Una funzione di risposta ricorrente

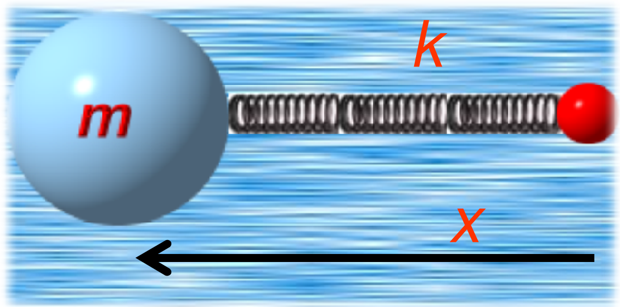
L'oscillatore armonico smorzato (DHO)

Nello scattering coerente da liquidi alcuni contributi agli spettri della $F(Q,t)$ sono spesso descritti riferendosi alla funzione di risposta che corrisponde al semplice modello meccanico dell'oscillatore armonico smorzato (*Damped Harmonic Oscillator*). È dunque molto importante aver presente la funzione di risposta e suscettività di tale modello, le cui semplici proprietà fondamentali ricorrono spesso in moltissimi campi della fisica.

L'equazione di moto di una particella di massa m sottoposta ad una forza di richiamo armonica, ad una forza di attrito viscoso (e.g. dovuta all'effetto medio delle collisioni con altre particelle in un fluido) e ad una forza esterna $K(t)$ è:

$$m\,\overline{\ddot{x}(t)} + \alpha\,\overline{\dot{x}(t)} + m\omega_0^2\,\overline{x(t)} = K(t) \quad \text{con} \quad \alpha = 6\pi r\eta = m\gamma \quad \text{e} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$\overline{x(t)} = \overline{x(t)} - \langle x(0)\rangle = \delta\,\overline{x(t)} \quad \text{se} \quad \langle x(0)\rangle = 0$$



La trasformata di Fourier-Laplace fornisce:

$$-m\omega^2\tilde{x}(\omega) + i\,m\gamma\,\omega\,\tilde{x}(\omega) + m\omega_0^2\tilde{x}(\omega) = \tilde{K}(\omega)$$

Dalla proprietà 1. vista per la suscettività:

$$\boxed{\chi[\omega] = \frac{\tilde{x}(\omega)}{\tilde{K}(\omega)} = \frac{1}{m}\,\frac{1}{-\omega^2 + i\,\gamma\,\omega + \omega_0^2}}$$

suscettività del DHO

Proprietà del DHO

Modi di oscillazione, regimi di smorzamento

I poli di $\chi[\omega]$ forniscono le frequenze (modi) di oscillazione del sistema, corrispondenti al caso in cui la forzante è di tipo impulsivo $K(t) = \lambda\,\delta(t)$. In particolare, si ha

$$i^2\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2 = 0 \;\Rightarrow\; i\omega = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2}$$

$$\omega_\pm = i\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} = i\Gamma \pm \sqrt{\omega_0^2 - \Gamma^2}$$

e la soluzione generica dell'equazione è del tipo: $\overline{x(t)} = Ae^{i\omega_+ t} + Be^{i\omega_- t}$

Se $\omega_0^2 > \Gamma^2 \Rightarrow \sqrt{\omega_0^2 - \Gamma^2} = \omega_s$ è ***reale*** e il moto è di tipo ***oscillatorio*** con smorzamento esponenziale $e^{-\Gamma t}$: ***regime sottocritico*** (underdamped)

Se $\omega_0^2 < \Gamma^2 \Rightarrow \sqrt{\omega_0^2 - \Gamma^2} = \sqrt{-\left(\Gamma^2 - \omega_0^2\right)} = i\,\omega_R$ è ***immaginaria*** e il moto è di tipo ***aperiodico***: ***regime sovracritico*** (overdamped)

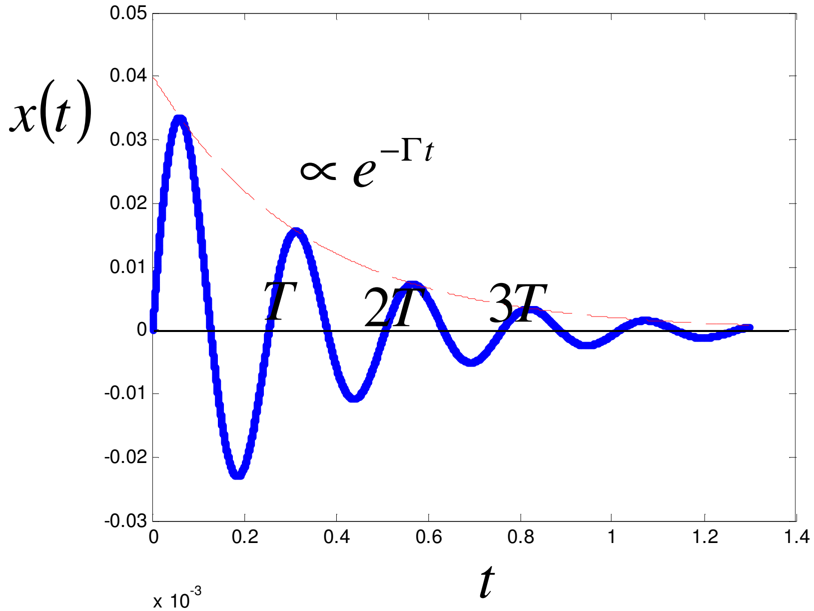
Proprietà del DHO

regimi di smorzamento

regime sottocritico

$$\omega_s = \sqrt{\omega_0^2 - \Gamma^2} = \frac{2\pi}{T}$$

$$x(t) = \frac{\lambda}{m\omega_s} e^{-\Gamma t} \sin(\omega_s t)$$



regimi critico e sovracritico

$$\omega_R = \sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2}$$

$$x(t) = \frac{\lambda}{2m\omega_R} e^{-\Gamma t}\left[e^{\omega_R t} - e^{-\omega_R t}\right]$$