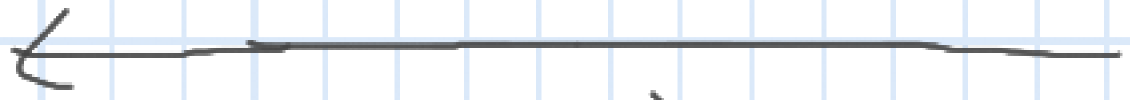
Esercizi

1) Dato il versore $\vec{u}$, indica modulo, direzione e verso di $-5\vec{u}$

$\vec{u}$ $\quad u=1 \longrightarrow \|-5\vec{u}\| = 5$



$-5\vec{u}$

$2\vec{u}$ $\qquad \frac{3}{2}\vec{u}$

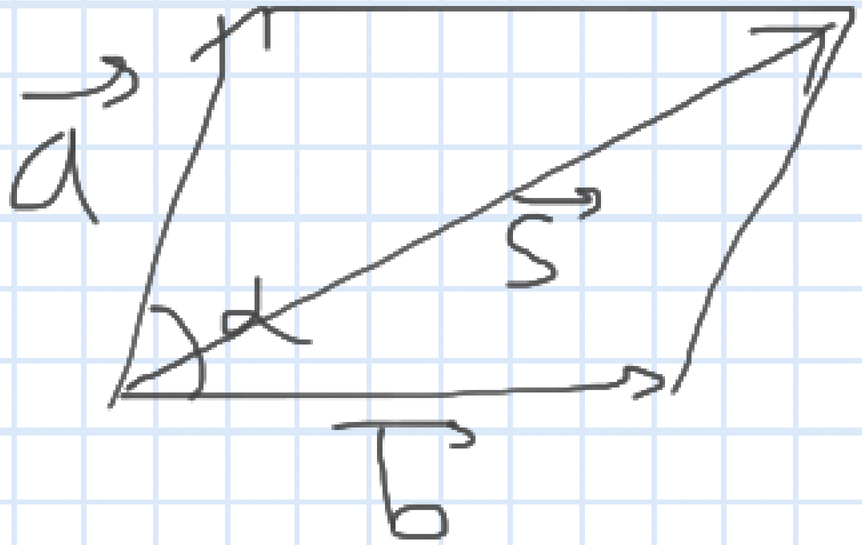
$\vec{u}$ $\quad |\vec{u}|=1$

$-\frac{1}{2}\vec{u}$

$-4\vec{u}$

2) Dati i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, rappresentare il vettore somma e determinare il suo modulo sapendo che l'angolo tra $\vec{a}$ e $\vec{b}$ è α

$a = 16, \quad b = 12 \qquad \alpha = 90°$



$$s = \sqrt{a^2 + b^2 + ab\cos\alpha}$$

$$s = \sqrt{16^2 + 12^2 + \cancel{16 \cdot 12 \cdot \underbrace{\cos(90)}_{=0}}} = \ldots = 20$$

$\alpha = 180° \qquad \alpha = 0° \qquad \alpha = 60°$

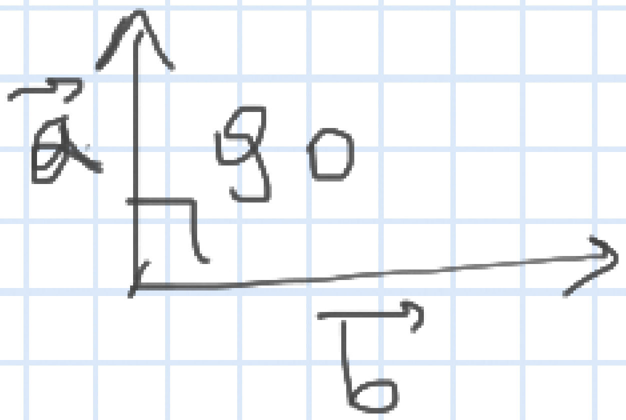
$[\; 4 \qquad 28 \qquad \simeq 24{,}3 \;]$

a	b	α	s
3	5	120	$\approx 4,4$
4	12	150	$\approx 8,8$
10	6	80	$\approx 12,5$
12	9	90	≈ 15
15	8	105	$\approx 15,1$

1) Disegna un vettore $\vec{a}$ e rappresenta i vettori:

$-2\vec{a}$, $\frac{1}{4}\vec{a}$, $3\vec{a}$

2) Consideriamo i vettori $\vec{a}, \vec{b}$

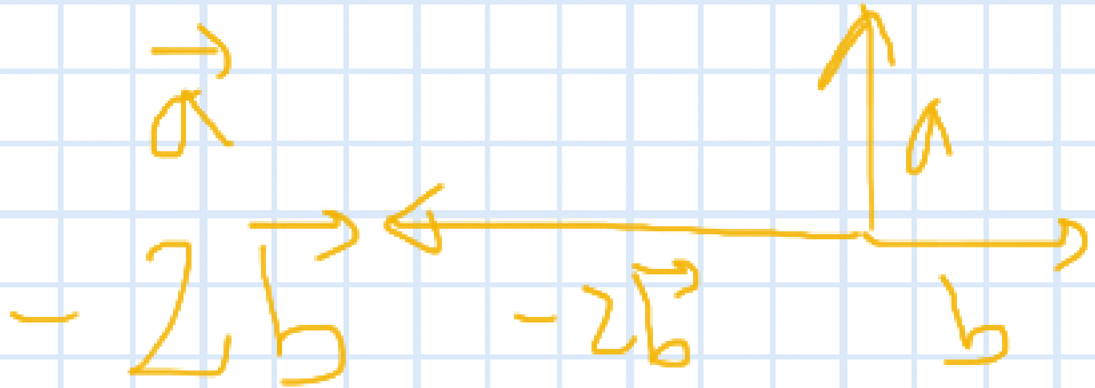


$a = 8$, $b = 6$

Determinare il modulo di

1) $\vec{a} - 2\vec{b}$ 2) $\frac{1}{2}(\vec{a} + 3\vec{b})$ 3) $-3(-2\vec{a} + 4\vec{b})$

