Area e integrali di superficie

Luca Bisconti

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Disclaimer

Il presente contenuto è stato prodotto per far fronte alle esigenze di didattica a distanza resasi necessarie per l'emergenza legata alla diffusione del virus COVID-19.

Per l'attribuzione, l'autore del contenuto è: **Luca Bisconti**

Firenze, 14/04/2020

Esempio

Data una funzione $\boxed{f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}}$, con $D = A \cup \partial A$, A aperto connesso di $\mathbb{R}^2$, e $f \in C^1(D)$. Allora il grafico della funzione $f = f(x,y)$ è una superficie regolare. Infatti la superficie Σ di equazioni parametriche:

$$\boxed{\underline{S} : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u,v) \end{cases}} \quad , (u,v) \in D ,$$

coincide con il grafico di f.

<u>Esempio</u>

Data una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, con $D = A \cup \partial A$, A aperto connesso di $\mathbb{R}^2$, e $f \in C^1(D)$.
Allora il grafico della funzione $f = f(x,y)$ è una superficie regolare. Infatti la superficie Σ di equazioni parametriche:

$$\underline{S} : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u,v) \end{cases}, \quad (u,v) \in D,$$

coincide con il grafico di f.

Inoltre si ha che

$$\boxed{\begin{cases} x_u(u,v) = 1 \ ; \ x_v(u,v) = 0 \\ y_u(u,v) = 0 \ ; \ y_v(u,v) = 1 \\ z_u(u,v) = f_u(u,v) \ ; \ z_v(u,v) = f_v(u,v) \end{cases}} \iff \boxed{\underline{S}_u(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_u(u,v) \end{pmatrix}} \ ; \ \boxed{\underline{S}_v(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_v(u,v) \end{pmatrix}}$$

Esempio

Data una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, con $D = A \cup \partial A$, A aperto connesso di $\mathbb{R}^2$, e $f \in C^1(D)$. Allora il grafico della funzione $f = f(x,y)$ è una superficie regolare. Infatti la superficie Σ di equazioni parametriche:

$$\underline{S} : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u,v) \end{cases}, \quad (u,v) \in D, \quad \text{coincide con il grafico di } f.$$

Inoltre si ha che

$$\begin{cases} x_u(u,v) = 1 \;;\; x_v(u,v) = 0 \\ y_u(u,v) = 0 \;;\; y_v(u,v) = 1 \\ z_u(u,v) = f_u(u,v) \;;\; z_v(u,v) = f_v(u,v) \end{cases} \iff \underline{S}_u(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_u(u,v) \end{pmatrix} \;;\; \underline{S}_v(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_v(u,v) \end{pmatrix}$$

Quindi $\underline{S}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ e le sue componenti $x, y, z : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ hanno le derivate parziali continue e la matrice jacobiana $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ z_u(u,v) & z_v(u,v) \end{pmatrix}$ ha caratteristica 2 $\forall (u,v) \in A$ dato che $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

Esempio

Data una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, con $D = A \cup \partial A$, A aperto connesso di $\mathbb{R}^2$, e $f \in C^1(D)$. Allora il grafico della funzione $f = f(x,y)$ è una superficie regolare. Infatti la superficie Σ di equazioni parametriche:

$$\underline{S} : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u,v) \end{cases}, \quad (u,v) \in D, \quad \text{coincide con il grafico di } f.$$

Inoltre si ha che

$$\begin{cases} x_u(u,v) = 1 \ ; \ x_v(u,v) = 0 \\ y_u(u,v) = 0 \ ; \ y_v(u,v) = 1 \\ z_u(u,v) = f_u(u,v) \ ; \ z_v(u,v) = f_v(u,v) \end{cases} \iff \underline{S}_u(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_u(u,v) \end{pmatrix} ; \ \underline{S}_v(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_v(u,v) \end{pmatrix}$$

Quindi $\underline{S}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ e le sue componenti $x, y, z : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ hanno le derivate parziali continue e la matrice jacobiana $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ z_u(u,v) & z_v(u,v) \end{pmatrix}$ ha caratteristica 2 $\forall (u,v) \in A$ dato che $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

