = (s_1, \dots, s_r) \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^r \end{pmatrix}$$

allora

$$\nabla \xi = \sum_{i=1}^{r} \nabla (\xi^i s_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} d\xi^i \cdot s_i + \xi^i \nabla s_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \left(d\xi^i + \sum_{j=1}^{r} \xi^i \omega_{ji} \right) s_i$$

quindi, se $\underline{\xi} = \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^r \end{bmatrix}$, si ha

$$\boxed{\nabla \underline{\xi} = d\underline{\xi} + \omega \underline{\xi}} \quad (*)$$

quindi la matrice di 1-forme ω mi dà localmente la connessione.

Se cambiamo sezione (quindi se cambiamo banalizzazione locale) $s_\alpha : U_\alpha \to P$ e $s_\beta : U_\beta \to P$ sono sezioni locali del fibrato P dei riferimenti di E.

$$\boxed{s_\beta = s_\alpha g_{\alpha\beta}} \qquad g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to GL(r, \mathbb{R})$$

$$s_\beta \omega_\beta \overset{\text{def}}{=} \nabla s_\beta = \nabla(s_\alpha g_{\alpha\beta}) =$$

$$= (\nabla s_\alpha) g_{\alpha\beta} + s_\alpha \, dg_{\alpha\beta} =$$

$$= s_\alpha \omega_\alpha g_{\alpha\beta} + s_\alpha \, dg_{\alpha\beta} =$$

$$= s_\beta g_{\alpha\beta}^{-1} \omega_\alpha g_{\alpha\beta} + s_\beta g_{\alpha\beta}^{-1} dg_{\alpha\beta}$$

$$\Rightarrow (*) \quad \boxed{\omega_\beta = g_{\alpha\beta}^{-1} \omega_\alpha g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}^{-1} dg_{\alpha\beta}}$$

Viceversa dare una banalizzazione di E e una collezione di matrici di 1-forme ω_α che soddisfa ⊛ equivale ad assegnare una connessione.

Fatto: dato $\pi_E : E \longrightarrow M$ esiste una connessione su E.

Terminologia: una connessione sul fibrato tangente si chiama connessione lineare.

NOTA data $(U, x^1, \dots, x^n)$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^{k} \frac{\partial}{\partial x^k}$$

ossia $\quad \omega_{jk}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \Gamma_{ij}^{k}$ simboli di Christoffel

Connessioni su fibrati principali

Sia $\pi : P \longrightarrow M$ un fibrato principale.

Sia $p \in P$, il sottospazio $V_p \subseteq T_p P$ è lo spazio dei vettori tangenti alla fibra, ossia

$$\boxed{V_p = \operatorname{Ker} \pi_* |_p}$$

spazio verticale

<u>NOTA</u> $R_g(p) = p \cdot g$

e $(\pi \circ R_g) = \pi$

$\Rightarrow$ $\boxed{\pi_* \circ R_{g_*} = \pi_*}$

$\Rightarrow$ se $X_p \in T_pP$ è t.c.

$\pi_*(X_p) = 0$ allora $\pi_*(R_{g_*}(X_p)) = 0$

dunque

$X_p \in V_p$ implica $R_{g_*}(X_p) \in V_{pg}$

quindi

$$\boxed{R_{g_*}(V_p) = V_{pg}}$$

Ossia la distribuzione verticale è G-invariante.

inoltre: sia $p \in P$, definiamo

$$j_p : G \longrightarrow P$$
$$g \longmapsto pg$$

quindi $j_p : G \longrightarrow$ (fibra per p)

diffeomorfismo

allora

$$j_{p_*}|_e : \underset{\mathfrak{g}}{\overset{T_eG}{\shortparallel}} \longrightarrow V_p \quad \underline{\text{isomorfismo}}$$