($\simeq 14,4$) ($\simeq 9,8$) ($\simeq 86,5$)

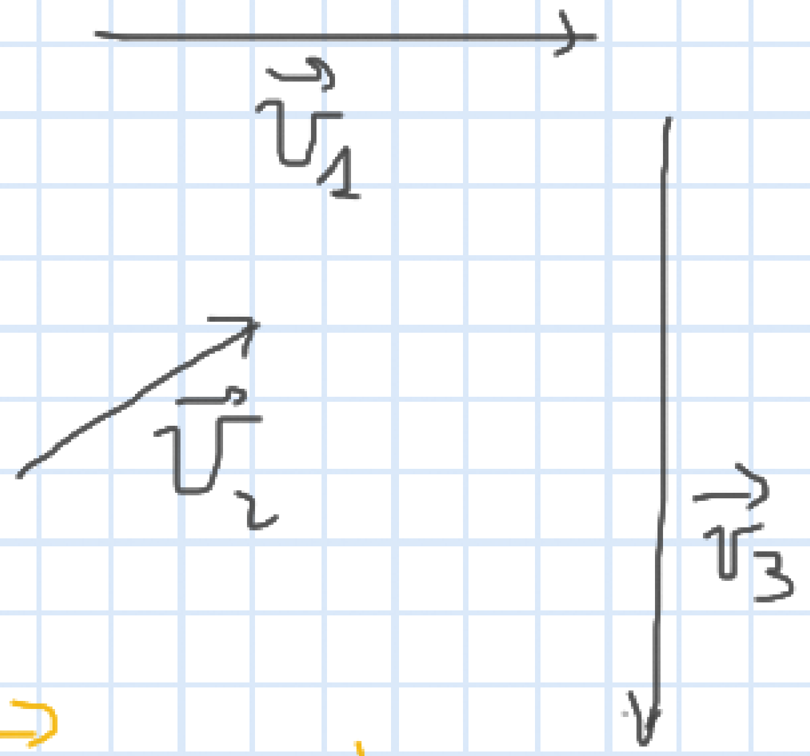


$|\vec{a}| = 8$

$|-2\vec{b}| = 2|b| = 12$

COMBINAZIONE LINEARE

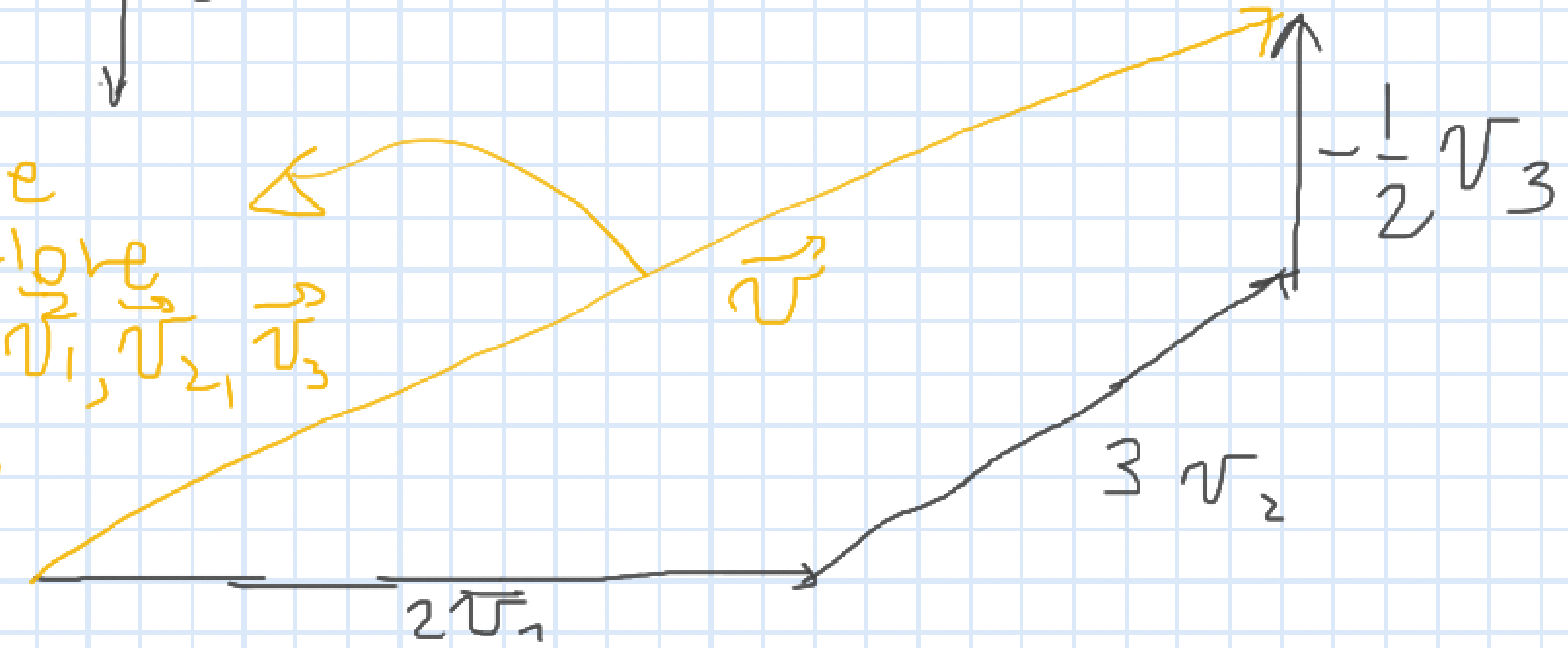
Consideriamo i vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$



e consideriamo i numeri $2, 3, -\frac{1}{2}$.

