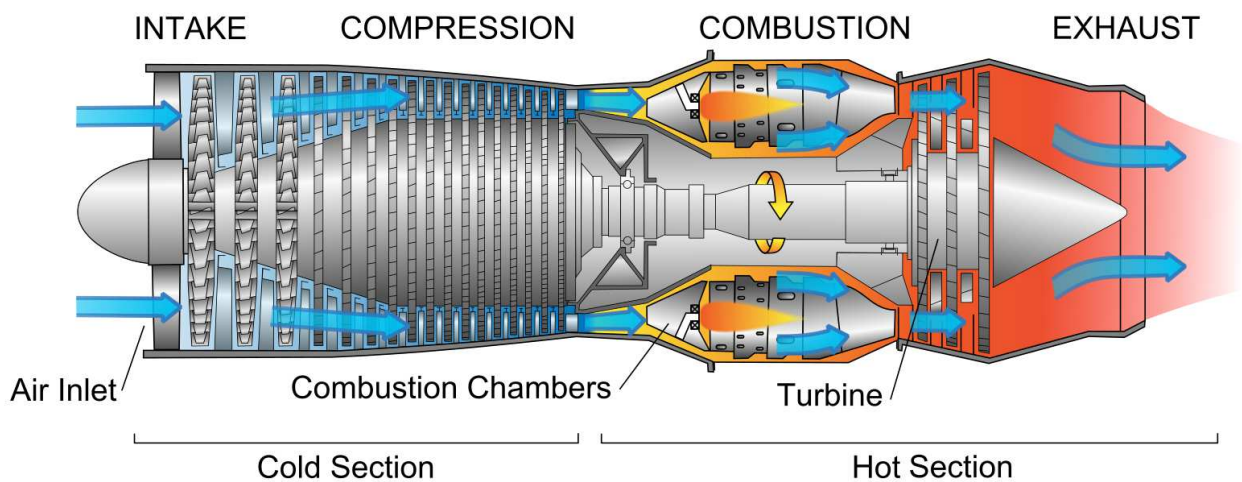


# Dispense del corso di Dinamica dei Rotori



Prof. Enrico Meli

Dipartimento di Ingegneria Industriale

Università di Firenze

# INDICE

1.	Richiami sui sistemi meccanici LTI .....	5
1.1	Sistemi meccanici LTI a 1 DOF .....	5
1.2	Sistemi meccanici LTI a N DOF .....	8
1.3	Trasformata di Laplace e applicazione ai sistemi meccanici LTI.....	14
1.4	Serie di Fourier e applicazione ai sistemi meccanici LTI .....	21
1.5	Trasformata di Fourier e applicazione ai sistemi meccanici LTI .....	21
2.	Vibrazioni flessionali libere: rotori rigidi.....	31
2.1	Equazioni di moto (approccio Newtoniano).....	32
2.2	Diagrammi di Campbell, whirl libero, classificazione modale e mappa modale.....	36
3.	Vibrazioni flessionali forzate: rotori rigidi .....	43
3.1	Classificazione delle forzanti .....	43
3.2	Diagrammi di Campbell, diagrammi di Bode e whirl forzato .....	45
3.3	Effetto della gravità .....	73
4.	Vibrazioni flessionali libere: rotori elastici 1D .....	75
4.1	Equazioni di moto (approccio Lagrangiano).....	76
4.2	Elementi concentrati .....	79
4.3	Elementi elastici (trave di Eulero - Bernoulli) .....	80
4.4	Elementi elastici (trave di Timoshenko) .....	84
4.5	Assemblaggio delle equazioni .....	87
4.6	Trattazione semplificata dello smorzamento di materiale .....	89
4.7	Diagrammi di Campbell, whirl libero, classificazione modale e mappa modale.....	90
5.	Cuscini oleodinamici .....	99
5.1	Modellazione tramite le equazioni di Navier – Stokes.....	100
5.2	Modellazione semplificata con l'equazione di Reynolds.....	103
5.3	Modellazione KC a parametri concentrati e coefficienti di cuscano .....	108
6.	Vibrazioni flessionali forzate: rotori elastici 1D.....	110
6.1	Classificazione delle forzanti .....	110
6.2	Diagrammi di Campbell, diagrammi di Bode e whirl forzato .....	112
6.3	Effetto della gravità .....	156
7.	Vibrazioni torsionali: rotori elastici 1D .....	159
7.1	Equazioni di moto (approccio Lagrangiano).....	160
7.2	Elementi concentrati .....	162
7.3	Elementi elastici.....	162
7.4	Assemblaggio delle equazioni .....	164
7.5	Trattazione semplificata dello smorzamento di materiale .....	166

7.6	Cuscini oleodinamici .....	167
7.7	Vibrazioni libere: diagrammi di Campbell, classificazione modale e mappa modale .....	169
7.8	Vibrazioni forzate: classificazione delle forzanti, diagrammi di Campbell e diagrammi di Bode..	174
8.	Vibrazioni assiali: rotori elastici 1D.....	200
8.1	Equazioni di moto (approccio Lagrangiano).....	201
8.2	Elementi concentrati .....	203
8.3	Elementi elastici.....	203
8.4	Assemblaggio delle equazioni .....	205
8.5	Trattazione semplificata dello smorzamento di materiale .....	206
8.6	Cuscini oleodinamici.....	207
8.7	Vibrazioni libere: diagrammi di Campbell, classificazione modale e mappa modale .....	209
8.8	Vibrazioni forzate: classificazione delle forzanti, diagrammi di Campbell e diagrammi di Bode..	214
9.	Modellazione di componenti complessi 3D e interazione fluido-struttura .....	242
9.1	Teorema del trasporto.....	243
9.2	Equazione di Cauchy e leggi di conservazione .....	245
9.3	Conservazione della massa.....	246
9.4	Conservazione della quantità di moto.....	246
9.5	Conservazione dell'energia .....	248
9.6	Condizioni iniziali, condizioni al bordo e condizioni di accoppiamento .....	249
10.	Modellazione di rotori elastici complessi 3D e delle forzanti di fluido .....	251
10.1	Equazioni di moto (approccio Lagrangiano).....	251
10.2	Elementi concentrati .....	255
10.3	Elementi elastici.....	257
10.4	Assemblaggio delle equazioni .....	260
10.5	Cuscini oleodinamici.....	262
10.6	Trattazione semplificata dello smorzamento di materiale .....	265
10.7	Forzanti di fluido.....	266
10.8	Vibrazioni libere: diagrammi di Campbell, whirl libero, classificazione modale e mappa modale	268
10.9	Vibrazioni forzate: classificazione delle forzanti, diagrammi di Campbell, diagrammi di Bode e whirl forzato .....	277
10.10	Effetto della gravità .....	324
11.	Ottimizzazione strutturale.....	327
11.1	La varie fasi del "processo" .....	327
11.2	Ottimizzazione topologica strutturale.....	329
11.3	Ottimizzazione topologica termo - strutturale.....	331
11.4	Ottimizzazione topologica fluido - (termo - )strutturale .....	333

12.	Bilanciamento.....	338
12.1	Metodo dei coefficienti di influenza (ICM).....	338
12.2	Bilanciamento modale (MB).....	344
13.	Principali normative e siti utili.....	352
14.	Bibliografia.....	353

## 1. RICHIAMI SUI SISTEMI MECCANICI LTI



Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)!