e identità in G

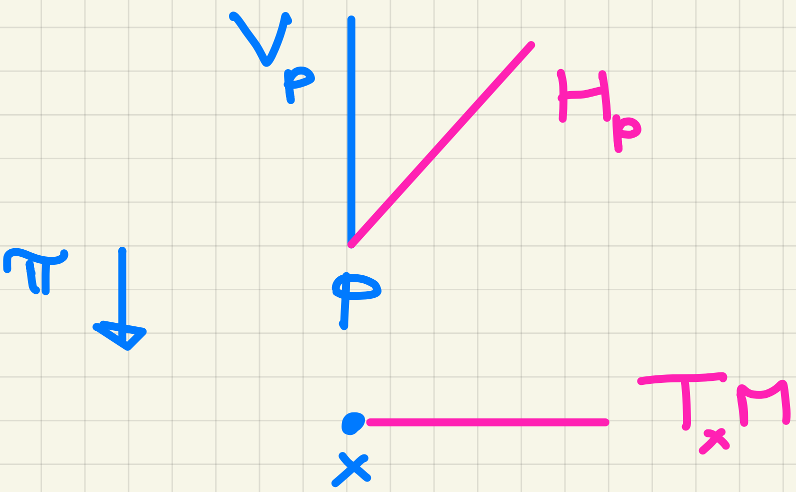
in particolare

$$j_{p_*}[X_1, X_2] = [j_{p_*}(X_1), j_{p_*}(X_2)]$$

<u>NOTA</u> $X \in \mathfrak{g}$ definisce un campo verticale $X^* : X^*_p \overset{\text{def}}{=} j_{p_*}|_e(X)$

Una connessione su P può essere data in tre modi equivalenti:

① una distribuzione orizzontale G-invariante a destra



ossia, $\forall\ p$, abbiamo $H_p \subseteq T_pP$ che varia in modo liscio e t.c.

- $T_pP = V_p \oplus H_p$
- $R_{g_*}(H_p) = H_{pg}$

② una 1-forma a valori in $\mathfrak{g}$, G-invariante

più precisamente una $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ tale che

$$\boxed{(R_g)^* \omega = Ad(g^{-1})\,\omega} \quad ⊛$$

<u>NOTA</u>: data $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ che soddisfa ⊛ si ha che

$H = \ker \omega$ definisce una connessione nel senso della distribuzione orizzontale.

Viceversa, dato una connessione H, definiamo una $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ come segue:

sia $p \in P$ e $u_p \in T_pP$

poiché $T_pP = V_p \oplus H_p$ si ha

$$u_p = u_p^h + u_p^v$$

componente verticale

componente orizzontale

definiamo

$$\boxed{\omega_p(u_p) = X \in \mathfrak{g} \quad \text{dove} \quad X_p^* = u_p^v}$$

NOTA $\ker \omega_p = H_p$

verifichiamo la proprietà di G-invarianza della ω così definita:

$$\left((R_g)^* \omega_p\right)(u_p) \overset{\text{def}}{=} \omega_{pg}\left(R_{g_*}(u_p)\right) =$$

V_p e H_p sono invarianti per R_{g_*}

$$= \omega_{pg}\Big(\underbrace{R_{g_*}(u_p^v)}\Big)$$

componente verticale di $R_{g_*}(u_p)$

cerco $X \in \underline{g}$ t.c. $\boxed{R_{g_*}(u_p^v) = X^*_{pg}}$

<u>NOTA</u>: siano $p \in P$ e $h \in G$

$$(R_g \circ j_p)(h) = R_g(ph) = phg =$$
$$= pgg^{-1}hg = j_{pg} \circ c_{g^{-1}}(h)$$

$$\Rightarrow R_{g_*} \circ j_{p_*}|_e = (j_{p \cdot g})_* (c_{g^{-1}})_*|_e$$

applico a $X \in \mathfrak{g}$ t.c. $X_p^* = u_p^\vee$

$$\Rightarrow \quad R_{g_*}(X_p^*) = \left(Ad(g^{-1})(X)\right)^*_{pg}$$

$$\boxed{\omega_{pg}\left(R_{g_*}(u_p^\vee)\right) = Ad(g^{-1})\left(\omega_p(u_p)\right)}$$

3 gauge fields :

si consideri una banalizzazione locale di P definita da sezioni locali, dunque:

$$\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \quad e \quad s_\alpha : U_\alpha \to \pi^{-1}(U_\alpha)$$

tali che $s_\beta = s_\alpha \, g_{\alpha\beta}$

con $g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to G$ funzioni di transizione.

Allora $s_\alpha^*(\omega) \in \Omega^1(U_\alpha, \mathfrak{g})$

(una matrice di 1-forme definite sull'intorno $U_\alpha \subseteq M$)

denotiamo $\omega_\alpha = s_\alpha^*(\omega)$

NOTA

*

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_\alpha &= g_{\alpha\beta}\,\omega_\beta\, g_{\alpha\beta}^{-1} - dg_{\alpha\beta} \cdot g_{\alpha\beta}^{-1} \\ &= g_{\alpha\beta}\,\omega_\beta\, g_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta}\, d g_{\alpha\beta}^{-1} \end{aligned}}$$

gauge transform

https://terrytao.wordpress.com/2008/09/27/what-is-a-gauge/

Viceversa, data una collezione di $\omega_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha, \mathfrak{g})$ che si trasforma come sopra descritto si dimostra che è una 1-forma di connessione su P.