Determiniamo il vettore

$$\vec{v} = 2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 - \frac{1}{2}\vec{v}_3$$



$\vec{v}$ si dice combinazione lineare di $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ con coefficienti $2, 3, -\frac{1}{2}$

Def

↳ Si dice che il vettore $\vec{v}$ è **combinazione lineare** dei vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ non tutti nulli se risulta

$$\vec{v} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_n\vec{v}_n$$

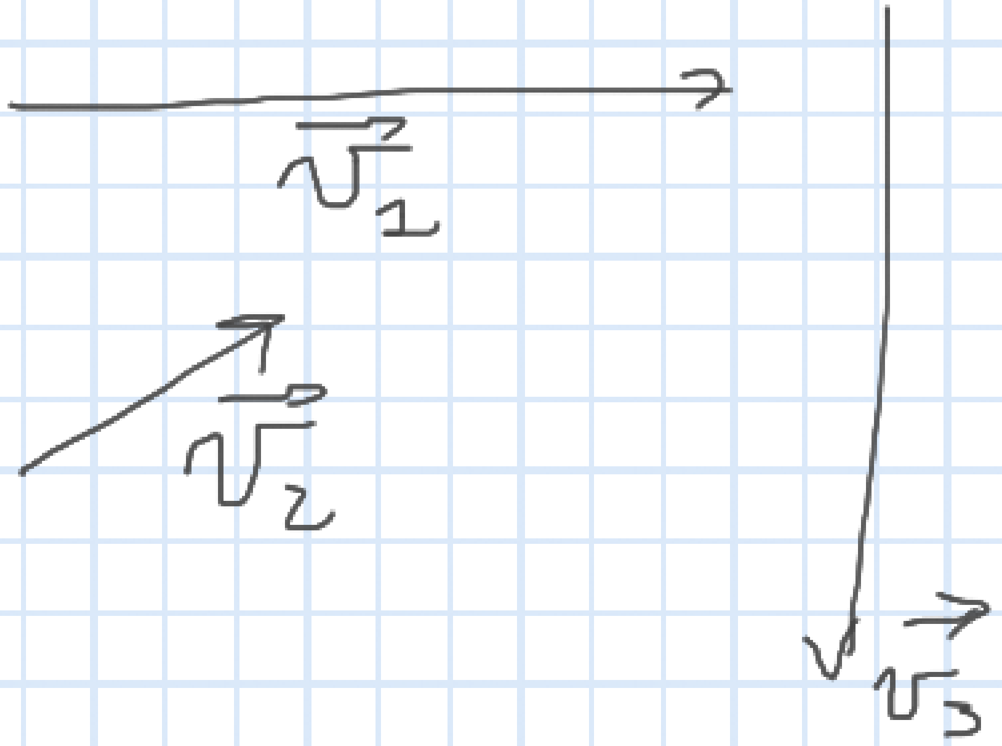
con $c_1 \dots c_n$ numeri reali.

Una combinazione lineare di vettori con coefficienti tutti nulli ha per risultato il vettore nullo

$$\hookrightarrow \quad \vec{v} = \underset{\substack{\uparrow \\ c_1}}{0} \cdot \vec{v}_1 + \underset{\substack{\uparrow \\ c_2}}{0} \cdot \vec{v}_2 + \underset{\substack{\uparrow \\ c_3}}{0} \cdot \vec{v}_3 = \vec{0}$$

Questo può accadere anche se i coeff non sono tutti nulli

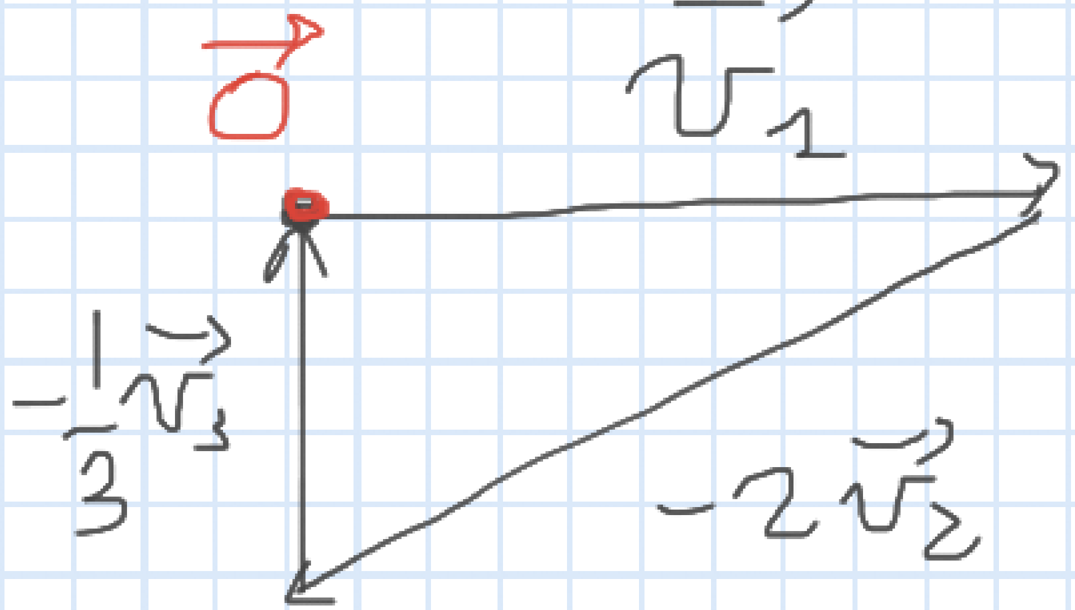
Consideriamo i vettori di prima



con i coefficienti

$1, -2, -\frac{1}{3}$

$$\vec{v} = 1\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 - \frac{1}{3}\vec{v}_3 = \vec{0}$$



