Proprietà del DHO

Parte reale e parte immaginaria della suscettività

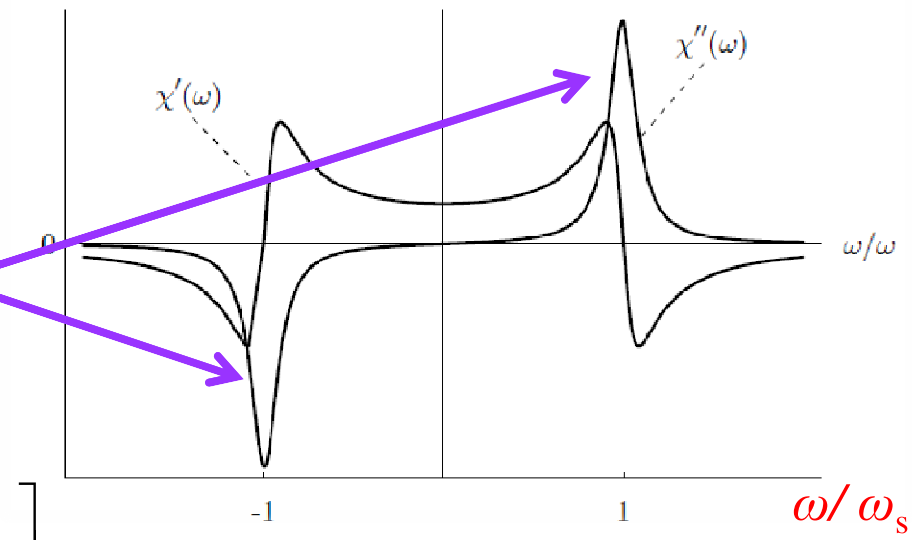
Avevamo:

$$\chi[\omega]=\frac{\tilde{x}(\omega)}{\tilde{K}(\omega)}=\frac{1}{m}\frac{1}{-\omega^2+i\gamma\omega+\omega_0^2}=\frac{1}{m}\frac{-\omega^2-i\gamma\omega+\omega_0^2}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+(\gamma\omega)^2}=\chi'[\omega]-i\chi''[\omega]$$

$$\Rightarrow \chi'[\omega]=\frac{1}{m}\frac{\omega_0^2-\omega^2}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+(\gamma\omega)^2} \quad \text{e} \quad \boxed{\chi''[\omega]=\frac{1}{m}\frac{\gamma\omega}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+(\gamma\omega)^2}}$$

Nel caso ***sottocritico***, in cui $\omega_s=\sqrt{\omega_0^2-\Gamma^2}$, con un po' di algebra si trova che la $\chi''[\omega]$ può essere riscritta come somma di due Lorentziane centrate a $\pm\omega_s$, di segno opposto (come deve essere poiché χ'' è dispari) e di semilarghezza Γ:

$$\chi''[\omega]=\frac{1}{2m\omega_s}\left[\frac{\Gamma}{(\omega-\omega_s)^2+\Gamma^2}-\frac{\Gamma}{(\omega+\omega_s)^2+\Gamma^2}\right]$$