Osserviamo che $\overbrace{\underline{S}_u \times \underline{S}_v (u,v)}^{\underline{N}(u,v)} = (-z_u(u,v), -z_v(u,v), 1) \underset{u=x,\, v=y,\, z=f(x,y)}{=} (-f_x(x,y), -f_y(x,y), 1) \Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} X - x_0 \\ Y - y_0 \\ Z - z_0 \end{pmatrix} \cdot \underline{N}(x_0, y_0) = 0}$ eq. piano tangente a graf f, $(x_0, y_0, z_0) \in$ graf f

Integrale di superficie

$$S: \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \quad (u,v) \in D \qquad (I)$$

- Nel seguito consideriamo una superficie regolare Σ di equazioni parametriche S,

dove $D \subseteq \mathbb{R}^2$ è un sottoinsieme limitato, chiuso, connesso e misurabile; assumiamo inoltre che $D = A \cup \partial A$, con A insieme aperto.

Integrale di superficie

- Nel seguito consideriamo una superficie regolare Σ di equazioni parametriche $\underline{S}: \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \quad (u,v) \in D \qquad (\mathrm{I})$

dove $D \subseteq \mathbb{R}^2$ è un sottoinsieme limitato, chiuso, connesso e misurabile; assumiamo inoltre che $D = A \cup \partial A$, con A insieme aperto.

- Definiamo area della superficie regolare Σ di equazioni parametriche (I) la quantità:

$$(\mathrm{II}) \qquad \boxed{\iint_D \sqrt{(I_1(u,v))^2 + (I_2(u,v))^2 + (I_3(u,v))^2}\, du\, dv} \quad \text{dove} \quad \begin{cases} I_1(u,v) = \dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} \\ I_2(u,v) = \dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} \\ I_3(u,v) = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \end{cases}$$

Inoltre $\boxed{0 < \|(\underline{S}_u \times \underline{S}_v)(u,v)\|^2 = (I_1(u,v))^2 + (I_2(u,v))^2 + (I_3(u,v))^2 \ , \forall (u,v) \in A}$

Poiché Σ è regolare questa quantità è sempre positiva

Integrale di superficie

- Nel seguito consideriamo una superficie regolare Σ di equazioni parametriche

$$S: \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \quad (u,v) \in D \qquad (\mathrm{I})$$

dove $D \subseteq \mathbb{R}^2$ è un sottoinsieme limitato, chiuso, connesso e misurabile; assumiamo inoltre che $D = A \cup \partial A$, con A insieme aperto.

- Definiamo area della superficie regolare Σ di equazioni parametriche (I) la quantità:

$$(\mathrm{II}) \qquad \iint_D \sqrt{(I_1(u,v))^2 + (I_2(u,v))^2 + (I_3(u,v))^2}\, du\, dv \quad \text{dove} \quad \begin{cases} I_1(u,v) = \dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} \\ I_2(u,v) = \dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} \\ I_3(u,v) = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \end{cases}$$

Inoltre $0 < \|(\underline{S}_u \times \underline{S}_v)(u,v)\|^2 = (I_1(u,v))^2 + (I_2(u,v))^2 + (I_3(u,v))^2$, $\forall (u,v) \in A$

Poiché Σ è regolare questa quantità è sempre positiva

e $\boxed{\|(\underline{S}_u \times \underline{S}_v)(u,v)\|\, du\, dv \text{ rappresenta l'elemento di area infinitesima sulla superficie } \Sigma.}$

Inoltre, visto che Σ è regolare, l'integrale in (II) che ci dà l'area di Σ esiste finito.

Integrale di superficie

• Nel seguito consideriamo una superficie regolare Σ di equazioni parametriche

$$\underline{S}: \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \quad (u,v) \in D \qquad (\mathrm{I})$$

dove $D \subseteq \mathbb{R}^2$ è un sottoinsieme limitato, chiuso, connesso e misurabile; assumiamo inoltre che $D = A \cup \partial A$, con A insieme aperto.

