1. Punti materiali, corpi estesi, corpi rigidi

Prima di studiare le condizioni di equilibrio dei corpi, dobbiamo stabilire un'importante distinzione: quella tra **punto materiale** e **corpo esteso**.

Qual è la differenza fra punto materiale e corpo rigido?

Punto materiale

Un punto materiale è un oggetto *le cui dimensioni sono trascurabili* rispetto a quelle dello spazio in cui si trova.

Un punto materiale è una descrizione semplificata di un oggetto reale, che può essere rappresentato come un punto geometrico dotato di massa. Un **corpo esteso** è invece un oggetto le cui dimensioni e la cui struttura non possono essere trascurate.

Vi è un'ulteriore differenza tra punti materiali e corpi estesi. Mentre i punti materiali possono solo spostarsi da una posizione a un'altra, cioè sono soggetti esclusivamente a un *moto traslatorio*, i corpi estesi, oltre a spostarsi, possono anche ruotare attorno a un asse, cioè hanno anche un *moto rotatorio*.

La distinzione tra punti materiali e corpi estesi non è assoluta.
Non esistono oggetti che siano in senso assoluto punti materiali, o corpi estesi (fatta eccezione per alcune particelle elementari, come l'elettrone, che sono realmente puntiformi e prive di struttura interna). Lo stesso oggetto può comportarsi talvolta come un punto materiale, talvolta come un corpo esteso. Consideriamo ad esempio la Terra (fig. 1): nella sua rivoluzione intorno al Sole può essere considerata come un punto materiale (le sue dimensioni sono trascurabili rispetto allo spazio che percorre) mentre nella rotazione intorno al suo asse va considerata come corpo esteso.

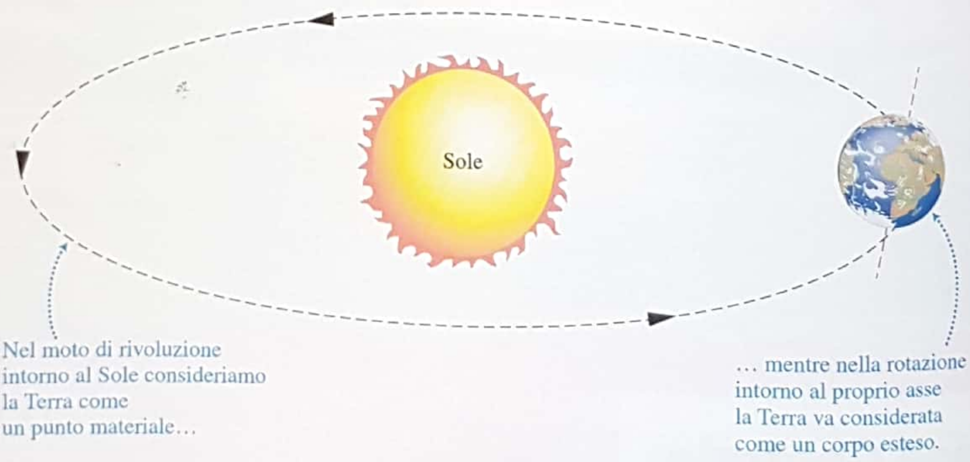


Figura 1
La Terra può essere considerata come un punto materiale o come un corpo esteso

Tra i corpi estesi, prenderemo in considerazione solo quelli che non si deformano: i cosiddetti **corpi rigidi**.

Corpo rigido

In un corpo rigido la distanza tra due punti qualsiasi rimane invariata quando sono applicate ad esso delle forze.

Anche il corpo rigido è un modello semplificato della realtà perché non esistono oggetti assolutamente non deformabili.

2. L'equilibrio di un punto materiale

Cominciamo a studiare l'equilibrio nel caso più semplice, quello del punto materiale: in quali condizioni esso rimane in equilibrio?

Condizione generale di equilibrio di un punto materiale

Un punto materiale è in equilibrio statico se è fermo, cioè se la risultante $\vec{R}$ delle forze che agiscono su di esso è uguale a zero:

$$\vec{R} = 0$$

Qual è la condizione affinché un punto materiale sia in equilibrio?

Un portapenne sul banco o un lampadario appeso al soffitto sono due esempi di punti materiali in equilibrio (fig. 2). Entrambi gli oggetti sono sottoposti alla forza peso diretta verso il basso, ma sono *vincolati* a restare fermi da altri oggetti, il banco o il tassello fissato al soffitto.

Figura 2
Un portapenne sul banco è un corpo in equilibrio vincolato

Banco o tassello sono esempi di **vincolo** e la forza che essi esercitano è una **forza vincolare**.

Vincolo e forza vincolare

Un vincolo è un corpo che impedisce ad altri corpi di compiere alcuni movimenti, esercitando su di essi una forza $\vec{F}_v$ chiamata forza vincolare.

Che cos'è un vincolo e che cos'è la forza vincolare?

Altri esempi di vincoli sono il pavimento sul quale camminiamo, che ci impedisce di scendere in basso, un chiodo al quale è appeso un quadro, che gli impedisce di cadere sul pavimento, il cavo di una funivia, che impedisce alla cabina di precipitare a terra.
Analizziamo ora alcune situazioni particolari di equilibrio.

L'equilibrio su un piano orizzontale

Consideriamo un barattolo appoggiato su un tavolo, e studiamo la sua condizione di equilibrio come se fosse un punto materiale di massa *m*. Poiché il barattolo è fermo, cioè è in equilibrio statico, la forza risultante $\vec{R}$ che agisce su di esso deve essere nulla. Quindi la sua forza peso $\vec{P}$, diretta verso il basso, deve essere compensata da una forza verso l'alto esercitata dal tavolo, perpendicolare alla superficie del tavolo (fig. 3). Tale forza, che è perpendicolare alla superficie del piano, è la forza vincolare $\vec{F}_v$.
Maggiore è il peso dell'oggetto posto sul tavolo, maggiore è la forza vincolare esercitata dal tavolo per compensarlo.

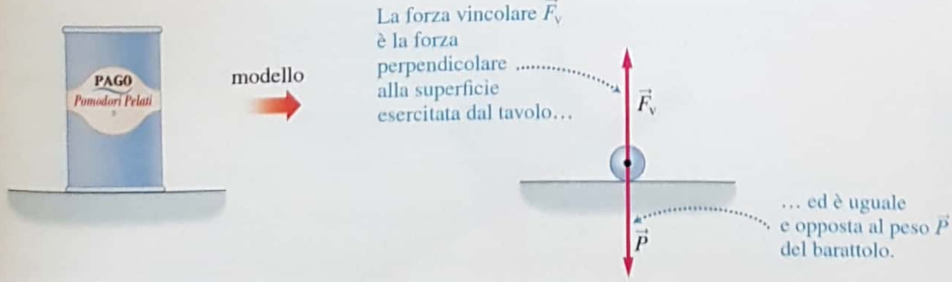


Figura 3
Equilibrio di un corpo appoggiato su un piano orizzontale

Imponiamo la **condizione di equilibrio**: in questo caso le forze sono dirette una verso l'alto e una verso il basso, in direzione perpendicolare al tavolo.

