Soluzioni degli esercizi della prova scritta di fisica per tecnologie alimentari del 14/7/2020

Esercizio 1

a) All'equilibrio statico la somma delle forze che agiscono su ciascun corpo deve essere nulla.

Sul corpo 1 sospeso alla corda agiscono due forze: la forza peso $\vec{F}_{P1}$ verso il basso e la forza della corda $\vec{F}_{C1}$ diretta verso l'alto. Siccome le due forze devono essere uguali in modulo e direzione ma di verso opposto, si ha che la tensione della fune $T = |\vec{F}_{C1}|$ vale

$$T = m_1 g = 144 \text{ N} .$$

Sul corpo 2 agiscono tre forze: la forza peso $\vec{F}_{P2}$, la forza della fune $\vec{F}_{C2}$ e la reazione vincolare del piano inclinato $\vec{F}_R$. Orientiamo un sistema di riferimento cartesiano in modo che il versore $\hat{\boldsymbol{i}}$ sia orientato parallelamente al piano inclinato verso destra, mentre il versore $\hat{\boldsymbol{j}}$ sia ortogonale al piano inclinato e verso l'alto. Possiamo così scomporre le forze in questo modo:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{P2} &= -m_2 g \sin\theta\, \hat{\boldsymbol{i}} - m_2 g \cos\theta\, \hat{\boldsymbol{j}} \\ \vec{F}_{C2} &= T\, \hat{\boldsymbol{i}} \\ \vec{F}_R &= F_R\, \hat{\boldsymbol{j}} ,\end{aligned}$$

dove F_R indica il modulo della reazione vincolare $\vec{F}_R$ ed abbiamo tenuto in conto che essa è perpendicolare al piano inclinato, essendo quest'ultimo senza attrito. Inoltre, essendo la corda e la carrucola ideali (massa nulla, senza attrito, inestensibili), la tensione della corda T è uguale in tutti i suoi punti, quindi il modulo $F_{C2} = T$. Uguagliando a zero la somma delle tre forze, componente per componente, ricaviamo

$$\begin{aligned}m_2 g \sin\theta &= T = m_1 g \\ m_2 g \cos\theta &= F_R .\end{aligned}$$

Dalla prima equazione troviamo

$$m_2 = \frac{m_1}{\sin\theta} = 22{,}9 \text{ kg} .$$

b) Già ricavata prima: $T = 144$ N.

c) Se il sistema non è in equilibrio statico, la presenza di forze costanti dà luogo a moti uniformemente accelerati per i due corpi. È chiaro che il corpo 1 si muove verticalmente, poiché parte da fermo e le forze che agiscono su di esso sono verticali. Invece il corpo 2 si muove lungo il piano inclinato. In entrambi i casi il moto è rettilineo uniformemente accelerato.

Poiché i corpi sono collegati da una corda inestensibile, i moduli delle loro velocità sono uguali, e così anche i moduli delle loro accelerazioni. L'accelerazione del corpo 2 avrà componente solo lungo il versore $\hat{\boldsymbol{i}}$, che indichiamo con a. Questa sarà anche la componente dell'accelerazione del corpo 1 rispetto ad un versore $\hat{\boldsymbol{y}}$ verticale e diretto verso il basso (infatti se il corpo 2 si muove nel verso di $\hat{\boldsymbol{i}}$ il corpo 1 scende, cioè si muove nel verso di $\hat{\boldsymbol{y}}$). Insomma: $\vec{a}_1 = a\, \hat{\boldsymbol{y}}$, $\vec{a}_2 = a\, \hat{\boldsymbol{i}}$.

La seconda legge della dinamica per il corpo 1 dà :

$$\vec{F}_{P1} + \vec{F}_{C1} = m_1 \vec{a}_1 \qquad \Longrightarrow \qquad m_1 g\, \hat{\boldsymbol{y}} - T_1\, \hat{\boldsymbol{y}} = m_1 a\, \hat{\boldsymbol{y}} \quad \Longrightarrow \quad m_1(g-a) = T_1 .$$

