Integrali di superficie: integrazione delle funzioni ed esempi

Luca Bisconti

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Disclaimer

Il presente contenuto è stato prodotto per far fronte alle esigenze di didattica a distanza resasi necessarie per l'emergenza legata alla diffusione del virus COVID-19.

Per l'attribuzione, l'autore del contenuto è: **Luca Bisconti**

Firenze, 14/04/2020

Superfici Parametriche

- Sia Σ una superficie regolare di parametrizzazione $\underline{S} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\underline{S}(\underbrace{u,v}_{=:\underline{u}}) = (x(\underline{u}), y(\underline{u}), z(\underline{u}))$

allora l'elemento di area sulla superficie è $dS = \| \underline{S}_u \times \underline{S}_v \| \, du \, dv$

e vale che: $\underbrace{\text{Area}(\Sigma)}_{=:\, a(\Sigma)} = \iint_\Sigma 1 \, dS = \iint_D \| \underline{S}_u \times \underline{S}_v \| \, du \, dv \qquad (I)$

Superfici Parametriche

- Sia Σ una superficie regolare di parametrizzazione $\underline{S} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\underline{S}(\underbrace{u,v}_{=:\underline{u}}) = (x(\underline{u}), y(\underline{u}), z(\underline{u}))$

allora l'elemento di area sulla superficie è $dS = \| \underline{S}_u \times \underline{S}_v \| du\, dv$

e vale che: $$\underbrace{Area(\Sigma)}_{=: a(\Sigma)} = \iint_{\Sigma} 1 \, \underbrace{dS} = \iint_{D} \| \underline{S}_u \times \underline{S}_v \| \, du\, dv \qquad (I)$$

elemento di superficie, non è legato alla notazione $\underline{S}$ per la parametrizzazione

- Si può verificare che $a(\Sigma)$ in (I) non dipende dalla parametrizzazione scelta per Σ

Superfici Parametriche

- Sia Σ una superficie regolare di parametrizzazione $\underline{S} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\underline{S}(\underbrace{u,v}_{=:\underline{u}}) = (x(\underline{u}), y(\underline{u}), z(\underline{u}))$

allora l'elemento di area sulla superficie è $dS = \| \underline{S}_u \times \underline{S}_v \| \, du \, dv$

e vale che: $$\underbrace{\text{Area}(\Sigma)}_{=:\, a(\Sigma)} = \iint_\Sigma 1 \, dS = \iint_D \| \underline{S}_u \times \underline{S}_v \| \, du \, dv \qquad (\mathrm{I})$$

elemento di superficie, non è legato alla notazione $\underline{S}$ per la parametrizzazione

- Si può verificare che $a(\Sigma)$ in (I) non dipende dalla parametrizzazione scelta per Σ

Esempio (Area di una superficie cartesiana)

Per una superficie cartesiana Σ, ovvero il grafico di una funzione di due variabili $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f \in C^1(D)$, $f = f(x,y)$ con (x,y), la superficie Σ (= grafico di f) si parametrizza come segue:

$$\boxed{\underline{S}(x,y) = (x, y, f(x,y))}, \quad (x,y) \in D$$

Poiché $\overbrace{\underline{S}_x \times \underline{S}_y}^{\underline{N} =} = (-f_x(x,y), -f_y(x,y), 1)$, allora: $\boxed{\| \underline{S}_x \wedge \underline{S}_y \| = \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2}}$

e $$\boxed{a(\Sigma) = \text{Area}(\Sigma) = \iint_D \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2} \, dx \, dy .}$$

Superfici Parametriche

- Sia Σ una superficie regolare di parametrizzazione $\underline{S} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\underline{S}(\underbrace{u,v}_{=:\underline{u}}) = (x(\underline{u}), y(\underline{u}), z(\underline{u}))$

allora l'elemento di area sulla superficie è $dS = \| \underline{S}_u \times \underline{S}_v \| \, du \, dv$

e vale che:
$$\underbrace{\text{Area}(\Sigma)}_{=:\, e(\Sigma)} = \iint_{\Sigma} 1 \, \underline{dS} = \iint_{D} \| \underline{S}_u \times \underline{S}_v \| \, du \, dv \qquad (\mathrm{I})$$

elemento di superficie, non è legato alla notazione $\underline{S}$ per la parametrizzazione

- Si può verificare che $e(\Sigma)$ in (I) non dipende dalla parametrizzazione scelta per Σ

