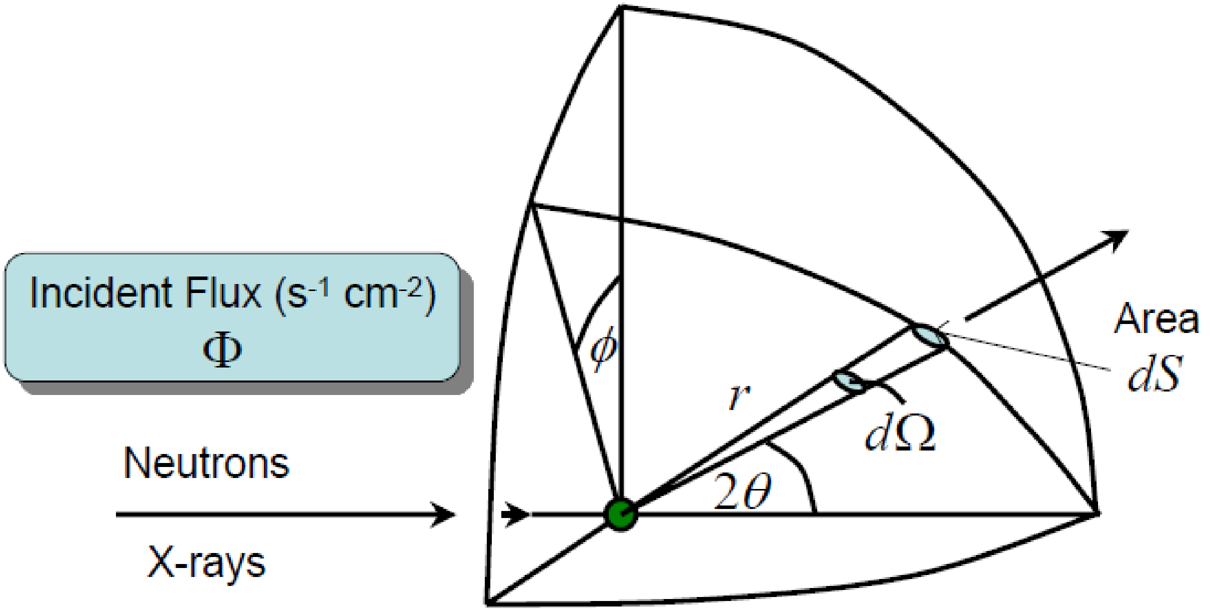
SEZIONE D'URTO DI SCATTERING (NUCLEARE)

La sezione d'urto differenziale misura l'efficienza con cui un nucleo rimuove neutroni da un fascio (collimato) inviandoli in altre direzioni rispetto a quella di incidenza.



$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{neutroni\ scatterati\,/\,s\ in\ d\Omega = dS\,/\,r^2}{\Phi\ d\Omega}$$

sezione d'urto differenziale
[unità barn/steradiante]