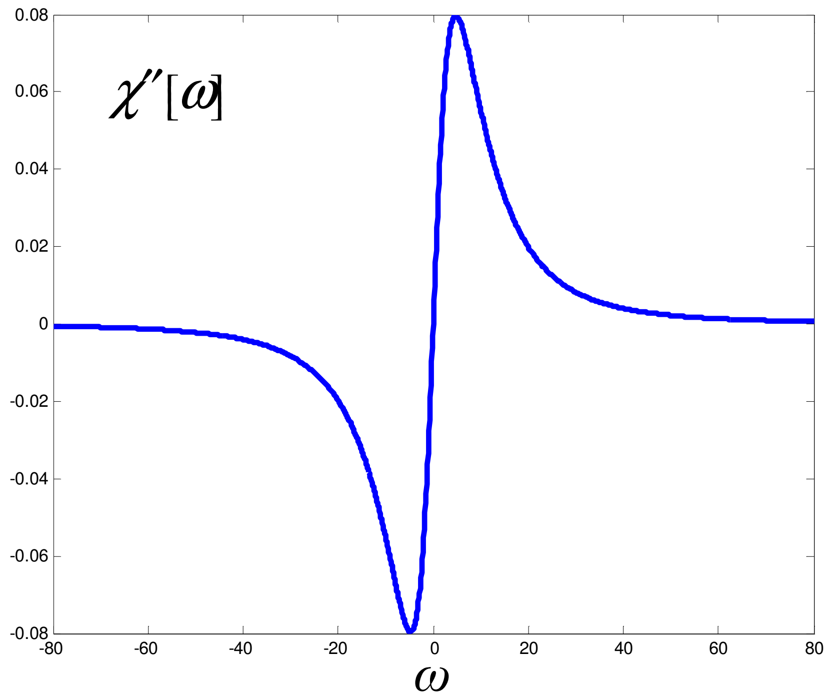
Proprietà del DHO

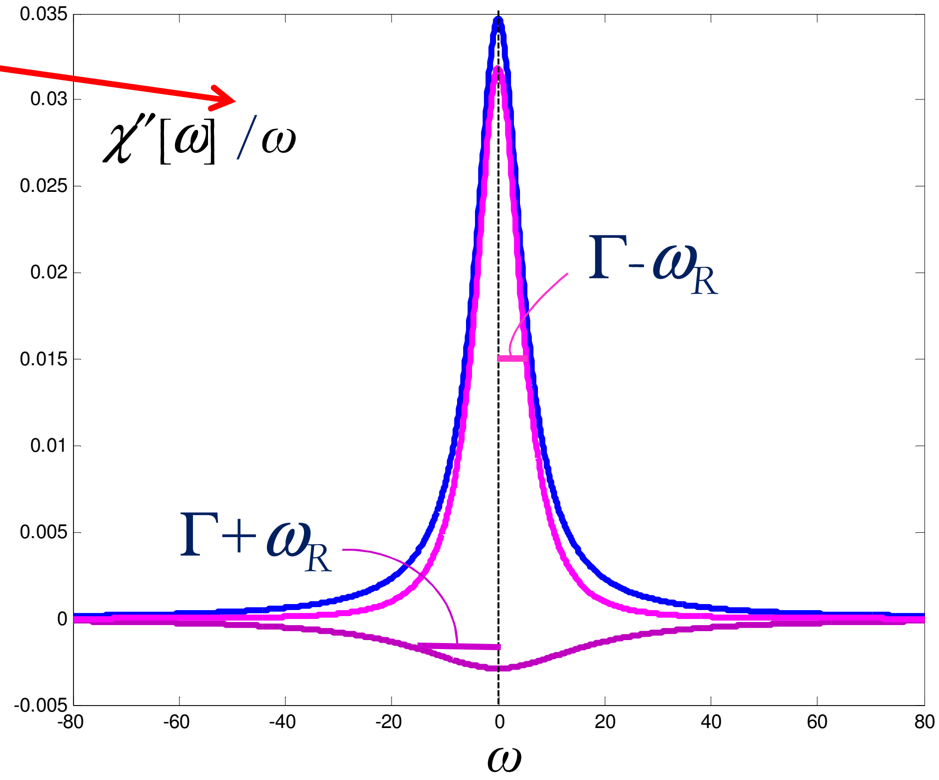
Continua ...parte immaginaria della suscettività

Nel caso ***sovracritico***, in cui $\sqrt{\omega_0^2-\Gamma^2}=i\omega_R=i\sqrt{\Gamma^2-\omega_0^2}$, con altrettanta algebra, si trova che $\chi''[\omega]$ contiene due Lorentziane centrate, di cui una negativa e larga, e l'altra positiva e stretta:

$$\chi''[\omega]=\frac{1}{2m\omega_R}\,\omega\left[\frac{1}{\Gamma-\omega_R}\,\frac{\Gamma-\omega_R}{\omega^2+(\Gamma-\omega_R)^2}-\frac{1}{\Gamma+\omega_R}\,\frac{\Gamma+\omega_R}{\omega^2+(\Gamma+\omega_R)^2}\right]$$

!!





Spettro del DHO

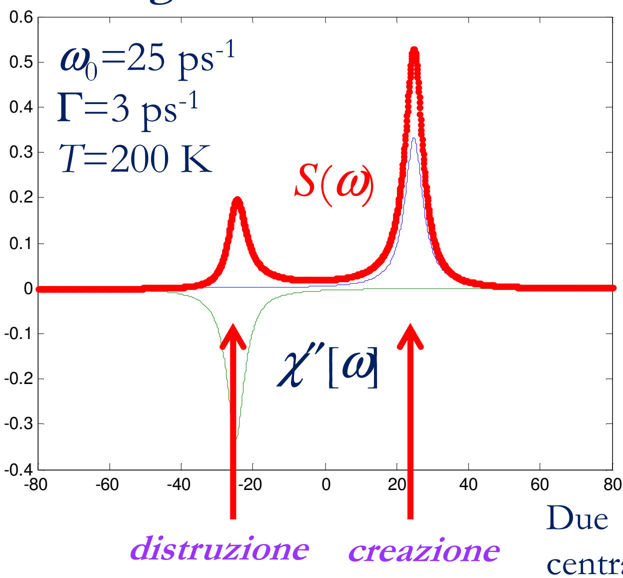
nei vari regimi

Dal teorema di fluttuazione dissipazione possiamo ottenere direttamente lo spettro della funzione di autocorrelazione della posizione:

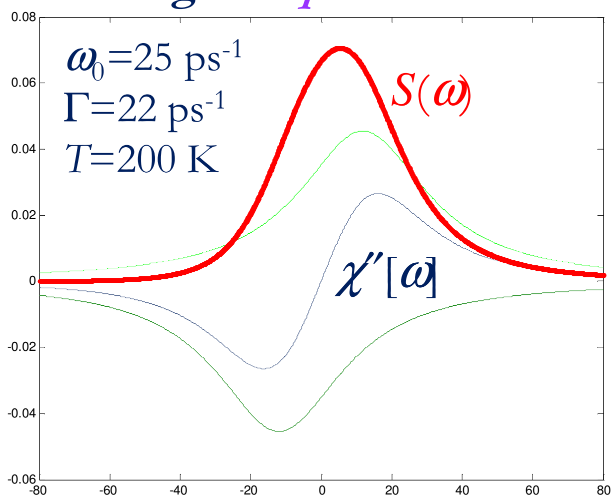
$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{-i\omega t} \langle \hat{x}\, \hat{x}(t) \rangle = \frac{2\hbar}{1-e^{-\beta\hbar\omega}}\, \chi''[\omega] = 2\hbar\, [n(\omega)+1] \frac{2\Gamma\omega}{m\left[\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+(2\Gamma\omega)^2\right]}$$

Il fattore di asimmetrizzazione quantistico modifica le forme già viste di $\chi''[\omega]$ per i vari regimi. In particolare, rende S_{xx} una funzione <u>ovunque positiva in ω e asimmetrica</u>, partendo invece da una $\chi''[\omega]$ dispari.

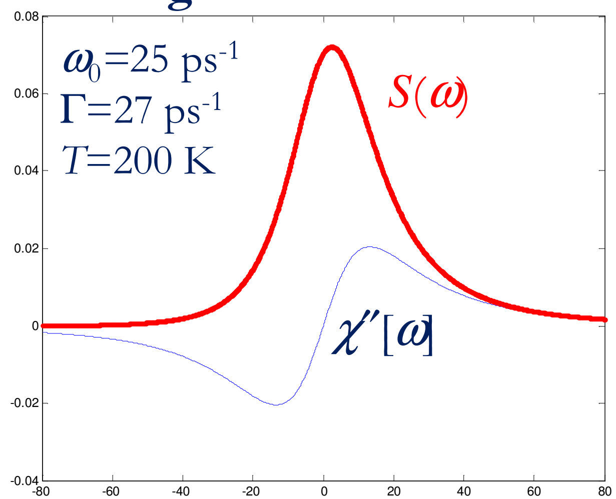
***regime** sottocritico*



***regime** quasi critico*



***regime** sovracritico*



Due Lorentziane non centrate danno comunque un picco centrale (**asimmetrico**) anche in regime sottocritico

Spettro del DHO

Effetto del fattore quantistico

Nel regime sottocritico, abbiamo

$$S_{xx}(\omega) = 2\hbar\,[n(\omega)+1]\frac{\pi}{2m\omega_s}\left[\frac{1}{\pi}\left(\frac{\Gamma}{(\omega-\omega_s)^2+\Gamma^2}\right)-\frac{1}{\pi}\left(\frac{\Gamma}{(\omega+\omega_s)^2+\Gamma^2}\right)\right]$$

che, nel limite di ***damping nullo***, si riduce a

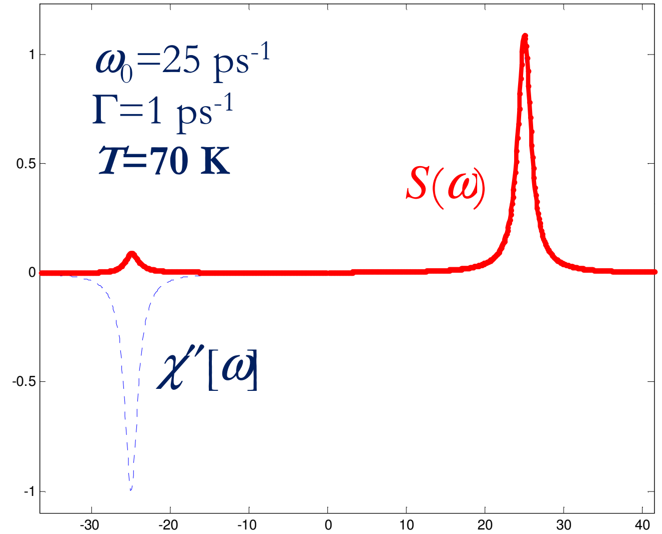
$$S_{xx}(\omega) = 2\hbar\,[n(\omega)+1]\frac{\pi}{2m\omega_0}[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]$$