### 1.1 Sistemi meccanici LTI a 1 DOF

Un sistema meccanico (secondo ordine) a 1 DOF (un grado di libertà) LTI (piccoli spostamenti e parametri costanti) è descritto da un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti (tempo invariante):

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t). \quad (1.1.1)$$

Scrivendo tale equazione in termini di parametri adimensionali si ha:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = \frac{f(t)}{m} \quad (1.1.2)$$

dove

$\omega_n^2 = \frac{k}{m}$  è la pulsazione naturale del sistema e  $\zeta \rightarrow 2\zeta\omega_n = \frac{c}{m}$  è lo smorzamento critico del sistema.

Un'importante teorema dell'analisi dice che la soluzione di un'equazione differenziale lineare tempo invariante non omogenea è composta da due parti:

$$x(t) = x_o(t) + x_{no}(t) \quad (1.1.3)$$

in cui  $x_o(t)$  è la soluzione generale dell'equazione omogenea associata (contenente le condizioni iniziali  $x(t_o) = x_o$  e  $\dot{x}(t_o) = v_o$ , e associata al moto libero del sistema e al suo "moto transitorio") mentre  $x_{no}(t)$  è la soluzione particolare dell'equazione non omogenea (contenente la forzante  $f(t)$  e associata al moto forzato del sistema e al suo "moto a regime o permanente").

## SOLUZIONE GENERALE DELL'EQUAZIONE OMOGENEA ASSOCIATA $x_o(t)$

L'equazione omogenea associata

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0 \quad (1.1.4)$$

può essere risolta cercando una soluzione di test del tipo  $x = x_0e^{st}$  (con  $s$  e  $x_0$  parametri complessi) e sostituendo:

$$s^2x_0e^{st} + 2\zeta\omega_n sx_0e^{st} + \omega_n^2x_0e^{st} = 0 \quad (1.1.5)$$

in cui per ottenere soluzioni non banali dovrò avere (polinomio caratteristico)

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (1.1.6)$$

Risolvendo il polinomio caratteristico nei vari casi si ha:

CASO  $|\zeta| > 1$

$$s_{1;2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (1.1.7)$$

$$x_o(t) = ae^{s_1 t} + be^{s_2 t} \quad (1.1.8)$$

con  $a$  e  $b$  costanti reali da determinarsi con le condizioni iniziali.

CASO  $|\zeta| < 1$

$$s_{1;2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_p \quad (1.1.9)$$

con  $\omega_p$  pulsazione propria del sistema e

$$x_o(t) = x_0e^{s_1 t} + \bar{x}_0e^{s_2 t}, \quad x_0 = a + jb \quad (1.1.10)$$

$$x_o(t) = Ce^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_p t + \phi) \quad (1.1.11)$$

con  $C = \sqrt{a^2 + b^2}$  e  $\tan\phi = b/a$  da determinarsi in base alle condizioni iniziali.

CASO  $|\zeta| = 1$

$$s_1 = s_2 = -\omega_n (\zeta = 1), \quad s_1 = s_2 = \omega_n (\zeta = -1), \quad \omega_p = 0 \quad (1.1.12)$$

$$x_o(t) = (a + bt)e^{-\omega_n t} \quad \text{o} \quad x_o(t) = (a + bt)e^{\omega_n t}. \quad (1.1.13)$$

## SOLUZIONE PARTICOLARE DELL'EQUAZIONE NON OMOGENEA $x_{no}(t)$

Dobbiamo dunque trovare una soluzione particolare dell'equazione:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = \frac{f(t)}{m} \quad (1.1.14)$$

A questo punto conviene cominciare a classificare le forzanti del sistema:

FORZANTI ARMONICHE:

$$f = |f_0| \cos(\omega t + \varphi_{f_0}) = \operatorname{Re}(f_0 e^{j\omega t}) = \operatorname{Re}(|f_0| e^{j(\varphi_{f_0} + \omega t)}) \quad (1.1.15)$$

con  $f_0$  parametro complesso noto (contente modulo e fase della forzante) e  $\omega$  pulsazione della forzante.

Sfruttando il fatto che un sistema meccanico LTI, se forzato in modo armonico a una certa frequenza, risponde in modo armonico alla stessa frequenza con modulo e fase differente (si veda la dimostrazione di questo importante fatto alla fine del paragrafo 1.5 sulla trasformata di Fourier), andiamo a cercare una soluzione di test del tipo

$$x_{no}(t) = \operatorname{Re}[x_0 e^{j\omega t}], \quad x_0 = |x_0| e^{j\varphi_{x_0}} \quad (1.1.16)$$

$$\operatorname{Re}[(-\omega^2 + 2\zeta\omega_n\omega j + \omega_n^2) x_{0st} e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}\left[\frac{f_0}{m} e^{j\omega t}\right] \quad (1.1.17)$$

$$(-\omega^2 + 2\zeta\omega_n\omega j + \omega_n^2) x_0 = \frac{f_0}{m} e^{j\omega t} \quad (1.1.18)$$

$$x_0 = \alpha(\omega) f_0 = \frac{\frac{1}{m}}{-\omega^2 + 2\zeta\omega_n\omega j + \omega_n^2} f_0 \quad (1.1.19)$$

dove  $\alpha(\omega)$  è la funzione di trasferimento del sistema (ricettanza). La soluzione nel dominio del tempo sarà dunque  $x_{no}(t) = \operatorname{Re}[x_0 e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[\alpha(\omega) f_0 e^{j\omega t}]$ . La ricettanza ci dice dunque come il sistema lineare modifica l'input (la forza) per produrre l'output (lo spostamento):

$$x_0 = \alpha(\omega) f_0 \rightarrow |x_0| e^{j\varphi_{x_0}} = |\alpha(\omega)| e^{j\varphi_{\alpha(\omega)}} |f_0| e^{j\varphi_{f_0}} = |\alpha(\omega)| \cdot |f_0| \cdot e^{j(\varphi_{\alpha(\omega)} + \varphi_{f_0})}. \quad (1.1.20)$$

Anche in questo caso la soluzione della non omogenea può essere scritta come

$$x_{no}(t) = C |f_0| \cos(\omega t + \phi + \varphi_{f_0}) \quad (1.1.21)$$

$$C = |\alpha(\omega)| = \frac{1/(m\omega_n^2)}{\sqrt{(1-r^2)^2 - (2\zeta r)^2}}, \quad \tan\phi = \tan\varphi_{\alpha(\omega)} = \frac{2\zeta r}{1-r^2}, \quad r = \omega/\omega_n. \quad (1.1.22)$$

FORZANTI PERIODICHE:

In questo caso la forzante è una generica funzione periodica  $f(t)$  di periodo di  $T$  e pulsazione principale  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ .

Possiamo dunque scomporre la forzante in serie di Fourier, ovvero in tanti input armonici elementari:

$$f(t) = \operatorname{Re}\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{j\omega_0 n t}\right], \quad c_n = a_n - j b_n \quad (1.1.23)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \omega_0 n t \, dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \omega_0 n t \, dt$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \, dt, \quad b_0 = 0.$$

Usando il principio di sovrapposizione degli effetti, la soluzione dell'equazione non omogenea sarà dunque la combinazione dei corrispondenti output armonici elementari:

$$x_{no}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n(t) = \text{Re}(\sum_{n=0}^{\infty} [\alpha(n\omega_0) c_n e^{j\omega_0 n t}]), \quad x_n(t) = \text{Re}[\alpha(n\omega_0) c_n e^{j\omega_0 n t}]. \quad (1.1.24)$$

FORZANTI GENERICHE:

In questa circostanza la forzante è una generica funzione  $f(t)$ . Un primo metodo per determinare la soluzione dell'equazione non omogenea fa uso del teorema di variazione delle costanti di Lagrange. Si va dunque a cercare una soluzione del tipo:

$$x_{no}(t) = C_1(t)e^{s_1 t} + C_2(t)e^{s_2 t}, \quad x_1 = e^{s_1 t}, \quad x_2 = e^{s_2 t} \quad (1.1.25)$$

dove le funzioni  $C_1(t)$  e  $C_2(t)$  possono essere calcolate risolvendo il sistema lineare

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{f(t)}{m} \end{pmatrix} \quad (1.1.26)$$

e prendendo una qualunque delle primitive di  $C_1'$  e  $C_2'$  (integrando cioè nel tempo per trovare  $C_1(t)$  e  $C_2(t)$ ).

Il secondo metodo fa invece uso del teorema di Duhamel:

$$x_{no}(t) = \int_0^t f(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (1.1.27)$$

dove  $h$  è la funzione di risposta all'impulso (funzione di Duhamel)

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_p} e^{-\zeta\omega_p t} \sin \omega_p t. \quad (1.1.28)$$

## 1.2 Sistemi meccanici LTI a N DOF

Un sistema meccanico (secondo ordine) a N DOF (N un grado di libertà) LTI (piccoli spostamenti e parametri costanti) è descritto da un sistema di equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti (tempo invariante):

$$M\ddot{\underline{q}} + H\dot{\underline{q}} + K\underline{q} = \underline{Q}(t) \quad (1.2.1)$$

dove la matrice di massa  $M$  è reale, simmetrica e definita positiva mentre le matrici di rigidità e "smorzamento"  $K$  ed  $H$  sono reali ma non hanno in generale particolari proprietà (per la presenza nel sistema di elementi non simmetrici come i cuscini).

Un importante teorema dell'analisi dice che la soluzione di un'equazione differenziale lineare tempo invariante non omogenea è composta da due parti:

$$\underline{q}(t) = \underline{q}_o(t) + \underline{q}_{no}(t) \quad (1.2.2)$$

in cui  $\underline{q}_o(t)$  è la soluzione generale dell'equazione omogenea associata (contenente le condizioni iniziali  $\underline{q}(t_0) = \underline{q}_o$  e  $\dot{\underline{q}}(t_0) = \underline{v}_o$ , e associata al moto libero del sistema e al suo "moto transitorio") mentre  $\underline{q}_{no}(t)$  è la soluzione particolare dell'equazione non omogenea (contenente la forzante  $\underline{f}(t)$  e associata al moto forzato del sistema e al suo "moto a regime o permanente").



## SOLUZIONE GENERALE DELL'EQUAZIONE OMOGENEA ASSOCIATA $\underline{q}_0(t)$

L'equazione omogenea associata

$$M\underline{\ddot{q}} + H\underline{\dot{q}} + K\underline{q} = \underline{0} \quad \underline{q} \in R^N \quad (1.2.3)$$

può essere risolta cercando una soluzione di test del tipo  $\underline{q} = \underline{q}_0 e^{st}$  (con  $s$  e  $\underline{q}_0$  parametri complessi) e sostituendo:

$$Ms^2 \underline{q}_0 e^{st} + Hs \underline{q}_0 e^{st} + K \omega_n^2 \underline{q}_0 e^{st} = \underline{0} \quad (1.2.4)$$

$$[Ms^2 + Hs + K] \underline{q}_0 = \underline{0} \quad (1.2.5)$$

in cui per ottenere soluzioni non banali dovrò avere (polinomio caratteristico)

$$\det[Ms^2 + Hs + K] = 0 \quad (1.2.6)$$

Risolvendo tale equazione polinomiale di grado  $2N$ , otterrò  $2N$  soluzioni  $s_k$  con  $k = 1 \dots 2N$ , ovvero gli autovalori del problema. D'ora in poi per semplicità supporremo che tali autovalori siano distinti tra loro per garantire l'esistenza della base di autovettori. Gli autovalori consistono in coppie della forma

$$s_{i,i+N} = -\zeta_i \omega_{ni} \pm j \omega_{ni} \sqrt{1 - \zeta_i^2} = -\zeta_i \omega_{ni} \pm j \omega_{pi} \quad i = 1 \dots N \quad (1.2.7)$$

dove  $\omega_{ni}$  e  $\omega_{pi}$  sono le pulsazioni naturale e propria dell'autovalore mentre  $\zeta_i$  è il suo smorzamento adimensionale. Sostituendo poi nella (1.2.5) si trovano quindi i rispettivi autovettori:  $\underline{q}_{0k}$  con  $k = 1 \dots 2N$ . L'unica debole proprietà di autovalori e autovettori è quella di formare coppie complesse coniugate:

$$s_{i+N} = \bar{s}_i, \quad \underline{q}_{0i+N} = \overline{\underline{q}_{0i}}, \quad i = 1 \dots N. \quad (1.2.8)$$

In virtù della linearità del problema la soluzione sarà allora la combinazione lineare di tutte le soluzioni elementari appena trovate, ovvero:

$$\underline{q}_0(t) = \sum_{k=1}^{2N} c_k \underline{q}_{0k} e^{s_k t} \quad (1.2.9).$$

In cui le costanti della combinazione sono tali che  $c_{i+N} = \bar{c}_i$  e dovranno essere trovate imponendo le condizioni iniziali  $\underline{q}(t_0) = \underline{q}_0$  e  $\underline{\dot{q}}(t_0) = \underline{v}_0$ .