$$\sigma = \int d\Omega\ \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

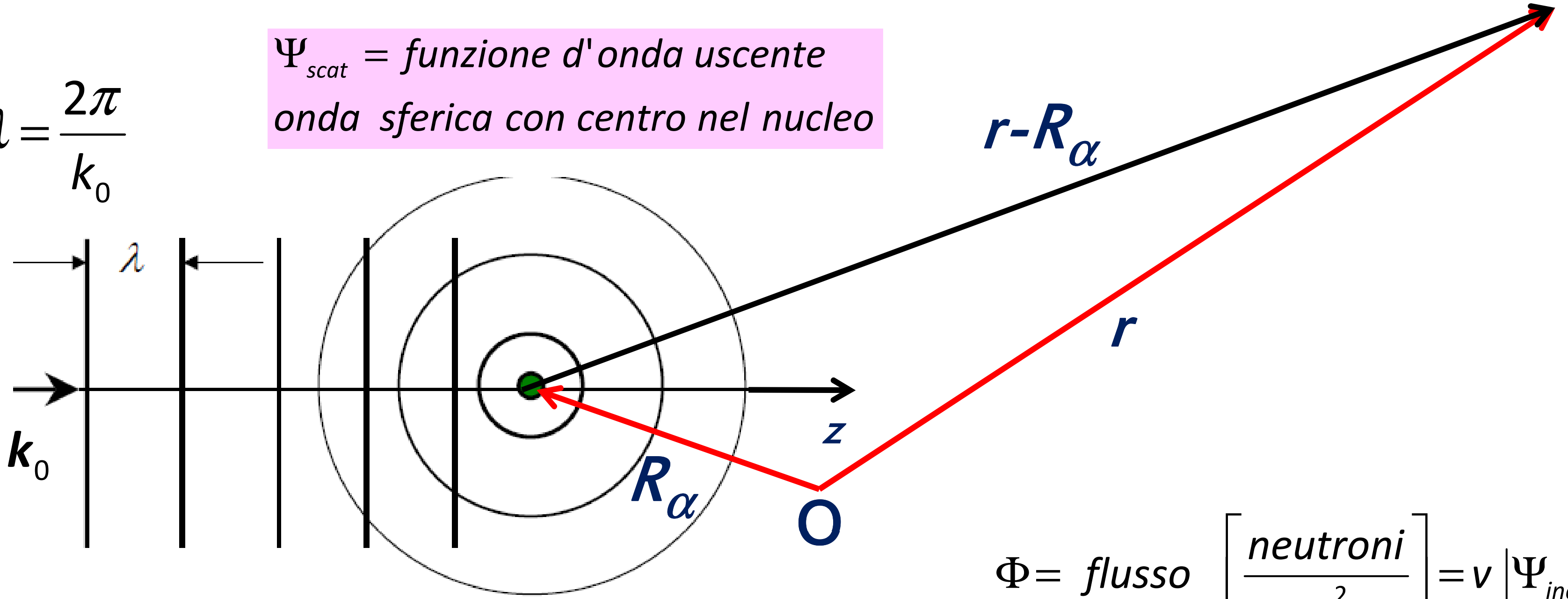
sezione d'urto totale
[unità barn]

1 barn = 10^{-24} cm^2

SCATTERING NUCLEARE

$$\lambda = \frac{2\pi}{k_0}$$

Ψ_{scat} = *funzione d'onda uscente*
onda sferica con centro nel nucleo



$$\Phi = \ flusso \ \left[\frac{neutroni}{cm^2\, s}\right] = v\,|\Psi_{inc}|^2$$

$$\Psi_{inc} = funzione\ d'onda\ incidente = e^{i\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{R}_\alpha}$$

onda piana

$$neutroni/s \ \ attraverso\ \ dS = v\, dS\, |\Psi_{scat}|^2$$

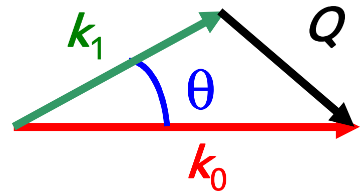
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{v\, dS\, |\Psi_{scat}|^2}{v\,|\Psi_{inc}|^2\, d\Omega} = \frac{dS}{d\Omega}\left| e^{i\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{r}} \sum_\alpha b_\alpha \frac{e^{i(\mathbf{k}_0-\mathbf{k}_1)\cdot\mathbf{R}_\alpha}}{|\mathbf{r}-\mathbf{R}_\alpha|}\right|^2$$

***b* lunghezza di scattering**

$$\boxed{Q = k_0 - k_1}$$

$b \sim 5\times10^{-13}\ \mathrm{cm} = 5\times10^{-5}\ \mathring{A} \ll \lambda$ neutroni termici

Facciamo il modulo quadro....



$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{dS}{d\Omega}\left(e^{-i\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}}\sum_\beta b_\beta\frac{e^{-i\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{R}_\beta}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}_\beta|}\right)\left(e^{i\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}}\sum_\alpha b_\alpha\frac{e^{i\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{R}_\alpha}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}_\alpha|}\right)$$

$$\boxed{\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{k}_0-\boldsymbol{k}_1}$$

vettore d'onda scambiato

Se $r \gg R_\alpha \Rightarrow |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}_\alpha| \cong |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}_\beta| \cong r$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{dS}{d\Omega}\left(\sum_\beta b_\beta\frac{e^{-i\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{R}_\beta}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}_\beta|}\right)\left(\sum_\alpha b_\alpha\frac{e^{i\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{R}_\alpha}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}_\alpha|}\right)\cong\frac{r^2 d\Omega}{d\Omega}\sum_{\alpha,\beta}b_\alpha b_\beta\frac{e^{i\boldsymbol{Q}\cdot(\boldsymbol{R}_\alpha-\boldsymbol{R}_\beta)}}{r^2}$$

