Equazioni iperboliche: Metodo di Riemann

Consideriamo un equazione iperbolica ridotta nella sua forma canonica

(1)

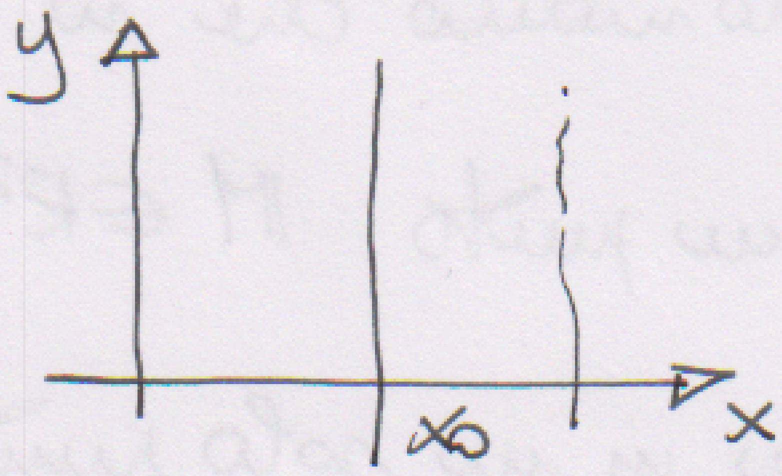
$$L(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + d(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + e(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + f(x,y)\,u = g(x,y)$$

dove ho diviso per il coeff $a(x,y) \neq 0$

Le equaz. caratt. sono $(a = c = 0;\ b = \frac{1}{2})$

$$a\frac{\partial \xi}{\partial x} + \left(b \pm \sqrt{b^2 - ac}\right)\frac{\partial \xi}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 1 \end{cases} \qquad \begin{aligned} x &= x_0 \\ y &= s + y_0 \end{aligned}$$



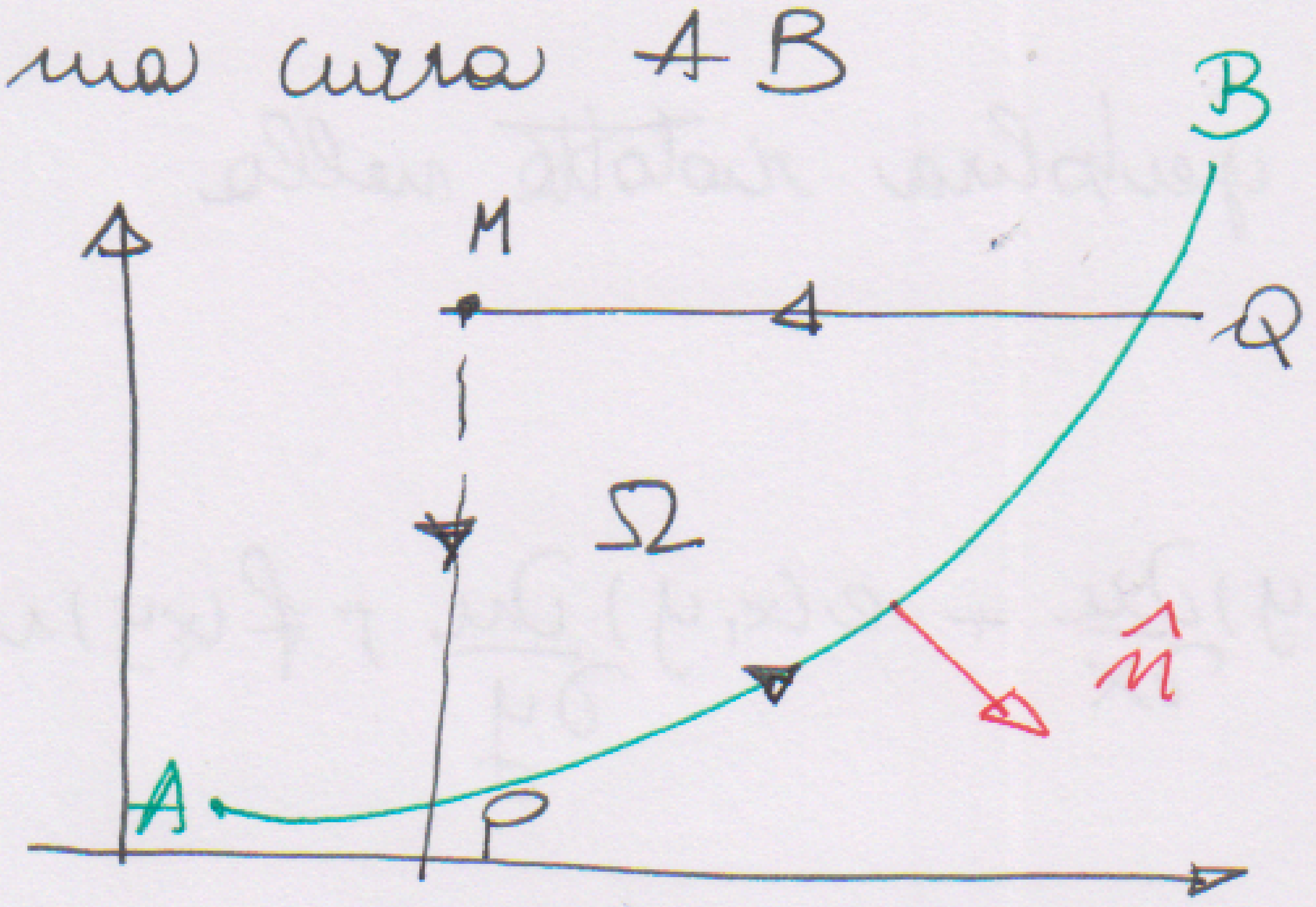
il secondo fascio di caratt può essere trovato con $\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$ che corrisponde a rette orizzontali