Restringiamo la nostra attenzione al caso:

$E \xrightarrow{\pi_E} M$ fibrato vettoriale e

$P \xrightarrow{\pi} M$ fibrato dei riferimenti di E, quindi fibrato principale con gruppo di struttura $GL(r, \mathbb{R})$.

connessione su $P \longrightarrow$ connessione su E

Sia $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ una connessione su P.

Sia $\{U_\alpha\}$ s_α una banalizzazione locale di P, con $s_\alpha \in \Gamma(\pi^{-1}(U_\alpha))$ e $s_\beta = s_\alpha g_{\alpha\beta}$

Allora le forme

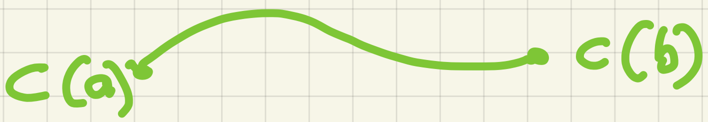
$$\omega_\alpha = s_\alpha^*(\omega) \in \Omega^1(U_\alpha, \mathfrak{g})$$

definiscono una connessione su E mediante la formula $\circledast$.

connessione su E $\longrightarrow$ connessione su P

$\boxed{\text{Passo 1}}$ **trasporto parallelo in E**

Sia $c : [a,b] \longrightarrow M$ una curva.



consideriamo una sezione s di E definita in un intorno della curva.

ξ si dice PARALLELA lungo la curva c se

$$\boxed{\nabla_{\dot{c}(t)} \xi = 0}$$

In coordinate locali

$\underline{s} = (s_1, \dots, s_k)$ $s_i \in \Gamma(E)$ l'equazione

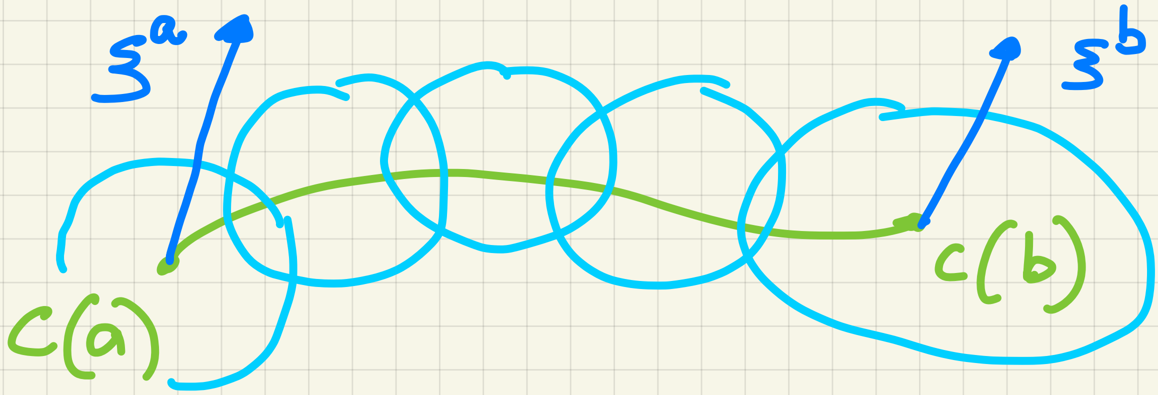
sezione di P (locale)

diventa

$$\boxed{\frac{d\underline{\xi}}{dt} + \omega_s(\dot{c}(t))\underline{\xi} = 0}$$

dove $\underline{\xi} = \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^k \end{bmatrix}$ e $\xi = \sum_i \xi^i s_i$

sistema di equazioni differenziali del primo ordine ammette un'unica soluzione, fissata la condizioni iniziali:



trasporto parallelamente ξ^a lungo la curva $c(t)$ e ottengo ξ^b.

Definisco dunque una mappa, detta <u>trasporto parallelo</u>

$$E_{c(a)} \longrightarrow E_{c(b)}$$

<u>Teorema</u> Dati E con una connessione ∇ e $c : [a,b] \longrightarrow M$ una curva

la mappa

$$\varphi_{a,b} : E_{c(a)} \longrightarrow E_{c(b)}$$

è univocamente definita
ed è un isomorfismo
lineare.

