Soluzioni dei problemi della prova scritta di fisica per tecnologie alimentari del 10/09/2020

Esercizio 1

a) Il pacco si muove di moto parabolico. Infatti, trascurando l'attrito dell'aria, l'unica forza che agisce sul pacco dopo il lancio è la forza di gravità, diretta verso il basso. Quindi il moto si scompone in una componente orizzontale, non soggetta a forze, quindi rettilinea uniforme, ed una componente verticale uniformemente accelerata.

Siccome la componente verticale della velocità del pacco è nulla al momento del lancio, il moto verticale del pacco corrisponde ad una caduta libera con partenza da fermo, per cui il tempo di caduta vale

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 7{,}14 \text{ s} ,$$

ove $g = 9{,}81 \text{ m/s}^2$ è l'accelerazione di gravità ed $h = 4750 \text{ m} - 4500 \text{ m} = 250 \text{ m}$ è la distanza verticale percorsa.

Più in dettaglio, se orientiamo un sistema di riferimento con l'asse x orizzontale nella direzione di moto dell'aereo e con l'asse y verticale verso l'alto, abbiamo le seguenti equazioni del moto per il pacco:

$$\begin{cases} x &= x_0 + v_{0x}t \\ y &= y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}at^2 \end{cases}$$
$$v_{0x} = v = 70 \text{ m/s}$$
$$v_{0y} = 0 \text{ m/s}$$
$$a = -g = -9{,}81 \text{ m/s}^2 .$$

Possiamo scegliere $x_0 = 0$ al momento del lancio, $y = 0$ il livello del mare, e quindi

$$y_0 = 4750 \text{ m} , \qquad y = 4500 \text{ m} .$$

L'equazione in y diventa

$$y - y_0 = -\frac{1}{2}gt^2 \quad \Longrightarrow \quad h = y_0 - y = \frac{1}{2}gt^2$$

la quale, risolta per t, dà il risultato scritto prima.

b) L'aereo si muove di moto rettilineo uniforme in direzione x con velocità v, quindi l'equazione del moto dell'aereo è la stessa della componente x del pacco:

$$x = x_0 + vt ,$$

pertanto l'aereo ed il pacco condividono la stessa coordinata $x(t)$, ossia si trovano l'uno sulla stessa verticale dell'altro. Di conseguenza, l'aereo raggiunge il punto C nell'istante in cui il pacco raggiunge il punto B, quindi dopo un tempo $t = 7{,}14$ s.

c) Il triangolo ACB è rettangolo per costruzione, quindi si ha

$$\begin{aligned}
\tan\alpha &= \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \\
\overline{BC} &= h = 250 \text{ m} \\
\overline{AC} &= x - x_0 = vt = 500 \text{ m} \\
\alpha &= \tan^{-1}\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = 0{,}464 \text{ rad} = 26.6° \ .
\end{aligned}$$

d) Non essendoci attriti, vale la conservazione dell'energia meccanica:

$$\begin{aligned}
K_i + U_i &= K_f + U_f \\
K_i &= \frac{1}{2}mv_i^2 \ , \quad v_i = v \\
K_F &= \frac{1}{2}mv_f^2 \\
U_i &= mgy_0 \\
U_f &= mgy \\
\Longrightarrow \quad K_f &= K_i + U_i - U_f = \frac{1}{2}mv^2 + mgh = 1{,}57 \cdot 10^5 \text{ J} \\
\Longrightarrow \quad v_f &= \sqrt{\frac{2K_i}{m}} = 99{,}0 \text{ m/s} = 356 \text{ km/h} \ .
\end{aligned}$$

e) Siccome sia la traiettoria dell'aereo che il terreno in cima alla montagna sono orizzontali, il tempo di caduta è sempre $t = 7{,}14$ s anche se il pacco viene lanciato un attimo prima o un attimo dopo il punto A. Siccome la coordinata x del luogo di atterraggio dipende dalla coordinata x_0 del luogo di lancio dalla già scritta equazione

$$x = x_0 + vt$$

una variazione Δx_0 sul luogo di lancio corrisponde alla stessa variazione Δx sul luogo di atterraggio. Siccome x può variare di un $\Delta x = 38$ m, il pilota deve sganciare il pacco entro una "finestra spaziale" larga $\Delta x_0 = 38$ m, distanza che percorre in un tempo

$$\Delta t_0 = \frac{\Delta x_0}{v} = 0{,}54 \text{ s} \ .$$

Esercizio 2

a) L'asta è un corpo rigido, quindi è in equilibrio statico quando la somma delle forze agenti è nulla e quando la somma dei momenti delle forze è nulla. Le forze che agiscono sull'asta sono:

   - Forza del gancio sul fulcro $\vec{F}_F$ diretta verso l'alto;
   - Forza peso del piatto e dell'oggetto da misurare, applicata nel punto A, $\vec{F}_A$ diretta verso il basso;
   - Forza peso di m_1, $\vec{F}_1$ diretta verso il basso;
   - Forza peso di m_2, $\vec{F}_2$ diretta verso il basso.

   Siccome tutte le forze sono verticali, indichiamo solamente la loro componente verticale, con asse y diretto verso il basso.

   Il bilancio delle forze è garantito dal gancio, che sul fulcro applica una forza

$$F_F = -(F_A + F_1 + F_2) \ .$$

   Il bilancio dei momenti conviene farlo prendendo come punto di riduzione il fulcro F, che corrisponde al centro di rotazione dell'asta.

   - Il momento di F_F è nullo, in quanto il braccio di questa forza è zero.
   - Il momento di F_A vale $\tau_A = d(F_P + F_X) = d(m_P + m_X)g$.
   - Il momento di F_1 vale $-x_1 F_1 = -x_1 m_1 g$, in cui il segno negativo deriva dal fatto che F_1 tende a far ruotare l'asta in senso orario (negativo).
   - Il momento di F_2 vale $-x_2 F_2 = -x_2 m_2 g$, anch'esso negativo.

   All'equilibrio statico

$$\tau_A + \tau_1 + \tau_2 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad d(m_P + m_X) = x_1 m_1 + x_2 m_2 \ .$$

   Nella prima domanda sono noti tutti i dati eccetto m_X. Risolvendo l'ultima equazione per m_X troviamo

$$m_X = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{d} - m_p = 612 \text{ g} \ .$$

b) Noti $m_X = 0$ e $x_1 = 50$ mm, bisogna regolare x_2 per raggiungere l'equilibrio. Risolviamo quindi l'equazione di equilibrio rispetto ad x_2:

$$x_2 = \frac{d(m_P + m_X) - x_1 m_1}{m_2} = \frac{d m_P - x_1 m_1}{m_2} = 250 \text{ mm} \ .$$

   Questa è la posizione minima di m_2 (prima tacca verde).

c) Un aumento di $\Delta m_X = 100$ g della massa X corrisponde ad un aumento del momento τ_A pari a $\Delta\tau_A = d\,\Delta m_X\,g$. La domanda ci chiede di quanto bisogna spostare la massa m_1 affinché si mantenga l'equilibrio statico. Questo spostamento Δx_1 deve essere tale da provocare una variazione di momento $\Delta\tau_1 = -\Delta x_1\,m_1 g$ uguale ed opposta a $\Delta\tau_A$. Quindi

$$\Delta\tau_A = -\Delta\tau_1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad d\,\Delta m_X = \Delta x_1 m_1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Delta x_1 = \frac{d\,\Delta m_X}{m_1} = 24 \text{ mm} ,$$

che rappresenta la distanza tra due tacche rosse consecutive.

d) Si procede come al punto c), fissando x_1 e spostando x_2:

$$\Delta\tau_A = -\Delta\tau_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad d\,\Delta m_X = \Delta x_2 m_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Delta x_2 = \frac{d\,\Delta m_X}{m_2} = 15 \text{ mm} ,$$

ove si è inserito il dato $\Delta m_X = 10$ g.

