Es.

Consideriamo l'eq.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\sin(x)\frac{\partial u}{\partial x \partial y} - \cos^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \cos(x)\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$a = 1 \quad b = -\sin x \quad c = -\cos^2 x$

$b^2 - ac = \sin^2 x + \cos^2 x = 1 > 0$ ~~ellittica~~ iper

$$\xi \Rightarrow a\frac{\partial \xi}{\partial x} + \left(b - \sqrt{b^2 - ac}\right)\frac{\partial \xi}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} - \left(\sin x + 1\right)\frac{\partial \xi}{\partial y} = 0$$

$F = p_x - (1 + \sin x) p_y = 0$

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = -(1 + \sin x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\sin(x) - 1 \end{cases}$$

$y = \cos(x) - x + c \qquad -c \equiv \xi$

$\xi = -y + x + \cos(x)$

analogamente $\eta = -y - x + \cos(x)$

$$\partial_x u = \frac{\partial v}{\partial \xi}\left(1 - \sin x\right) + \frac{\partial v}{\partial \eta}\left(-1 - \sin x\right)$$

$$\partial_y u = -\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \eta}$$

Svolgendo i calcoli otteniamo $\frac{\partial v}{\partial \xi \partial \eta} = 0$

Equazioni Paraboliche

$$b^2 - ac = 0 \Rightarrow \quad c\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + F(v, \partial v, \xi, \eta) = 0$$

Procediamo come nel caso precedente, richiedendo che ξ annulli il coeff. A (supponiamo $a \neq 0$)

$$A = 0 \Rightarrow Eq(1) = Eq(2) = a\frac{\partial \xi}{\partial x} + b\frac{\partial \xi}{\partial y} = 0$$

$$F = a p_x + b p_y = 0$$

$$\begin{cases} \dot{x} = a \\ \dot{y} = b \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}$$

Determiniamo ξ assegnando un valore ad ogni caratteristica che diventa la curva di livello di ξ

Nel cambio di variabili $A(\xi, \eta) = 0$

Poiché $\Delta = B^2 - AC = 0 \Rightarrow$ anche $B = 0 \Rightarrow$ forse una sola famiglia di variabili permette già di ridurre l'equaz. in forma normale

Le equaz. Paraboliche hanno 1 sola famiglia di caratt.

