

Teoria dei numeri. A.A. 2019/2020

Le dimostrazioni degli argomenti dal punto 52 al punto 57 non verranno richieste all'esame.

1. Studio delle equazioni diofantee $x^2 + 1 = y^3$ e $x^2 + 61 = y^3$.
2. Campi di numeri. I campi di numeri sono estensioni semplici. Immersioni e loro estensioni.
3. Discriminante di una n -upla. Legame tra il discriminante di due n -uple.
4. Traccia e norma. Le tracce e le norme di elementi algebrici sono razionali. Razionalità del discriminante.
5. Interi algebrici. Forme equivalenti della definizione di intero algebrico.
6. Gli interi algebrici in un campo sono un sottoanello.
7. Interi algebrici in estensioni quadratiche.
8. L'anello degli interi di $\mathbb{Q}[\sqrt{7}, \sqrt{10}]$ non è una estensione semplice di \mathbb{Z} .
9. Definizione di gruppo abeliano libero di rango finito. Esistenza di basi adattate per sottogruppi di gruppi liberi. Ordine dei quozienti finiti di gruppi abeliani liberi.
10. Ogni elemento algebrico su \mathbb{Q} ha un multiplo che è un intero algebrico.
11. Se \mathbb{F} è un campo di numeri di grado n , allora $\mathcal{O}_{\mathbb{F}}$ è un gruppo libero di rango n .
12. Discriminante di un campo di numeri.
13. Gli ideali non nulli di $\mathcal{O}_{\mathbb{F}}$ hanno indice finito. Conseguenze.
14. Sottogruppi di indice finito in $\mathcal{O}_{\mathbb{F}}$.
15. Elementi interi e chiusura integrale. Dimensione di Krull.
16. Domini di Dedekind. Gli anelli di numeri sono domini di Dedekind.

17. Ideali frazionari e loro proprietà.
18. In un dominio di Dedekind ogni ideale frazionario è prodotto di primi.
19. Gruppo delle classi. Un dominio di Dedekind è UFD se e solo se è PID.
20. Nei domini di Dedekind ogni ideale si può generare con due elementi.
21. La norma degli ideali è moltiplicativa.
22. Decomposizione dei primi razionali.
23. Decomposizione dei primi di $\mathcal{O}_{\mathbb{F}}$ in $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$, per campi di numeri $\mathbb{F} \leq \mathbb{K}$. Relazione tra grado, indici di inerzia e di ramificazione.
24. Fattorizzazione di primi in campi di numeri in casi particolari. Caso degli interi quadratici. Alcuni esempi ($\mathbb{Q}[i]$, $\mathbb{Q}[i\sqrt{3}]$, $\mathbb{Q}[i\sqrt{17}]$).
25. Fattorizzazione di ideali in estensioni di Galois.
26. Se il primo p si ramifica in \mathbb{F} , allora $p \mid \Delta_{\mathbb{F}}$.
27. Caso in cui i sottogruppi di decomposizione e di inerzia sono normali (e.g. estensioni abeliane). Elementi di Frobenius.
28. Reticoli e loro caratterizzazione.
29. Teorema di Minkowski. Ogni naturale è somma di quattro quadrati.
30. Come immergere un campo di numeri in uno spazio vettoriale. Covolume dell'immagine di un ideale.
31. Elementi di norma *piccola* negli ideali di $\mathcal{O}_{\mathbb{F}}$.
32. Finitezza del gruppo delle classi. Alcuni esempi in anelli quadratici.
33. Calcolo del gruppo delle classi di $\mathcal{O}_{\mathbb{F}}$ per $\mathbb{F} = \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$, $d = 10, -7, -14, -19, -21$.
34. Anelli quadratici complessi N -euclidei.
35. Classificazione degli anelli quadratici complessi che sono N -euclidei.
36. Studio dell'equazione $x^2 + 7 = 2^n$.
37. Teorema di Hermite.
38. Equazione di Pell.
39. Teorema delle unità di Dirichlet.
40. Moduli razionalmente irriducibili. Esempi e caratterizzazione.

41. Moduli razionalmente irriducibili per gruppi abeliani.
42. Segno di un discriminante. Teorema di Stickelberger.
43. Se α ha grado n su \mathbb{Q} ed f è il suo polinomio minimo, allora $\Delta[1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}] = \pm N(f'(\alpha))$.
44. Estensioni ciclotomiche. Grado di $\mathbb{F} = \mathbb{Q}[\omega]$ quando ω è una radice n -esima primitiva di 1.
45. Anello degli interi nei campi ciclotomici.
46. Formula per il discriminante di una estensione ciclotomica.
47. Sottocampi quadratici in $\mathbb{Q}[e^{2\pi i/p}]$. Ogni estensione quadratica di \mathbb{Q} è contenuta in un campo ciclotomico.
48. Massimo sottocampo reale di un campo ciclotomico.
49. Gli interi algebrici i cui coniugati hanno modulo 1 sono radici dell'unità.
50. Unità di $\mathcal{O}_{\mathbb{F}}$ e di $\mathcal{O}_{\mathbb{F}^+}$.
51. *Primo caso* del teorema di Fermat per primi regolari.
52. Serie di Dirichlet e loro convergenza. Estensione della funzione zeta di Riemann.
53. Prodotti infiniti e fattorizzazione di Eulero.
54. Funzioni zeta di Dedekind. Densità polare di un insieme di primi.
55. Gruppi abeliani finiti come gruppi di Galois sui razionali.
56. Caratteri e funzioni L di Dirichlet. Prodotto delle funzioni L .
57. Calcolo di $L(1, \chi)$. Caso dei caratteri primitivi.
58. Caso delle estensioni quadratiche.