Le caratt sono quindi $x = \text{cost}$, $y = \text{cost}$

ovvero $\eta = y$ $\quad \xi = x \Rightarrow$ trasf. identica; sono già in forma canonica.

immaginiamo di voler risolvere ① con c.c. definite

lungo una curva AB



$$u\Big|_{AB} = \varphi(x,y) \qquad \frac{\partial u}{\partial \hat{n}}\Big|_{AB} = \vec{\nabla} u \cdot \hat{n}\Big|_{AB} = \psi(x,y)$$

con φ, ψ assegnate

Supponiamo che si tirano le rette verticale e orizz. (caratt.)

da un punto $M \in R^2$ ognuna di queste rette interseca la

curva in un solo punto

Riusciamo a det. il valore di u in M?

E' utile considerare la cosiddetta Equazione aggiunta

a $L(u)=0$

Il metodo di Riemann utilizza la formulazione

debole dell'equazione: fissiamo v arb. suff. regolare

e consideriamo

$$\int_{R^2} L(u)\, v \, dV$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{L}(u)\, v\, dV \doteq \underbrace{\langle \mathcal{L}(u), v \rangle}_{\text{prodotto scalare in } L^2}$$

$$u, v \in L^2(\mathbb{R}^2) \Rightarrow \int_{R^2} u^2\, dV < \infty$$

Norma $\|u\|^2_{L^2} = \int_{R^2} u^2\, dV$ e prodotto di

Hilbert $\langle u, v\rangle_{L^2} \doteq \int_{R^2} u\, v\, dV$

Operatore aggiunto $\mathcal{L}^*$: $\langle \mathcal{L}(u), v\rangle = \langle u, \mathcal{L}^*(v)\rangle$

$$\int_{R^2} \mathcal{L}(u)\, v\, dV = \int_{\mathbb{R}^2} u\, \mathcal{L}^*(v)\, dV$$

Possiamo det. $\mathcal{L}^*$ integrando per parti (no boundary)

$$\int_{R^2} \left(v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + d\, v \frac{\partial u}{\partial x} + v\, e \frac{\partial u}{\partial y} + v f u \right) dx\, dy =$$

$$\int_{R^2} \left(u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - u \frac{\partial (d v)}{\partial x} - u \frac{\partial}{\partial y}(v e) + u f v \right) dx\, dy$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^* = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial (d v)}{\partial x} - \frac{\partial (v e)}{\partial y} + f v$$

$$v\mathcal{L}(u) - u\mathcal{L}^*(v) = v\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - u\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} +$$

$$v d\frac{\partial u}{\partial x} + v e\frac{\partial u}{\partial y} + u\frac{\partial (dv)}{\partial x} + \frac{\partial (ve)}{\partial y}u =$$

$$= v\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - u\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}(vdu) + \frac{\partial}{\partial y}(veu)$$

$$v\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$v\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\right]$$

$$u\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right) - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right]$$