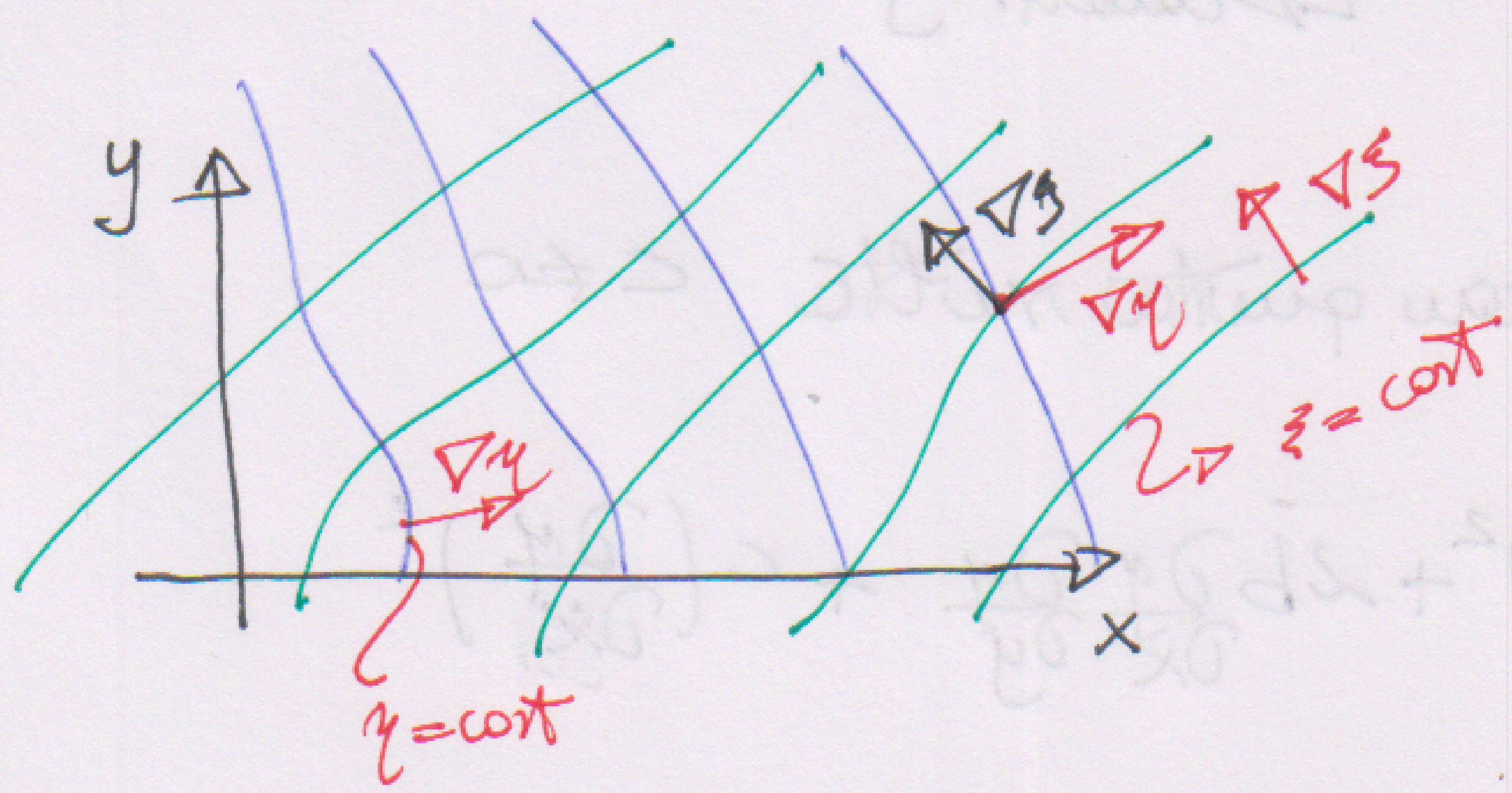
per determinare η basta avere caratt. che siano indip. da quelle di ξ, imponendo per esempio $|J| \neq 0$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\nabla}_{x,y} \xi \\ \vec{\nabla}_{x,y} \eta \end{pmatrix}$$

$$\det|J| = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$\det J = 0 \Rightarrow$ righe l. dip.

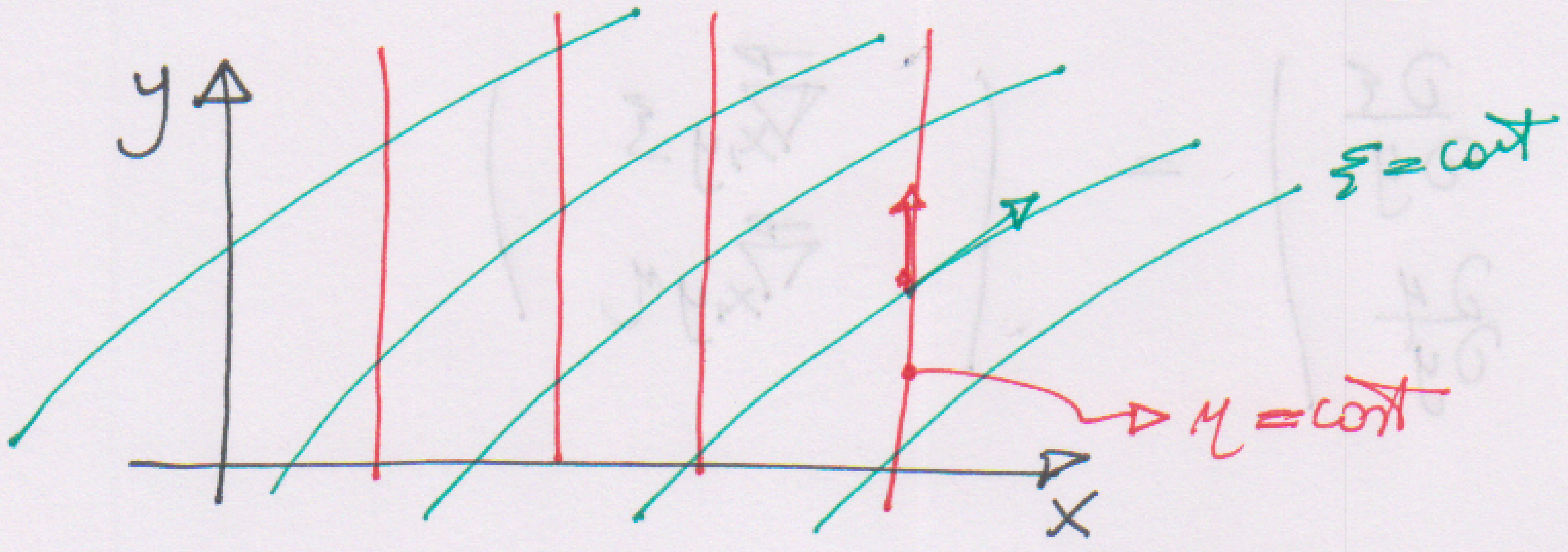
$\det(J) \neq 0 \Rightarrow \vec{\nabla}\xi$ e $\vec{\nabla}\eta$ lin. indip.



