

Registro delle lezioni: Analisi Matematica 2 (lettere O-Z), A.A. 2019-2020

- **2020/03/03:** Elenco delle questioni organizzative per corso. Digressione informale su quanto verrà trattato nella prima parte del corso di Analisi 2 e in particolare su la relazione tra successioni di funzioni e serie di funzioni e sull'uso, nell'ambito del corso, delle serie di funzioni. Definizione di successione di funzioni. Definizione di convergenza puntuale. Esempio riguardo la successione $\{x^n\}$ sull'intervallo $I=[0, 1]$ e di come abbiamo una successione di funzioni continue che converge puntualmente ad una funzione non continua. Stesso esempio sull'intervallo $(0, 1)$. È stato messo in evidenza come nella condizione di limite puntuale la quantità ν dipenda sia da ϵ che dal punto x in I fissato. È stato fatto vedere come la definizione di convergenza puntuale non sia "robusta" rispetto alle variazioni in x e come $\nu(x) \rightarrow +\infty$ quando $x \rightarrow 1^-$ nel precedente esempio. Criterio sufficiente affinché il limite di una successione di funzioni continue su un intervallo $I=[a, b]$ sia ancora una funzione continua: la quantità ν non deve dipendere da x in I . Esempio, sempre per la successione $\{x^n\}$ nell'intervallo chiuso e limitato $[1/3, 1/2]$.
- **2020/03/04:** Successioni di funzioni: Definizione di successione convergente uniformemente e svolgimento in dettaglio di due esempi espliciti $f_n(x)=x^n/n$ su $I=[0, 1]$ e $f_n(x)=nx/(1+n^2x^2)$ su $I=[0, 2]$. Descrizione da un punto di vista geometrico del significato di convergenza uniforme. Teorema per il quale il limite uniforme di una successione di funzioni continue è anch'esso continuo. Teorema per il quale Teorema di passaggio sotto il segno di integrale. Teorema di passaggio sotto il segno di derivata. Definizione di serie di funzioni e primi fatti. Definizione di serie numerica. Definizione di serie convergente, divergente e irregolare. Caso della serie geometrica trattato in dettaglio studiando tutti i casi di interesse e mostrando esplicitamente il valore della somma della serie quando esiste. Esempio della serie di termini $a_n=(-1)^n$ mostrando che è irregolare. Teorema riguardo la condizione necessaria per la convergenza con dimostrazione. Esempio della serie armonica generalizzata e cenno al confronto con gli integrali impropri. Varie osservazione sulla somma di serie a termini non negativi e della somma di due serie convergenti. Criterio del confronto e studio di due serie numeriche per mezzo di tale teorema: una delle due serie si provava essere convergente controllandola con una serie armonica generalizzata di indice $\alpha=3$ e l'altra serie si controllava invece con una serie geometrica di ragione $r=1/2$. Tutti i calcoli sono stati fatti in dettaglio.
- **2020/03/09-Attività didattica per via telematica-** Il contenuto delle prime due note e videolezioni riguarda le serie numeriche. I temi trattati, nello specifico, sono la nozione di convergenza per una serie numerica, la condizione necessaria per la convergenza, dopodiché vengono introdotti vari criteri di convergenza esemplificati studiando alcune serie numeriche. Solo considerati: il criterio del confronto asintotico; il criterio dell'assoluta convergenza; il criterio del confronto serie-integrale; il criterio del rapporto; il criterio della radice e infine il criterio di Leibniz per le serie con termine generico di segno alternante. LEZIONE SVOLTA A DISTANZA PER EMERGENZA CORONAVIRUS.
- **2020/03/10-Attività didattica per via telematica-** Il contenuto delle videolezioni 3 e 4 riguarda le successioni di funzioni. si considerano le serie di funzioni, introducendo la nozione di convergenza puntuale e uniforme. Vengono considerate varie analogie con il caso delle serie numeriche (caso della convergenza assoluta). Sono considerati alcuni esempi per

mostrare esplicitamente il comportamento di alcune serie. Teorema del passaggio sotto al segno di integrale e teorema del passaggio al limite sotto il segno di derivata. Definizione di convergenza totale. La convergenza totale implica la convergenza assoluta e la convergenza uniforme. Teorema che da una condizione necessaria e sufficiente per la convergenza totale. Studio di un esempio in dettaglio. Convergenza totale di una serie di funzioni continue implica la continuità della somma della serie. LEZIONE SVOLTA A DISTANZA PER EMERGENZA CORONAVIRUS.