Otteniamo

$$v\mathcal{L}(u) - u\mathcal{L}^*(v) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\overbrace{\left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y} + 2vdu\right)}^{\chi_x}$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\underbrace{\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x} + 2evu\right)}_{\chi_y}$$

$$= \frac{1}{2}\vec{\nabla}\vec{\chi} = \frac{1}{2}(\partial_x \chi_x + \partial_y \chi_y)$$

$$\vec{\chi} = \chi_x\vec{e}_x + \chi_y\vec{e}_y$$

prendiamo un punto $M=(x_0, y_0)$ e integriamo

$v\mathcal{L}(u) - \mathcal{L}^*(v)u$ nel dominio definito da M e le

caratt. ora evert. Ω

$$\int_\Omega \left(v L(u) - \mathcal{L}^*(v) u \right) dV = \frac{1}{2} \int_\Omega \nabla \vec{x}\, dV =$$

$$\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \vec{x} \cdot \hat{n}\, dl$$

$$\partial\Omega = \overline{MP} \cup \overline{MQ} \cup \widehat{PQ}$$

$$\frac{1}{2}\int_{QM} \vec{x} \cdot \hat{n}\, dl = \frac{1}{2}\int_{QM} x_y\, dl = \frac{1}{2}\int_Q^M (-) \left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x} + 2e v u \right) dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int_Q^M \left[\frac{\partial}{\partial x}(uv) + 2u \left(ev - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[(uv)\Big|_Q - (uv)\Big|_M \right] - \int_Q^M u \left(ev - \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx$$

Analogamente

$$\frac{1}{2} \int_{MP} \vec{x} \cdot \hat{n}\, dl = \frac{1}{2} \int_{MP} x_x\, dl = \frac{1}{2} \left[(uv)\Big|_P - (uv)\Big|_M \right]$$

$$+ \int_M^P u \left(dv - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy$$

Inserendo quanto trovato nell'espressione generale otteniamo

$$(uv)_M = \frac{(uv)|_P + (uv)|_Q}{2} + \frac{1}{2}\int_{\widehat{PQ}} \vec{x}\,\hat{n}\, dl$$

$$-\int_Q^M u\left(ev - \frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \int_M^P u\left(dv - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dy -$$

$$-\iint_\Omega \left(v\mathcal{L}(u) - u\mathcal{L}^*(v)\right)dx\,dy$$

se u è soluzione di 1 $\mathcal{L}(u) = g$

e v è scelta come soluz. di $\mathcal{L}^*(v) = 0$

$$-\iint_\Omega \left[v(\mathcal{L}(u)) - u\mathcal{L}^*(v)\right]dx\,dy = -\int_\Omega vg\,dx\,dy$$

Riusciamo proporre di imporre a v delle c.c. che annullano gli integrali lungo le caratt.

$$v:\ \mathcal{L}^*(v) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial}{\partial x}(dv) - \frac{\partial}{\partial y}(ev) + fv = 0$$