La seconda legge della dinamica per il corpo 2 dà :

$$\vec{F}_{P2} + \vec{F}_{C2} + \vec{F}_R = m_2\vec{a}_2 \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} -m_2 g \sin\theta + T_2 & = m_2 a \\ -m_2 g \cos\theta + F_R & = 0 \end{cases}$$

con $m_2 = 0{,}7\, m_1 = 10{,}3$ kg. Nell'ipotesi di carrucola e fune ideale, $T_2 = T_1 = m_1(g - a)$, che sostituita nella prima equazione del corpo 2 ci permette di ricavare a:

$$\begin{aligned} -\, m_2 g \sin\theta + m_1(g - a) &= m_2 a \\ a = g\frac{m_1 - m_2 \sin\theta}{m_1 + m_2} &= g\frac{m_1(1 - 0{,}7 \sin\theta)}{m_1(1 + 0{,}7)} = g\frac{1 - 0{,}7\sin\theta}{1{,}7} = 3{,}17 \text{ m/s}^2 \,. \end{aligned}$$

d) Abbiamo un moto rettilineo uniformemente accelerato con partenza da fermo: $v_0 = 0$. Indichiamo con y la coordinata verticale (diretta verso il basso) per il corpo 1, ove $y_0 = 0$ corrisponde alla posizione iniziale e $t = 0$ all'istante iniziale. Valgono le equazioni ($y = d_1$, $y_0 = 0$, $v_0 = 0$):

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}at^2 \qquad \Longrightarrow \qquad t = \sqrt{\frac{2d_1}{a}} = 0{,}940 \text{ s} \,.$$

e) Se la carrucola possiede un momento di inerzia, la sua velocità angolare può variare solamente se il momento totale τ delle forze rispetto al suo asse di rotazione è diverso da zero:

$$\tau = I\alpha$$

dove

$$I = \frac{1}{2}m_c R^2 = 6{,}59 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

è il momento di inerzia della carrucola ed α la sua accelerazione angolare.

È chiaro che se i due corpi e la corda si muovono a velocità v, allora la carrucola ruota con velocità angolare ω tale che $v = \omega R$. Se con v indichiamo proprio la componente lungo $\hat{\boldsymbol{\imath}}$ della velocità del corpo 1, allora $v > 0$ corrisponde ad una rotazione in senso orario della carrucola. Conviene quindi prendere come verso di rotazione positivo quello orario. Con questa convenzione abbiamo che l'accelerazione lineare a dei due corpi 1 e 2 è legata all'accelerazione angolare α della carrucola dalla legge $a = \alpha R$.

Le forze che agiscono sulla carrucola sono dovute alla corda. Il tratto di corda verticale, a cui è appeso il corpo 1, agisce con una forza di modulo T_1 e momento $\tau_1 = +RT_1$, perché il braccio della forza vale R e tale forza tende a far ruotare la carrucola in senso orario, che abbiamo stabilito come verso positivo. Il tratto di corda collegato al corpo 2 agisce con una forza di modulo T_2 e momento $\tau_2 = -RT_2$ negativo, perché tende a far ruotare la carrucola in verso antiorario. Il momento totale è dato da

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = R(T_1 - T_2)$$

che è diverso da zero solo se le due tensioni T_1 e T_2 sono diverse.

Mettendo insieme le 2 equazioni che descrivono le accelerazioni lineari dei corpi 1 e 2 con l'equazione dell'accelerazione angolare della carrucola, otteniamo il seguente sistema di tre equazioni:

$$\begin{cases} m_1 g - T_1 & = m_1 a \\ -m_2 g \sin\theta + T_2 & = m_2 a \\ R(T_1 - T_2) & = I\, a/R \end{cases}$$

che, risolto per le 3 incognite T_1, T_2 ed a, dà

$$T_1 = \frac{gm_1[I + m_2R^2(1+\sin\theta)]}{I + (m_1+m_2)R^2} = 104 \text{ N}$$
$$T_2 = \frac{gm_2[I\sin\theta + m_1R^2(1+\sin\theta)]}{I + (m_1+m_2)R^2} = 93{,}1 \text{ N}$$
$$a = g\frac{m_1 - m_2\sin\theta}{\frac{I}{R^2} + m_1 + m_2} = 2{,}75 \text{ m/s}^2 \ .$$

Quindi $\vec{a}_1 = 2{,}75\ \hat{\boldsymbol{y}}$ N.

f) La forza di attrito $\vec{F}_A$ che il piano inclinato esercita sul corpo 2 è diretta parallelamente al piano inclinato stesso: $\vec{F}_A = f_A\ \hat{\boldsymbol{i}}$. Per mantenere l'equilibrio statico, essa deve bilanciare, assieme alla componente lungo $\hat{\boldsymbol{i}}$ della forza peso, la forza della corda $F_{C2} = m_1 g\ \hat{\boldsymbol{i}}$. Quindi

$$f_A - m_2 g\sin\theta + m_1 g = 0 \quad \Longrightarrow \quad f_A = g(m_2\sin\theta - m_1) = gm_1(0{,}7\sin\theta - 1) = -79{,}2 \text{ N} \ .$$