• Definiamo area della superficie regolare Σ di equazioni parametriche (I) la quantità:

$$(\mathrm{II}) \qquad \iint_D \sqrt{(I_1(u,v))^2 + (I_2(u,v))^2 + (I_3(u,v))^2}\, du\, dv \quad \text{dove} \quad \begin{cases} I_1(u,v) = \dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} \\ I_2(u,v) = \dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} \\ I_3(u,v) = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \end{cases}$$

Inoltre $0 < \|(\underline{S}_u \times \underline{S}_v)(u,v)\|^2 = (I_1(u,v))^2 + (I_2(u,v))^2 + (I_3(u,v))^2, \ \forall (u,v) \in A$

Poiché Σ è regolare questa quantità è sempre positiva

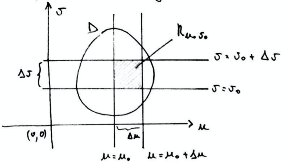
e $\|(\underline{S}_u \times \underline{S}_v)(u,v)\|\, du\, dv$ rappresenta l'elemento di area infinitesima sulla superficie Σ.

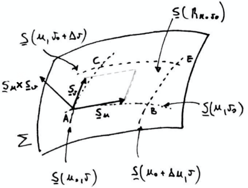
Inoltre, visto che Σ è regolare, l'integrale in (II) che ci dà l'area di Σ esiste finito.

• Diamo adesso una giustificazione intuitiva della formula (II). Ricordiamo che: $\underline{S}: D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\underline{S}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

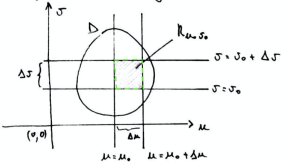
· Consideriamo nel piano uv le rette $u = u_0$, $u = u_0 + \Delta u$, $v = v_0$, $v = v_0 + \Delta v$ e supponiamo per semplicità che gli incrementi $\Delta u > 0$, $\Delta v > 0$. Le rette individuano il rettangolo $R_{u_0 v_0}$ di area $\Delta u \Delta v$

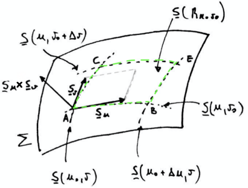




Con
$$\boxed{\begin{aligned} A &= \underline{S}(u_0, v_0) \\ B &= \underline{S}(u_0 + \Delta u, v_0) \\ C &= \underline{S}(u_0, v_0 + \Delta v) \\ E &= \underline{S}(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v) \end{aligned}}$$

· Consideriamo nel piano uv le rette $u = u_0$, $u = u_0 + \Delta u$, $v = v_0$, $v = v_0 + \Delta v$ e supponiamo per semplicità che gli incrementi $\Delta u > 0$, $\Delta v > 0$. Le rette individuano il rettangolo $R_{u_0 v_0}$ di area $\Delta u \Delta v$





Con

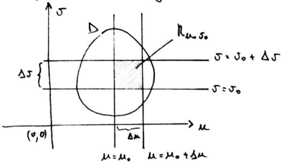
$$A = \underline{S}(u_0, v_0)$$

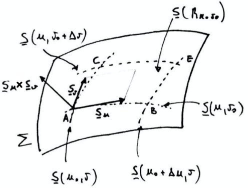
$$B = \underline{S}(u_0 + \Delta u, v_0)$$

$$C = \underline{S}(u_0, v_0 + \Delta v)$$

$$E = \underline{S}(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v)$$

- Consideriamo nel piano uv le rette $u = u_0$, $u = u_0 + \Delta u$, $v = v_0$, $v = v_0 + \Delta v$ e supponiamo per semplicità che gli incrementi $\Delta u > 0$, $\Delta v > 0$. Le rette individuano il rettangolo $R_{u_0 v_0}$ di area $\Delta u \Delta v$

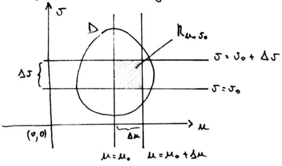


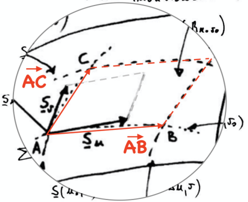


Con
$A = \underline{S}(u_0, v_0)$
$B = \underline{S}(u_0 + \Delta u, v_0)$
$C = \underline{S}(u_0, v_0 + \Delta v)$
$E = \underline{S}(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v)$

L'insieme $\underline{S}(R_{u_0 v_0})$ sulla superficie Σ corrisponde a $R_{u_0 v_0}$ tramite $\underline{S}$ e se $\Delta u, \Delta v$ sono piccoli $\Rightarrow$ l'area di $\underline{S}(R_{u_0 v_0})$ è, approssimativamente, data dall'area del parallelogramma individuato dai vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