se $\nabla\xi$ e $\nabla\eta$ sono indip. $\Rightarrow$ poiché $\nabla\xi$ è $\perp$ alle traiettorie caratteristiche di ξ e $\nabla\eta$ è $\perp$ alle caratt. di η $\Rightarrow$ $\nabla\eta$ e $\nabla\xi$ lin. ind $\Leftrightarrow$

tangenti delle caratt. non parallele

Una possibile scelta per la variabile η in cui equaz. parabolica è semplicemente $\eta = x$



Le tangenti non sono mai parallele $\Rightarrow$ tg ξ non sono mai verticali : $\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \neq \infty$
↳ caratt. ξ

Verifichiamo che con questa scelta $c \neq 0$

$$c(\xi,\eta) = a\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + c\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2$$

$$= a \neq 0$$

Esempio

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$a = x^2 \qquad 2b = -2xy \qquad c = y^2$$

$$b^2 - ac = x^2y^2 - x^2y^2 = 0 \Rightarrow \text{parabolica}$$

Eq. $\xi \Rightarrow \quad a \frac{\partial \xi}{\partial x} + b \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0$

$$x^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} - xy \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0 \Rightarrow x \frac{\partial \xi}{\partial x} - y \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0$$

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -y \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}}_{\ln|y| = -\ln(x) + c} \Rightarrow xy = \text{cost}$$

$$\xi = xy \qquad \eta = x$$

$$\partial_x u = \frac{\partial v}{\partial \xi} y + \frac{\partial v}{\partial \eta}$$

$$\partial_y u = \frac{\partial v}{\partial \xi} x$$

$$\partial^2_{xx} u = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} y^2 + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \xi} y + \frac{\partial v}{\partial \eta \partial \xi} y + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}$$

$$\partial^2_{yy} u = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} x^2$$

$$\partial_{xy} u = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} xy + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} x + \frac{\partial v}{\partial \xi}$$

Sostituendo, otteniamo

$$x^2\left(\cancel{y^2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}}+\cancel{2y\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\,\partial \eta}}+\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}\right)-2xy\left(\cancel{\frac{\partial v}{\partial \xi}}+\cancel{xy\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}}+\cancel{x\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\,\partial \eta}}\right)+\cancel{y^2x^2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}}+\cancel{xy\frac{\partial v}{\partial \xi}}+x\frac{\partial v}{\partial \eta}+\cancel{xy\frac{\partial v}{\partial \xi}}=0$$

$$=\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}\,x^2+x\frac{\partial v}{\partial \eta}=\underbrace{\eta^2\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}+\eta\frac{\partial v}{\partial \eta}=0}_{\text{Forma canonica}}$$

L'eq. può essere risolta ponendo

$$w=\frac{\partial v}{\partial \eta}\quad\Rightarrow\quad \eta\frac{\partial w}{\partial \eta}+w=0$$