Come c'era da aspettarsi, la forza di attrito è diretta verso la parte sinistra del piano inclinato. Sappiamo che la massima forza di attrito è determinata dalla legge

$$|f_{A,\max}| = \mu_s |F_R|$$

ove $|F_R| = m_2 g\cos\theta = 0{,}7 m_1 g\cos\theta$ è il modulo della reazione vincolare normale (cioè perpendicolare) al piano. Quindi

$$|f_A| \leq |f_{A,\max}| = \mu_s|F_R| \qquad \Longrightarrow \qquad \mu_s \geq \frac{|f_A|}{|F_R|} = \frac{|(0{,}7\sin\theta - 1)|}{0{,}7\cos\theta} = 1{,}02 \ .$$

Pertanto $\mu_{s,\min} = 1{,}02$ rappresenta il minimo coefficiente di attrito necessario affinché ci possa essere l'equilibrio statico con le masse date.

Esercizio 2

a) La capacità termica totale C è la somma delle capacità termiche dei componenti il sistema. Per la pentola di metallo abbiamo

$$C_m = c_m m_m = 763 \text{ J/°C}$$

mentre per l'olio, che ha una massa

$$m_o = V_o \rho_o = 3{,}31 \text{ kg}$$

si ha

$$C_o = c_o m_o = 6190 \text{ J/°C}$$

e quindi

$$C = 6{,}95 \cdot 10^3 \text{ J/°C} .$$

b) Al tempo t_1 la temperatura del sistema vale $T_1 = -10$ °C, al tempo t_2 vale $T_2 = 15$ °C. Quindi la variazione di temperatura vale $\Delta T = T_2 - T_1 = 25$ °C e per questo incremento è richiesta una quantità di calore pari a

$$Q = C\Delta T = 1{,}74 \cdot 10^4 \text{ J} .$$

c) Il calore Q è erogato in un intervallo di tempo pari a $\Delta t = t_2 - t_1 = (6-2)$ min $= 4$ min $= 240$ s, quindi la potenza media è data da

$$P = \frac{Q}{\Delta t} = 724 \text{ W} .$$

d) Tra t_2 e t_3 la temperatura non varia, quindi il sistema non scambia calore.

e) Quando il sistema viene immerso nella vasca d'acqua (a temperatura minore), cede calore all'acqua e si raffredda, di conseguenza l'acqua si riscalda. Tra t_3 e t_4 la variazione di temperatura è $\Delta T' = 5 - 15 = -10$ °C, quindi il sistema *cede* all'acqua un calore pari a

$$Q' = C(-\Delta T') = 6{,}95 \cdot 10^4 \text{ J} .$$

Per la conservazione dell'energia, questo calore è esattamente quello assorbito dall'acqua. Se indichiamo con ΔT_a la differenza di temperatura dell'acqua in questa fase di riscaldamento tra t_3 e t_4, si ha

$$Q' = c_a m_a \Delta T_a \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta T_a = \frac{Q'}{c_a m_a} = 0{,}277 \text{ °C} ,$$

essendo $m_a = 60{,}0$ kg. Quindi la temperatura finale dell'acqua vale

$$T'_a = T_a + \Delta T_a = 2{,}3 \text{ °C}$$

in cui abbiamo arrotondato ai decimi di grado poiché la temperatura iniziale è precisa solo al decimo di grado.

Esercizio 3

a) Cerchiamo innanzitutto di capire cosa succede. Il gas è a pressione atmosferica, cioè alla stessa pressione dell'ambiente esterno. Quindi la forza che il gas esercita sullo stantuffo verso l'alto è uguale a quella che l'atmosfera esterna esercita sullo stantuffo stesso verso il basso. In più c'è la forza peso dello stantuffo e del corpo appoggiato sopra, e quindi lo stantuffo è appoggiato in fondo al pistone.