· Consideriamo nel piano uv le rette $u = u_0$, $u = u_0 + \Delta u$, $v = v_0$, $v = v_0 + \Delta v$ e supponiamo per semplicità che gli incrementi $\Delta u > 0$, $\Delta v > 0$. Le rette individuano il rettangolo $R_{u_0 v_0}$ di area $\Delta u \Delta v$





Con $A = \underline{S}(u_0, v_0)$

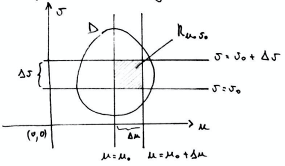
$B = \underline{S}(u_0 + \Delta u, v_0)$

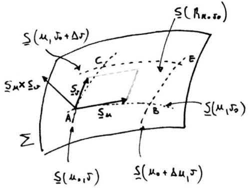
$C = \underline{S}(u_0, v_0 + \Delta v)$

$E = \underline{S}(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v)$

L'insieme $\underline{S}(R_{u_0 v_0})$ sulla superficie Σ corrisponde a $R_{u_0 v_0}$ tramite $\underline{S}$ e se $\Delta u, \Delta v$ sono piccoli $\Rightarrow$ l'area di $\underline{S}(R_{u_0 v_0})$ è, approssimativamente, data dall'area del parallelogramma individuato dai vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

· Consideriamo nel piano uv le rette $u = u_0$, $u = u_0 + \Delta u$, $v = v_0$, $v = v_0 + \Delta v$ e supponiamo per semplicità che gli incrementi $\Delta u > 0$, $\Delta v > 0$. Le rette individuano il rettangolo $R_{u_0 v_0}$ di area $\Delta u \Delta v$



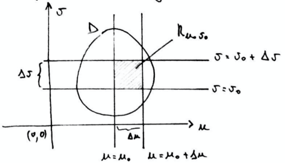


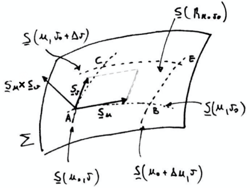
Con
$A = \underline{S}(u_0, v_0)$
$B = \underline{S}(u_0 + \Delta u, v_0)$
$C = \underline{S}(u_0, v_0 + \Delta v)$
$E = \underline{S}(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v)$

L'insieme $\underline{S}(R_{u_0 v_0})$ sulla superficie Σ corrisponde a $R_{u_0 v_0}$ tramite $\underline{S}$ e se $\Delta u, \Delta v$ sono piccoli $\Rightarrow$ l'area di $\underline{S}(R_{u_0 v_0})$ è, approssimativamente, data dall'area del parallelogramma individuato dai vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$. L'area di questo parallelogramma è data da $\boxed{\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \| = \| (B - A) \times (C - A) \| = *}$

$$\boxed{\begin{gathered} * = \Big\| \underbrace{\big(\underline{S}(u_0 + \Delta u, v_0) - \underline{S}(u_0, v_0)\big)}_{\| } \times \underbrace{\big(\underline{S}(u_0, v_0 + \Delta v) - \underline{S}(u_0, v_0)\big)}_{\|} \Big\| \qquad \text{(III)} \\ B - A = \begin{pmatrix} x(u_0 + \Delta u, v_0) - x(u_0, v_0) \\ y(u_0 + \Delta u, v_0) - y(u_0, v_0) \\ z(u_0 + \Delta u, v_0) - z(u_0, v_0) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x(u_0, v_0 + \Delta v) - x(u_0, v_0) \\ y(u_0, v_0 + \Delta v) - y(u_0, v_0) \\ z(u_0, v_0 + \Delta v) - z(u_0, v_0) \end{pmatrix} = C - A \end{gathered}}$$

· Consideriamo nel piano uv le rette $u = u_0$, $u = u_0 + \Delta u$, $v = v_0$, $v = v_0 + \Delta v$ e supponiamo per semplicità che gli incrementi $\Delta u > 0$, $\Delta v > 0$. Le rette individuano il rettangolo $R_{u_0 v_0}$ di area $\Delta u \Delta v$