- **2020/03/11-Attività didattica per via telematica-** Il contenuto della videolezione n. 5 riguarda le serie di potenze e le loro proprietà. In particolare viene esplorata la nozione di convergenza (per mezzo di opportuni criteri) e viene definita la nozione di raggio di convergenza. Sono considerati alcuni esempi, in dettaglio, spiegando come procedere nell'effettuare lo studio di una serie di potenze. LEZIONE SVOLTA A DISTANZA PER EMERGENZA CORONAVIRUS.
- **2020/03/13-Attività didattica per via telematica-** Il contenuto della videolezione n. 6 riguarda ancora lo studio delle serie di potenze e le loro proprietà. Vengono forniti due criteri di convergenza ad-hoc (criterio della radice per il valore assoluto dei coefficienti della serie, e criterio del rapporto sempre per il valore assoluto dei coefficienti della serie). Svolgimento di due esempi. In particolare per uno di essi viene applicato sia il criterio della radice per serie numeriche che il criterio della radice per i coefficienti di una serie di potenze. LEZIONE SVOLTA A DISTANZA PER EMERGENZA CORONAVIRUS.
- **2020/03/14-Attività didattica per via telematica-** Vengono introdotte la serie di Taylor e di MacLaurin. Funzione espressa in serie di potenze è continua in ogni punto dell'intervallo di convergenza. Lemma di invarianza dell'intervallo di convergenza per la serie delle derivate e la serie degli integrali dell'argomento generico della serie di potenze. Teorema di derivazione e di integrazione termine a termine. Funzione espressa in serie di potenze è derivabile infinite volte. Con un conto esplicito si fa vedere che una serie funzione che può essere in serie di potenze coincide con la sua serie di Taylor. LEZIONE SVOLTA A DISTANZA PER EMERGENZA CORONAVIRUS.
- **2020/03/15-Attività didattica per via telematica-** Criterio per il quale una funzione $f(x)$ è anche sviluppabile in serie di Taylor (sia una condizione necessaria e sufficiente che un criterio sufficiente più operativo). Conseguenze dirette. Formula di Stirling. Vari esempi espliciti con calcoli svolti in dettaglio. LEZIONE SVOLTA A DISTANZA PER EMERGENZA CORONAVIRUS.
- **2020/03/17-Attività didattica per via telematica-** Proprietà di \mathbb{R}^n . Somma e prodotto di vettori e prodotto per uno scalare. Prodotto scalare tra vettori. Norma e sue proprietà. Distanza e sue proprietà. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Intorni sferici. Punti interni. Insiemi aperti. Punti di accumulazione. Insiemi limitati. Il tutto corredato da vari esempi. LEZIONE SVOLTA A DISTANZA PER EMERGENZA CORONAVIRUS.
- **2020/03/20-Attività didattica per via telematica-** Proprietà dello Spazio \mathbb{R}^n . Frontiera di un insieme maggiori proprietà ed esempi. Definizione di insieme chiuso. Relazione con i punti di accumulazione. Definizione di chiusura di un insieme e proprietà. Legame con la frontiera e i punti di accumulazione. Esempi riguardo insiemi limitati, riguardo insiemi chiusi

e insiemi aperti. Insiemi connessi (definizione e proprietà) con alcuni esempi espliciti. Successioni in \mathbb{R}^n : definizione e proprietà. LEZIONE SVOLTA A DISTANZA PER EMERGENZA CORONAVIRUS.