$$\sim [n(\omega_0)+1]\delta(\omega-\omega_0) - [n(-\omega_0)+1]\delta(\omega+\omega_0)$$

$$\text{ma}\ \ [n(-\omega_0)+1] = -n(\omega_0)$$

$$\Rightarrow S_{xx}(\omega) \sim \underbrace{[n(\omega_0)+1]}_{\textit{creazione}}\delta(\omega-\omega_0) + \underbrace{n(\omega_0)}_{\textit{distruzione}}\delta(\omega+\omega_0)$$

!!



Ad ***alte*** temperature, cioè per $\beta\hbar\omega << 1$, i due fattori $n(\omega_0)$ e $n(\omega_0)+1$ tendono allo stesso limite $1/\beta\hbar\omega_0$ e i processi di creazione e distruzione contribuiscono quasi in ugual misura allo spettro.

A ***basse*** temperature, cioè per $\beta\hbar\omega >> 1$, il fattore $n(\omega_0)$ <u>tende a zero</u>, e solo i processi di creazione contribuiscono significativamente allo spettro. Questo avviene perché i livelli eccitati non sono popolati a basse temperature e non sono probabili transizioni che distruggono un quanto.

Digressione circa il DHO

La funzione di risposta: un metodo potente per risolvere l'oscillatore armonico smorzato e forzato

Avevamo visto che in presenza di una forzante cosinusoidale $K(t) = \mathrm{Re}(K_0\, e^{\,i\omega t})$, valeva

$$\delta\overline{B}(t) = \mathrm{Re}\left[K_0\, e^{i\omega t}\left|\chi_{BA}[\omega]\right| e^{i\phi(\omega)}\right] = K_0\left|\chi_{BA}[\omega]\right|\cos(\omega t + \phi(\omega))$$

Tale relazione permette di ottenere <u>immediatamente</u> la soluzione per l'oscillatore smorzato e forzato:

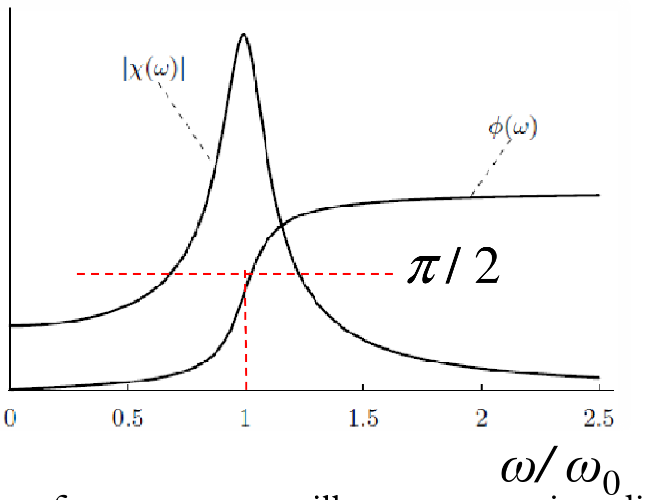
$$\delta\,\overline{x(t)} = \overline{x(t)} = \overline{x(t)} - \langle x(0)\rangle = K_0\left|\frac{1}{m}\frac{1}{-\omega^2 + i\,\gamma\,\omega + \omega_0^2}\right|\cos(\omega t + \phi(\omega))$$

dove

$$\left|\chi[\omega]\right| = \sqrt{\chi'[\omega]^2 + \chi''[\omega]^2} = \frac{1}{m}\sqrt{\frac{1}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (\gamma\,\omega)^2}}$$

$$\chi'[\omega] = \left|\chi[\omega]\right|\cos\phi(\omega),\ \chi''[\omega] = \left|\chi[\omega]\right|\sin\phi(\omega)$$

$$\Rightarrow \tan\phi(\omega) = \frac{\chi''[\omega]}{\chi'[\omega]} = \frac{\gamma\,\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$



Ampiezza e fase per un oscillatore armonico di frequenza propria ω_0.