Separaz. delle variabili $\displaystyle\int\frac{dw}{w}=-\int\frac{d\eta}{\eta}$

$$\Rightarrow\ \ln(|w|)=-\ln(\eta)+f(\xi)$$

$$w=\frac{g(\xi)}{\eta}$$

$$v=\int w(\eta)\,d\eta=g(\xi)\int\frac{1}{\eta}=g(\xi)\ln|\eta|+h(\xi)$$

quindi $u(x,y)=v(\xi(x,y),\eta(x,y))=$

$$=v(\xi=xy,\ \eta=x)=g(xy)\ln|x|+h(x,y)$$

Classificazione equazioni: caso ellittico

$b^2 - ac < 0 \Rightarrow$ Forma canonica $A = C \quad B = 0$

Riprendiamo l'espressione di A, B, C.

$$A = a\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + c\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 =$$

$$C = a\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + c\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2$$

$$B = a\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + b\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + c\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} = 0$$

$$A = C \Rightarrow a\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2\right] + 2b\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) +$$

$$c\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2\right] = 0$$

Notiamo che se definiamo $\varphi = \xi + i\eta$, la funzione φ soddisfa l'equazione

$$a\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + c\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 = 0$$

$Re = 0 \Rightarrow A = C \qquad Im = 0 \Rightarrow B = 0$

$\rightarrow$ La stessa equazione per il caso iperbolico ma adesso φ è complessa

Per determinare la soluzione procediamo come nel caso delle eq. iperboliche. Otteniamo le 2 equazioni

$$a\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\left(b\pm\sqrt{b^2-ac}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0$$

$$b^2-ac<0 \Rightarrow \sqrt{b^2-ac}=i\sqrt{ac-b^2}$$

$$a\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\left(b\pm i\sqrt{ac-b^2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0$$

La soluzione può essere determinata estendendo formalmente il metodo alle caratteristiche al campo complesso.

Otteniamo la caratteristica "complessa"

$$\begin{cases}\mathring{x}=a\\ \mathring{y}=b\pm i\sqrt{ac-b^2}\end{cases}$$

Abbiamo 2 famiglie di caratteristiche complesse indipendenti

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b+i\sqrt{ac-b^2}}{a} \quad e \quad \frac{dy}{dx}=\frac{b-i\sqrt{ac-b^2}}{a}$$

risolvendo integrando i 2 set di equazioni identifico la costante di integrazione con la funzione $\varphi^{\pm}$ che cerchiamo. Determiniamo le trasformazioni che portano alla forma canonica tramite $\xi=Re(\varphi)$; $\eta=Im(\varphi)$

Es. Equazione di Tricomi

$$\partial^2_{xx} u + x\,\partial_{yy} u = 0 \qquad x>0$$

$$b^2 - ac = -x < 0 \quad \text{ellittica}$$

Ripetiamo i calcoli del caso $x<0$ ottenendo

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{-x} = \pm i\sqrt{x}$$

la soluzione $\frac{3}{2}y \pm i x^{3/2} = \text{cost} = \varphi^{\pm}(x,y)$

$$\xi = \mathrm{Re}\,(\varphi^{\pm}) = \frac{3}{2}y \qquad \eta = \mathrm{Im}\,(\varphi^{\pm}) = \pm x^{3/2} \xrightarrow{\text{prendiamo}}$$

$$\eta = -x^{3/2}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{3}{2}x^{1/2} \qquad \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \eta}\left(-\frac{3}{2}\right)x^{1/2} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \xi}\,\frac{3}{2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}\,\frac{9}{4}x - \frac{3}{2}\,\frac{\partial v}{\partial \eta}\,\frac{1}{2}x^{-1/2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}\,\frac{9}{4}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}\,\frac{9}{4}x - \frac{3}{4}x^{-1/2}\frac{\partial v}{\partial \eta} + x\,\frac{9}{4}\,\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} = 0$$

$$\frac{\cancel{9}^{\,3}}{\cancel{4}}\, x \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \right) - \frac{3}{\cancel{4}} x^{-1/2} \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0$$

$$x^{3/2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \right) - 3 \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0$$

$$x^{3/2} = -\frac{1}{\eta}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + 3\eta \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0$$