Esempio (Area di una superficie cartesiana)

Per una superficie cartesiana Σ, ovvero il grafico di una funzione di due variabili $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f \in C^1(D)$, $f = f(x,y)$ con (x,y), la superficie Σ (= grafico di f) si parametrizza come segue:
$$\underline{S}(x,y) = (x, y, f(x,y)) \quad , \quad (x,y) \in D$$

Poiché $\overbrace{\underline{S}_x \times \underline{S}_y}^{\underline{N} =} = (-f_x(x,y), -f_y(x,y), 1)$, allora: $\| \underline{S}_x \wedge \underline{S}_y \| = \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2}$

e $e(\Sigma) = \text{Area}(\Sigma) = \iint_D \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2} \, dx \, dy$.

Esempio Consideriamo il paraboloide ellittico $z = \frac{x^2+y^2}{2}$ con $(x,y) \in D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 8 \}$
Qua $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2}$ e $S(x,y) = (x, y, z(x,y)) = (x, y, f(x,y))$

In questo caso l'elemento d'area è $dS = \sqrt{1+(f_x)^2+(f_y)^2}\,dxdy = \sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy$

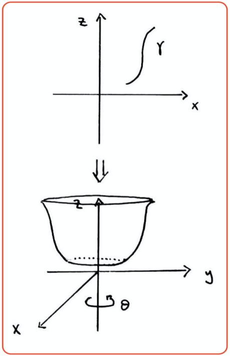
e quindi $a(\Sigma) = \text{Area}(\Sigma) = \iint_D \sqrt{1+x^2+y^2}\,dx\,dy \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Coordinate}\\ \text{Polari}}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{8}} \sqrt{1+\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\theta = 2\pi\left[\frac{1}{3}(1+\rho^2)^{3/2}\right]_0^{\sqrt{8}} = \frac{52}{3}\pi$ ■

In questo caso l'elemento d'area è $dS = \sqrt{1+(f_x)^2+(f_y)^2}\,dxdy = \sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy$

e quindi $\quad a(\Sigma) = \text{Area}(\Sigma) = \iint_D \sqrt{1+x^2+y^2}\,dx\,dy \underset{\uparrow}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\theta = 2\pi\left[\frac{1}{3}\left(1+\rho^2\right)^{3/2}\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{52}{3}\pi$ ∎

Coordinate Polari

Esempio (Area di una superficie di rotazione)



$\boxed{\gamma : \underline{\gamma}(t) = (x(t), z(t))}$ curva generatrice con $x>0$ (nel piano xz)

La superficie Σ è ottenuta ruotando γ attorno all'asse z di un angolo di 2π e la parametrizzazione di Σ è data da:

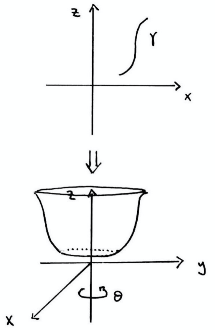
$$\boxed{S(t,\theta) = (x(t)\cos\theta,\ x(t)\sin\theta,\ z(t)) \qquad t\in[a,b],\ \theta\in[0,2\pi]}$$

In questo caso l'elemento d'area è $dS = \sqrt{1+(f_x)^2+(f_y)^2}\,dxdy = \sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy$

e quindi $$e(\Sigma) = \text{Area}(\Sigma) = \iint_D \sqrt{1+x^2+y^2}\,dx\,dy \underset{\uparrow}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\theta = 2\pi\left[\frac{1}{3}\left(1+\rho^2\right)^{3/2}\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{52}{3}\pi \qquad \blacksquare$$

Coordinate Polari

<u>Esempio</u> (Area di una superficie di rotazione)



$\gamma : \underline{\gamma}(t) = (x(t), z(t))$ curva generatrice con $x > 0$ (nel piano xz)

La superficie Σ è ottenuta ruotando γ attorno all'asse z di un angolo di 2π e la parametrizzazione di Σ è data da:

$S(t,\theta) = (x(t)\cos\theta,\ x(t)\sin\theta,\ z(t)) \qquad t \in [a,b],\ \theta \in [0,2\pi]$