La risultante $\vec{R}$ è data dalla somma vettoriale della forza peso e della forza vincolare:

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{F}_v$$

Poiché $\vec{R} = 0$, abbiamo:

$$\vec{P} + \vec{F}_v = 0 \qquad \text{cioè} \qquad \vec{F}_v = -\vec{P}$$

Consideriamo ora il caso in cui sul barattolo agisce un'altra forza $\vec{F}$ diretta verso il basso, ad esempio quella esercitata dalla nostra mano (fig. 4). La risultante in questo caso è:

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{F} + \vec{F}_v$$

da cui, imponendo la **condizione di equilibrio** $\vec{R} = 0$, si ottiene:

$$\vec{P} + \vec{F} + \vec{F}_v = 0 \qquad \text{cioè} \qquad \vec{F}_v = -(\vec{P} + \vec{F})$$

La forza vincolare, come si vede, è maggiore del peso del barattolo ed è uguale e opposta a $\vec{P} + \vec{F}$, che è la **forza premente** $\vec{F}_p$ sulla superficie:

$$\vec{F}_v = -\vec{F}_p$$

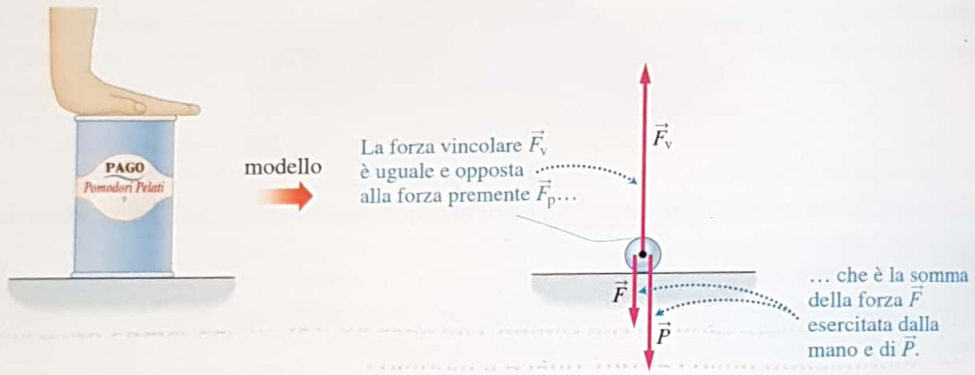


Figura 4 Equilibrio di un corpo su un piano orizzontale su cui agisce una forza premente

In generale, quindi:

> **Forza vincolare, $\vec{F}_v$**
>
> La forza vincolare $\vec{F}_v$ esercitata da una superficie è uguale e opposta alla forza premente $\vec{F}_p$ che agisce sulla superficie:
>
> $$\vec{F}_v = -\vec{F}_p$$

L'equilibrio su un piano inclinato

Finora abbiamo preso in considerazione superfici orizzontali, per le quali la forza vincolare è verticale. In un **piano inclinato**, invece, la forza vincolare è inclinata rispetto alla verticale.
Consideriamo un corpo appoggiato su un piano inclinato (fig. 5).
Sul corpo agiscono la forza peso $\vec{P}$, diretta verso il basso, e la forza vincolare $\vec{F}_v$, perpendicolare alla superficie del piano.

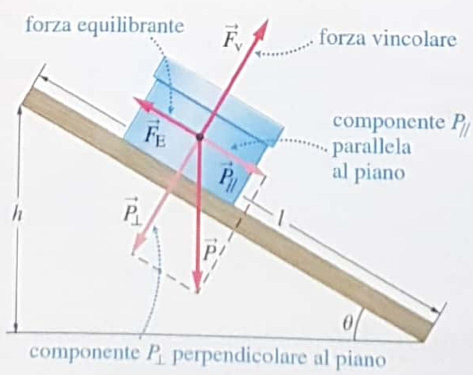


Figura 5 Equilibrio di un corpo su un piano inclinato

Scomponiamo la forza peso lungo le direzioni parallela e perpendicolare al piano, $\vec{P}_{//}$ e $\vec{P}_{\perp}$. La componente $\vec{P}_{\perp}$ non ha effetto sul movimento del corpo, perché è compensata dalla forza vincolare del piano su cui il corpo poggia:

$$\vec{P}_{\perp} = -\vec{F}_{v}$$

La componente $\vec{P}_{//}$ fa invece muovere il corpo verso la base del piano inclinato: per mantenere il corpo in equilibrio occorre applicare una forza equilibrante $\vec{F}_E$ che compensi $\vec{P}_{//}$:

$$\vec{P}_{//} = -\vec{F}_{E} \qquad \textit{condizione di equilibrio}$$

forza equilibrante

Se h è l'altezza del piano e l la sua lunghezza, si può dimostrare che:

$$P_{//} = P\frac{h}{l}$$

IN DIGITALE
Approfondimento
Dimostrazione della relazione
$P_{//} = P\frac{h}{l}$

In **presenza di attrito** fra il corpo e il piano, la forza di attrito statico è parallela al piano e diretta in verso opposto al moto del corpo verso la base. Se il corpo è fermo significa che essa compensa la componente $\vec{P}_{//}$ della forza peso:

$$\vec{P}_{//} = -\vec{F}_{A} \qquad \textit{condizione di equilibrio}$$

forza di attrito statico

APPLICA SUBITO

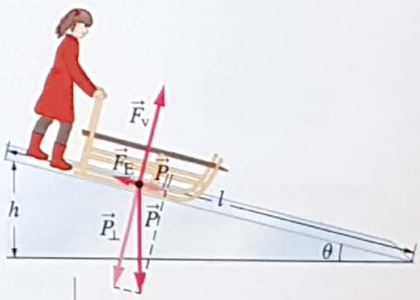
1 Nives deve tenere fermo il suo slittino, che pesa 88,2 N, su una rampa ghiacciata. Supponendo nullo l'attrito, qual è il modulo della forza che deve esercitare se la rampa è lunga 10,0 m e alta 2,50 m?

La forza equilibrante $\vec{F}_E$ che Nives deve esercitare per tenere fermo lo slittino è uguale in modulo alla componente della forza peso parallela alla rampa:

$$P_{//} = P\frac{h}{l}$$

Sostituendo i dati del problema otteniamo:

$$F_E = P_{//} = 88{,}2\ \text{N} \cdot \frac{2{,}50\ \text{m}}{10{,}0\ \text{m}} = 22{,}1\ \text{N}$$



2 Un leone marino di massa $m = 4{,}5 \cdot 10^2$ kg è fermo su una rampa inclinata di un angolo $\theta = 12°$. Calcola l'intensità della forza vincolare e della forza di attrito statico sull'animale.

Il peso del leone marino è:

$$P = (4{,}5 \cdot 10^2\ \text{kg})(9{,}81\ \text{N/kg}) = 4{,}4 \cdot 10^3\ \text{N}$$

La forza vincolare F_v è uguale alla componente della forza peso perpendicolare al piano, $P_{\perp}$. Le componenti $P_{//}$ e $P_{\perp}$ si possono anche calcolare ricorrendo alle funzioni trigonometriche seno e coseno. Infatti:

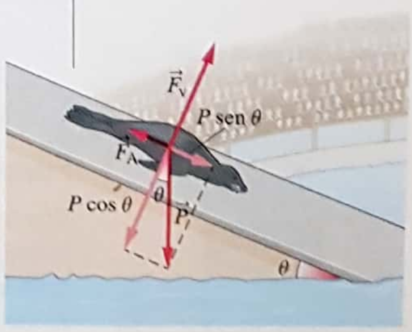
$$P_{//} = P \operatorname{sen}\theta \qquad \text{e} \qquad P_{\perp} = P\cos\theta$$

Possiamo allora scrivere:

$$F_v = P\cos\theta = (4{,}4 \cdot 10^3\ \text{N})\cos 12° = 4{,}3 \cdot 10^3\ \text{N}$$

Se il leone marino è fermo scriviamo la condizione di equilibrio per i moduli delle forze coinvolte, $P_{//} = F_A$, da cui:

$$F_A = P \operatorname{sen}\theta = (4{,}4 \cdot 10^3\ \text{N})\operatorname{sen} 12° = 9{,}1 \cdot 10^2\ \text{N}$$



3. L'equilibrio di un corpo rigido

Le forze applicate a un **corpo rigido esteso** possono imprimere al corpo un *moto solo traslatorio* oppure anche un *moto rotatorio*: osserva la situazione illustrata in figura 6, nella quale due studenti spingono un banco.

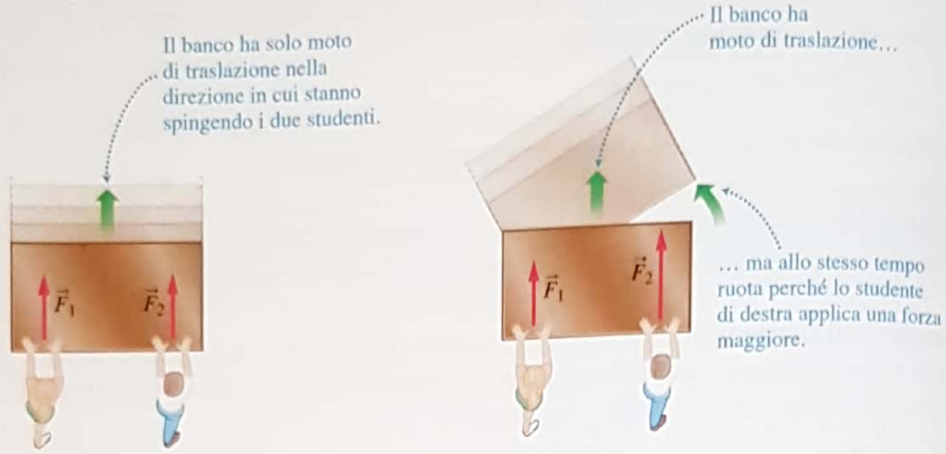


Figura 6
Moto traslatorio e moto rotatorio di un corpo rigido

A differenza di un punto materiale, un corpo rigido può anche ruotare intorno a un asse. Per descrivere l'equilibrio e il moto di un corpo rigido è necessario sapere come comporre due forze agenti su punti diversi di un corpo rigido e introdurre una nuova grandezza fisica, chiamata *momento torcente*.