Nel seguito analizzeremo nel dettaglio i modi di vibrare del sistema, ovvero  $Re[\underline{q}_{0k} e^{s_k t}]$ . La pulsazione propria  $\omega_{pi}$  determina l'oscillazione del modo di vibrare, lo smorzamento adimensionale  $\zeta_i$  il suo smorzamento modale e l'autovettore  $\underline{q}_{0k}$  la sua deformata modale. Nel caso di  $|\zeta_i| < 1$  si parla di modo oscillante mentre nel caso  $|\zeta_i| >$

1 si parla di modo sovrasmorzato  $s_{i,i+N} = -\zeta_i \omega_{ni} \pm \omega_{ni} \sqrt{\zeta_i^2 - 1} = -\zeta_i \omega_{ni} \pm \omega_{pi}$ .

Vale la pena infine sottolineare il significato della matrice  $H$ . Tale matrice può essere scomposta nella sua parte simmetrica e antisimmetrica:  $H = H_S + H_A$ . La parte simmetrica è responsabile delle smorzamento modale  $|\zeta_i|$ . In altre parole se tale parte simmetrica di  $H$  è assente si ha  $|\zeta_i| = 0$  mentre la parte antisimmetrica di  $H$  non contribuisce. Di conseguenza se  $H_S = 0$  (e anche se  $H = 0$ ) si avrà  $s_{i,i+N} = \pm j \omega_{ni}$ ,  $\omega_{pi} = \omega_{ni}$  con  $i = 1 \dots N$ . La

matrice  $H_A$  è spesso dovuta a effetti centrifughi e di Coriolis che non dissipano energia e non producono quindi smorzamento effettivo.

### SOLUZIONE PARTICOLARE DELL'EQUAZIONE NON OMOGENEA $\underline{q}_{no}(t)$

Dobbiamo dunque trovare una soluzione particolare dell'equazione:

$$M\underline{\ddot{q}} + H\underline{\dot{q}} + K\underline{q} = \underline{Q}(t) \quad (1.2.10)$$

A questo punto conviene nuovamente cominciare a classificare le forzanti del sistema:

FORZANTI ARMONICHE:

$$\underline{Q}(t) = Re \left( \underline{Q}_0 e^{j\omega t} \right) \quad (1.2.11)$$

con  $\underline{Q}_0$  vettore di parametri complessi noto (contente moduli e fasi delle componenti della forzante) e  $\omega$  pulsazione della forzante.

Sfruttando il fatto che un sistema meccanico LTI, se forzato in modo armonico a una certa frequenza, risponde in modo armonico alla stessa frequenza con modulo e fase differente (si veda la dimostrazione di questo importante fatto alla fine del paragrafo 1.5 sulla trasformata di Fourier), andiamo a cercare una soluzione di test del tipo

$$\underline{q}_{no}(t) = Re \left[ \underline{q}_0 e^{j\omega t} \right] \quad (1.2.12)$$

$$Re \left[ (-\omega^2 M + \omega j H + K) \underline{q}_0 e^{j\omega t} \right] = Re \left[ \underline{Q}_0 e^{j\omega t} \right] \quad (1.2.13)$$

$$(-\omega^2 M + \omega j H + K) \underline{q}_0 = \underline{Q}_0 \quad (1.2.14)$$

$$\underline{q}_0 = \alpha(\omega) \underline{Q}_0 = (-\omega^2 M + \omega j H + K)^{-1} \underline{Q}_0 \quad (1.2.15)$$

dove la matrice  $\alpha(\omega)$  è la funzione di trasferimento del sistema (ricettanza). La soluzione nel dominio del tempo sarà dunque  $\underline{q}_{no}(t) = Re \left[ \underline{q}_0 e^{j\omega t} \right] = Re \left[ \alpha(\omega) \underline{Q}_0 e^{j\omega t} \right]$ .

La matrice di ricettanza ci dice dunque come il sistema lineare modifica l'input (la forza) per produrre l'output (lo spostamento). Per capire bene tale effetto è opportuno introdurre il teorema di sovrapposizione modale. A tal scopo occorre definire gli autovettori destri e sinistri del problema:

$$\begin{cases} \underline{q}_{Lk}^H (M s_k^2 + H s_k + K) = \underline{0}^T \\ (M s_k^2 + H s_k + K) \underline{q}_{Rk} = \underline{0} \end{cases} \quad k = 1 \dots 2N. \quad (1.2.16)$$

Tali autovettori coincideranno solamente nel caso in cui il sistema sia simmetrico (matrici  $H$  e  $K$  simmetriche). Il teorema di sovrapposizione modale (si veda l'interessante dimostrazione alla fine della sezione), nell'ipotesi di autovalori distinti, permette di scomporre la matrice di ricettanza nel seguente modo:

$$\alpha(\omega) = \sum_{k=1}^{2N} \frac{(q_{Rk} q_{Lk}^H)}{j\omega - s_k} \quad (1.2.17)$$

In realtà nella pratica non occorre sommare tutti i contributi elementari che compongono  $\alpha(\omega)$  ma è sufficiente considerare solamente i contributi associati agli autovalori  $s_k$  che hanno pulsazione propria  $\omega_{pk}$  all'interno del

range di frequenze di interesse (range operativo della macchina). Il teorema di sovrapposizione modale non è solo importante perché consente un calcolo più agevole della ricettanza  $\alpha(\omega)$  ma anche perché evidenzia come il sistema modifica l'input per generare l'output. Si ha infatti:

$$\underline{q}_o = \alpha(\omega)\underline{Q}_o = \sum_{k=1}^{2N} \frac{(q_{Rk} q_{Lk}^H)}{j\omega - s_k} \underline{Q}_o = \sum_{k=1}^{2N} \left( \frac{q_{Lk}^H \underline{Q}_o}{j\omega - s_k} \right) \underline{q}_{Rk}. \quad (1.2.18)$$

Risulta quindi evidente come la soluzione  $\underline{q}_o$  sia di nuovo una combinazione degli autovettori  $\underline{q}_{Lk}$ . I coefficienti della combinazione (tra parentesi) permettono di capire quali autovettori contribuiscano maggiormente alla soluzione. Il coefficiente è infatti grande se il denominatore è piccolo, ovvero se la pulsazione della forzante  $\omega$  è vicina alla pulsazione propria del sistema  $\omega_{pk}$  (o, come vedremo, se siamo in condizione di risonanza), e se il numeratore è grande, ovvero se  $q_{Lk}^H \underline{Q}_o$  è grande, ovvero se il carico è allineato a uno degli autovettori.