Da questo stato iniziale, di cui sappiamo tutto (P_1,V_1,T_1), il gas è riscaldato per mezzo della fiamma. Quindi la temperatura e la pressione del gas aumentano, mentre il volume resta costante, perché il gas non ce la fa ad alzare lo stantuffo, almeno fino a quando la pressione non è sufficientemente alta. Quanto deve valere la pressione P_G del gas affinché lo stantuffo si alzi? Deve essere tale da vincere la pressione esterna (atmosferica) e la forza peso dello stantuffo e del corpo appoggiato. Più precisamente,

$$\begin{aligned}
&F_G = F_A + F_P \\
&\quad \text{ove} \\
&F_G = P_G\, A = \text{ forza del gas (interno)} \\
&F_A = P_{\text{atm}}\, A = \text{ forza della pressione atmosferica (esterna)} \\
&F_P = (m_1 + m_2)g = \text{ forza peso dello stantuffo e corpo appoggiato .}
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
P_G\, A &= P_{\text{atm}}\, A + (m_1 + m_2)g \\
P_G &= P_{\text{atm}} + \frac{(m_1 + m_2)g}{A} = (101{,}3 + 1{,}27) \text{ kPa} = 102{,}6 \text{ kPa .}
\end{aligned}$$

Questa è la pressione (costante) del gas in tutti gli stati nei quali lo stantuffo è sollevato, e quindi è anche uguale alla pressione $P_2 = 102$ kPa.

b) Pertanto il gas subisce prima una trasformazione a volume costante (isocora) in cui la pressione aumenta da P_1 a $P_G = P_2$. In questa fase il gas non compie lavoro ($\Delta V = 0$).

Successivamente lo stantuffo inizia ad alzarsi ed il gas subisce una trasformazione a pressione P_2 costante (isobara), mentre il volume aumenta di $\Delta V = A \cdot h = 7{,}01 \cdot 10^{-3}$ m^3 e quindi il gas compie lavoro.

c) Il volume finale vale

$$V_2 = V_1 + \Delta V = 99{,}0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ ,}$$

dal quale possiamo ricavare la temperatura finale mediante l'equazione dei gas perfetti:

$$P_2 V_2 = nRT_2 \qquad \Longrightarrow \qquad T_2 = \frac{P_2 V_2}{nR} = 330 \text{ K}$$

dove il valore nR lo possiamo ricavare dallo stato iniziale:

$$nR = \frac{P_1 V_1}{T_1} = 30{,}8 \text{ J/K ,}$$

infatti il numero di moli non varia durante la trasformazione.

d) Il lavoro compiuto dal gas è

$$W = P_2\, \Delta V = 719 \text{ J .}$$

e) L'energia interna di un gas monoatomico ideale vale

$$E = \frac{3}{2} nRT \ ,$$

dipende cioè solo dalla temperatura. La sua variazione è

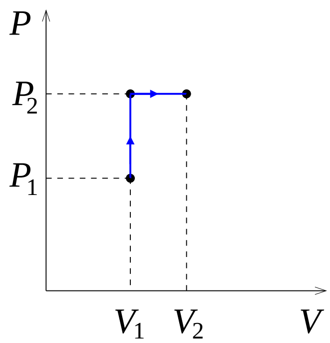
$$\Delta E = \frac{3}{2} nR\, \Delta T = 1250 \text{ J} \ ,$$

in quanto $\Delta T = T_2 - T_1 = 27$ K.

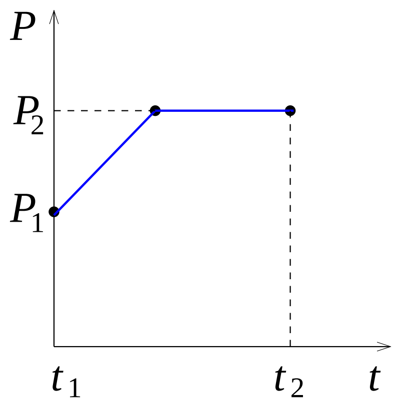
f) Dal primo principio della termodinamica

$$\Delta E = Q - W \qquad \Longrightarrow \qquad Q = \Delta E + W = 1970 \text{ J} \ .$$

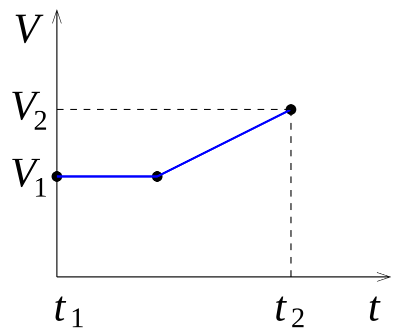
g) Come spiegato al punto b), il gas subisce prima un'aumento di pressione a volume costante, e poi un'espansione a pressione costante. Il grafico P-V ha il seguente aspetto:



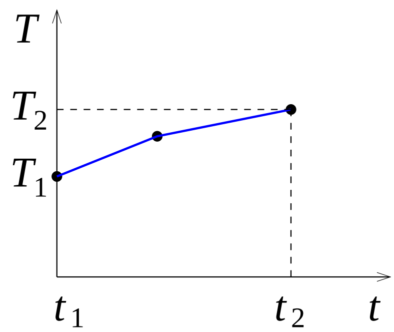
h) Grafico della pressione in funzione del tempo:



i) Grafico del volume in funzione del tempo:



l) Grafico della temperatura in funzione del tempo:



Esercizio 4

a) Sulla carica C agisce la forza elettrostatica prodotta dalle altre due carice A e B. Trattandosi di cariche puntiformi, la forza $\vec{F}_{AC}$ che A esercita su C si trova mediante la legge di Coulomb. Il suo modulo è dato da

$$F_{AC} = \left| \frac{q_A q_C}{4\pi\epsilon_0\, r_{AC}^2} \right| = 2{,}53 \text{ N} ,$$

in cui r_{AC} rappresenta la distanza tra le cariche A e C e che vale

$$r_{AC} = \sqrt{(40-80)^2 + (-40-0)^2} \text{ cm} = 40 \cdot \sqrt{2} \text{ cm} = 56{,}6 \text{ cm} = 0{,}566 \text{ m} .$$

Poiché le cariche q_A e q_C hanno segno opposto, la forza è attrattiva, cioè F_{AC} è diretta da C verso A. Il segmento $\overline{CA}$ è evidentemente inclinato di $\theta_{CA} = 45\ ^\circ$ rispetto all'asse orizzontale, pertanto le componenti x ed y della forza sono

$$F_{ACx} = F_{AC} \cos\theta_{CA} = F_{AC}/\sqrt{2} = 1{,}79 \text{ N}$$
$$F_{ACy} = F_{AC} \sin\theta_{CA} = F_{AC}/\sqrt{2} = 1{,}79 \text{ N} .$$

Per quanto riguarda la forza $\vec{F}_{BC}$ che B esercita su C abbiamo

$$F_{BC} = \left| \frac{q_B q_C}{4\pi\epsilon_0\, r_{BC}^2} \right| = 0{,}843 \text{ N} ,$$

in cui r_{BC} rappresenta la distanza tra le cariche B e C e che vale

$$r_{BC} = \sqrt{(40-0)^2 + (-40-0)^2} \text{ cm} = 40 \cdot \sqrt{2} \text{ cm} = 56{,}6 \text{ cm} = 0{,}566 \text{ m} .$$

È comunque evidente dal disegno che $r_{BC} = r_{AC}$. Poiché le cariche q_A e q_C hanno lo stesso segno, la forza è repulsiva, cioè F_{BC} è diretta da C in verso opposto a B. Il segmento $\overline{BC}$ è evidentemente inclinato di $\theta_{BC} = -45\ ^\circ$ rispetto all'asse orizzontale, pertanto le componenti x ed y della forza sono

$$F_{BCx} = F_{BC} \cos\theta_{BC} = F_{BC}/\sqrt{2} = 0{,}596 \text{ N}$$
$$F_{BCy} = F_{BC} \sin\theta_{BC} = -F_{BC}/\sqrt{2} = -0{,}596 \text{ N} .$$

La forza totale che agisce su C ha per componenti e modulo

$$F_x = F_{ACx} + F_{BCx} = 2{,}38 \text{ N}$$
$$F_y = F_{ACy} + F_{BCy} = 1{,}19 \text{ N}$$
$$F = |\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 2{,}67 \text{ N} .$$

b)

$$\vec{E} = \frac{F}{q_C} = (-1{,}59\,,\ -0{,}79) \cdot 10^5 \text{ V/m}$$
$$E = |\vec{E}| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = 1{,}78 \cdot 10^5 \text{ V/m} .$$

c) Il lavoro compiuto da una forza costante $\vec{F}$ che sposta il suo punto di applicazione di una quantità $\Delta\vec{r}$ è dato dal prodotto scalare

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}\,, \qquad \Delta\vec{r} = (8{,}5\,,\,0{,}0) \cdot 10^{-4}\ \text{m}\,.$$