Come comporre forze che agiscono su un corpo rigido

Per comporre due o più forze che agiscono su un punto materiale o sullo stesso punto di un corpo rigido, usiamo i metodi di somma vettoriale presentati nel capitolo 3. Per formulare le regole che permettono di comporre due forze che agiscono su punti diversi di un corpo rigido distinguiamo quattro casi: forze che agiscono sulla stessa retta, forze concorrenti, forze parallele e concordi, forze parallele e discordi.

Forze che agiscono sulla stessa retta di azione

Se due forze agenti su un corpo rigido hanno la stessa **retta di azione** (cioè la retta su cui giacciono i vettori che rappresentano le forze), è possibile spostare una delle due forze lungo la retta, in modo da far coincidere i punti di applicazione delle due forze (fig. 7).

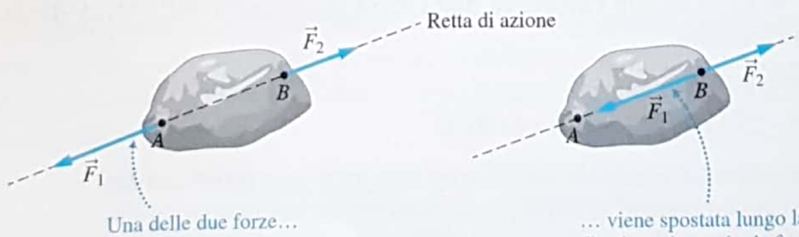


Figura 7
Composizione di forze agenti sulla stessa retta di azione

Forze concorrenti

Due forze si dicono **forze concorrenti** se le loro rette di azione si intersecano. Per comporre le due forze, bisogna spostarle lungo le loro rette di azione fino al punto di intersezione e tracciare la risultante con la regola del parallelogramma (fig. 8). Nel caso in cui il punto di intersezione sia fuori dal corpo, si trasla la risultante lungo la sua retta di azione, fino a un punto qualsiasi all'interno del corpo.

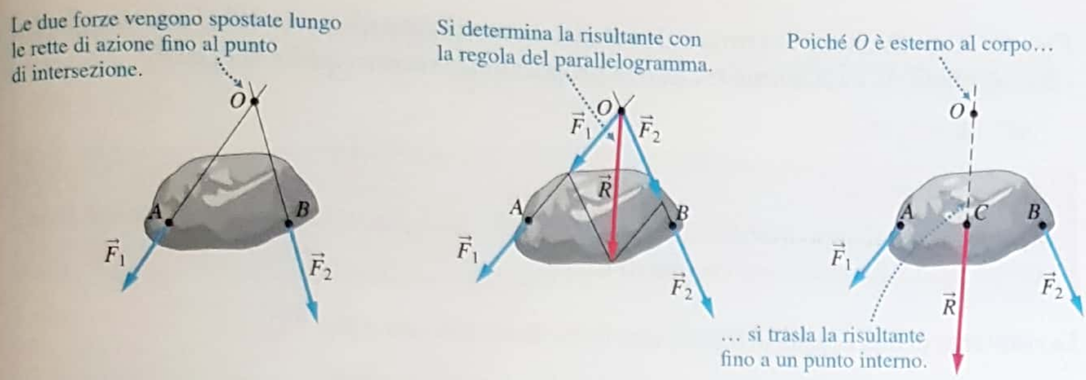


FIGURA ANIMATA

Figura 8
Composizione di forze concorrenti

Forze parallele e concordi

Due **forze** sono **parallele** se hanno le rette di azione parallele; due forze parallele sono **concordi** se hanno lo stesso verso.

La risultante di due forze parallele concordi $\vec{F}_1$ ed $\vec{F}_2$, applicate rispettivamente nei punti A e B, è una forza che ha la stessa direzione e lo stesso verso di $\vec{F}_1$ ed $\vec{F}_2$ e intensità uguale alla somma delle intensità delle due forze:

$$R = F_1 + F_2$$

Il punto di applicazione C della risultante divide la congiungente *AB* in due segmenti *AC* e *CB* che stanno tra loro in proporzione inversa a quella di F_1 ed F_2:

$$AC : CB = F_2 : F_1$$

La risultante, quindi, è interna alle due forze e il suo punto di applicazione è più vicino alla forza di intensità maggiore (**fig. 9**).

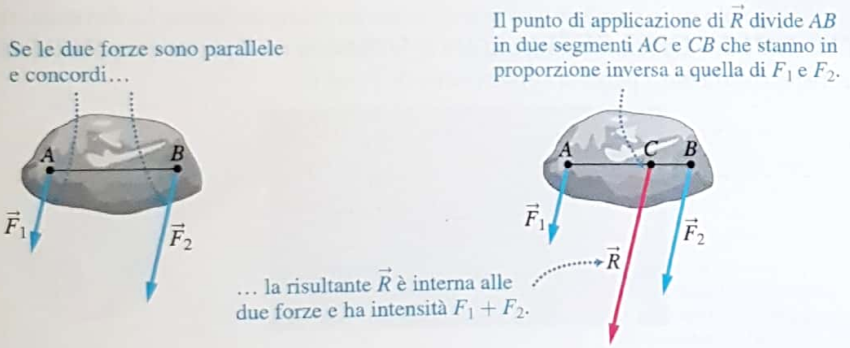


FIGURA ANIMATA

Figura 9
Composizione di forze parallele e concordi

Forze parallele e discordi

Due **forze parallele** sono **discordi** se hanno versi opposti.

La risultante di due forze parallele discordi $\vec{F}_1$ ed $\vec{F}_2$, applicate rispettivamente nei punti A e B, è una forza che ha la stessa direzione di $\vec{F}_1$ ed $\vec{F}_2$, verso concorde con quello della forza maggiore e intensità uguale alla differenza delle intensità delle due forze:

$$R = F_1 - F_2$$

La risultante è esterna alle due forze e il suo punto di applicazione è sul lato della forza di intensità maggiore (**fig. 10**).

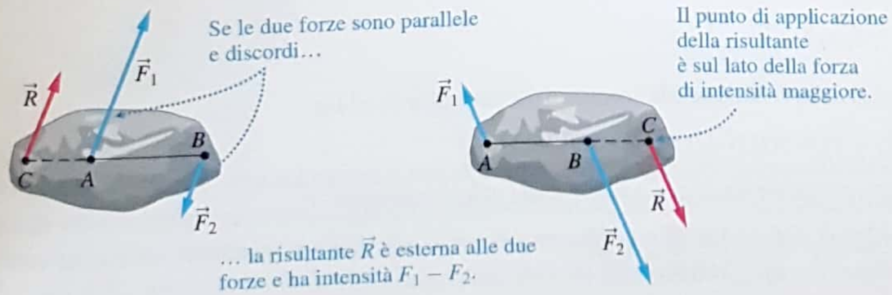


FIGURA ANIMATA

Figura 10
Composizione di forze parallele e discordi

Il punto di applicazione C si trova sul prolungamento di AB dalla parte della forza maggiore, e i due segmenti AC e CB stanno tra loro in proporzione inversa a quella di F_1 ed F_2:

$$AC : CB = F_2 : F_1$$

Che cos'è una coppia di forze?

Coppia di forze

Due forze parallele e discordi di uguale intensità, che agiscono su due punti diversi di un corpo rigido, formano una **coppia di forze**.

La risultante di una coppia di forze è una forza di modulo zero (fig. 11).