FORZANTI PERIODICHE:

In questo caso la forzante è una generica funzione periodica  $\underline{Q}(t)$  di periodo di  $T$  e pulsazione principale  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ . Possiamo dunque scomporre la forzante in serie di Fourier, ovvero in tanti input armonici elementari:

$$\underline{Q}(t) = Re\left[\sum_{k=0}^{\infty} \underline{c}_k e^{j\omega_0 kt}\right], \quad \underline{c}_k = \underline{a}_k - j\underline{b}_k \quad (1.2.19)$$

$$\underline{a}_k = \frac{2}{T} \int_0^T \underline{Q}(t) \cos k\omega_0 t \, dt$$

$$\underline{b}_k = \frac{2}{T} \int_0^T \underline{Q}(t) \sin k\omega_0 t \, dt$$

$$\underline{a}_0 = \frac{1}{T} \int_0^T \underline{Q}(t) \, dt, \quad \underline{b}_0 = \underline{0}.$$

Usando il principio di sovrapposizione degli effetti, la soluzione dell'equazione non omogenea sarà dunque la combinazione dei corrispondenti output armonici elementari:

$$\underline{q}_{no}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \underline{q}_k(t) = Re\left(\sum_{k=0}^{\infty} [\alpha(k\omega_0) \underline{c}_k e^{j\omega_0 kt}]\right), \quad \underline{q}_k(t) = Re[\alpha(k\omega_0) \underline{c}_k e^{j\omega_0 kt}]. \quad (1.2.20)$$

Anche in questo circostanza valgono considerazioni analoghe al caso precedente se usiamo il teorema di sovrapposizione modale sulla generica armonica della soluzione:

$$\underline{q}_i(t) = Re[\alpha(i\omega_0) \underline{c}_i e^{j\omega_0 it}] = Re\left[\sum_{k=1}^{2N} \frac{(q_{Rk} q_{Lk}^H)}{j\omega_0 i - s_k} \underline{c}_i e^{j\omega_0 it}\right] = Re\left[\sum_{k=1}^{2N} \left(\frac{q_{Lk}^H \underline{c}_i}{\omega_0 i - s_k}\right) \underline{q}_{Rk} e^{j\omega_0 it}\right].$$

FORZANTI GENERICHE:

In questa circostanza la forzante è una generica funzione vettoriale  $\underline{Q}(t)$ . In seguito affronteremo questo caso con la trasformata di Laplace e con quella di Fourier. Per adesso lo risolveremo direttamente nel dominio del tempo. A tal fine conviene porre il sistema in forma di stato introducendo il vettore

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} \underline{q} \\ \dot{\underline{q}} \end{pmatrix} \in R^{2N} \quad (1.2.21)$$

e riscrivendo la (1.2.10) come

$$\begin{pmatrix} H & M \\ M & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q(t) \\ \underline{0} \end{pmatrix} \quad (1.2.22)$$

$$A\underline{\dot{x}} + B\underline{x} = \underline{\tilde{Q}}(t) \quad (1.2.23)$$

$$\underline{\dot{x}} = C\underline{x} + \underline{d}(t), \quad \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0. \quad (1.2.24)$$

Per risolvere tale sistema conviene introdurre la matrice esponenziale di una generica matrice  $A$ , ovvero:

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}. \quad (1.2.25)$$

La derivata temporale di tale matrice è facilmente calcolabile come  $(e^{At})' = A e^{At} = e^{At} A$  mentre la sua inversa è  $e^{-At}$ . Se inoltre esiste una base di autovettori per  $A$  (fatto garantito dal supporre gli autovalori distinti), la matrice esponenziale è anche facilmente calcolabile a partire da autovalori e autovettori di  $A$ :

$$AV = V\lambda, \quad (1.2.26)$$

$$\lambda = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \lambda_i & \\ & & \ddots \end{bmatrix}, \quad V = [\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{2N}]$$

$$, A = V\lambda V^{-1}, \quad A^k = V\lambda^k V^{-1}$$

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{V\lambda^k V^{-1} t^k}{k!}$$

$$e^{At} = V \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k t^k}{k!} \right] V^{-1} = V e^{\lambda t} V^{-1}, \quad e^{\lambda t} = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & e^{\lambda_i t} & \\ & & \ddots \end{bmatrix}.$$

Usando la matrice esponenziale la soluzione completa della (1.2.24) è facilmente scrivibile come:

$$\underline{x}(t) = \underline{x}_o(t) + \underline{x}_{no}(t) = e^{C(t-t_0)} \underline{x}_0 + e^{C(t-t_0)} \left[ \int_{t_0}^t e^{-C(\tau-t_0)} \underline{d}(\tau) d\tau \right]. \quad (1.2.27)$$

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DI SOVRAPPOSIZIONE MODALE (per autovalori distinti):

Il sistema meccanico

$$M\underline{\ddot{q}} + H\underline{\dot{q}} + K\underline{q} = \underline{0} \quad (1.2.27)$$

produce i problemi agli autovalori (destri e sinistri)

$$\begin{cases} \underline{q}_{Lk}^H (M S_k^2 + H S_k + K) = \underline{0}^T \\ (M S_k^2 + H S_k + K) \underline{q}_{Rk} = \underline{0} \end{cases} \quad k = 1 \dots 2N \quad (1.2.28)$$

mentre il sistema meccanico

$$\begin{pmatrix} H & M \\ M & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \underline{0}, \quad A\underline{\dot{x}} + B\underline{x} = \underline{0}, \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix} \in R^{2N} \quad (1.2.29)$$

produce i problemi agli autovalori (destri e sinistri)

$$\begin{cases} \underline{x}_{Lk}^H (A s_k + B) = \underline{0}^T \\ (A s_k + B) \underline{x}_{Rk} = \underline{0} \end{cases} \quad k = 1 \dots 2N. \quad (1.2.30)$$

I due insiemi di autovalori sono legati dalle relazioni:

$$\underline{x}_{Rk} = \begin{pmatrix} q_{Rk} \\ s q_{Rk} \end{pmatrix}, \quad \underline{x}_{RLk} = \begin{pmatrix} q_{RLk} \\ s q_{RLk} \end{pmatrix} \quad (1.2.31)$$

come è facilmente verificabile sostituendo le (1.2.31) nelle (1.2.30) è ottenendo le (1.2.28) (si usino a tal scopo le (1.2.29)).

