UNIVERSITA' DI FIRENZE
CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA
PROVA SCRITTA PRELIMINARE “A DISTANZA”
PER L'ESAME DI “MATEMATICA DISCRETA E LOGICA” - 20200903

Avvertenze
Tutte le pagine devono essere progressivamente e ordinatamente numerate con i numeri naturali da 1 a n.
All'inizio di *ogni pagina* devono essere indicati: il nome e il cognome del candidato (in questo ordine) e il numero di matricola del candidato.
Il voto dell'elaborato risulterà dalla somma dei punteggi conseguiti nello svolgimento dei singoli esercizi diminuita di k punti, con $0 \leq k \leq 3$ dipendente da quante delle precedenti indicazioni non sono state rispettate.
Il candidato è tenuto a ***scrivere in modo chiaro e accompagnare i passaggi di ciascun esercizio con brevi spiegazioni***: in caso contrario, l'esercizio verrà considerato ***non svolto***.

Questo compito è formato da 5 esercizi disposti su due pagine.

Esercizio 1 (7 *punti*)

Si dica, motivando la risposta, quanti sono i numeri naturali minori di un milione nella cui scrittura in base dieci

(i) compaiono tutte le cifre $1, 2, 3$ e 4 ciascuna una sola volta (ed eventualmente anche altre cifre) (2 *punti*);

(ii) compaiono soltanto le cifre $1, 2, 3$ e 4, non necessariamente tutte, eventualmente ripetute e comunque disposte in ordine crescente (3 *punti*);

(iii) non compare nessuna delle cifre $1, 2, 3$ e 4 (2 *punti*).

Esercizio 2 (6 *punti*)

Si dimostri che per ogni $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

$$\left(\sum_{i=0}^{n} i\right)^2 = \sum_{j=0}^{n} j^3 .$$

Esercizio 3 (6 *punti*)

Per ciascuna delle seguenti affermazioni si dica se è vera (dimostrandolo) oppure è falsa (esibendo un controesempio):

(a) Se 45 oggetti vengono distribuiti fra dieci scatole, dopo la distribuzione ci sono almeno due scatole che contengono lo stesso numero di oggetti.

(b) Comunque si scelgano 5 punti in un triangolo equilatero di lato 2, fra essi ve ne sono almeno 2 la cui distanza non è superiore a 1 .

(c) Per ogni permutazione

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix}$$

dell'insieme $\mathcal{I} := \{1, 2, \ldots, 9\}$, il prodotto

$$(a_1 - 1)(a_2 - 2)(a_3 - 3)(a_4 - 4)(a_5 - 5)(a_6 - 6)(a_7 - 7)(a_8 - 8)(a_9 - 9)$$

è pari.

Esercizio 4 (7 *punti*)

Sia $\mathcal{G}$ un grafo connesso senza orientamento disegnato nel piano senza sovrapposizione di lati con dieci vertici (dei quali cinque hanno grado 2, uno ha grado 4 e i rimanenti hanno tutti lo stesso grado g_0) e cinque facce (tutte, tranne una, col bordo formato da cinque lati).
Si dica, motivando la risposta,

- qual è il valore di g_0 (2 *punti*) ;
- se $\mathcal{G}$ è euleriano (1 *punto*) ;
- se $\mathcal{G}$ è hamiltoniano (4 *punti*) .

Esercizio 5 (4 *punti*)

Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio della logica dei predicati con un simbolo di costante (c) e due simboli di predicato unari (P, Q). Sia x una variabile individuale di $\mathcal{L}$.

Si stabilisca, motivando la risposta, se in $\mathcal{L}$

$$(\forall x)\neg \mathrm{P}(x) \wedge (\exists x)\mathrm{P}(x) \vDash \mathrm{Q}(c) \wedge \neg \mathrm{Q}(c)\,.$$