Figura 11
Coppia di forze

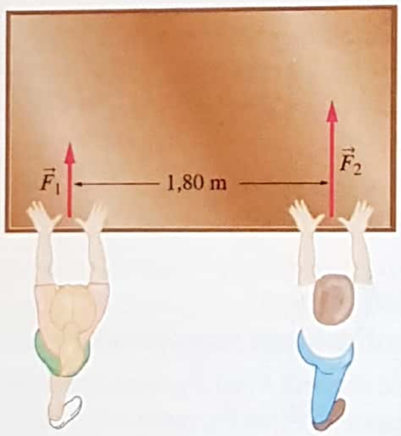
PROBLEM SOLVING 1

Lavori in casa

Cecilia e Roberto spingono un tavolo. Cecilia esercita una forza $\vec{F}_1$ di intensità 100 N, Roberto una forza $\vec{F}_2$ di intensità 150 N. La distanza tra i punti di applicazione delle forze è 1,80 m.
Determina la risultante $\vec{R}$ delle forze e la distanza del suo punto di applicazione dai punti di applicazione di $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$.

DESCRIZIONE DEL PROBLEMA

Le forze applicate al tavolo sono parallele e concordi, come mostrato in figura. La distanza tra i loro punti di applicazione è $d = 1{,}80$ m. Chiamiamo d_1 e d_2 le distanze tra il punto di applicazione della risultante $\vec{R}$ e, rispettivamente, i punti di applicazione di $\vec{F}_1$ ed $\vec{F}_2$.



STRATEGIA

La risultante $\vec{R}$ delle forze $\vec{F}_1$ ed $\vec{F}_2$ ha la stessa direzione e lo stesso verso di $\vec{F}_1$ ed $\vec{F}_2$. La sua intensità è la somma delle intensità delle due forze. Per calcolare d_1 e d_2 usiamo la proporzione $d_1 : d_2 = F_2 : F_1$ e la relazione $d_1 + d_2 = d$.

Dati
$F_1 = 100$ N; $F_2 = 150$ N; $d = 1{,}80$ m

Incognite
$R = ?$; $d_1 = ?$; $d_2 = ?$

SOLUZIONE

1) L'intensità R della risultante è la somma delle intensità F_1 ed F_2:

$$R = F_1 + F_2 = 100\text{ N} + 150\text{ N} = 250\text{ N}$$

2) Scrivi la proporzione tra d_1 e d_2 e sostituisci i valori numerici:

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{F_2}{F_1} \quad \rightarrow \quad \frac{d_1}{d_2} = \frac{150\text{ N}}{100\text{ N}} = 1{,}50$$

3) Dalla proporzione ricava d_1:

$$d_1 = 1{,}50 d_2$$

4) Ricava d_2 sostituendo nella relazione $d_1 + d_2 = d = 1{,}80$ m:

$$1{,}50 d_2 + d_2 = 1{,}80 \text{ m} \quad \rightarrow \quad 2{,}50 d_2 = 1{,}80 \text{ m} \quad \rightarrow \quad d_2 = \frac{1{,}80 \text{ m}}{2{,}50} = 0{,}72 \text{ m}$$

5) Calcola la distanza d_1:

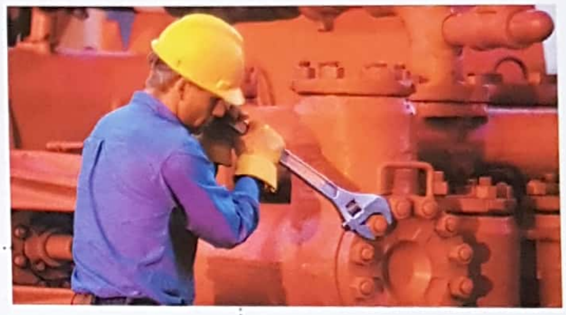
$$d_1 = d - d_2 = 1{,}80 \text{ m} - 0{,}72 \text{ m} = 1{,}08 \text{ m}$$

OSSERVAZIONI Avremmo potuto saltare qualche passaggio applicando la proprietà delle proporzioni che stabilisce che, se $a : b = c : d$, allora $(a + b) : b = (c + d) : d$. Nel nostro caso si ha $(d_1 + d_2) : d_2 = (F_2 + F_1) : F_1$, cioè $d : d_2 = R : F_1$.

PROVA TU Calcola d_1 e d_2 se $F_1 = 175$ N ed $F_2 = 75$ N. [$d_1 = 0{,}54$ m; $d_2 = 1{,}26$ m]

Una forza può causare una rotazione

Supponiamo di voler allentare un bullone, ruotandolo in senso antiorario con una chiave inglese. Sappiamo che il bullone si svita più facilmente se applichiamo la forza il più lontano possibile da esso, come mostrato in figura 12. Applicare una forza vicino al bullone non ha un grande effetto; il bullone si svita, ma a costo di uno sforzo notevolmente maggiore!



REAL PHYSICS

Perché un bullone si svita più facilmente con una chiave con il manico lungo?

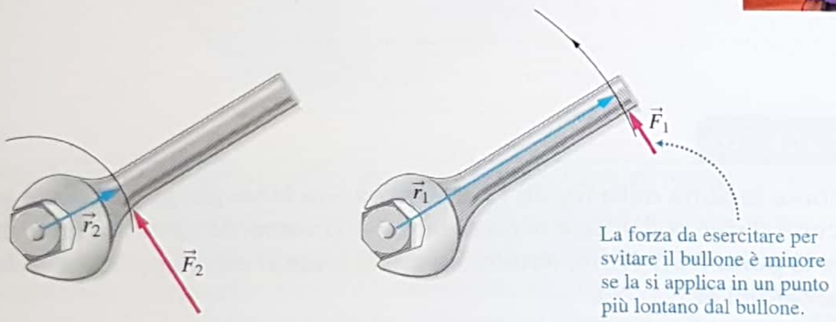


Figura 12 Applicazione di un momento torcente per svitare un bullone

Analogamente, è molto più facile aprire una porta girevole se si spinge in un punto più lontano dall'asse di rotazione, cioè dalla retta attorno alla quale la porta può ruotare (fig. 13).

Figura 13 Applicazione di un momento torcente per aprire una porta girevole

È evidente, quindi, che la capacità di una forza di causare una rotazione cresce con la distanza r tra l'asse di rotazione e il punto di applicazione della forza. Risulta perciò utile definire una grandezza, chiamata **momento torcente** o **momento di una forza** M, che tenga conto sia dell'intensità della forza, F, sia della distanza, r, dall'asse di rotazione.

Momento torcente prodotto da una forza perpendicolare al raggio

Supponiamo, ad esempio, di applicare una forza alla piattaforma di una giostra in direzione *perpendicolare* a quella di una semiretta che congiunge l'asse di rotazione con il punto di applicazione (fig. 14).

In questo caso possiamo definire il momento torcente come il prodotto del raggio r della giostra e della forza F applicata, cioè:

Momento torcente M (caso in cui la forza è perpendicolare)

$$M = rF$$

momento torcente (Nm) — forza (N) — distanza dall'asse di rotazione (m)

Nel SI il momento torcente si misura in **newton per metri** ($\mathbf{N \cdot m}$).

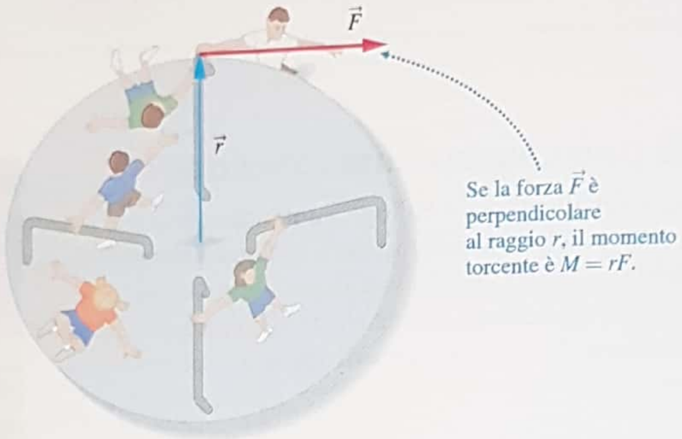


Figura 14
Momento torcente prodotto da una forza perpendicolare al raggio

APPLICA SUBITO

3 **Per aprire la porta della figura 13 si applica una forza perpendicolare ad essa a una certa distanza dall'asse di rotazione. Se il momento torcente necessario per aprire la porta è 3,1 N · m, determina quale forza si deve applicare se la distanza dai cardini è:**
a) 0,94 m;
b) 0,35 m.

a) Ponendo $M = r_1 F_1 = 3{,}1\ \text{N} \cdot \text{m}$, ricaviamo che la forza richiesta è:

$$F_1 = \frac{M}{r_1} = \frac{3{,}1\ \text{N} \cdot \text{m}}{0{,}94\ \text{m}} = 3{,}3\ \text{N}$$

b) Ripetendo il calcolo con $r_2 = 0{,}35$ m, otteniamo:

$$F_2 = \frac{M}{r_2} = \frac{3{,}1\ \text{N} \cdot \text{m}}{0{,}35\ \text{m}} = 8{,}9\ \text{N}$$

Nel caso *b)* la forza è maggiore perché è applicata più vicino ai cardini.