Dalle (1.2.30) si ottiene

$$\begin{aligned} \underline{x}_{Lj}^H (A s_k + B) \underline{x}_{Rk} &= 0 \\ \underline{x}_{Lk}^H (A s_j + B) \underline{x}_{Rj} &= 0 \\ \underline{x}_{Lk}^H (A s_k + B) \underline{x}_{Rj} &= 0 \\ \underline{x}_{Lj}^H (A s_j + B) \underline{x}_{Rk} &= 0. \end{aligned} \quad (1.2.32)$$

Per sottrazione, dalla prima e quarta e dalla seconda e terza di queste equazioni si ha:

$$\underline{x}_{Lj}^H A \underline{x}_{Rk} (s_k - s_j) = 0 \quad \text{o, equivalentemente,} \quad \underline{x}_{Lk}^H A \underline{x}_{Rj} (s_j - s_k) = 0. \quad (1.2.33)$$

Essendo gli autovalori distinti, questo vuol dire

$$\underline{x}_{Lj}^H A \underline{x}_{Rk} = 0 \quad \text{per } j \text{ diverso da } k. \quad (1.2.33)$$

Normalizzando opportunamente gli autovettori in modo che  $\underline{x}_{Lk}^H A \underline{x}_{Rk} = 1$ , si ottiene

$$\underline{x}_{Lj}^H A \underline{x}_{Rk} = \delta_{jk}, \quad \underline{x}_{Lj}^H B \underline{x}_{Rk} = -s_k \delta_{jk}. \quad (1.2.34)$$

Se a questo punto introduco le matrici modali destre e sinistre, posso scrivere:

$$S = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & s_k & \\ & & \ddots \end{bmatrix}, \quad V_R = [\underline{x}_{R1}, \dots, \underline{x}_{R2N}], \quad V_L = [\underline{x}_{L1}, \dots, \underline{x}_{L2N}] \quad (1.2.35)$$

e ottengo

$$V_L^H A V_R = I, \quad V_L^H B V_R = -S. \quad (1.2.36)$$

Ricordando ora che la funzione di trasferimento associata al problema  $A \dot{\underline{x}} + B \underline{x} = \tilde{Q}$  è

$$\beta(\omega) = (A j\omega + B)^{-1}, \quad \beta(\omega)^{-1} = (A j\omega + B), \quad (1.2.37)$$

si ha

$$\begin{aligned} V_L^H \beta(\omega)^{-1} V_R &= (j\omega I - S) \\ \beta(\omega)^{-1} &= V_L^{-H} (j\omega I - S) V_R^{-1} \\ \beta(\omega) &= V_R (j\omega I - S)^{-1} V_L^H \end{aligned} \quad (1.2.38)$$

ovvero

$$\beta(\omega) = \sum_{k=1}^{2N} \frac{(x_{Rk} \ x_{Lk}^H)}{j\omega - s_k}. \quad (1.2.39)$$

Ricordando infine che per definizione

$$\alpha(\omega) = [I \quad 0] \beta(\omega) \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$$

si arriva all'espressione finale della ricettanza

$$\alpha(\omega) = \sum_{k=1}^{2N} \frac{(q_{Rk} \ q_{Lk}^H)}{j\omega - s_k}. \quad \text{QED} \quad (1.2.40)$$

## 1.3 Trasformata di Laplace e applicazione ai sistemi meccanici LTI

La trasformata di Laplace è un operatore lineare integrale definito come

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{st} dt, \quad f: R \rightarrow R, \quad F: C \rightarrow C \quad (1.3.1)$$

$$\underline{F}(s) = \int_0^{\infty} \underline{f}(t) e^{st} dt, \quad \underline{f}: R \rightarrow R^n, \quad \underline{F}: C \rightarrow C^n. \quad (1.3.2)$$

Elenchiamo ora alcune proprietà di tale trasformata:

1) LINEARITA'

$$L(af_1 + bf_2) = aL(f_1) + bL(f_2) = aF_1 + bF_2 \quad (1.3.3)$$

2) TEOREMA DI DERIVAZIONE (manda funzioni razionali fratte in funzioni razionali fratte)

$$L(f'(t)) = sF(s) - f(0) \quad (1.3.4)$$

$$L(f^n(t)) = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

3) TEOREMA DI INTEGRAZIONE (manda funzioni razionali fratte in funzioni razionali fratte)

$$L\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{s} F(s) \quad (1.3.5)$$

4) TEOREMA DEL RITARDO (non ho più funzioni razionali fratte)

$$L(f(t - \tau)) = e^{-s\tau} F(s) \quad (1.3.6)$$

$$L(f(t)e^{\alpha t}) = F(s - \alpha)$$

5) TEOREMA DEL VALORE INIZIALE / FINALE

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s) \quad (1.3.7)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s)$$

6) TEOREMA DEL PRODOTTO

$$L(f_1(t)f_2(t)) = \frac{1}{2\pi j} \int_{b-j\infty}^{b+j\infty} F_1(s-\sigma)F_2(\sigma) d\sigma \quad (1.3.8)$$

$$L\left[\int_0^\infty f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau\right] = F_1(s)F_2(s)$$

Prima di applicare la trasformata di Laplace ai sistemi meccanici lineari è utile riportare alcuni esempi di trasformata per le funzioni elementari che compongono la soluzione di un sistema di equazioni differenziali LTI:

1) TRASFORMATA DI LAPLACE DI UNA FUNZIONE ESPONENZIALE:  $L|e^{\alpha t}| = \frac{1}{s-\alpha}$  (1.3.9)

2) TRASFORMATA DI LAPLACE DI UNA COSTANTE:  $L(k) = \frac{k}{s}$

3) TRASFORMATA DI LAPLACE DEL SENO:  $L(\sin \omega t) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

4) TRASFORMATA DI LAPLACE DEL COSENO:  $L(\cos \omega t) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$

5) TRASFORMATA DI UN GENERICO MONOMIO:  $L(t^m) = \frac{m!}{s^{m+1}}$

6) TRASFORMATA DI  $L(t^m e^{\alpha t}) = \frac{m!}{(s-\alpha)^{m+1}}$

7) TRASFORMATA DI  $L(t^m \sin \omega t) = (-1)^m \left(\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right)^{(m)}$  (derivata m-esima)

8) TRASFORMATA DI  $L(t^m \cos \omega t) = (-1)^m \left(\frac{s}{s^2+\omega^2}\right)^{(m)}$

9) TRASFORMATA DI  $L(e^{\alpha t} \sin \omega t) = \frac{\omega}{(s-\alpha)^2+\omega^2}$

10) TRASFORMATA DI  $L(e^{\alpha t} \cos \omega t) = \frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\omega^2}$