1) $\frac{\partial v}{\partial x} - ev = 0$ in $\overline{QM}$

2) $\frac{\partial v}{\partial y} - dv = 0$ in $\overline{PM}$ 3) $v = 1$ in M

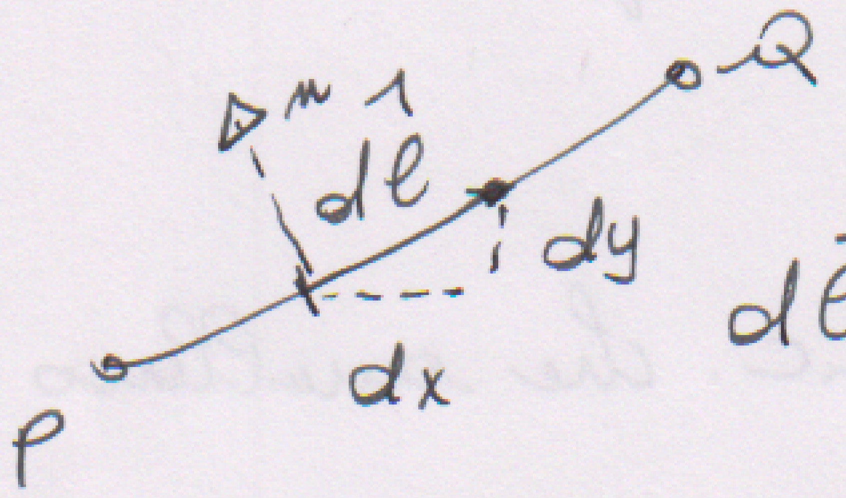
v è detta Funzione di Riemann

Nota: dall'eq. vediamo che v non dipende dalle c.c. di u e dalla curva AB, ma solo dall'eq. diff. iniziale

L'equaz. si semplifica

$$u\Big|_M = \frac{(vu)(P)+(vu)(Q)}{2} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_{QP} \vec{x}\,\hat{n}\,dl}_{u \text{ è noto lungo } QP} - \int_{\Omega} v g \, dx\,dy$$

$$\frac{1}{2}\int_{QP} (\vec{x}\,\hat{n})\,dl = \frac{1}{2}\int_Q^P x_y\,dx - \frac{1}{2}\int_Q^P x_x\,dy$$



$$d\vec{l} = dx\,\vec{e}_x + dy\,\vec{e}_y \Rightarrow \hat{t} = \frac{\frac{dx}{dy}\vec{e}_x + \vec{e}_y}{\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}}$$

$$dl = \sqrt{dx^2+dy^2}$$

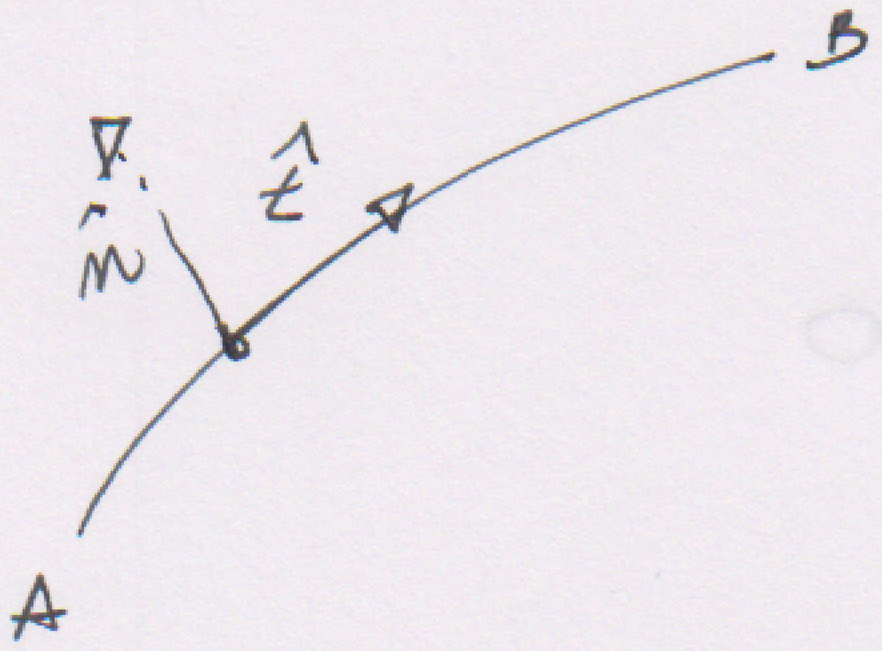
$$\hat{n} = \frac{\frac{dx}{dy}e_y - \vec{e}_x}{\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}} \Rightarrow \hat{n}\,dl = -dy\,\vec{e}_x + dx\,\vec{e}_y$$

$$\frac{1}{2}\int_{QP} (\vec{x}\cdot\hat{n})\,dl = \frac{1}{2}\int_{Q}^{P}\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial y} + 2vud\right)dx$$