- **2020/03/23-Attività didattica per via telematica-** Funzioni di più variabili reali. Definizione e considerazioni riguardo al dominio e al grafico di una funzione di più variabili reali. Composizione tra funzioni e composizione di una funzione con una successione. Calcolo del dominio: due esempi espliciti svolti in dettaglio con considerazioni grafiche e studio della frontiera. Insiemi di livello con un esempio svolto in dettaglio. Definizione di limite per funzioni di più variabili reali (scritta in due modi equivalenti e analizzata in dettaglio nel caso di una funzione di due variabili reali). Calcolo del limite di una funzione di due variabili (in due modi diversi). LEZIONE SVOLTA A DISTANZA PER EMERGENZA CORONAVIRUS.
- **2020/03/25-Attività didattica per via telematica-** Metodo del fattore integrante per le equazioni differenziali lineari del primo ordine: spiegazione della teoria dietro a tale metodo e relazione con la formula per la soluzione generale delle equazioni considerate. Risoluzione esplicita e dettagliata di sei esempi di equazioni differenziali lineari del primo ordine. Equazioni a variabili separabili: breve riassunto teorico delle proprietà di tali equazioni e svolgimento completo e in dettaglio di due esempi espliciti. LEZIONE SVOLTA A DISTANZA PER EMERGENZA CORONAVIRUS.
- **2020/03/27-Attività didattica per via telematica-** Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti. Breve riassunto dei fatti teorici e descrizione del metodo di similitudine con la risoluzione esplicita di 5 esempi (conti svolti in dettaglio). Caso risonante e adattamento a tale circostanza del metodo sopra menzionato (con risoluzione di un esercizio dedicato). Metodo della variazione delle costanti arbitrario e trattamento di due casi (esempi svolti in dettaglio) che non possono essere trattati per mezzo del metodo di similitudine. LEZIONE SVOLTA A DISTANZA PER EMERGENZA CORONAVIRUS.
- **2020/03/31-Attività didattica per via telematica-** Nozione di limite per le funzioni di più variabili. Maggiori proprietà sia nel caso di limite finito che infinito. Risoluzione, in dettaglio, di tre esempi espliciti. Limite direzionale e relazione con il limite della funzione per (x, y) che tende a (x_0, y_0) . Se esiste il limite allora il limite direzionale non dipende dalla direzione scelta. Caso in cui si esistono due limiti direzionali diversi, su direzioni distinte e quindi si può escludere l'esistenza del limite della funzione (situazione chiarita per mezzo di un esempio). L'esistenza del limite direzionale (indipendente dalla direzione scelta) non implica l'esistenza del limite della funzione (anche in questo caso è stato fornito un esempio). LEZIONE SVOLTA A DISTANZA PER EMERGENZA CORONAVIRUS.
- **2020/04/01-Attività didattica per via telematica-** Elenco dei teoremi fondamentali per i limiti di funzioni di più variabili reali (teorema riguardo le operazioni tra limiti, teorema dell'unicità del limite, teorema della permanenza del segno, teorema dei carabinieri). Corollario del teorema dei carabinieri applicato al prodotto di una funzione infinitesima per una limitata. Coordinate polari con discussione delle maggiori proprietà riguardo l'uso di questo cambio di coordinate e vari esempi di calcolo espliciti. Funzioni continue e loro maggiori proprietà (caso delle funzioni di più variabili reali a valori reali). Definizione di continuità e di continuità per successioni. Svolgimento di due esempi per chiarire la situazione. Enunciati e discussione di alcuni risultati e nozioni fondamentali:

Teorema riguardo la continuità delle funzioni combinate. Teorema di Weierstrass. Definizione della nozione di massimo e minimo assoluto e di massimo e minimo relativo. Teorema di Bolzano e teorema degli zeri. LEZIONE SVOLTA A DISTANZA PER EMERGENZA CORONAVIRUS.