11) TRASFORMATA DI  $L(e^{\alpha t} t^m \sin \omega t) = (-1)^m \left(\frac{\omega}{(s-\alpha)^2+\omega^2}\right)^{(m)}$

12) TRASFORMATA DI  $L(e^{\alpha t} t^m \cos \omega t) = (-1)^m \left(\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\omega^2}\right)^{(m)}$

13) TRASFORMATA DELLA FUNZIONE GRADINO:  $g(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } t > 0 \\ 0 & \text{per } t < 0 \end{cases} \quad L(g(t)) = \frac{1}{s}$

14) TRASFORMATA DELLA DELTA DI DIRAC:  $\delta(t) = \begin{cases} +\infty & \text{per } t = 0 \\ 0 & \text{per } t \neq 0 \end{cases} \quad L(\delta(t)) = 1$





$$L^{-1} \left[ \frac{A_{ij}}{(s-p_i)^j} \right] = \frac{A_{ij}}{(j-1)!} t^{j-1} e^{p_i t}, \quad j = 1 \dots r_i \quad (1.3.15)$$

$$L^{-1} \left[ \frac{A_{ij}}{(s-\alpha_i-j\omega_i)^j} + \frac{\overline{A_{ij}}}{(s-\alpha_i-j\omega_i)^j} \right] = L^{-1} \left[ (-1)^{j-1} 2 \operatorname{Re}(A_{ij}) \left( \frac{s-\alpha_i}{(s-\alpha_i)^2 + \omega_i^2} \right)^{(j-1)} + \right. \\ \left. (-1)^{j-1} 2 \operatorname{Im}(A_{ij}) \left( \frac{\omega_i}{(s-\alpha_i)^2 + \omega_i^2} \right)^{(j-1)} \right] = e^{\alpha_i t} G_{ij} \cos(\omega_i t + \phi_{ij}) t^{j-1}, \quad j = 1, \dots, r_i$$

con  $G_{ij} = \frac{|A_{ij}|}{j-1!}$  e  $\phi_{ij} = \arg(A_{ij})$ .

Per quanto riguarda infine la funzione complessiva  $f(t)$  si ha infine:

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \sum_{i=1}^{Npr} \sum_{j=1}^{r_i} \frac{A_{ij}}{(j-1)!} t^{j-1} e^{p_i t} + \sum_{i=1}^{Ncpc} \sum_{j=1}^{r_i} e^{\alpha_i t} G_{ij} \cos(\omega_i t + \phi_{ij}) t^{j-1} \quad (1.3.16)$$

con  $Npr + 2Ncpc = n$ .

La soluzione generale del problema (1.3.16) induce già una prima classificazione dei poli  $p_i$  della funzione razionale fratta, a seconda del loro effetto nel dominio del tempo. Si definiscono quindi:

POLI ASINTOTICAMENTE STABILI (PAS)	$\operatorname{Re}[p_i] < 0$
POLI INSTABILI (PI)	$\operatorname{Re}[p_i] > 0$ o $\operatorname{Re}[p_i] = 0, r_i > 1$
POLI SEMPLICEMENTE STABILI O OSCILLANTI (PO)	$\operatorname{Re}[p_i] = 0, r_i = 1$ .

## APPLICAZIONE DELLE TRASFORMATE DI LAPLACE AI SISTEMI MECCANICI LTI

### STABILITA' ALLA LYAPUNOV

Consideriamo il solito sistema meccanico LTI

$$\dot{\underline{x}} = C\underline{x} + \underline{d}(t), \quad \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0. \quad (1.3.17)$$

Il punto di equilibrio di tale sistema esisterà in generale solo per  $\underline{d}(t) = \text{cost}$  e varrà  $\underline{x}_e = C^{-1} \underline{d} = \text{cost}$  (nell'ipotesi di  $C$  invertibile). Chiamiamo infine la soluzione di tale sistema  $\underline{\varphi}(t, \underline{x}_0)$ .

Con riferimento alla Fig. 1.3.1, il punto di equilibrio è detto semplicemente stabile (o oscillante) se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \underline{x}_0 \in \mathcal{B}(\underline{x}_e, \delta) \Rightarrow \underline{\varphi}(t, \underline{x}_0) \in \mathcal{B}(\underline{x}_e, \varepsilon) \text{ per ogni } t \geq 0. \quad (1.3.18)$$

Il punto di equilibrio è detto invece asintoticamente stabile se vale la (1.3.18) e inoltre

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{\varphi}(t; \underline{x}_0) = \underline{x}_e. \quad (1.3.19)$$

Il punto di equilibrio è infine detto instabile non valgono né la (1.3.18) né la (1.3.19).

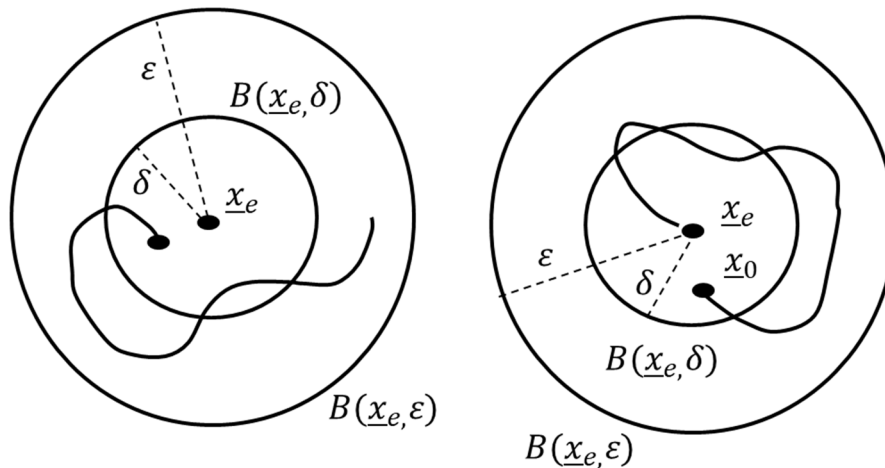


Figura 1 Stabilità semplice e stabilità asintotica

### APPLICAZIONE DELLA TRASFORMATA DI LAPLACE

A questo punto possiamo applicare la trasformata di Laplace al sistema meccanico e trovare in un colpo solo sia la soluzione generale dell'equazione omogenea (risposta libera) sia la soluzione particolare dell'equazione non omogenea (risposta forzata) per forzanti generiche:

$$\dot{\underline{x}} = C\underline{x} + \underline{d}(t), \quad \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 \quad (1.3.20)$$

dove la matrice  $C$  è costante e  $\underline{d}(t)$  sono gli ingressi del sistema, Applicando a entrambi i membri l'operatore di Laplace e sfruttandone la linearità si ottiene:

$$s\underline{x}(s) - \underline{x}_0 = C\underline{x}(s) + \underline{d}(s) \quad (1.3.21)$$

da cui

$$[sI - C]\underline{x}(s) = \underline{x}_0 + \underline{d}(s) \quad (1.3.22)$$

La trasformata di Laplace ha quindi trasformato un sistema di equazioni differenziali lineari in un sistema di equazioni algebriche lineari. Chiamando  $[sI - C] = H$ , si ottiene quindi (se  $H$  è invertibile)

$$\underline{x}(s) = H^{-1}\underline{x}_0 + H^{-1}\underline{u}(s) = \mathcal{A}(s)\underline{x}_0 + \mathcal{A}(s)\underline{u}(s) \quad (1.3.23)$$