$$-\frac{1}{2}\int_{Q}^{P}\left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y} + 2v e u\right)dy$$

il valore di $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial u}{\partial y}$ lungo la curva PQ possono

essere det. dalle c.c. $\quad \left.\frac{\partial u}{\partial \hat{n}}\right|_{AB} = \psi \qquad \left. u\right|_{AB} = \varphi$



$$\hat{t} = \underset{}{\overset{t_x}{n_y}}\,\vec{e}_x - \overset{t_y}{n_x}\,\vec{e}_y$$

$$\hat{n} = n_x\, e_x + n_y\, \vec{e}_y$$

$$\frac{\partial u}{\partial \hat{t}} = \left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{AB} = \frac{\partial \varphi}{\partial s}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \hat{t}} = \hat{t}\cdot\nabla_x u = t_x\frac{\partial u}{\partial x} + t_y\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial s}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \hat{n}} = \hat{n}\,\nabla_x u = n_x\frac{\partial u}{\partial x} + n_y\frac{\partial u}{\partial y} = \psi(s)$$

invertendo posso trovare $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial u}{\partial y}$ in ogni punto

della curva

Riscriviamo la formula finale di Riemann

$$u(M) = \frac{(uv)(P) + (uv)(Q)}{2} +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_Q^P \left(v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x} + 2 d v u \right) dx$$

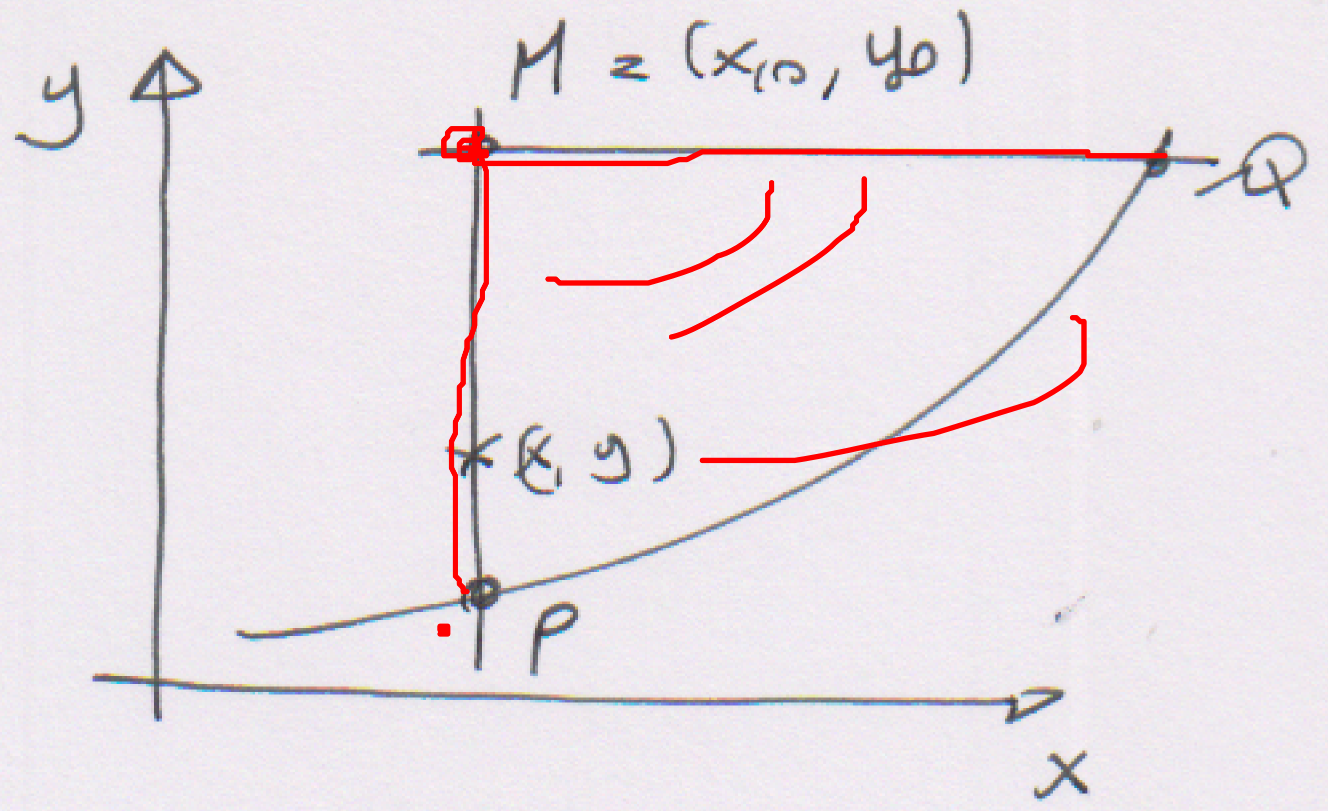
$$- \frac{1}{2} \int_Q^P \left(v \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y} + 2 e v u \right) dy - \int_\Omega v f \, dx dy$$