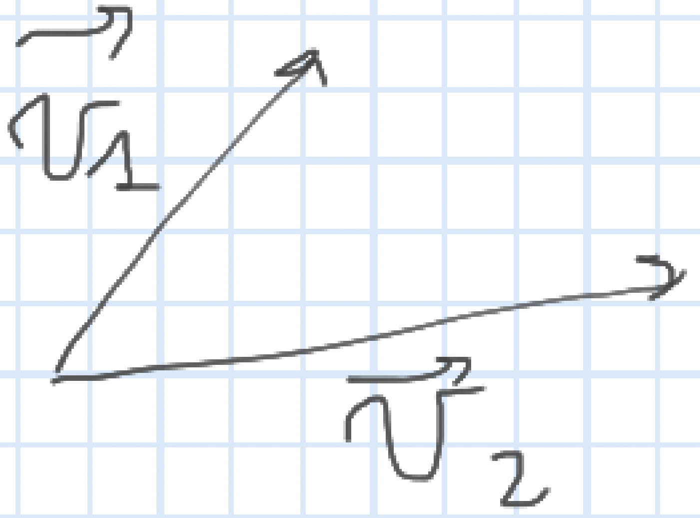
↳ i vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ si dicono LINEARMENTE DIPENDENTI

Def

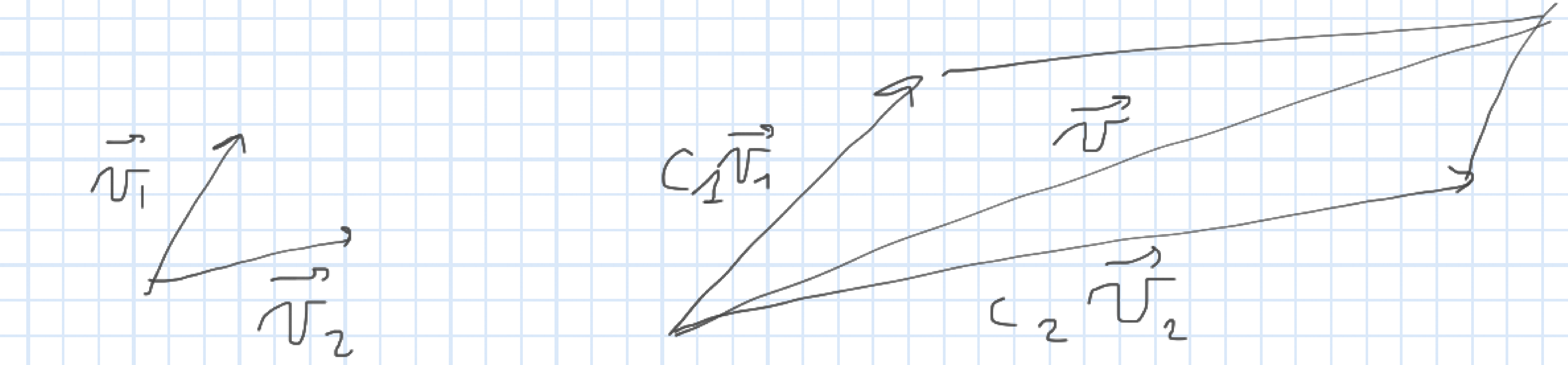
Dei vettori $v_1 \dots v_n$ si dicono LINEARMENTE DIPENDENTI se esisto n numeri non tutti nulli $c_1 \dots c_n$ tali che

$$c_1\vec{v}_1 + \dots + c_n\vec{v}_n = \vec{0}$$

Se prendiamo 2 vettori nel piano $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ con direzioni diverse,



qualsiasi combinazione lineare $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2$ è un vettore $\neq \vec{0}$ a meno che $c_1 = c_2 = 0$



↳ $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ si dicono LINEARMENTE INDIPENDENTI

Def Dei vettori $\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n$ sono <u>linearmente indipendenti</u> se l'unica combinazione lineare di questi vettori che ha come risultato il vettore nullo è quella con i coefficienti tutti nulli.