Ragioniamo sul caso in cui la forza sia applicata direttamente sull'asse di rotazione, per cui $r = 0$; il momento angolare è in questo caso nullo:

$$M = r \cdot F = 0 \cdot F = 0$$

Possiamo perciò applicare una forza grande quanto vogliamo, ma non produrremo alcuna rotazione: provare per credere!

Momento torcente prodotto da una forza radiale

Supponiamo ora di applicare una forza alla piattaforma della giostra in direzione *radiale*, cioè lungo la direzione di una semiretta con l'origine nell'asse di rotazione (fig. 15).
In questo caso la forza non causa alcuna rotazione, dunque il momento è nullo:

$$M = 0$$

Osserviamo che la forza non tende a imprimere una rotazione; il perno della giostra esercita una forza uguale e opposta, che annulla la forza applicata. Come risultato la giostra rimane ferma.
Analogamente, se spingessimo o tirassimo una porta girevole in direzione radiale, questa non ruoterebbe. Possiamo concludere, quindi, che **una forza radiale produce un momento torcente nullo**.

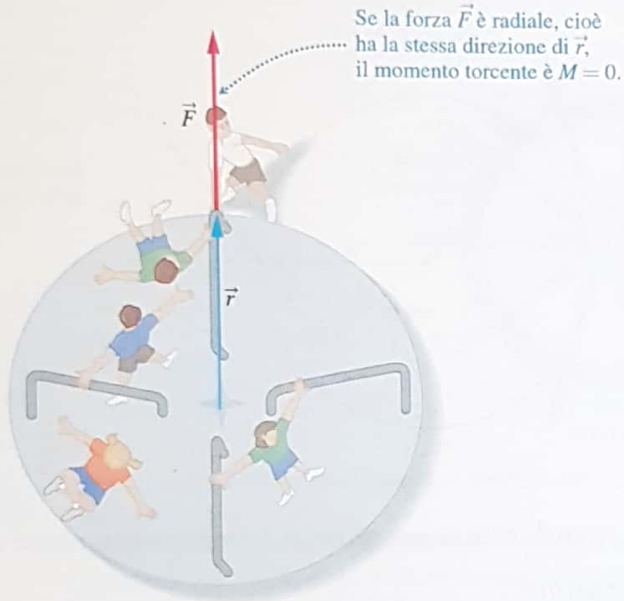


Figura 15
Una forza radiale produce un momento torcente nullo

Momento torcente prodotto da una forza con direzione qualsiasi

Vediamo che cosa accade se la forza forma un angolo θ con la direzione radiale (fig. 16). Per analizzare questo caso scomponiamo il vettore forza $\vec{F}$ nelle sue componenti radiale (parallela a $\vec{r}$) e tangenziale (perpendicolare a $\vec{r}$); riferendoci alla figura 16, possiamo vedere che la componente radiale ha intensità $F \cos\theta$ e la componente tangenziale ha intensità $F \operatorname{sen}\theta$. Poiché è solo la componente tangenziale che causa rotazione, diciamo che il momento torcente in questo caso ha intensità:

$$M = rF \operatorname{sen}\theta$$

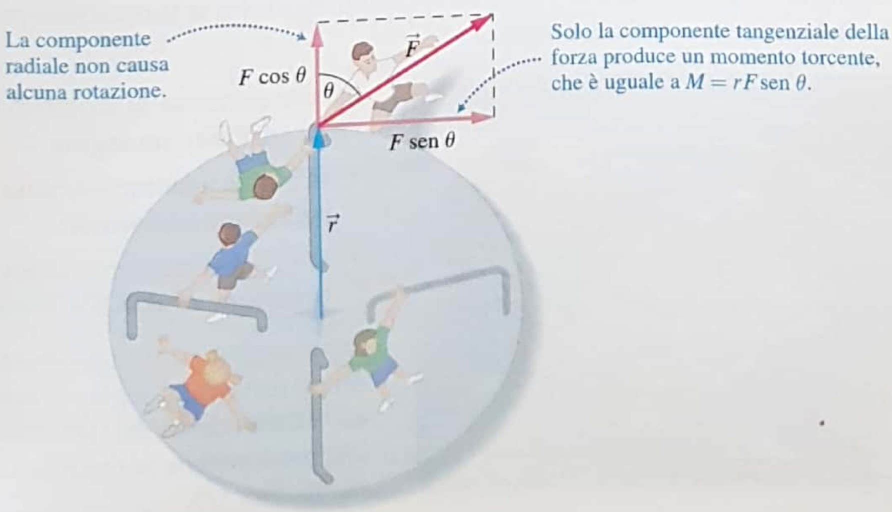


FIGURA ANIMATA

Figura 16
Momento torcente prodotto da una forza in direzione qualsiasi

Possiamo dare pertanto la definizione generale:

Come varia il momento torcente a seconda della direzione della forza applicata?

Momento torcente, o momento di una forza, M

Una forza $\vec{F}$ che forma un angolo θ con la direzione radiale genera un momento torcente M, o momento di una forza, dato da:

$$\underbrace{M}_{\text{momento torcente (N}\cdot\text{m)}} = r\underbrace{F}_{\text{forza applicata (N)}}\text{sen}\,\underbrace{\theta}_{\text{angolo fra forza e direzione radiale (rad)}}$$

ATTENZIONE!

La formula $M = rF\,\text{sen}\,\theta$ comprende anche i due casi particolari considerati.

- Se la forza è radiale: $\theta = 0$ e $M = rF \cdot 0 = 0$
- Se la forza è perpendicolare: $\theta = 90°$ e $M = rF \cdot 1 = rF$

Il fattore $r\,\text{sen}\,\theta$ è la distanza della retta di applicazione della forza dall'asse di rotazione (fig. 17) e prende il nome di **braccio della forza**, b:

$$b = r\,\text{sen}\,\theta$$

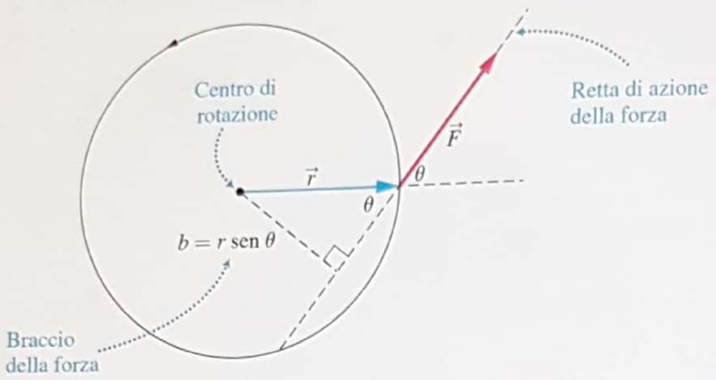


Figura 17
Braccio di una forza

Possiamo allora riscrivere la definizione generale del momento torcente nel seguente modo:

$$M = rF\,\text{sen}\,\theta = (r\,\text{sen}\,\theta)\,F$$

Momento torcente (espresso mediante il braccio della forza)

Il momento torcente può essere espresso anche come il prodotto del braccio della forza per la forza:

$$\underbrace{M}_{\text{momento torcente (N}\cdot\text{m)}} = \underbrace{b}_{\text{braccio della forza (m)}}\underbrace{F}_{\text{forza (N)}}$$

Finora abbiamo parlato di momento torcente riferendoci alla sua intensità, legata all'ampiezza della rotazione prodotta. Per descrivere qual è il verso della rotazione e in quale piano avviene, dobbiamo introdurre il **vettore momento torcente**, che ha modulo $M = rF\,\text{sen}\,\theta$, direzione perpendicolare al piano che contiene r ed F, verso che punta in alto se la rotazione prodotta è antioraria e in basso se la rotazione è oraria.