Esercizio 3

a) Nella prima fase di mescolamento si assume che il sistema non scambi calore con l'ambiente, quindi gli scambi di calore avvengono solo tra i 3 componenti: tazza, tè, latte. Indichiamo con Q_0, Q_1 e Q_2 il calore assorbito da tazza, tè e latte rispettivamente, e con T_f la temperatura finale di equilibrio. Si ha

$$\begin{aligned} Q_0 &= C_0(T_f - T_0) \\ Q_1 &= C_1(T_f - T_1) \qquad C_1 = m_1c_1 = 628\ \text{J/°C} \quad \text{capacità termica del tè} \\ Q_2 &= C_2(T_f - T_2) \qquad C_2 = m_2c_2 = 201\ \text{J/°C} \quad \text{capacità termica del latte .} \end{aligned}$$

Il calore totale assorbito dal sistema è $Q_0 + Q_1 + Q_2 = 0$ perché come abbiamo detto il sistema è isolato. Abbiamo così 4 equazioni in 4 incognite: Q_0, Q_1, Q_2 e T_f, che possiamo risolvere in vari modi, per esempio con il metodo di sostituzione:

$$Q_0 = -(Q_1 + Q_2) \quad \Longrightarrow \begin{cases} -(Q_1 + Q_2) &= C_0(T_f - T_0) \\ Q_1 &= C_1(T_f - T_1) \\ Q_2 &= C_2(T_f - T_2)\ . \end{cases}$$

Possiamo ricavare Q_1 e Q_2 in funzione di T_f nelle ultime due equazioni e sostituirle nella prima, oppure possiamo più semplicemente sommare le tre equazioni ottenendo

$$\begin{aligned} 0 &= (C_0 + C_1 + C_2)T_f - (C_0T_0 + C_1T_1 + C_2T_2) \\ T_f &= \frac{C_0T_0 + C_1T_1 + C_2T_2}{C_0 + C_1 + C_2} = 63{,}8\ \text{°C}\ . \end{aligned}$$

In altre parole, la temperatura finale è data dalla media pesata delle temperature, dove i pesi sono le capacità termiche dei costituenti del sistema.

b) Ora si considera il sistema che scambia calore con l'ambiente. Siccome l'ambiente è più freddo ($T_a = 20$ °C), il sistema cede calore all'ambiente. Il calore ceduto per unità di tempo (potenza termica) è dato dalla formula

$$p = \frac{Q}{t} = \rho\frac{A(T_f - T_a)}{s} = 241\ \text{W}\ .$$

Quindi in $t = 3$ s (nei quali si assume che il sistema non cambi molto la sua temperatura) si ha

$$Q = p\,t = 723\ \text{J}\ .$$

c) Nel passaggio da $T_f = 63{,}8$ °C a $T'_f = 45$ °C, il sistema cede una quantità di calore pari alla sua capacità termica totale, moltiplicata per la variazione di temperatura:

$$Q' = (C_0 + C_1 + C_2)(T_f - T'_f) = 1{,}77 \cdot 10^4\ \text{J}\ .$$

Se lo scambio di calore avviene con una potenza media

$$\bar{p} = 90\%\,p = 217\ \text{W}\ ,$$

il tempo che occorre per questa trasformazione è

$$t' = \frac{Q'}{\bar{p}} = 81{,}5\ \text{s}\ .$$

Esercizio 4

a) Poiché gli elettroni devono essere accelerati verso destra, la forza deve essere orientata verso destra, ma siccome gli elettroni sono carichi negativamente, il campo elettrico deve essere orientato verso sinistra:

$$q = -e < 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{F} = q\vec{E} = -e\vec{E} \ .$$

Pertanto l'armatura da caricare positivamente è quella a destra (U) mentre T va caricata negativamente. Questo significa che l'armatura di destra si trova ad un potenziale maggiore rispetto all'armatura di sinistra, ossia che la differenza di potenziale V data nel testo rappresenta $V_U - V_T$.