Nel piano → 2 vettori → linearmente indipendenti

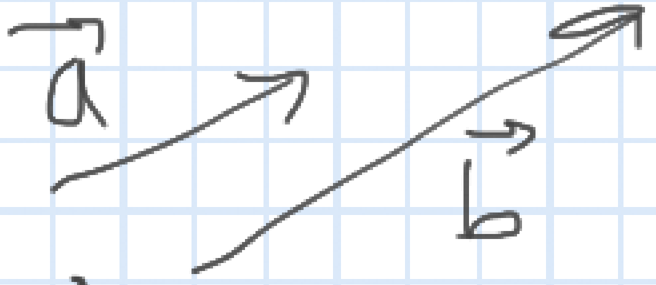
$\Updownarrow$

hanno direzioni diverse

linearmente dipendenti

$\Updownarrow$

sono paralleli

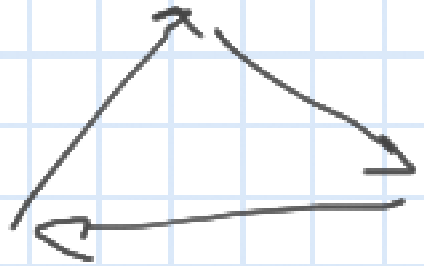


$\vec{b} = k\vec{a}$

$\hookrightarrow \vec{b} - k\vec{a} = \vec{0}$

c_1 c_2