Con
$$A = \underline{S}(u_0, v_0)$$
$$B = \underline{S}(u_0 + \Delta u, v_0)$$
$$C = \underline{S}(u_0, v_0 + \Delta v)$$
$$E = \underline{S}(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v)$$

L'insieme $\underline{S}(R_{u_0 v_0})$ sulla superficie Σ corrisponde a $R_{u_0 v_0}$ tramite $\underline{S}$ e se $\Delta u, \Delta v$ sono piccoli $\Rightarrow$ l'area di $\underline{S}(R_{u_0 v_0})$ è, approssimativamente, data dall'area del parallelogramma individuato dai vettori $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$. L'area di questo parallelogramma è data da $\| \vec{AB} \times \vec{AC} \| = \| (B - A) \times (C - A) \| = *$

$$* = \Big\| \underbrace{\big(\underline{S}(u_0 + \Delta u, v_0) - \underline{S}(u_0, v_0)\big)}_{\|} \times \underbrace{\big(\underline{S}(u_0, v_0 + \Delta v) - \underline{S}(u_0, v_0)\big)}_{\|} \Big\| \quad \text{(III)}$$

$$B - A = \begin{pmatrix} x(u_0 + \Delta u, v_0) - x(u_0, v_0) \\ y(u_0 + \Delta u, v_0) - y(u_0, v_0) \\ z(u_0 + \Delta u, v_0) - z(u_0, v_0) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x(u_0, v_0 + \Delta v) - x(u_0, v_0) \\ y(u_0, v_0 + \Delta v) - y(u_0, v_0) \\ z(u_0, v_0 + \Delta v) - z(u_0, v_0) \end{pmatrix} = C - A$$

Grazie al teorema di Lagrange:

$$B - A = \begin{pmatrix} x_u(u_1, v_0)\, \Delta u \\ y_u(u_2, v_0)\, \Delta u \\ z_u(u_3, v_0)\, \Delta u \end{pmatrix}$$

$$C - A = \begin{pmatrix} x_v(u_0, v_1)\, \Delta v \\ y_v(u_0, v_2)\, \Delta v \\ z_v(u_0, v_3)\, \Delta v \end{pmatrix}$$

con $u_0 < u_1, u_2, u_3 < u_0 + \Delta u$ e analogamente $v_0 < v_1, v_2, v_3 < v_0 + \Delta v$

con $u_0 < u_1, u_2, u_3 < u_0 + \Delta u$ e analogamente $v_0 < v_1, v_2, v_3 < v_0 + \Delta v$

Se Δu, Δv sono piccoli (concluderemo la nostra argomentazione passando poi a du e dv) allora $B-A$ e $C-A$ "approssimano" i seguenti vettori:

$$B-A \cong \begin{pmatrix} x_u(u_0,v_0)\,\Delta u \\ y_u(u_0,v_0)\,\Delta u \\ z_u(u_0,v_0)\,\Delta u \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C-A \cong \begin{pmatrix} x_v(u_0,v_0)\,\Delta v \\ y_v(u_0,v_0)\,\Delta v \\ z_v(u_0,v_0)\,\Delta v \end{pmatrix}$$

con $u_0 < u_1, u_2, u_3 < u_0 + \Delta u$ e analogamente $v_0 < v_1, v_2, v_3 < v_0 + \Delta v$

Se Δu, Δv sono piccoli (concluderemo la nostra argomentazione passando poi a du e dv)

allora $B-A$ e $C-A$ "approssimano" i seguenti vettori:

$$B-A \cong \begin{pmatrix} x_u(u_0,v_0)\, du \\ y_u(u_0,v_0)\, du \\ z_u(u_0,v_0)\, \underline{\underline{du}} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C-A \cong \begin{pmatrix} x_v(u_0,v_0)\, dv \\ y_v(u_0,v_0)\, dv \\ z_v(u_0,v_0)\, \underline{\underline{dv}} \end{pmatrix}$$

con $u_0 < u_1, u_2, u_3 < u_0 + \Delta u$ e analogamente $v_0 < v_1, v_2, v_3 < v_0 + \Delta v$