Il problema si riporta alla determinaz. della f. di Riemann v.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial}{\partial x}(dv) - \dfrac{\partial}{\partial y}(ev) + f v = 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = ev \quad \text{in } \overline{QM} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = dv \quad \text{in } \overline{PM} \\ v(M) = 1 \end{cases}$$

Si dimostra l'esist. e unicità della f. di Riemann.

E' facile trovare la soluzione lungo $\overline{QM}$ e $\overline{PM}$



$M = (x_0, y_0)$

(x, y) generico punto su MP e MQ

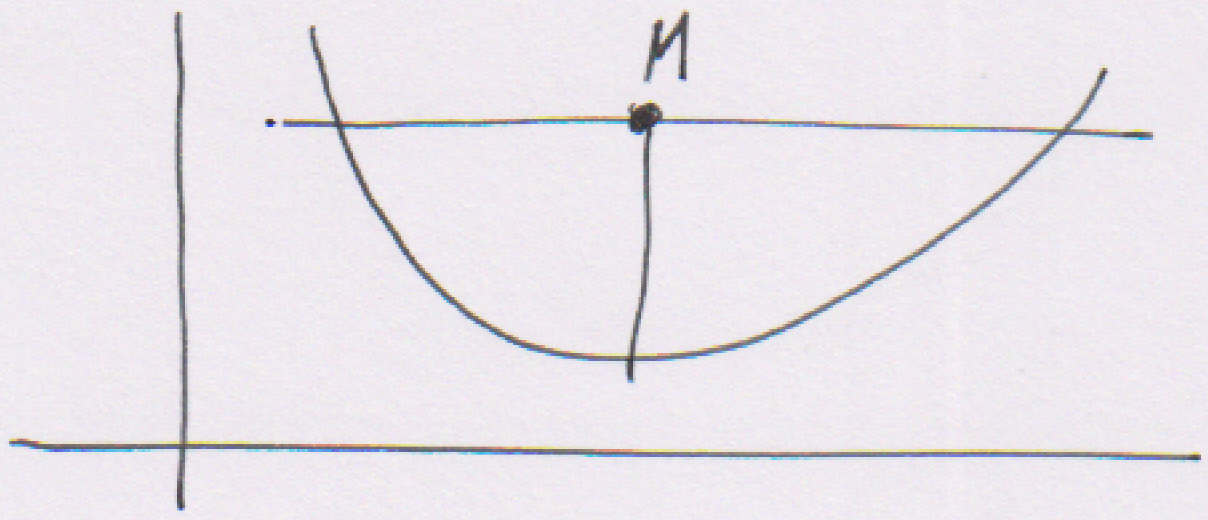
$v = v(x, y; x_0, y_0) \qquad v(x_0, y_0, x_0, y_0) = 1$

Lungo PM $\quad \dfrac{\partial v}{\partial y} = d(x, y)\, v$

$$\Rightarrow v(x, y, x_0, y_0) = e^{\int_{y_0}^{y} b(x_0, y)\, dy}$$

Lungo MQ $\quad v(x, y, x_0, y_0) = e^{\int_{x_0}^{x} e(x, y_0)\, dx}$

Nota: in maniera simile a quanto visto per il metodo caratt., il metodo di Riemann dimostra la corretta posizione (non esistenza di soluz. classiche) nel caso



2 intersez. di caratt. orizz. con la curva che contiene i dati al bordo