Nel piano <u>non</u> ci possono essere più di 2 vettori linearmente indipendenti

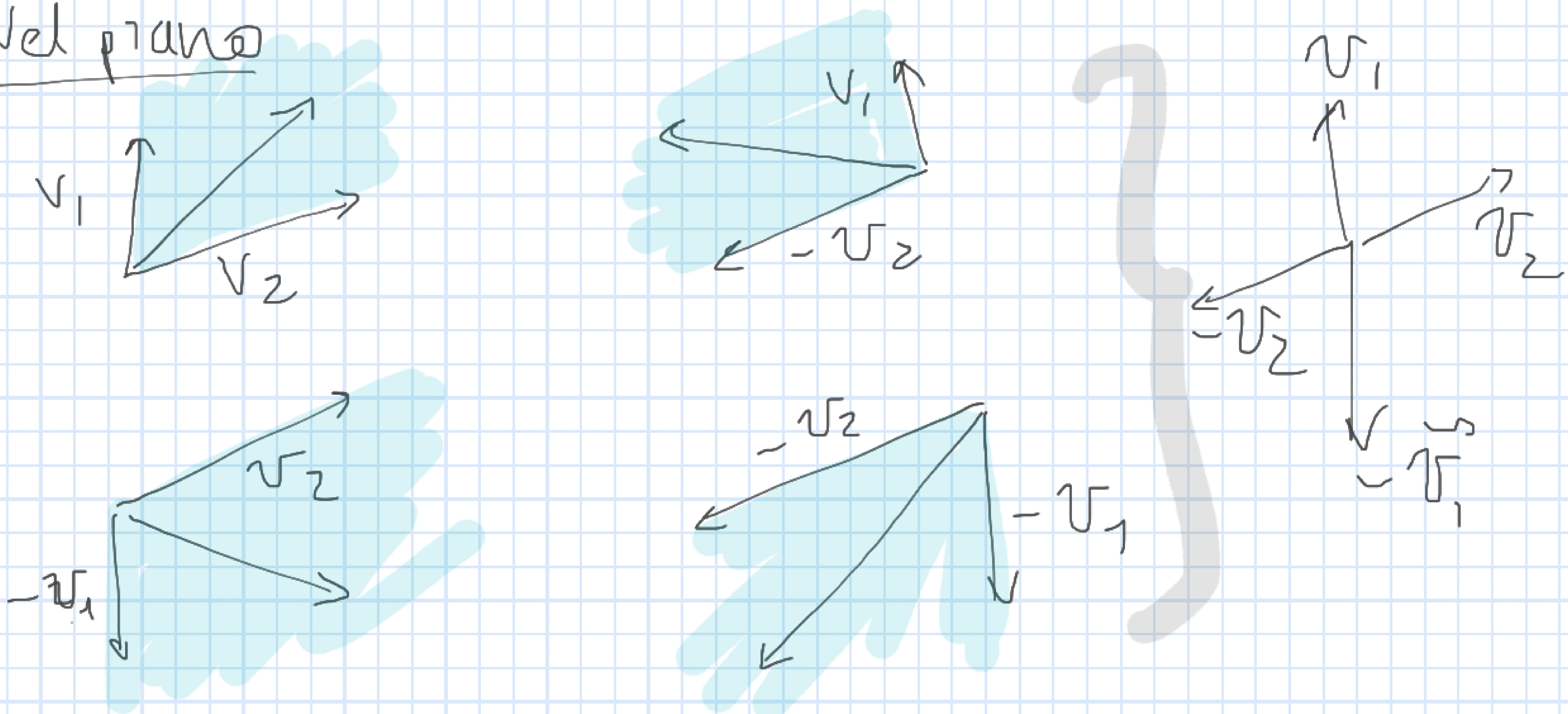


$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3 = \vec{0}$

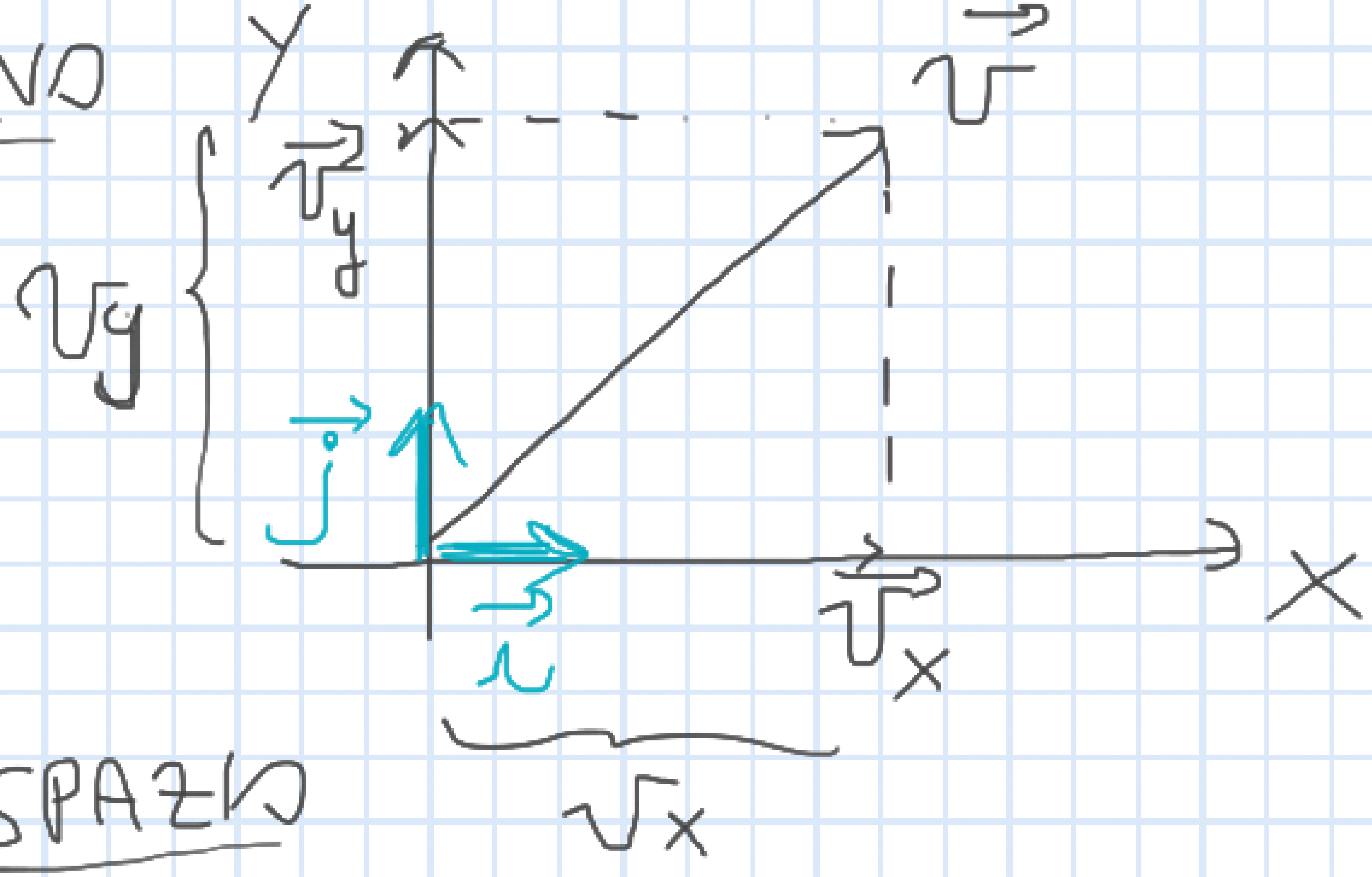
Nello spazio non si possono avere più di 3 vettori linearmente indipendenti