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega}\cong\sum_{\alpha,\beta}b_\alpha b_\beta\, e^{i\boldsymbol{Q}\cdot(\boldsymbol{R}_\alpha-\boldsymbol{R}_\beta)}}$$

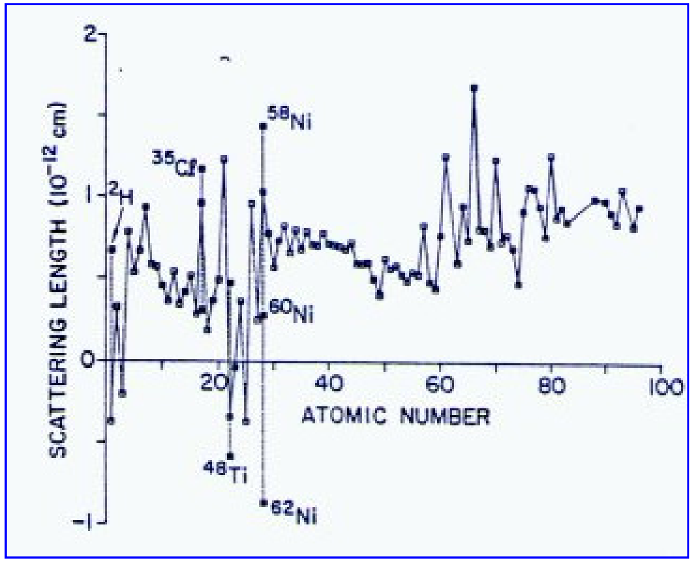
Porta informazioni sulle posizioni degli atomi...
SEMPRE?

ELEMENTI CHIMICI, ISOTOPI E LUNGHEZZA DI SCATTERING

Isotopi dello stesso elemento chimico hanno nuclei diversi

Le lunghezze di scattering variano da isotopo ad isotopo e in modo piuttosto irregolare al variare del numero atomico Z

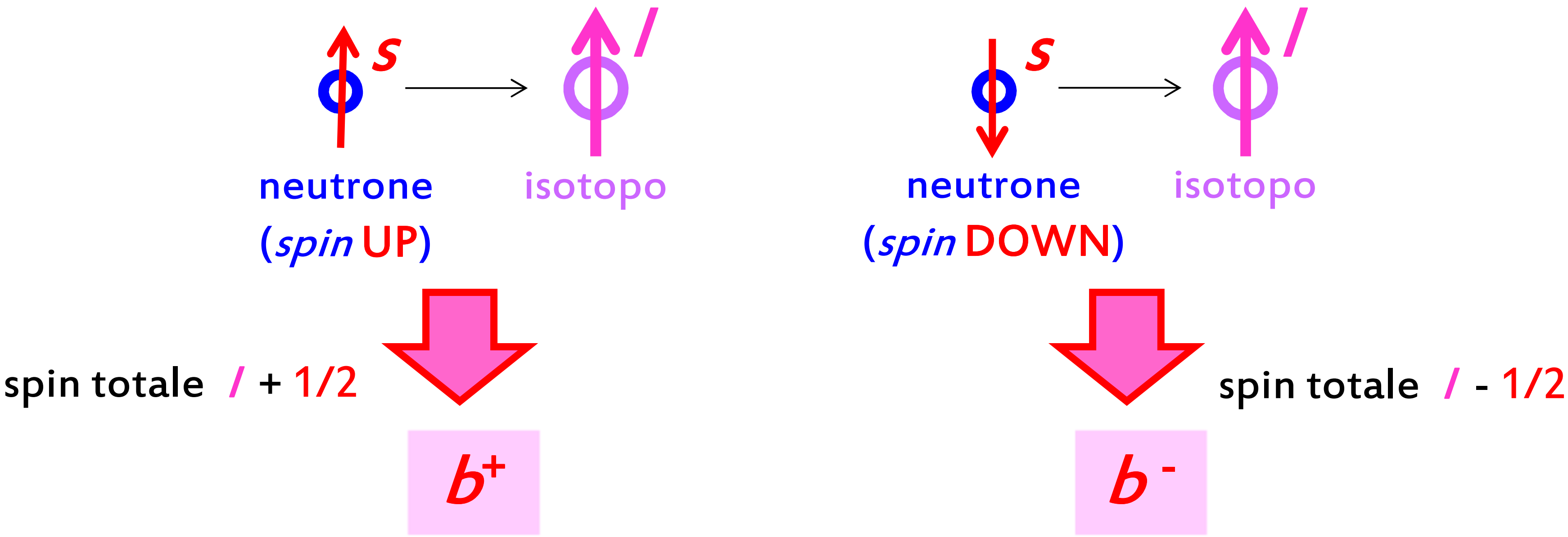
Per esempio, l'idrogeno ^{1}H e il suo isotopo deuterio ^{2}H (o D) hanno b molto diverse e questo è molto utile per individuarne la posizione in composti chimici o per differenziare per es. segnali provenienti da parti diverse di una stessa molecola (sostituzione isotopica).