- **2020/04/07-Attività didattica per via telematica-** Derivabilità e differenziabilità per funzioni di più variabili. Derivate parziali, esempi e applicazioni. La derivabilità non implica la continuità (esempio). Derivate direzionali, esempi ed esercizio. L'esistenza di tutte le derivate direzionali non implica la continuità (esempio). Approssimazione lineare in dimensione 1 e 2. Differenziabilità, gradiente, differenziale; esempi. Piano tangente. La differenziabilità implica la continuità (con dim.) e l'esistenza di tutte le derivate (con dim.). Linearità del differenziale. La derivabilità non implica la differenziabilità (esempi). Teorema del differenziale totale (solo enunciato). LEZIONE SVOLTA A DISTANZA PER EMERGENZA CORONAVIRUS
- **2020/04/24-Attività didattica per via telematica-** Proprietà delle funzioni differenziabili. Relazione tra gradiente e derivate direzionali, controesempio in assenza di differenziabilità. Gradiente e direzione di crescita (con dim.), gradiente e curve di livello, esempio. Funzioni C^1 . La continuità delle derivate parziali è condizione sufficiente ma non necessaria per la differenziabilità (esempio). Esercizi. Operazioni con funzioni C^1 . Composizioni di funzioni differenziabili (casi scalari, senza dim.). Funzioni vettoriali: limiti, continuità, differenziabilità. Matrice jacobiana. Derivate direzionali in termini di matrici jacobiane (prodotto riga per colonna). Composizione di funzioni differenziabili nel caso vettoriale (senza dim.). Applicazione alle coordinate cilindriche e sferiche (esercizio). LEZIONE SVOLTA A DISTANZA PER EMERGENZA CORONAVIRUS
- **2020/04/28-Attività didattica per via telematica-** Derivate successive. Teorema di Schwarz per le derivate seconde (senza dim.). Funzioni di classe C^n e C^∞ . Operazioni con funzioni di classe C^n . Differenziale primo e secondo come applicazioni lineari. Matrice hessiana e sue proprietà. Calcolo della derivata seconda della restrizione di una funzione di più variabili a una retta e calcolo della derivata direzionale seconda. Formula di Taylor al II ordine con resto di Lagrange (con dim.). Ricerca di minimi e massimi: Teorema di Fermat (con dim.), condizioni necessarie del II ordine (con dim.), condizioni sufficienti del II ordine (con accenno di dim.). Punti di sella. Esempi semplici con funzioni polinomiali e hessiani definiti o solo semidefiniti. LEZIONE SVOLTA A DISTANZA PER EMERGENZA CORONAVIRUS
- **2020/04/30-Attività didattica per via telematica-** Esercizi sulla ricerca di minimi e massimi relativi ed assoluti. LEZIONE SVOLTA A DISTANZA PER EMERGENZA CORONAVIRUS
- **2020/05/05-Attività didattica per via telematica-** Operatori differenziali: gradiente, divergenza, laplaciano e rotore. Definizioni, principali proprietà, identità rilevanti e alcuni esempi esplicativi. Introduzione all'integrazione multipla. Partizione per un rettangolo con lati paralleli agli assi coordinati, partizioni puntate e somme approssimanti l'integrale di una funzione di due variabili su un rettangolo. Funzioni integrabili secondo Cauchy-Riemann. Principali proprietà dell'integrale doppio (tra le quali monotonia e linearità). Teorema di integrabilità. Insiemi di misura nulla. Teorema di equivalenza. LEZIONE SVOLTA A DISTANZA PER EMERGENZA CORONAVIRUS