---

Nel piano



PIANO

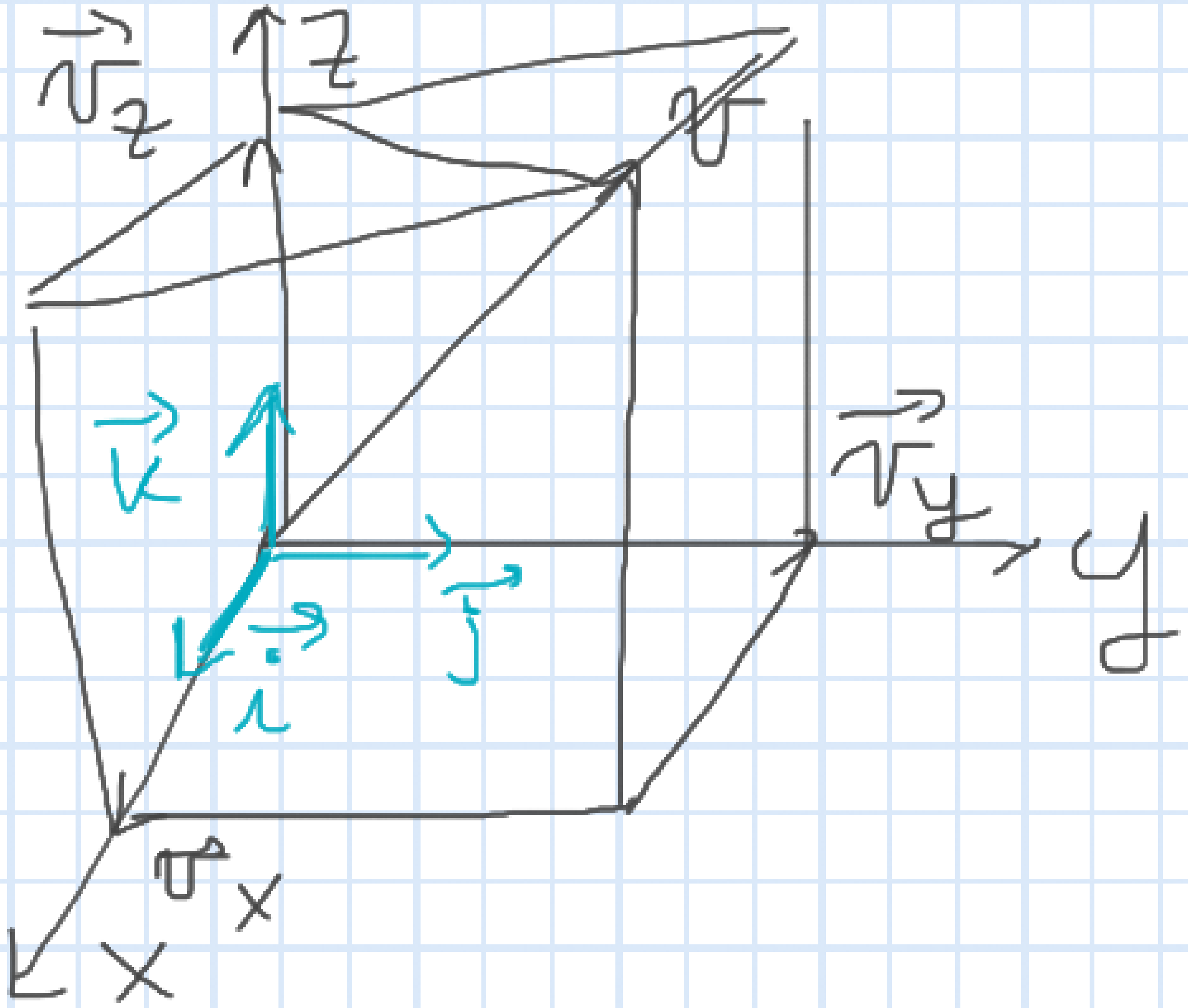


$$v_x = |\vec{v}_x|$$

$$v_y = |\vec{v}_y|$$

$$\vec{v} = v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j}$$

SPAZIO



$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

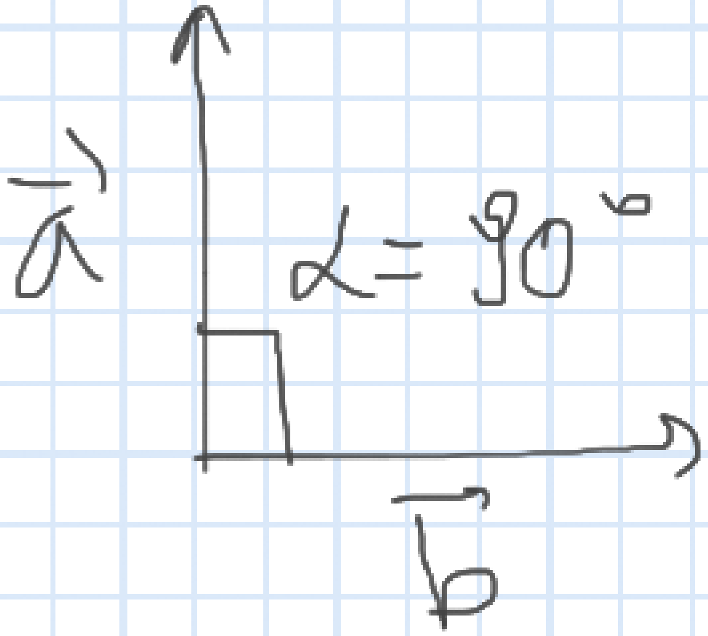
PRODOTTO SCALARE

Dati due vettori $\vec{a}, \vec{b}$ e l'angolo α tra di essi si definisce il prodotto scalare tra essi, come il numero

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos\alpha \quad \leftarrow \text{numero}$$

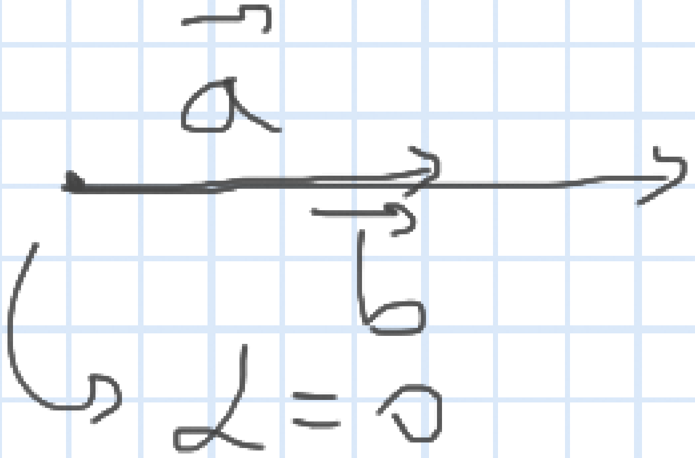
Se uno dei due vettori è il vettore nullo

$$\vec{a} \cdot \vec{0} = 0$$



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \underbrace{\cos 90}_{0} = 0$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \underbrace{\cos 0}_{1} = a \cdot b$$

Se $\alpha = 0 \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b}$ valore massimo

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ p. commutativa

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

PRODOTTO VETTORIALE

Dati due vettori $\vec{a}, \vec{b}$ con angolo compreso α

Il loro prodotto vettoriale è il vettore $\vec{c}$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \wedge \vec{b}$$ tale che:

→ il modulo di $\vec{c}$ è $a \cdot b \cdot \operatorname{sen}\alpha$

→ direzione di $\vec{c}$ perpendicolare al piano individuato da $\vec{a}$ e $\vec{b}$

→ verso di $\vec{c}$ dato dalla regola della mano destra.

