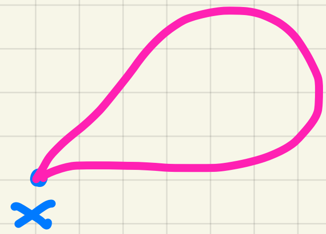
Olonomia

Sia $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrato vettoriale, dotato di una connessione ∇.

Sia $x \in M$ e sia γ un cammino chiuso con origine in x



γ definisce, mediante il trasporto parallelo lungo γ associato alla connessione ∇, un isomorfismo

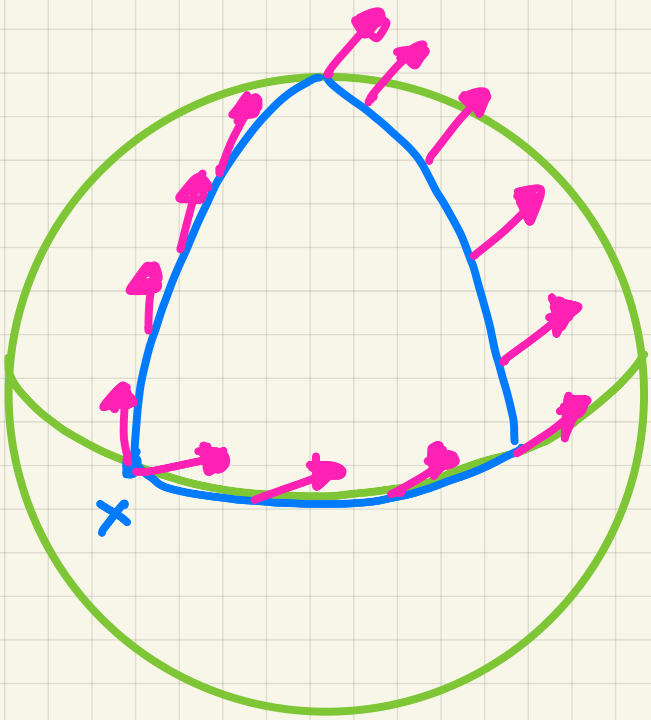
$$\tau_\gamma : T_xM \longrightarrow T_xM$$

L'insieme degli isomorfismi di T_xM così ottenuti costituisce un gruppo di Lie detto gruppo di olonomia (in x).

$$\mathrm{Hol}_x = \left\{ \tau_\gamma : \gamma \text{ cammino chiuso con origine in } x \right\}$$

gruppo di olonomia ridotto:

$$\mathrm{Hol}^0_x = \left\{ \tau_\gamma \,\middle|\, \gamma \text{ omotopo al cammino costante} \right\}$$



in $\mathbb{R}^2$ $\mathrm{Hol} = 0$

in S^2 no

conseguenza della curvatura.

Nota: $\mathrm{Hol}_x \subseteq GL(E_x)$

NOTA Se M è connesso Hol_x e Hol_y sono coniugati.

Nota $\mathrm{Hol}^0(\nabla) \subseteq GL(k, \mathbb{R})$ è un sottogruppo di Lie connesso ed è la componente connessa dell'identità in $\mathrm{Hol}(\nabla)$.

NOTA Se M è semplicemente connesso $\mathrm{Hol}^0(\nabla) = \mathrm{Hol}(\nabla)$.

NOTA Sia P il fibrato dei riferimenti di E. Definisco in P una relazione di equivalenza:

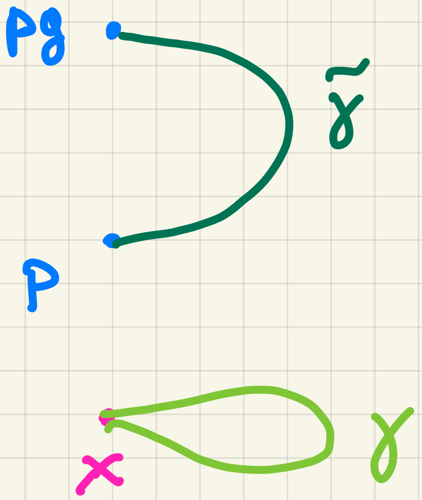
$p, q \in P$, $p \sim q$ se esiste una curva orizzontale che ha origine in p e termine in q.

Allora

$$\mathrm{Hol}_p(\nabla) = \{ g \in GL(k,\mathbb{R}) \mid p \sim pg \}$$

$$H^0_p(\nabla) = \{ g \in GL(k,\mathbb{R}) \mid p \sim pg \}$$

mediante sollevamento orizzontale di un cammino chiuso banale



- Consideriamo una varietà Riemanniana M e consideriamo su TM la connessione di Levi-Civita ∇. Sia $\mathrm{Hol}(M)$ la sua olonomia.

Abbiamo il teorema di classificazione di Berger:

Se (M, g) è una varietà Riemanniana semplicemente connessa, irriducibile (non, localmente, un prodotto) e non simmetrica (non localmente uno spazio simmetrico Riemanniano) allora $\mathrm{Hol}(g)$ è uno dei seguenti gruppi:

$\mathrm{Hol}(g)$	$\dim(M)$	structure
$SO(n)$	n	orientable
$U(n)$	$2n$	Kähler
$SU(n)$	$2n$	Calabi-Yau
$Sp(n)Sp(1)$	$4n$	Quaternion-Kähler
$Sp(n)$	$4n$	Hyper Kähler
G_2	7	varietà G_2
$Spin(7)$	8	varietà $Spin(7)$