Quindi possiamo trasportare
parallelamente un frame

$$s = (s_1, \dots, s_k) \longrightarrow \left(\varphi_{a,b}(s_1), \dots, \varphi_{a,b}(s_k) \right)$$

Consideriamo una curva
$c : [a,b] \longrightarrow M$.

Un <u>frame parallelo lungo la curva</u> c, $s(t) = (s_1(t), \ , s_k(t))$,
è un frame $s(t)$ di $E_{c(t)}$ $\forall t$,
tale che $s_i(t)$ sono sezioni
parallele, ossia $\nabla_{\dot{c}(t)} s_i(t) = 0$

NOTA: $\boxed{\text{Derivata covariante}}$:

Se $E = TM$ una sezione di E lungo una curva $c: [a,b] \to M$ è un campo vettoriale lungo la curva c, $V(t) \in \Gamma(TM|_{c(t)})$

Esiste un'unica mappa $\mathbb{R}$-lineare

$$\frac{D}{dt} : \Gamma(TM|_{c(t)}) \to \Gamma(TM|_{c(t)})$$

chiamata derivata covariante corrispondente a ∇, t.c

1. $\forall\ f \in C^\infty[a,b]$, $V \in \Gamma(TM|_{c(t)})$

$$\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$$

2. $\forall\ V(t) \in \Gamma(TM|_{c(t)})$ indotto da $\hat{V} \in \Gamma(TM)$

$$\frac{DV}{dt}(t) = \nabla_{\dot{c}(t)}\hat{V}$$

Per dimostrare questo teorema si mostra prima che se la derivata covariante esiste, allora è unica.

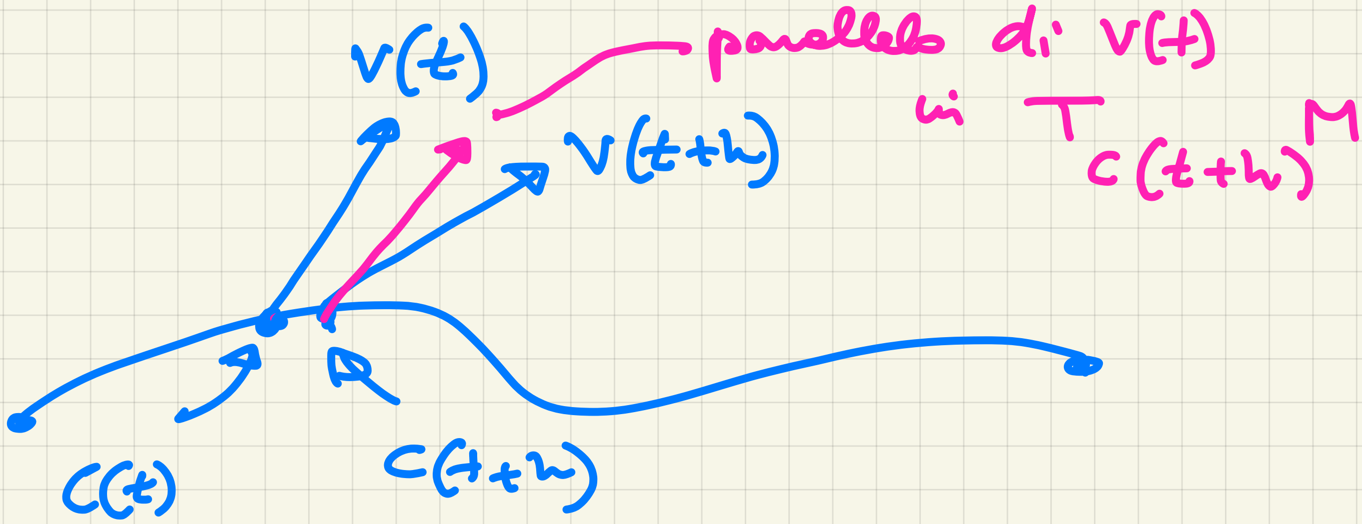
Si considera un riferimento locale $s_1, , s_n$ e si definisce

$$\boxed{\frac{Dv}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{dv^i}{dt} s_i + v^i \nabla_{c'(t)} s_i \right)}$$

- si verifica che la derivata covariante così definita soddisfa le proprietà richieste. Inoltre per unicità è INDIPENDENTE dal riferimento scelto.