Figura 18
Sistema su cui agiscono due momenti torcenti
Il momento torcente risultante sul timone di questa nave è la somma dei momenti torcenti esercitati dai due marinai. Nell'istante raffigurato essi stanno esercitando momenti torcenti positivi sul timone, facendolo ruotare in senso antiorario.

Per convenzione, ai momenti torcenti viene attribuito un **segno**:

- $\boldsymbol{M > 0}$ se il momento causa una **rotazione antioraria**;
- $\boldsymbol{M < 0}$ se il momento causa una **rotazione oraria**.

In un sistema su cui agiscono più momenti torcenti, il segno di ognuno di essi è determinato dal tipo di rotazione che produrrebbe se fosse l'unico momento (fig. 18).

Il momento di una coppia di forze è doppio rispetto a quello di una singola forza

Consideriamo due persone che spingono una porta girevole con forze di uguale intensità applicate a uguale distanza dall'asse di rotazione (fig. 19a): la porta ruoterà più facilmente rispetto al caso in cui una sola persona spinga con la stessa forza (fig. 19b).

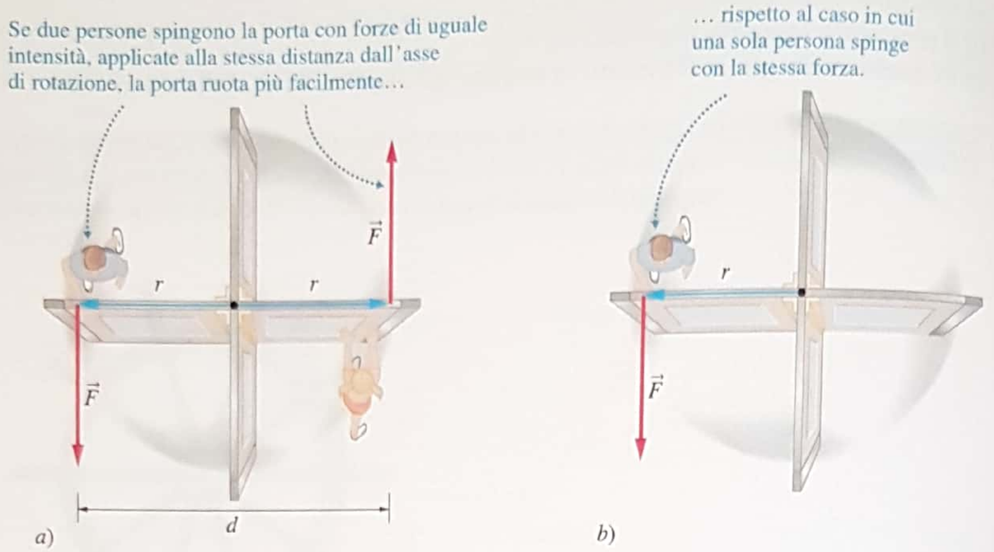


Figura 19 Momento di una coppia di forze

Nel primo caso le due persone hanno applicato una coppia di forze. Per descrivere l'effetto di una coppia di forze applicate nei punti A e B di un corpo rigido si introduce una grandezza chiamata **momento di una coppia**, dato dalla somma dei momenti delle due forze rispetto al punto medio tra A e B.

Se schematizziamo l'esempio della porta girevole della figura 19a e indichiamo con $d = 2r$ la distanza tra le rette di azione delle forze, il momento della coppia è dato da:

$$M = rF + rF = (2r)F \qquad \text{cioè} \qquad M = dF$$

Qual è l'effetto di una coppia di forze su un corpo rigido?

Momento di una coppia di forze

Il momento di una coppia di forze è uguale al prodotto dell'intensità di una forza per la distanza tra le rette di azione delle due forze:

$$M = d\,F$$

momento di una coppia di forze (N · m)

forza applicata (N)

distanza fra le rette di azione delle forze (m)

Se le forze sono perpendicolari alla congiungente i loro punti di applicazione, d è anche la distanza tra questi punti, come nella figura 19a.

Se invece le forze non sono perpendicolari alla congiungente, la distanza d tra le loro rette di azione si determina come mostrato nella figura 20.

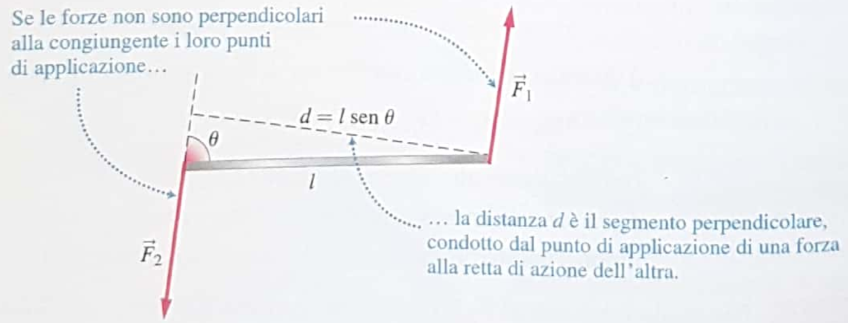


Figura 20 Distanza tra le rette di azione di una coppia di forze

Come per il momento di una forza, il momento di una coppia è positivo se causa una rotazione antioraria, negativo se causa una rotazione oraria.

Un corpo rigido è in equilibrio se non trasla e non ruota

Un bambino è seduto su una lunga tavola di legno, di massa trascurabile, che è sorretta dai suoi genitori (fig. 21). Se il peso del bambino è P, le forze esercitate dai suoi genitori verso l'alto devono dare come somma P, cioè:

$$F_1 + F_2 = P$$

Questa condizione assicura che la forza risultante che agisce sulla tavola sia uguale a zero; la condizione non garantisce, tuttavia, che la tavola rimanga ferma.

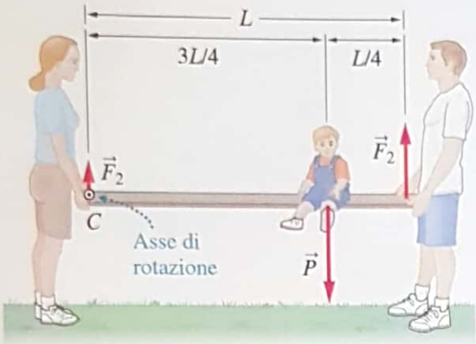


FIGURA ANIMATA

Figura 21 Equilibrio statico di un corpo rigido

Per capire perché, immaginiamo che il padre del bimbo se ne vada e che la madre aumenti la forza applicata fino a un valore uguale a quello del peso del bambino. In questo caso si ha $F_1 = P$ ed $F_2 = 0$ e l'equazione delle forze scritta sopra è ancora soddisfatta. Tuttavia, poiché l'estremità destra della tavola non è più sostenuta, cade verso terra, mentre l'estremità di sinistra rimane in alto; in altre parole, la tavola ruota in senso orario.

Perché la tavola rimanga completamente ferma, senza alcuna traslazione o rotazione, dobbiamo imporre due condizioni:

1) *la forza risultante* che agisce sulla tavola *deve essere uguale a zero*, in modo che non ci sia traslazione;
2) *il momento torcente totale* esercitato sulla tavola, calcolato rispetto a un punto qualsiasi, *deve essere uguale a zero*, in modo che non ci sia rotazione.

Se entrambe queste condizioni sono soddisfatte, un oggetto esteso, come la tavola dell'esempio, rimane in quiete, se inizialmente è in quiete.

ATTENZIONE!
L'effetto risultante dei momenti delle forze applicate è indipendente dalla scelta del centro di rotazione, che può anche essere esterno al corpo.

Condizioni di equilibrio di un corpo rigido

Un corpo rigido è in equilibrio se è fermo e se sono soddisfatte le seguenti due condizioni:

1) risultante $\vec{R}$ delle forze che agiscono sul corpo uguale a zero:

$$\vec{R} = 0$$

2) momento torcente totale $\vec{M}_{tot}$, rispetto a un punto qualsiasi, uguale a zero:

$$\vec{M}_{tot} = 0$$

In quali condizioni un corpo rigido è in equilibrio?

Fissa i concetti chiave

1. **SPIEGA** Quando due forze applicate su un corpo rigido formano una coppia di forze?
2. **RISPONDI** Com'è definito il momento torcente di una forza applicata a un corpo rigido?
3. **DESCRIVI** Illustra qual è l'effetto di una coppia di forze applicate a due punti differenti di un corpo rigido.
4. **RISPONDI** Quali sono le condizioni generali di equilibrio di un corpo rigido?