Il prodotto scalare si può calcolare in due modi:

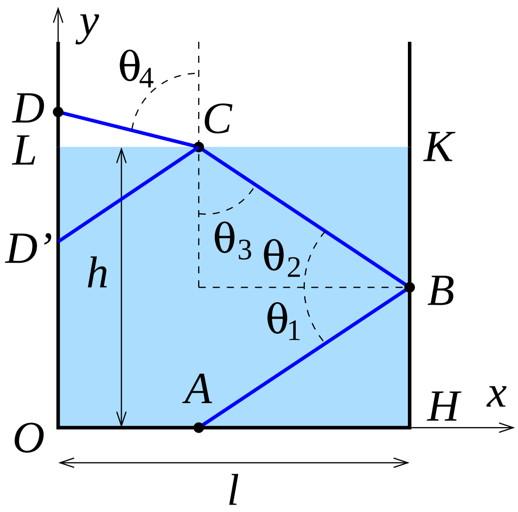
1.
$$\vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F|\Delta\vec{r}|\cos\theta$$
ove θ è l'angolo tra i due vettori $\vec{F}$ e $\Delta\vec{r}$. Siccome $\Delta\vec{r}$ è concorde all'asse x (verso destra nel testo), allora θ è l'angolo che $\vec{F}$ forma con l'asse x, e si ha
$$\cos\theta = \frac{F_x}{F} = 0{,}895$$
$$\Longrightarrow \qquad W = 2{,}03 \cdot 10^{-3}\ \text{J}\,.$$

2.
$$\vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F_x\Delta r_x + F_y\Delta r_y = F_x\Delta r_x = 2{,}03 \cdot 10^{-3}\ \text{J}\,.$$

d) La variazione di potenziale tra due punti è, per definizione, il rapporto tra il lavoro svolto dal campo elettrico per spostare una carica tra i due punti e la carica stessa, cambiato di segno. Applicando la definizione al lavoro svolto dal campo per spostare la carica q_C abbiamo

$$\Delta V = -\frac{W}{q_C} = 135\ \text{V}\,.$$

Esercizio 5



a) Nel punto B avviene una riflessione, per cui $\theta_1 = \theta_2$, sicché i triangoli rettangoli AHB e CKB sono simili. In realtà tali triangoli sono congruenti, in quanto $BH = h/2 = KB$. Pertanto $CK = AH$, e quindi $x_C = x_A$. In conclusione

$$x_C = l/2 = 20{,}0 \text{ cm} \;, \qquad y_C = h = 30{,}0 \text{ cm} \;.$$

b) In C avviene una rifrazione. L'angolo di incidenza è θ_3, e si può ricavare osservando che

$$CK = KB\,\tan\theta_3 \qquad \Longrightarrow \qquad \tan\theta_3 = \frac{l/2}{h/2} = \frac{4}{3} \qquad \Longrightarrow \qquad \theta_3 = 0.927295 \text{ rad} \;.$$

Applicando la legge di Snell si calcola l'angolo di rifrazione θ_4:

$$n_1 \sin\theta_3 = n_2 \sin\theta_4 \qquad \Longrightarrow \qquad \sin\theta_4 = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_3 = 0{,}98018 \qquad \Longrightarrow \qquad \theta_4 = 1{,}37137 \text{ rad}$$

da cui ricaviamo

$$LD\tan\theta_4 = LC \qquad \Longrightarrow \qquad LD = \frac{l/2}{\tan\theta_4} = 4{,}04 \text{ cm}$$

e quindi

$$x_D = 0{,}0 \text{ cm} \;, \qquad y_D = h + LD = 34{,}0 \text{ cm} \;.$$

c) Affinché avvenga la riflessione totale in C bisogna che la formula di Snell dia un seno dell'angolo di rifrazione maggiore o uguale ad 1:

$$\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_3 \geq 1 \qquad \Longrightarrow \qquad n_2 \leq n_1 \sin\theta_3 = 1{,}088 \;.$$

d) Poiché in C c'è riflessione, il raggio va a finire nel punto D' al di sotto della superficie del liquido. I triangoli retti CKB e CLD' sono simili, ma siccome $CK = l/2 = LC$ tali triangoli sono anche congruenti. Ne segue che $LD' = KB = h/2$ e quindi

$$x_{D'} = 0{,}0 \text{ cm} \;, \qquad y_{D'} = h - h/2 = h/2 = 15{,}0 \text{ cm} \;.$$