NOTA Se $(s_1, ..., s_n)$ è un riferimento parallelo lungo la curva c, $\frac{Dv}{dt}$ è proprio la derivata componente per componente.

Quello che stiamo facendo è



$$\lim_{h\to 0} \frac{V(t+h) - (\text{parallelo di})(V(t))}{h}$$

Come nella teoria generale, un campo vettoriale lungo una curva è parallelo se la sua derivata covariante è zero:

Def $V \in \Gamma(TM|_{c(t)})$ si dice parallelo se $\frac{DV}{dt} \equiv 0$ su $[a,b]$

Passo 2 sollevamento orizzontale.

Sia $\pi : P \longrightarrow M$. Una curva $\tilde{c} : [a,b] \longrightarrow P$ è un sollevamento di $c : [a,b] \longrightarrow M$ se

$$\pi(\tilde{c}(t)) = c(t) \quad \forall\, t.$$

diciamo che $\tilde{c}(t)$ è un SOLLEVAMENTO ORIZZONTALE di $c(t)$ se $\tilde{c}(t)$ è un frame parallelo lungo $c(t)$.

In particolare, dati $c : [a,b] \to M$ e $\tilde{a} \in P_{c(a)}$, esiste un unico curva $\tilde{c} : [a,b] \longrightarrow M$ t.c. $\tilde{c}(a) = \tilde{a}$ e $\tilde{c}$ sollevamento (lift) orizzontale di c.

Def: Sia $E \longrightarrow M$ fibrato vettoriale con connessione ∇.
Sia $s_x \in P_x$ un punto di P.
Un vettore $v \in T_{s_x}(P)$ è orizzontale se esiste una curva $c : [0,1] \longrightarrow M$ t.c. $c(0) = x$ e $\tilde{c}'(0) = v$ con $\tilde{c}$ unico sollevamento orizzontale di c con punto iniziale s_x.

$$\boxed{\text{In questo modo si definisce su } P \text{ una distribuzione orizzontale } H.}$$

Dobbiamo dimostrare che

$H_{s_x} \subseteq T_{s_x}(P)$ è un

<u>sottospazio vettoriale</u>.

Ricaviamo una formula esplicita per

$$\boxed{\tilde{c}'(0)}$$

abbiamo $c : [0,1] \longrightarrow M$ con $c(0)=x$

$\tilde{c} : [0,1] \longrightarrow Fr(E)$

unico lift orizzontale con $\tilde{c}(0) = s_x$

Consideriamo adesso una sezione locale s con $s(x) = s_x$, allora

$s(c(t))$ è un lift di $c(t)$

con punto iniziale s_x.

Quindi $\forall\ t \in [0,1]$ abbiamo

$\tilde{c}(t)$

due lift di $c(t)$, $\forall\ t$

$s(c(t))$

$\forall\ t \in [0,1]$ abbiamo due riferimenti.

Dunque $\forall\ t$ esiste $a(t) \in GL(n,\mathbb{R})$

t.c.
$$s(c(t)) = \tilde{c}(t)\, a(t)$$

con
$$\underbrace{s(c(0))}_{\substack{s(x) \\ \parallel \\ S_x}} = \tilde{c}(0)\, a(0) \qquad = S_x$$

$\Rightarrow \quad a(0) = I$

<u>Lemma</u> Siano

$$S_* : T_x M \longrightarrow T_{S_x}(P) \quad \text{e}$$

$a'(0)^*$ il campo vettoriale in P

generato da $a'(0) \in gl(k,\mathbb{R})$.

Allora

$$\boxed{S_*(c'(0)) = \underbrace{\tilde{c}'(0)}_{\text{parte orizzontale}} + \underbrace{a'(0)^*_{S_x}}_{\text{parte verticale}}}$$

Dim informale:

sappiamo che

$$s(c(t)) = \tilde{c}(t)\, a(t)$$

differenziando in 0:

$$S_*(c'(0)) = \tilde{c}'(0)\, \underbrace{a(0)}_{I} + (a'(0))^*\big|_{\tilde{c}(0)}$$

$$= \tilde{c}'(0) + a'(0)^*_{S_x}$$

Lemma Siano s sezione locale e $\tilde{c}(0)$ sollevamento orizzontale con $\tilde{c}(0) = s(c(0))$ e $a(t) \in GL(k,\mathbb{R})$ t.c. $s(c(t)) = \tilde{c}(t)\, a(t)$.