4. Baricentro ed equilibrio

Il baricentro di un corpo esteso è il punto di applicazione della forza peso

Un corpo esteso può essere immaginato come un insieme di tanti piccoli volumetti, ognuno dei quali è soggetto a una certa forza peso (fig. 22).

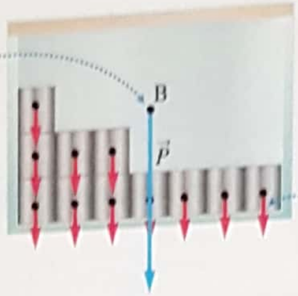


Figura 22
Baricentro di un corpo esteso

La forza peso risultante è la somma di tutte queste forze peso parallele e concordi ed è applicata in un punto particolare, detto **baricentro** o **centro di gravità** del corpo.

In un corpo esteso, dove si considera sia applicata la forza peso?

Baricentro
Il baricentro di un corpo è il punto di applicazione della forza peso del corpo.

L'importanza del baricentro sta nel fatto che il corpo si comporta come se tutta la sua massa fosse concentrata in quel punto. Quindi, per equilibrare il sistema è sufficiente, ad esempio, sospenderlo a un filo che passa per il suo baricentro o appoggiarlo su un sostegno proprio in quel punto.

In un oggetto di forma regolare e omogeneo (cioè con la stessa densità in ogni punto) il baricentro è situato nel *centro geometrico* dell'oggetto, anche se questo punto è esterno all'oggetto (fig. 23).

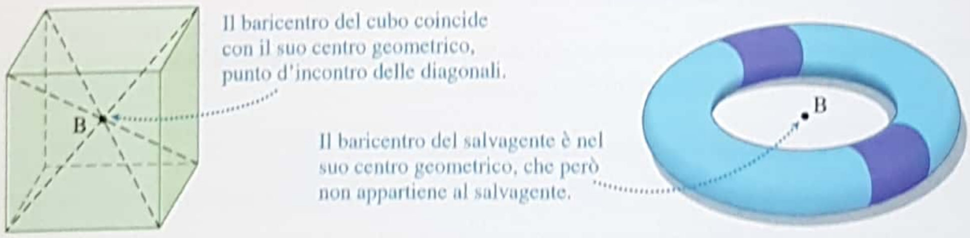
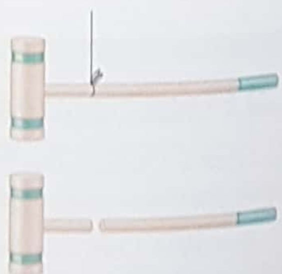


Figura 23
Baricentro di corpi regolari e omogenei

RAGIONA CON UN ESEMPIO

4 **Una mazza da croquet è in equilibrio quando è sospesa nel baricentro, come illustrato in figura. Se tagliassimo la mazza in due, esattamente nel suo baricentro, la massa della parte a sinistra, quella con la testa della mazza, sarebbe maggiore, minore o uguale alla massa della parte a destra?**

La mazza appesa è in equilibrio perché i momenti torcenti dovuti alle due parti, a destra e a sinistra del baricentro, si bilanciano. La parte che contiene la testa della mazza si estende di una distanza dal punto di sospensione inferiore a quella dell'altra. Poiché una massa grande a una piccola distanza genera lo stesso momento torcente di una massa piccola a una distanza maggiore, segue che la parte con la testa della mazza ha una massa maggiore.



L'equilibrio di un oggetto sospeso

Per determinare sperimentalmente il baricentro, si sfrutta il fatto che se un oggetto di forma qualsiasi viene sospeso in un punto, esso si dispone sempre in modo che **il suo baricentro si trovi su una retta verticale che passa per il punto di sospensione**.

Quando un oggetto sospeso è in equilibrio?

Per capire il perché, osserviamo che quando il baricentro è esattamente sotto il punto di sospensione, il momento torcente dovuto alla forza peso è nullo, poiché la forza peso agisce lungo una retta passante per il centro di rotazione (fig. 24a).
Se l'oggetto viene ruotato leggermente (fig. 24b), la forza peso agisce lungo una retta che non passa per il centro di rotazione, quindi il peso produce un momento torcente che tende a far ruotare l'oggetto, riportando il baricentro sotto il punto di sospensione.

IN DIGITALE
Approfondimento
Determinare il baricentro di un oggetto irregolare

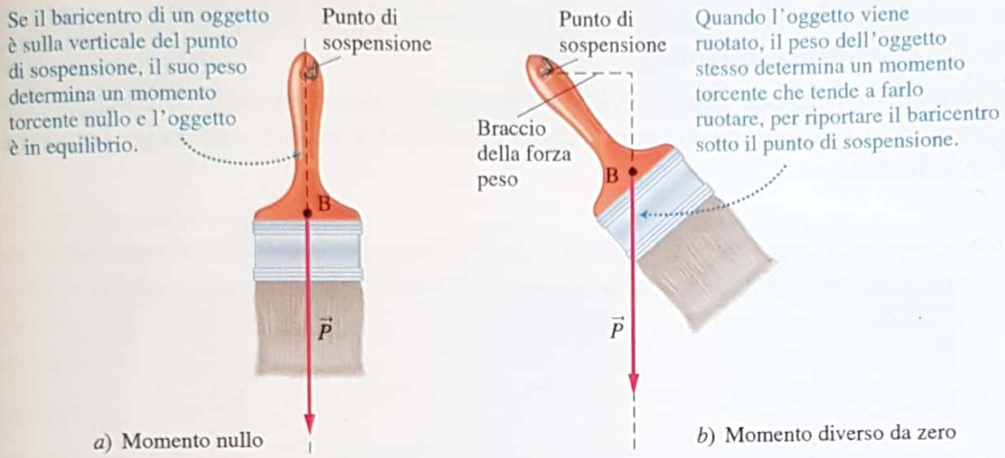


Figura 24
Equilibrio di un oggetto sospeso

L'equilibrio di un oggetto appoggiato

Consideriamo ora un oggetto che è in quiete su una superficie: **l'oggetto è in equilibrio finché il suo baricentro appartiene a una retta che cade all'interno della base sulla quale l'oggetto è appoggiato** (fig. 25).

Quando un oggetto appoggiato è in equilibrio?

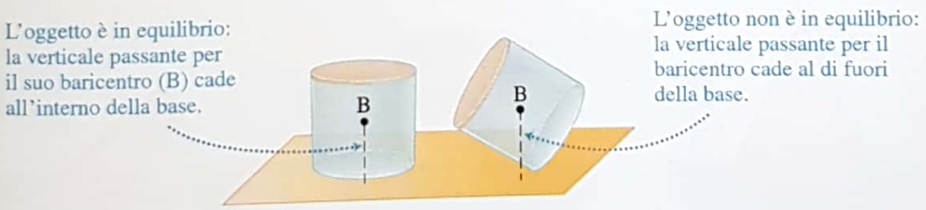


Figura 25
Equilibrio di un oggetto appoggiato

REAL PHYSICS

Perché se solleviamo un piede da terra perdiamo l'equilibrio?
Quando stiamo in piedi in posizione normale, i nostri piedi forniscono la base d'appoggio e il nostro baricentro si trova su una retta passante per un punto che è approssimativamente in mezzo ai piedi.
Se alziamo il piede sinistro da terra, senza cambiare posizione, iniziamo a perdere l'equilibrio e ci rovesciamo; infatti in questo caso la retta che passa per il nostro baricentro non cade più all'interno della base di appoggio, che ora è il piede destro. Per riottenere l'equilibrio dobbiamo piegarci leggermente verso destra, in modo che la posizione del baricentro sia direttamente sopra al piede. Questo principio si può applicare a qualsiasi oggetto, a un acrobata durante un esercizio, a una roccia in equilibrio o alla pila di libri sul bordo di una scrivania.