- **2020/05/06-Attività didattica per via telematica-** Teorema di Fubini sui rettangoli. Estensione standard di una funzione e integrali doppi su domini più generali dei rettangoli con i lati paralleli agli assi coordinati. Insiemi misurabili. Insiemi regolari, x -semplici, y -semplici e formule di riduzione. Vari esempi di calcolo espliciti e svolti in dettaglio. Coordinate polari. Teorema di cambiamento di variabili ed esercizi. Teorema di Pappo-Guldino. Definizione di massa, centro di massa e momento d'inerzia. Simmetrie del piano e domini simmetrici, funzioni pari e dispari e risultati collegati. LEZIONE SVOLTA A DISTANZA PER EMERGENZA CORONAVIRUS
- **2020/05/12-Attività didattica per via telematica-** Primi elementi riguardo gli Integrali tripli. Partizioni puntate per un parallelepipedo con i lati paralleli agli assi coordinati. Somme approssimanti l'integrale di una funzione di tre variabili su un parallelepipedo. Nozione di integrale. Maggiori proprietà dell'integrale triplo. Teorema di Fubini per i parallelepipedi. Estensione standard di una funzione e nozione di integrale su insiemi più generali di un parallelepipedo. Insiemi misurabili. Teorema di additività per gli integrali tripli. Integrazione per fili (o spaghetti) e integrazione per strati e svolgimento di alcuni esempi. LEZIONE SVOLTA A DISTANZA PER EMERGENZA CORONAVIRUS
- **2020/05/13-Attività didattica per via telematica-** Alcune osservazioni sull'integrazione per fili e per strati (per gli integrali tripli). Esempi espliciti riguardo il calcolo del volume di due domini tridimensionali per mezzo delle precedenti formule. Applicazione al calcolo del volume di solidi di rotazione con esempi espliciti. Ripasso sul cambio di coordinate sferiche e cilindriche. Teorema di cambio di variabili per gli integrali tripli con commenti ed esempio di calcolo. Applicazioni al calcolo della massa di un solido, coordinate del baricentro e momenti di inerzia. Esempio sul calcolo della massa e del centro di massa per una semisfera con densità radiale. Esercizi sugli integrali tripli. LEZIONE SVOLTA A DISTANZA PER EMERGENZA CORONAVIRUS
- **2020/05/19-Attività didattica per via telematica-** Numeri complessi. Richiami sulla fattorizzazione di polinomi in \mathbb{R} . Definizione dei numeri complessi. Somma, prodotto, modulo, coniugato, quoziente. Rappresentazione sul piano e interpretazione geometrica. Rappresentazione con modulo e argomento. Interpretazione geometrica di somma e prodotto. Scrittura esponenziale e formule di Eulero. Potenza complessa (formula di De Moivre). Radici complesse. Radici dell'unità. Vari esempi ed esercizi. Polinomi complessi, radici e loro molteplicità. Teorema fondamentale dell'algebra (senza dimostrazione). Soluzioni delle equazioni di secondo grado nei complessi. LEZIONE SVOLTA A DISTANZA PER EMERGENZA CORONAVIRUS.
- **2020/05/20-Attività didattica per via telematica-** Curve parametrizzate in \mathbb{R}^n sostegno e archi di curva. Curve semplici, curve chiuse, curve regolari. Vettore tangente. Lunghezza di una curva parametrizzata. Relazioni di equivalenza, classi di equivalenza e insieme quoziente. Parametrazioni equivalenti indipendenza della lunghezza per curve equivalenti. Lunghezza di un arco di curva. LEZIONE SVOLTA A DISTANZA PER EMERGENZA CORONAVIRUS.
- **2020/05/26-Attività didattica per via telematica-** L'elemento di lunghezza di una curva. Integrali curvilinei di funzioni e applicazione alla determinazione di massa, centro di massa e momento d'inerzia. Il lavoro di un campo vettoriale come integrale curvilineo del prodotto

scalare tra il campo ed il versore tangente al cammino. Campi conservativi: diversi punti di vista e loro equivalenza. Il potenziale, teorema fondamentale del calcolo per gli integrali curvilinei. LEZIONE SVOLTA A DISTANZA PER EMERGENZA CORONAVIRUS.

- **2020/05/27-Attività didattica per via telematica-** Condizione sufficiente affinché un campo vettoriale sia conservativo, alcuni esempi ed esercizi. Determinazione di un potenziale. Omotopie tra curve. Domini semplicemente connessi, esempi. Condizione sufficiente affinché un campo vettoriale sia conservativo. Esempi. Il Lemma di Poincaré e calcolo del lavoro su curve omotope. Esempi e controesempi. Determinazione di massimi e minimi di restrizioni di funzioni a curve: condizioni geometriche. Versione semplificata del teorema del Dini, metodo dei moltiplicatori di Lagrange. LEZIONE SVOLTA A DISTANZA PER EMERGENZA CORONAVIRUS
- **2020/06/03-Attività didattica per via telematica-** Curve in forma polare. Curve di Jordan, orientazione del bordo di una regione piana. Formule di Gauss-Green nel piano. Calcolo dell'area di una regione racchiusa da una curva, un esempio. Flusso di un campo vettoriale attraverso una curva (nel piano). Teorema della divergenza nel piano. Questioni di orientazione. Una formula per il calcolo dell'area racchiusa nel piano da una curva in forma polare; una disuguaglianza che lega l'area con il diametro di un insieme. Ancora sulle curve: teoremi della media e posizione del centro di massa. Superfici parametrizzate regolari: il vettore normale alla superficie. Elemento di superficie, Integrale di superficie di una funzione. LEZIONE SVOLTA A DISTANZA PER EMERGENZA CORONAVIRUS
- **2020/06/09-Attività didattica per via telematica-** Determinazione di massimi e minimi per funzioni di tre variabili con vincoli di tipo superficie e di tipo curva. Approccio geometrico e analitico. Moltiplicatori di Lagrange. Flussi attraverso superfici. Teoremi della divergenza e del rotore (Stokes). Un esempio di applicazione. LEZIONE SVOLTA A DISTANZA PER EMERGENZA CORONAVIRUS.