Il campo elettrico all'interno di un condensatore a facce piane e parallele è uniforme, ed il suo modulo vale $E = V/d = 2{,}63 \cdot 10^5$ V/m. Come già detto, è diretto verso destra.

b) Ogni elettrone è accelerato dalla forza del campo elettrico. Il lavoro svolto dal campo elettrico sull'elettrone che si muove dall'armatura T all'armatura U è dato da

$$L = q\,(V_T - V_U) = (-e)(-V) = 4{,}00 \cdot 10^{-16}\ \text{J} \ .$$

Per la conservazione dell'energia, questo lavoro è uguale all'energia cinetica acquistata dall'elettrone (in quanto parte da fermo, ossia con energia cinetica iniziale uguale a zero):

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = L \quad \Longrightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2L}{m}} = 2{,}96 \cdot 10^7\ \text{m/s} \ .$$

c) Tra le armature del condensatore c'è il vuoto. Quindi si ha

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} = 4{,}19 \cdot 10^{-12}\ \text{F} = 4{,}19\ \text{pF} \ .$$

d) La forza di Lorentz magnetica è perpendicolare alla velocità, quindi il moto dell'elettrone è un moto circolare uniforme, in cui la forza centripeta è data proprio dalla forza di Lorentz:

$$m\frac{v^2}{R} = |q|vB \quad \Longrightarrow \quad R = \frac{mv}{eB} = 29{,}1\ \text{mm} \ .$$

e) L'arco di circonferenza percorso dall'elettrone sottende un'angolo α tale che (vedi figura)

$$l = R\sin\alpha \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{l}{R}\right) = 0.758\ \text{rad} = 43{,}4^\circ \ .$$

Quindi il suo spostamento verticale all'interno del campo magnetico vale

$$h_1 = R(1 - \cos\alpha) = 7{,}97\ \text{mm} \ .$$

Lo spostamento verticale al di fuori del campo magnetico vale

$$h_2 = s\tan\alpha = 246\ \text{mm} \ .$$

Sommando i due spostamenti,

$$h = h_1 + h_2 = 254\ \text{mm} \ .$$

Esercizio 5

a) La distanza q dell'immagine reale prodotta dalla lente si ricava dalla formula delle lenti

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f} \qquad \Longrightarrow \qquad q=\frac{1}{\frac{1}{f}-\frac{1}{p}}=\frac{pf}{p-f}=1{,}64 \text{ m};.$$

Nota: l'errore relativo sulle misure di f e p vale circa 0,0002, ed è uguale all'errore relativo di $1/f$ e $1/p$. Quindi l'errore assoluto di $1/f \simeq 1/p \simeq 25$ m^{-1} vale 0,005. Siccome $1/f - 1/p = 0{,}610$ m^{-1}, l'errore relativo di $1/q$ (e quindi anche quello di q) vale circa 0,01 (ossia 1%). Quindi q va riportato con al più 3 cifre significative.

b) L'ingrandimento dell'immagine vale

$$m=\frac{q}{p}=40{,}0\ .$$

Nota: anche m ha una precisione dell'1% e va riportato con al più 3 cifre significative.

c) L'immagine reale prodotta da una lente convergente con l'oggetto ad una distanza $p > f$ è rovesciata. Quindi la diapositiva va messa a testa in giù .

d) Se aumentiamo l'ingrandimento del 50% significa che il nuovo ingrandimento è

$$m' = m(1+0.5) = 60{,}0\ .$$

Abbiamo quindi il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{1}{p'}+\dfrac{1}{q'}=\dfrac{1}{f} \\ \dfrac{q'}{p'}=m' \end{cases}$$

nelle incognite p' e q'. Dalla seconda ricaviamo $q' = m'p'$ che sostituita nella prima dà

$$\begin{aligned} & \frac{1}{f}=\frac{1}{p'}+\frac{1}{m'p'}=\frac{1}{p'}\left(1+\frac{1}{m'}\right)=\frac{1}{p'}\frac{m'+1}{m'} \\ \Longrightarrow \qquad & p'=f\frac{m'+1}{m'}=40{,}67 \text{ mm} \\ & q'=m'p'=2{,}44 \text{ m}\ . \end{aligned}$$

Quindi bisogna spostare lo schermo di $\Delta q = q' - q = 0{,}80$ m e la lente (rispetto alla diapositiva) di $\Delta p = p' - p = -0{,}33$ mm.