Se ω_s è la matrice di ∇ rispetto alla sezione locale s, ossia, x $s = (s_1, \dots, s_k)$ $\nabla s_i = \sum_j s_j \omega_{ji}$ si ha:

$$a'(0) = \omega_s(c'(0)) \quad .$$

Dimostrazione $c(0) = x$

$\tilde{c}(0) = s(c(0)) = s_x$

$$\nabla_{c'(0)} s_i = \sum_j s_j\, \omega_{ji}(c'(0)) =$$

in O

$$= \sum_j (s_x)_j\, \omega_{ji}(c'(0))$$

d'altra parte

$$\nabla_{c'(t)} s_i = \sum_j \nabla_{c'(t)} \underbrace{\tilde{c}(t)_j}_{\text{sezione}}\, \underbrace{a_{ji}(t)}_{\text{funzione}} =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \left(\tilde{c}(t)_j\, a_{ji}'(t) + \underbrace{\left(\nabla_{c'(t)} \tilde{c}(t)_j\right)}_{=0\ \forall j} a_{ji}(t) \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \tilde{c}(t)_j\, a_{ji}'(t)$$

per $t = 0$

$$= \sum_{j=1}^{k} (s_x)_j\, a_{ji}'(0)$$

confrontando

$$\boxed{a'(0) = \omega_s(c'(0))}$$

abbiamo dimostrato il secondo lemma.

Si ottiene la formula esplicita:

$$\circledast \quad \boxed{\tilde{c}'(0) = s_*(c'(0)) - \omega_s(c'(0))^*_{s_x}}$$

Quindi, $\forall \quad X_x \in T_xM$ troviamo

$$\boxed{\tilde{X}_x = s_{*,x}(X_x) - \omega_s(X_x)^*_{s_x}}$$

dove s è una qualunque sezione locale in un intorno di x.

abbiamo

$$\tilde{c}'(0) = \underset{\uparrow \atop \mathbb{R}\text{-lineare}}{S_*}(c'(0)) - \underset{\uparrow \atop \mathbb{R}\text{-lineare}}{\omega_S}(c'(0))^{*}_{S_*}$$

$\mathbb{R}$-lin

dunque $\phi : T_xM \longrightarrow T_pP$

$$c'(0) \longmapsto \tilde{c}'(0)$$

è $\mathbb{R}$-lineare.

Quindi $H_p = \mathrm{Im}(\phi)$ è un sottospazio. $\phi : T_xM \to H$ ha inversa π_*, dunque ϕ isomorfismo

In particolare $\dim H_p = \dim M$.

La formula implica inoltre che la distribuzione H è C^∞ e che H è invariante a destra.

Abbiamo dunque ottenuto, da ∇ connessione su E, una connessione H sul fibrato P dei riferimenti di E, attraverso i procedimenti di trasporto parallelo e sollevamento orizzontale.

Connessione di Levi-Civita.

Sia M una varietà differenziabile.

Definire una <u>metrica Riemanniana</u> su M significa assegnare, $\forall\, p \in M$, un prodotto scalare g_p su T_pM con la condizione che sia C^∞, ossia che $\forall\, X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ la funzione $p \longrightarrow g_p(X_p, Y_p)$ sia C^∞.

Teorema: ogni varietà differenziabile ammette una metrica Riemanniana.

Consideriamo una connessione ∇ su TM.

$\forall\ X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ definiamo l'operatore

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \in \mathfrak{X}(M)$$

$$T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

si dice <u>TORSIONE</u> di ∇.

Se abbiamo una varietà Riemanniana (M, g), diciamo che la connessione ∇ è compatibile con la metrica g se $\forall\ X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ si ha

$$\boxed{Z\, g(X,Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)}$$

Teorema: su una varietà Riemanniana esiste un'unica connessione Riemanniana, ossia compatibile con la metrica e con torsione 0.

Tale connessione si chiama connessione di Levi-Civita.

Una varietà M^n si dice Lorenziana se ha una metrica di segnatura $(n-1,1)$, ossia in ogni punto g_p ha segnatura $(n-1,1)$.

Se $n=4$ abbiamo una varietà di Minkowski:

Se una varietà ammette una metrica Lorentziana (non sempre è vero, ci sono ostruzioni topologiche), allora esiste ed è unica, anche in questo caso, una connessione metrica con torsione 0, detta anche in questo caso connessione di Levi-Civita