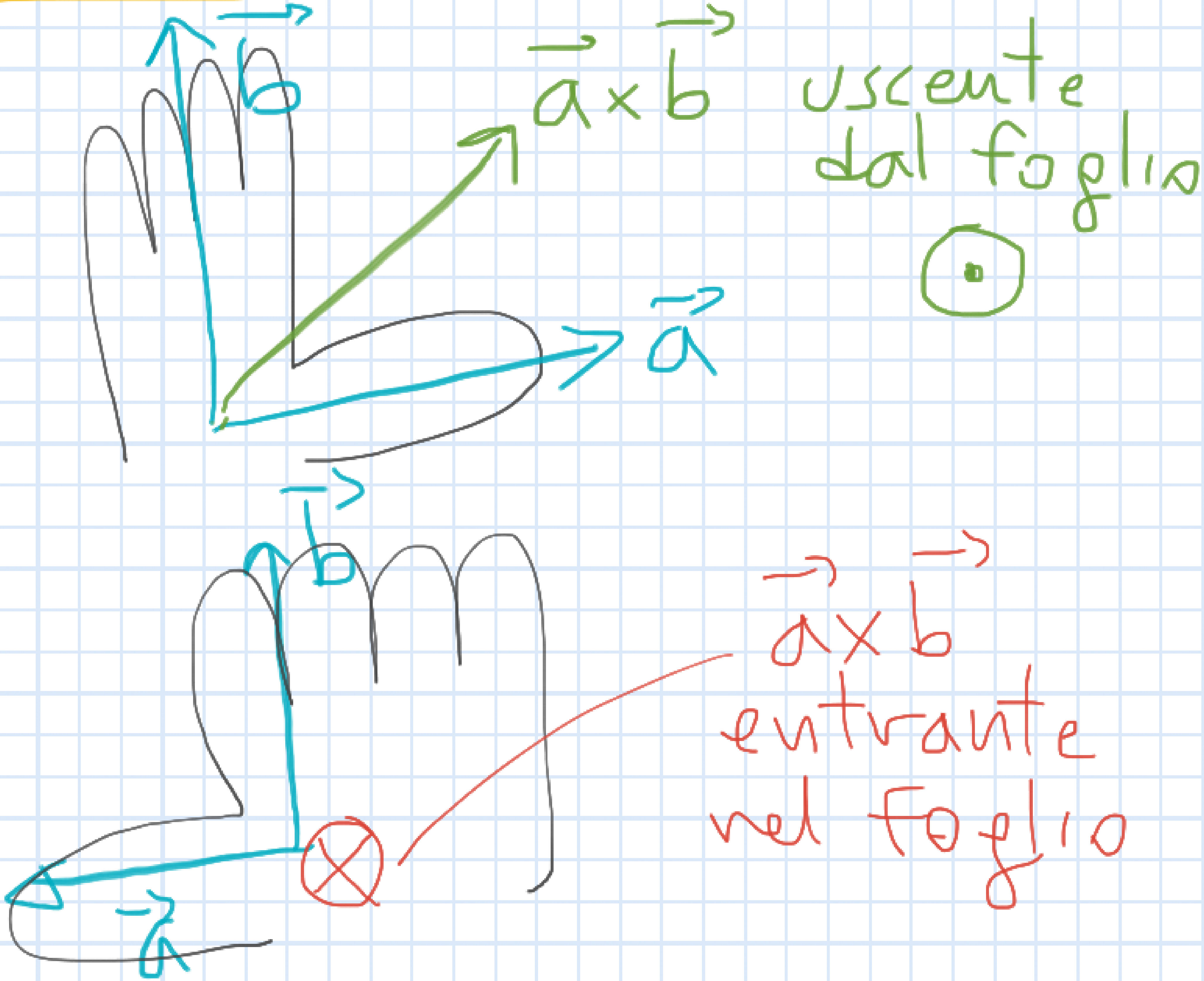
Regola della mano destra

$\vec{a} \times \vec{b}$

↳ pollice lungo 1° vettore

↳ indice lungo il 2° vettore

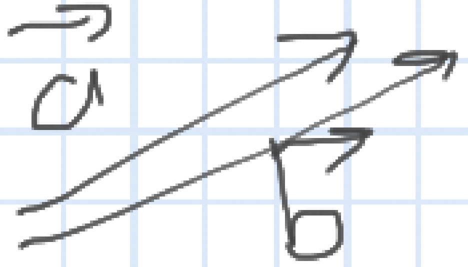
$\Rightarrow \vec{a} \times \vec{b}$ uscente dal palmo



$$\vec{a}\times\vec{b} \neq \vec{b}\times\vec{a}$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$$

Se $\alpha = 0 \rightarrow |\vec{a}\times\vec{b}| = ab\,\underbrace{\text{sen}\,0}_{=0} = 0$



$$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$$

$$\boxed{\vec{a}\times\vec{a} = \vec{0}}$$

ES | Calcola il prodotto scalare e vettoriale tra $\vec{a}$ e $\vec{b}$, $a = 9$, $b = 15$, $\alpha = 30°$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos 30 = 9 \cdot 15 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{135 \cdot \sqrt{3}}{2}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = a \cdot b \cdot \operatorname{sen} 30 = 135 \cdot \frac{1}{2} = \frac{135}{2}$$

$a = 6$, $b = 8$ $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} = ?$

$\alpha = 0$ $\quad \alpha = 180$ $\quad \alpha = 90$ $\quad \alpha = 60$

(48 $\quad$ −48 $\quad$ 0 $\quad$ 24)

$a = 10$ $\quad b = 6$ $\quad |\vec{a} \times \vec{b}| = ?$

$\alpha = 90$ $\quad \alpha = 0$ $\quad \alpha = 45$ $\quad \alpha = 30$

(60 $\quad$ 0 $\quad$ $30\sqrt{2}$ $\quad$ 30)

E5 $a = 4$, $b = 12$, $\alpha = 60$

$-\vec{a} \cdot \vec{b}$ $\quad$ $2\vec{a} \times \vec{b}$ $\quad$ $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a}$

$(-24$ $\quad$ $|2\vec{a} \times \vec{b}| = 48\sqrt{3}$ $\quad$ $0)$

$\vec{b} \cdot 3\vec{a}$ $\quad$ $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{b} \times \vec{a})$ $\quad$ $\vec{b} \cdot (\vec{b} \times \vec{a})$

$(72$ $\quad$ -1728 $\quad$ $0)$