IL CASO PIÙ SEMPLICE: CAMPIONE MONOISOTOPICO

Consideriamo il caso di un campione costituito da nuclei di uno stesso isotopo (per es. deuterio puro). Conoscere la lunghezza di scattering b di quel determinato isotopo non è sufficiente per predire come i neutroni verranno scatterati da ciascuno di tali nuclei.

Infatti l'ampiezza dell'onda scatterata da un nucleo dipende dall'isotopo in considerazione MA ANCHE dall'orientazione relativa fra spin del nucleo I e spin del neutrone s (s = ½). Esistono dunque ***due*** possibili valori di b anche a parità di isotopo considerato:

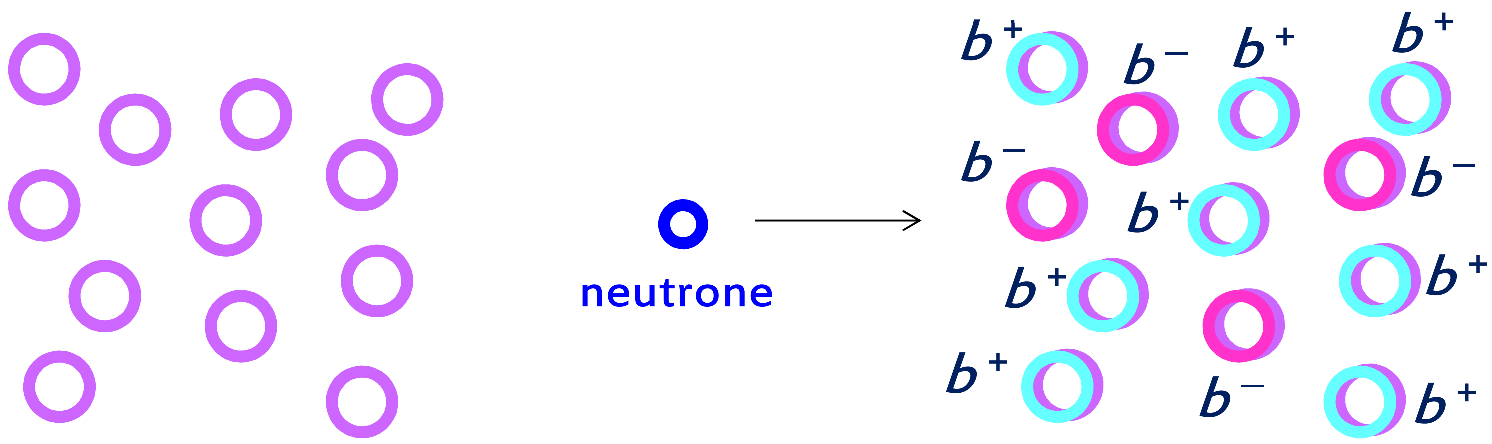


IL CASO PIÙ SEMPLICE: CAMPIONE MONOISOTOPICO

Se il fascio è non polarizzato (probabilità neutroni UP o DOWN = ½), la probabilità che i nuclei scatterino con ampiezza b^{+} è maggiore che con ampiezza b^{-}.

$$p\left(b^{+}\right)=\frac{2(I+1)}{2(I+1)+2I} \qquad p\left(b^{-}\right)=\frac{2I}{2(I+1)+2I}$$

In altri termini, è come se il fascio incontrasse un campione costituito da due tipi di scatteratori (distribuiti con una certa probabilità), anche a parità di isotopo.