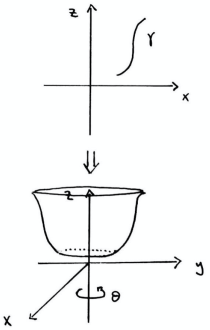
$$\boxed{\underline{N} = \underline{S}_t \times \underline{S}_\theta} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x'\cos\theta & x'\sin\theta & z' \\ -x\sin\theta & x\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \left(-x z'\cos\theta,\ -x z'\sin\theta,\ x x'\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \|\underline{N}\| = \|\underline{S}_t \times \underline{S}_\theta\| &= \sqrt{x^2(z')^2\cos^2\theta + x^2(z')^2\sin^2\theta + x^2(x')^2} = x(t)\sqrt{(x'(t))^2+(z'(t))^2} \\ &= \underline{x(t)\,\|\underline{\gamma}'(t)\|} \end{aligned}}$$

In questo caso l'elemento d'area è $dS = \sqrt{1+(f_x)^2+(f_y)^2}\,dxdy = \sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy$

e quindi
$$a(\Sigma) = \text{Area}(\Sigma) = \iint_D \sqrt{1+x^2+y^2}\,dx\,dy \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Coordinate} \\ \text{Polari}}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{8}} \sqrt{1+\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\theta = 2\pi\left[\frac{1}{3}\left(1+\rho^2\right)^{3/2}\right]_0^{\sqrt{8}} = \frac{52}{3}\pi \quad \blacksquare$$

<u>Esempio</u> (Area di una superficie di rotazione)



$\gamma : \underline{r}(t) = (x(t), z(t))$ curva generatrice con $x > 0$ (nel piano xz)

La superficie Σ è ottenuta ruotando γ attorno all'asse z di un angolo di 2π e la parametrizzazione di Σ è data da:

$S(t,\theta) = (x(t)\cos\theta,\ x(t)\sin\theta,\ z(t)) \quad t \in [a,b],\ \theta \in [0,2\pi]$

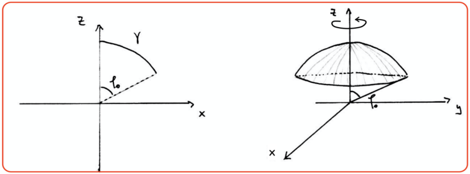
$$\underline{N} = \underline{S}_t \times \underline{S}_\theta = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x'\cos\theta & x'\sin\theta & z' \\ -x\sin\theta & x\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \left(-x z'\cos\theta,\ -x z'\sin\theta,\ x x'\right)$$

$$\|\underline{N}\| = \|\underline{S}_t \times \underline{S}_\theta\| = \sqrt{x^2(z')^2\cos^2\theta + x^2(z')^2\sin^2\theta + x^2(x')^2} = x(t)\sqrt{(x'(t))^2+(z'(t))^2}$$
$$= \underline{x(t)\,\|\underline{r}'(t)\|}$$

Allora:
$$\text{Area}(\Sigma) = a(\Sigma) = \int_a^b \int_0^{2\pi} x(t)\,\|\underline{r}'(t)\|\,dt\,d\theta = 2\pi\int_a^b x(t)\,\|\underline{r}'(t)\|\,dt \quad \blacksquare$$

<u>Esempio</u>: sia Σ la calotta sferica di ampiezza angolare φ_0, con $\varphi_0 \in (0, \pi)$ angolo fissato.

Determiniamo l'area di Σ.



Sia γ parametrizzata da:

$$\underline{r}(\varphi) = \left(R \sin(\varphi),\ R \cos(\varphi) \right)$$

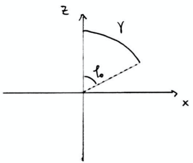
$$\varphi \in [0, \varphi_0]\ ,\quad R > 0$$

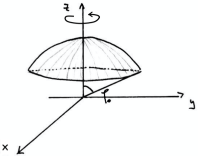
$$\underline{r}'(\varphi) = \left(R \cos(\varphi),\ -R \sin(\varphi) \right)$$

$$\Rightarrow \quad \| \underline{r}'(\varphi) \| = R \sqrt{\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)} = R$$

<u>Esempio</u> sia Σ la calotta sferica di ampiezza angolare φ_0, con $\varphi_0 \in (0, \pi)$ angolo fissato.

Determiniamo l'area di Σ.