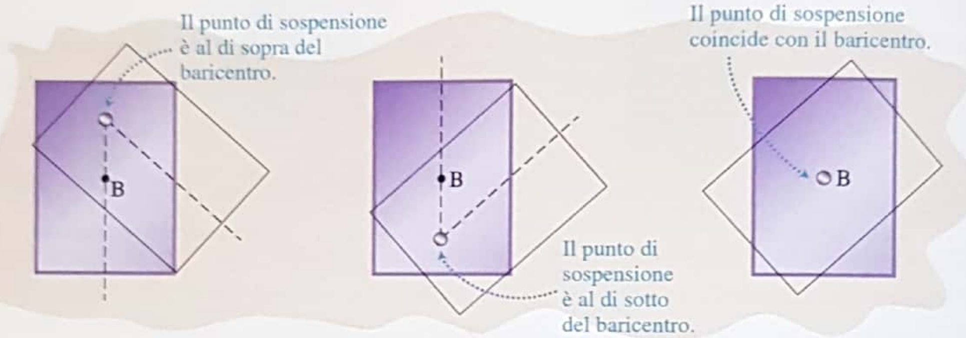
La stabilità dell'equilibrio

Finora abbiamo studiato le condizioni di equilibrio dei corpi rigidi, ma non abbiamo affrontato il problema della **stabilità dell'equilibrio**: che cosa succede se un corpo rigido viene spostato dalla sua posizione di equilibrio?
Consideriamo ad esempio un pannello appeso al muro con un chiodo piantato in un punto sulla verticale del suo baricentro (fig. 26).

Sono possibili tre situazioni:

- il punto di sospensione è posto *al di sopra del baricentro*: se spostiamo di poco il pannello dalla sua posizione di equilibrio, la forza peso tende a riportarlo in quella posizione. Si dice allora che l'**equilibrio è stabile**;
- il punto di sospensione è posto *al di sotto del baricentro*: se spostiamo il pannello dalla sua posizione di equilibrio la forza peso tende a farlo allontanare da quella posizione. Si dice allora che l'**equilibrio è instabile**;
- il punto di sospensione *coincide con il baricentro*: se spostiamo il pannello dalla sua posizione di equilibrio, esso assume una nuova posizione di equilibrio. Si dice allora che l'**equilibrio è indifferente**.

FIGURA ANIMATA



a) Equilibrio stabile b) Equilibrio instabile c) Equilibrio indifferente

Figura 26
Stabilità dell'equilibrio per un corpo sospeso

L'esempio che abbiamo fatto riguarda l'equilibrio di un corpo sospeso. Le definizioni di equilibrio stabile, instabile e indifferente sono però generali e si applicano anche ai corpi appoggiati (fig. 27).

a) Equilibrio stabile b) Equilibrio instabile c) Equilibrio indifferente

Figura 27
Stabilità dell'equilibrio per un corpo appoggiato

Fissa i concetti chiave

1. INDIVIDUA Indica dove si trova il baricentro dei seguenti oggetti regolari.
A Pallone
B Pneumatico
C Scatola rettangolare
D Bilanciere da sollevamento pesi

2. CONFRONTA Qual è la condizione di equilibrio di un oggetto sospeso e quale la condizione di equilibrio di un oggetto appoggiato?

3. RAGIONA La Torre di Pisa è attualmente inclinata di 3,97° rispetto alla verticale. Perché non cade?

4. SCEGLI Osserva la posizione della bottiglia in equilibrio sul piano. Di quale equilibrio si tratta?
A Stabile B Instabile C Indifferente

5. Le leve

Che cosa hanno in comune un avambraccio, un paio di forbici e un apribottiglie?

Figura 28
Esempi di leve

Sono tutti esempi di leve (fig. 28).
Una **leva** è un meccanismo costituito da un'asta rigida che può ruotare attorno a un punto fisso, detto **fulcro**. Su una leva agiscono due forze: la **forza resistente** $\vec{F}_R$, che è la forza da equilibrare, e la **forza motrice** $\vec{F}_M$, che è la forza che viene esercitata sulla leva in modo da vincere la forza resistente.

Una **leva** può essere:

- **vantaggiosa** se la forza motrice è minore della forza resistente, cioè $F_M < F_R$;
- **svantaggiosa** se la forza motrice è maggiore della forza resistente, cioè $F_M > F_R$;
- **indifferente** se la forza motrice è uguale alla forza resistente, cioè $F_M = F_R$.

IN DIGITALE
Approfondimento
I tre tipi di leve

Consideriamo il semplice modello di leva mostrato in figura 29. La forza resistente $\vec{F}_R$ è rappresentata dal peso dell'oggetto da sollevare, mentre la forza motrice $\vec{F}_M$ è la forza esercitata dall'uomo sull'asta. Chiamiamo b_R e b_M rispettivamente il braccio della forza resistente e il braccio della forza motrice rispetto al fulcro.

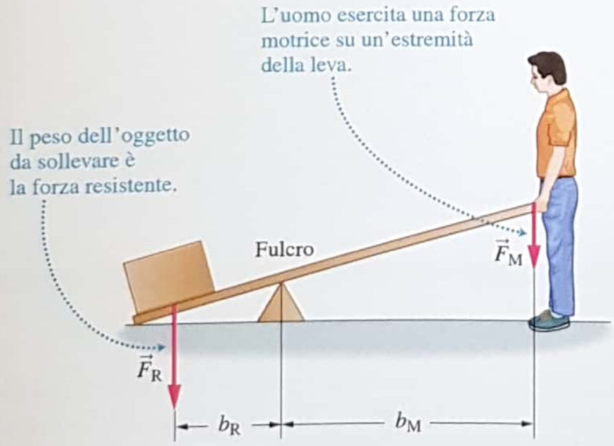


FIGURA ANIMATA

Figura 29
Un semplice modello di leva

Il sistema è in equilibrio se i momenti delle due forze sono uguali e opposti, cioè se vale la condizione:

Condizione di equilibrio di una leva

$$b_R F_R = b_M F_M \qquad \text{o anche} \qquad \frac{b_R}{b_M} = \frac{F_M}{F_R}$$

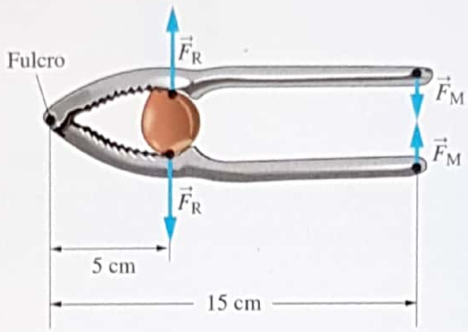
In quali condizioni una leva si trova in equilibrio?

Dalla relazione precedente si può osservare che:

- se il braccio della forza resistente è maggiore del braccio della forza motrice, $b_R > b_M$, la forza motrice è maggiore della forza resistente, cioè la leva è **svantaggiosa**;
- se il braccio della forza motrice è maggiore del braccio della forza resistente, $b_M > b_R$, la forza motrice è minore della forza resistente, cioè la leva è **vantaggiosa**;
- se i bracci delle due forze sono uguali, $b_R = b_M$, la leva è **indifferente**.

APPLICA SUBITO

5 **Younis usa uno schiaccianoci per rompere una nocciolina. Se la nocciolina è posta a 5,0 cm dal fulcro e Younis deve esercitare una forza di 60 N a 15 cm dal fulcro per schiacciarla, qual è l'intensità della forza resistente della nocciolina?**



Uno schiaccianoci è una leva sempre vantaggiosa, perché il braccio della forza motrice è maggiore del braccio della forza resistente. Dalla condizione $b_R F_R = b_M F_M$, ricaviamo F_R:

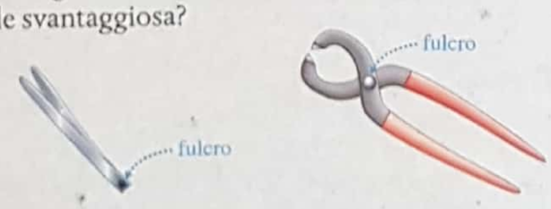
$$F_R = \frac{b_M}{b_R} F_M$$

Sostituendo i valori numerici otteniamo:

$$F_R = \frac{15\ \text{cm}}{5{,}0\ \text{cm}}(60\ \text{N}) = 1{,}8 \cdot 10^2\ \text{N}$$

Fissa i concetti chiave

1. OSSERVA E CONFRONTA Considera una pinzetta e una tenaglia, che sono due leve: quale è vantaggiosa e quale svantaggiosa?



2. OSSERVA E SPIEGA Considera un paio di forbici: dov'è il fulcro e quali sono i bracci della forza motrice e della forza resistente?