Se Δu, Δv sono piccoli (concluderemo la nostra argomentazione passando poi a du e dv)

allora $B-A$ e $C-A$ "approssimano" i seguenti vettori:

$$B-A \cong \begin{pmatrix} x_u(u_0,v_0)\,du \\ y_u(u_0,v_0)\,du \\ z_u(u_0,v_0)\,du \end{pmatrix} \qquad e \qquad C-A \cong \begin{pmatrix} x_v(u_0,v_0)\,dv \\ y_v(u_0,v_0)\,dv \\ z_v(u_0,v_0)\,dv \end{pmatrix}$$

e abbiamo la seguente altra approssimazione (dove poniamo $\underline{u}_0 = (u_0, v_0)$)

$$\boxed{(B-A)\times(C-A) \cong \left(\underbrace{\begin{vmatrix} y_u(\underline{u}_0) & z_u(\underline{u}_0) \\ y_v(\underline{u}_0) & z_v(\underline{u}_0) \end{vmatrix}}_{= I_1(\underline{u}_0)}, \underbrace{\begin{vmatrix} z_u(\underline{u}_0) & x_u(\underline{u}_0) \\ z_v(\underline{u}_0) & x_v(\underline{u}_0) \end{vmatrix}}_{= I_2(\underline{u}_0)}, \underbrace{\begin{vmatrix} x_u(\underline{u}_0) & y_u(\underline{u}_0) \\ x_v(\underline{u}_0) & y_v(\underline{u}_0) \end{vmatrix}}_{= I_2(\underline{u}_0)} \right) du\,dv}$$

e ricordando che $\underset{\approx}{\Delta u>0}$ $\underset{\approx}{\Delta v>0}$ $du, dv > 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{\|(B-A)\times(C-A)\| \cong \sqrt{(I_1(\underline{u}_0))^2 + (I_2(\underline{u}_0))^2 + (I_3(\underline{u}_0))^2}\, du dv}$ che approssima l'area di $\underline{S}(R_{u_0 v_0})$

con $u_0 < u_1, u_2, u_3 < u_0 + \Delta u$ e analogamente $v_0 < v_1, v_2, v_3 < v_0 + \Delta v$

Se Δu, Δv sono piccoli (concluderemo la nostra argomentazione passando poi a du e dv)

allora $B-A$ e $C-A$ "approssimano" i seguenti vettori:

$$B-A \cong \begin{pmatrix} x_u(u_0,v_0)\,du \\ y_u(u_0,v_0)\,du \\ z_u(u_0,v_0)\,du \end{pmatrix} \quad e \quad C-A \cong \begin{pmatrix} x_v(u_0,v_0)\,dv \\ y_v(u_0,v_0)\,dv \\ z_v(u_0,v_0)\,dv \end{pmatrix}$$

e abbiamo la seguente altra approssimazione (dove poniamo $\underline{u}_0 = (u_0, v_0)$)

$$(B-A)\times(C-A) \cong \left(\underbrace{\begin{vmatrix} y_u(\underline{u}_0) & z_u(\underline{u}_0) \\ y_v(\underline{u}_0) & z_v(\underline{u}_0) \end{vmatrix}}_{I_1(\underline{u}_0)},\ \underbrace{\begin{vmatrix} z_u(\underline{u}_0) & x_u(\underline{u}_0) \\ z_v(\underline{u}_0) & x_v(\underline{u}_0) \end{vmatrix}}_{I_2(\underline{u}_0)},\ \underbrace{\begin{vmatrix} x_u(\underline{u}_0) & y_u(\underline{u}_0) \\ x_v(\underline{u}_0) & y_v(\underline{u}_0) \end{vmatrix}}_{I_2(\underline{u}_0)} \right) du\,dv$$

e ricordando che $\underset{\approx}{du}^{\Delta u > 0}, \underset{\approx}{dv}^{\Delta v > 0} > 0 \Rightarrow \|(B-A)\times(C-A)\| \cong \sqrt{(I_1(\underline{u}_0))^2 + (I_2(\underline{u}_0))^2 + (I_3(\underline{u}_0))^2}\,du\,dv$ che approssima l'area di $\underline{S}(R_{u_0 v_0})$

- In effetti nelle formule (II) abbiamo visto che l'elemento di area infinitesima è: $\boxed{\sqrt{(I_1(u,v))^2 + (I_2(u,v))^2 + (I_3(u,v))^2}\,du\,dv}$ e sommando tutti questi contributi al variare di (u,v) in D otteniamo le formule (II).