Sia γ parametrizzata da:

$$\underline{\gamma}(\varphi) = \big(\overbrace{R\sin(\varphi)}^{=x(\varphi)}, \overbrace{R\cos(\varphi)}^{=z(\varphi)}\big)$$

$$\varphi \in [0, \varphi_0], \quad R > 0$$

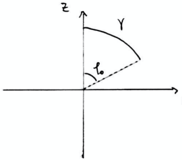
$$\underline{\gamma}'(\varphi) = \big(R\cos(\varphi), -R\sin(\varphi)\big)$$

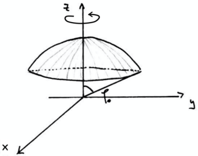
$$\Rightarrow \|\underline{\gamma}'(\varphi)\| = R\sqrt{\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)} = R$$

Allora

$$\boxed{\begin{aligned} \text{Area}(\Sigma) &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\varphi_0} x(\varphi)\,\|\underline{\gamma}'(\varphi)\|\,d\varphi\,d\theta = 2\pi\int_0^{\varphi_0} R\sin\varphi \cdot R\,d\varphi = 2\pi R^2\int_0^{\varphi_0}\sin\varphi\,d\varphi = * \\ * &= 2\pi R^2\big[-\cos(\varphi)\big]_0^{\varphi_0} = 2\pi R^2(1-\cos\varphi_0). \end{aligned}}$$

Esempio: sia Σ la calotta sferica di ampiezza angolare φ_0, con $\varphi_0 \in (0, \pi)$ angolo fissato.
Determiniamo l'area di Σ.





sia γ parametrizzata da:

$$\underline{r}(\varphi) = (\underbrace{R\sin(\varphi)}_{=x(\varphi)}, \underbrace{R\cos(\varphi)}_{=z(\varphi)})$$

$$\varphi \in [0, \varphi_0], \quad R > 0$$

$$\underline{r}'(\varphi) = (R\cos(\varphi), -R\sin(\varphi))$$

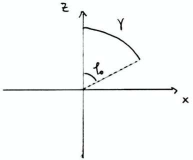
$$\Rightarrow \|\underline{r}'(\varphi)\| = R\sqrt{\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)} = R$$

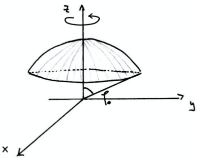
Allora
$$\text{Area}(\Sigma) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\varphi_0} x(\varphi)\,\|\underline{r}'(\varphi)\|\,d\varphi\,d\theta = 2\pi\int_0^{\varphi_0} R\sin\varphi \cdot R\,d\varphi = 2\pi R^2\int_0^{\varphi_0}\sin\varphi\,d\varphi = *$$

$$* = 2\pi R^2\left[-\cos(\varphi)\right]_0^{\varphi_0} = 2\pi R^2(1 - \cos\varphi_0).$$

$$\begin{cases} \text{se } \varphi_0 = \pi \Rightarrow 4\pi R^2 & \text{area superficie sferica} \\ \text{se } \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2\pi R^2 & \text{area della semisfera} \end{cases}$$

Esempio: sia Σ la calotta sferica di ampiezza angolare φ_0, con $\varphi_0 \in (0, \pi)$ angolo fissato. Determiniamo l'area di Σ.





Sia γ parametrizzata da:

$$\underline{r}(\varphi) = \big(\underbrace{R \sin(\varphi)}_{= x(\varphi)}, \underbrace{R \cos(\varphi)}_{= z(\varphi)}\big)$$

$$\varphi \in [0, \varphi_0], \quad R > 0$$

$$\underline{r}'(\varphi) = \big(R \cos(\varphi), -R \sin(\varphi)\big)$$

$$\Rightarrow \|\underline{r}'(\varphi)\| = R\sqrt{\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)} = R$$

Allora

$$\text{Area}(\Sigma) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\varphi_0} x(\varphi)\, \|\underline{r}'(\varphi)\|\, d\varphi\, d\theta = 2\pi \int_0^{\varphi_0} R \sin\varphi \cdot R\, d\varphi = 2\pi R^2 \int_0^{\varphi_0} \sin\varphi\, d\varphi = *$$

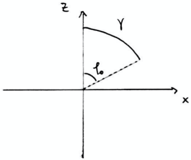
$$* = 2\pi R^2 \big[-\cos(\varphi)\big]_0^{\varphi_0} = 2\pi R^2 (1 - \cos\varphi_0).$$