campione monoisotopico

$$\langle b\rangle = p\left(b^{+}\right)b^{+} + p\left(b^{-}\right)b^{-}$$

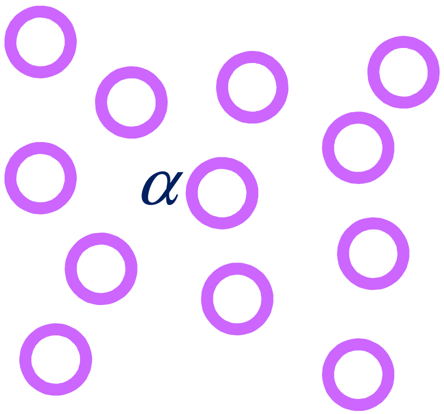
valor medio

IL CASO PIÙ SEMPLICE: CAMPIONE MONOISOTOPICO

E' possibile definire la lunghezza di scattering b di un certo campione monoisotopico come data da:

una parte (vista dai neutroni come) uguale per tutti i nuclei = $\langle b \rangle$ = valor medio della distribuzione di b^+ e b^-

più una parte che invece tiene conto delle deviazioni (sito per sito) dal valor medio



campione monoisotopico

$$\boxed{b_\alpha = \langle b \rangle + \delta b_\alpha}$$

È la stessa per tutti i siti del campione monoisotopico

Varia da sito a sito. Solo qui entra l'effetto delle orientazioni di spin

$$con \;\; \delta b_\alpha = b_\alpha - \langle b \rangle = \textit{fluttuazione tale che} \; \langle \delta b_\alpha \rangle = 0$$

IL CASO PIÙ SEMPLICE: CAMPIONE MONOISOTOPICO

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \cong \sum_{\alpha,\beta} b_\alpha b_\beta e^{i\mathbf{Q}\cdot(\mathbf{R}_\alpha - \mathbf{R}_\beta)}$$

$$b_\alpha b_\beta = (\langle b \rangle + \delta b_\alpha)(\langle b \rangle + \delta b_\beta) = \langle b \rangle^2 + \langle b \rangle \delta b_\alpha + \langle b \rangle \delta b_\beta + \delta b_\alpha \delta b_\beta$$

Facciamone il valor medio sui vari nuclei :

$$\langle b_\alpha b_\beta \rangle = \langle b \rangle^2 + 0 + 0 + \langle \delta b_\alpha \delta b_\beta \rangle$$

$\alpha \neq \beta$: $\langle b \rangle^2$ perché non c'è correlazione in media fra le orientazioni di spin di nuclei in siti diversi a temperature superiori al mK

$\alpha = \beta$: $\langle b \rangle^2 + \langle \delta b_\alpha^2 \rangle = \langle b \rangle^2 + \langle (b_\alpha - \langle b \rangle)^2 \rangle = \langle b^2 \rangle$

$$\boxed{\langle b_\alpha b_\beta \rangle = \langle b \rangle^2 + \delta_{\alpha\beta}\left(\langle b^2 \rangle - \langle b \rangle^2\right)}$$

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0 \text{ per } \alpha \neq \beta \\ 1 \text{ per } \alpha = \beta \end{cases}$$

IL CASO PIÙ SEMPLICE: CAMPIONE MONOISOTOPICO

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \cong \underbrace{\sum_{\alpha,\beta} \langle b \rangle^2 e^{i\mathbf{Q}\cdot(\mathbf{R}_\alpha - \mathbf{R}_\beta)}} + \underbrace{N\left(\langle b^2 \rangle - \langle b \rangle^2\right)}$$

dipende da $\mathbf{Q}$ e dalla *struttura*
(interferenza costruttiva di onde scatterate dai vari nuclei con ampiezza uguale per tutti)

lo scattering elastico è **isotropo** e indipendente dalla struttura
(è legato alla varianza della distribuzione dei b)

Vengono di conseguenza definite:

$b_{coh} = \langle b \rangle$ ***lunghezza di scattering COERENTE***

$\sigma_{coh} = 4\pi \langle b \rangle^2$ ***sezione d'urto*** (*di scattering*) ***COERENTE***

$$\boxed{b = b_{coh} + \frac{2\,b_{inc}}{\sqrt{I(I+1)}}\,\mathbf{s}\cdot\mathbf{I}}$$

$\sigma_s = 4\pi \langle b^2 \rangle$ ***sezione d'urto*** (*di scattering*) ***TOTALE***

$b_{inc} = (\sigma_{inc}/4\pi)^{1/2}$ ***lunghezza di scattering INCOERENTE***

$\sigma_{inc} = \sigma_s - \sigma_{coh}$ ***sezione d'urto*** (*di scattering*) ***INCOERENTE***