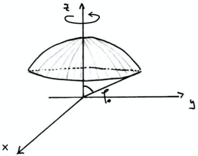
$$\begin{cases} \text{se } \varphi_0 = \pi \Rightarrow 4\pi R^2 & \text{area superficie sferica} \\ \text{se } \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2\pi R^2 & \text{area della semisfera} \end{cases}$$

• Integrale di superficie di una funzione continua

Se f è una funzione continua, a valori reali, definita in una regione di $\mathbb{R}^3$ che contiene Σ, allora la restrizione a Σ (parametrizzata da $\underline{s}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$) di f (diciamo $\tilde{f} := f|_{\Sigma}$)

<u>Esempio</u> sia Σ la calotta sferica di ampiezza angolare φ_0, con $\varphi_0 \in (0, \pi)$ angolo fissato.
Determiniamo l'area di Σ.





Sia γ parametrizzata da:

$$\underline{\gamma}(\varphi) = \big(\underbrace{R\sin(\varphi)}_{= x(\varphi)},\ \underbrace{R\cos(\varphi)}_{= z(\varphi)}\big)$$

$$\varphi \in [0, \varphi_0], \quad R > 0$$

$$\underline{\gamma}'(\varphi) = (R\cos(\varphi),\ -R\sin(\varphi))$$

$$\Rightarrow \|\underline{\gamma}'(\varphi)\| = R\sqrt{\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)} = R$$

Allora $$\text{Area}(\Sigma) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\varphi_0} x(\varphi)\,\|\underline{\gamma}'(\varphi)\|\,d\varphi\,d\theta = 2\pi\int_0^{\varphi_0} R\sin\varphi \cdot R\,d\varphi = 2\pi R^2\int_0^{\varphi_0}\sin\varphi\,d\varphi = *$$

$$* = 2\pi R^2\big[-\cos(\varphi)\big]_0^{\varphi_0} = 2\pi R^2(1 - \cos\varphi_0).$$

$$\begin{cases} \text{se } \varphi_0 = \pi \Rightarrow 4\pi R^2 & \text{area superficie sferica} \\ \text{se } \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2\pi R^2 & \text{area della semisfera} \end{cases}$$

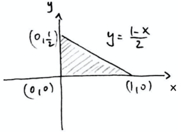
· Integrale di superficie di una funzione continua

Se f è una funzione continua a valori reali, definita in una regione di $\mathbb{R}^3$ che contiene Σ, allora la restrizione a Σ (parametrizzata da $\underline{S}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$) di f (diciamo $\tilde{f} := f|_\Sigma$) diventa

$$\tilde{f}(u,v) = f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \Rightarrow \boxed{\iint_\Sigma f\,dS := \iint_D \tilde{f}(u,v)\,\|\underline{S}_u \times \underline{S}_v\|\,du\,dv} \quad \text{con } \underline{S}: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

Esempio Calcolare $\boxed{\iint_{\Sigma} x^2 z \, dS}$, dove Σ è la parte di piano $x + 2y - z = 1$

(vista come grafico di $g(x,y) = x + 2y - 1$) descritta al variare di (x, y) in $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq \frac{1-x}{2}\right\}$

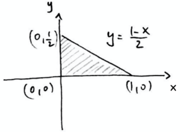


In questo caso $g : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto g(x,y) = x + 2y - 1$

<u>Esempio</u> Calcolare $\iint_{\Sigma} \underbrace{x^2 z}_{f(x,y,z(x,y))}\, dS$, dove Σ è la parte di piano $x + 2y - z = 1$

(vista come grafico di $g(x,y) = x + 2y - 1$) descritta al variare di (x, y) in $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq x \leq 1 , \ 0 \leq y \leq \frac{1-x}{2}\right\}$



In questo caso $g : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y) \longmapsto g(x,y) = x + 2y - 1$$

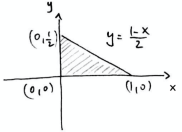
Piano = superficie cartesiana con:

$$\underline{S}(x,y) = (x, y, x + 2y - 1) \quad , (x,y) \in D$$

$$\boxed{\| S_x \wedge S_y \| = \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6} \quad (\text{ qui } g_x \equiv 1 , \ g_y \equiv 2)}$$

Esempio Calcolare $\iint_\Sigma \underbrace{x^2 z}_{f(x,y,z(x,y))}\, dS$, dove Σ è la parte di piano $x+2y-z=1$

(vista come grafico di $g(x,y) = x+2y-1$) descritta al variare di (x, y) in $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 1,\ 0\le y\le \frac{1-x}{2}\}$



In questo caso $g : D\subseteq\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y)\longmapsto g(x,y) = x+2y-1$

Piano = superficie cartesiana con:

$$\underline{S}(x,y) = (x, y, x+2y-1), \quad (x,y)\in D$$

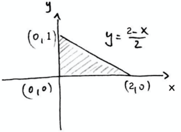
$$\|S_x \wedge S_y\| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6} \quad (\text{qui } g_x \equiv 1,\ g_y \equiv 2)$$

allora

$$\boxed{\iint_\Sigma x^2 z\, dS = \iint_D x^2(x+2y-1)\sqrt{6}\, dx\, dy = \int_0^1\int_0^{\frac{1-x}{2}} \sqrt{6}\, x^2(x+2y-1)\, dy\, dx = -\frac{\sqrt{6}}{120}} \quad \blacksquare$$

<u>Esempio</u> Calcolare $\iint_{\Sigma} \underbrace{x^2 z}_{f(x,y,z(x,y))}\, dS$, dove Σ è la parte di piano $x + 2y - z = 1$

(vista come grafico di $g(x,y) = x + 2y - 1$) descritta al variare di (x, y) in $\boxed{\hat{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le \frac{2-x}{2}\}}$



In questo caso $g : \hat{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y) \longmapsto g(x,y) = x + 2y - 1$$

Piano = superficie cartesiana con:

$$\underline{S}(x,y) = (x,\ y,\ x + 2y - 1), \quad (x,y) \in \hat{D}$$

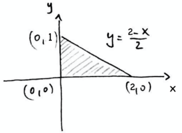
$$\| S_x \wedge S_y \| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6} \quad (\text{qui } g_x \equiv 1,\ g_y \equiv 2)$$

allora

$$\boxed{\iint_{\Sigma} x^2 z\, dS = \iint_{\hat{D}} x^2 (x + 2y - 1)\sqrt{6}\, dx\, dy = \int_0^2 \int_0^{\frac{2-x}{2}} \sqrt{6}\, x^2 (x + 2y - 1)\, dy\, dx = \frac{2\sqrt{6}}{5}} \quad \blacksquare$$

Esempio Calcolare $\displaystyle\iint_\Sigma \underbrace{x^2 z}_{f(x,y,z(x,y))}\, dS$, dove Σ è la parte di piano $x+2y-z=1$

(vista come grafico di $g(x,y)=x+2y-1$) descritta al variare di (x, y) in $\hat{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 2,\ 0\le y\le \frac{2-x}{2}\}$



In questo caso $g:\hat{D}\subseteq\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$

$$(x,y)\longmapsto g(x,y)=x+2y-1$$

Piano = superficie cartesiana con:

$$\underline{S}(x,y)=(x,y,x+2y-1)\ ,\quad (x,y)\in\hat{D}$$

$$\|S_x\wedge S_y\| = \sqrt{1+1+4}=\sqrt{6}\quad (\text{qui } g_x\equiv 1,\ g_y\equiv 2)$$

allora

$$\iint_\Sigma x^2 z\, dS = \iint_{\hat{D}} x^2(x+2y-1)\sqrt{6}\,dx\,dy = \int_0^2\int_0^{\frac{2-x}{2}}\sqrt{6}\,x^2(x+2y-1)\,dy\,dx = \frac{2\sqrt{6}}{5}\ \blacksquare$$

• Applicazioni:

• Area $(\Sigma)=\displaystyle\iint_\Sigma 1\,dS$; se $\rho=\rho(x,y,z)$ è la densità superficiale $\Rightarrow$ $\boxed{m(\Sigma)=\text{Massa}(\Sigma)=\displaystyle\iint_\Sigma \overset{\rho(x(\underline{S}(u,v)),\,y(\underline{S}(u,v)),\,z(\underline{S}(u,v)))}{\rho(x,y,z)}\,dS = M}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\left(x_G=\frac{1}{M}\displaystyle\iint_\Sigma x\,\rho(x,y,z)\,dS\ ,\ y_G=\frac{1}{M}\iint_\Sigma y\,\rho(x,y,z)\,dS\ ,\ z_G=\frac{1}{M}\iint_\Sigma z\,\rho(x,y,z)\,dS\right)}$ Centro di massa di Σ (baricentro)