Per definizione stessa di inversa di una matrice si ha

$$(\mathcal{A}(s))_{ij} = (H^{-1})_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det(\text{Cof}H_{ij})}{\det H} = \frac{P_{ij}(s)}{\det H(s)} \quad (1.3.24)$$

dove  $\text{Cof}H_{ij}$  è il cofattore dell'elemento  $H_{ij}$ , ovvero quella matrice che si ottiene a partire da  $H$  togliendo l' $i$ -esima riga e la  $j$ -esima colonna. Se ne deduce quindi che tutti gli elementi della matrice  $\mathcal{A}(s)$  sono funzioni razionali fratte avente il polinomio  $\det H(s)$  (di grado  $g_H = 2N$ ) come denominatore (il denominatore è lo stesso per tutti gli elementi, è quindi una proprietà strutturale del sistema) e un polinomio  $P_{ij}(s)$  con numeratore (di grado  $g_H < 2N$ ). I poli di  $(\mathcal{A}(s))_{ij}$  sono quindi le radici  $p_k$  con  $k = 1 \dots 2N$  del polinomio  $\det H(s)$ , ovvero gli autovalori della

matrice  $C$  associata al sistema meccanico  $p_{i,i+N} = -\zeta_i \omega_{ni} \pm j \omega_{ni} \sqrt{1 - \zeta_i^2}$  con  $i = 1 \dots N$ , aventi ognuno una pulsazione naturale  $\omega_{ni}$ , una pulsazione propria  $\omega_{pi}$  e uno smorzamento adimensionale  $\zeta_i$ . Tali radici (i poli del Prof. Enrico Meli, Dipartimento di Ingegneria Industriale, Università di Firenze

sistema) sono quindi uguali per tutti gli elementi di  $\mathcal{A}(s)$  e rappresentano anch'essi una proprietà strutturale del sistema.

Ricordando la regola di Hadamard e le regole di antitrasformazione, possiamo subito intuire come la stabilità del sistema sia determinata dalle caratteristiche dei poli del sistema, a sua volta corrispondenti alle pulsazioni proprie del sistema e ai suoi autovalori (della matrice  $H$ ). Quando faremo la trasformata di Fourier vedremo che essi saranno collegati anche alle pulsazioni di risonanza del sistema, ovvero a quelle pulsazioni in cui il modulo della risposta del sistema è massimo (massima amplificazione).

Antitrasformiamo dunque l'espressione:

$$\underline{x}(s) = H^{-1}\underline{x}_0 + H^{-1}\underline{u}(s) = \mathcal{A}(s)\underline{x}_0 + \mathcal{A}(s)\underline{u}(s) \quad (1.3.25)$$

$$x_i(s) = \sum_{j=1}^{2N} \mathcal{A}_{ij}(s)x_{0j} + \sum_{j=1}^{2N} \mathcal{A}_{ij}(s)u_j(s).$$

Essendo l'operatore antitrasformata di Laplace un operatore lineare, si ottiene:

$$x_i(t) = L^{-1}(x_i(s)) = \sum_{j=1}^{2N} L^{-1}[\mathcal{A}_{ij}(s)]x_{0j} + \sum_{j=1}^{2N} L^{-1}[\mathcal{B}_{ij}(s)u_j(s)] \quad (1.3.26)$$

ovvero, approssimando l'input  $u_j(s)$  come una funzione razionale fratta  $u_j(s) = \frac{NU_j(s)}{DU_j(s)}$ ,

$$x_i(t) = L^{-1}(x_i(s)) = \sum_{j=1}^{2N} L^{-1}[\mathcal{A}_{ij}(s)]x_{0j} + \sum_{j=1}^{2N} L^{-1}\left[\mathcal{A}_{ij}(s)\frac{NU_j(s)}{DU_j(s)}\right] \quad (1.3.27)$$

$$x_i(t) = L^{-1}(x_i(s)) = \sum_{j=1}^{2N} L^{-1}\left[\frac{P_{ij}(s)}{\det H(s)}\right]x_{0j} + \sum_{j=1}^{2N} L^{-1}\left[\frac{P_{ij}(s)}{\det H(s)}\frac{NU_j(s)}{DU_j(s)}\right] \quad (1.3.28)$$

La prima parte della soluzione produce la soluzione generale della omogenea associata  $\underline{x}_o(t)$  (dipendente dalle condizioni iniziali  $\underline{x}_0$  e associata alla risposta libera del sistema) mentre la seconda parte è la soluzione particolare della non omogenea  $\underline{x}_{no}(t)$  (dipendente dalla forzante  $\underline{u}$  e associata alla risposta forzata del sistema).

Da un punto di vista formale il sistema di equazioni differenziali LTI è ora completamente risolto perché ogni componente della 1.3.28, costituito da una funzione razionale fratta, può essere facilmente antitrasformato nel dominio tempo usando la regola di Hadamard precedentemente introdotta. Analizzando però più nel dettaglio i poli della soluzione  $\underline{x}(s)$ , essi possono essere divisi tra quelli associati alla risposta libera e quelli relativi alla risposta forzata:

- $\frac{P_{ij}(s)}{\det H(s)}$ : i poli della risposta libera  $\underline{x}_o(t)$  sono gli zeri  $p_i$ ,  $i = 1 \dots 2N$  di  $\det H(s)$  (gli autovalori del problema);
- $\det H(s)$ : i poli della risposta forzata  $\underline{x}_{no}(t)$  sono gli zeri  $p_i$ ,  $i = 1 \dots 2N$  di  $\det H(s)$  e, in più, tutti i poli di tutte le componenti della forzante  $u_j(s)$ , ovvero tutti gli zeri  $q_{jh}$ ,  $h = 1 \dots N_j$ .

I poli  $p_i$  sono detti poli intrinseci del sistema (sono i poli associati alla struttura stessa del sistema) mentre i poli  $q_{jh}$  sono i poli aggiuntivi introdotti dalla forzante.

Considerando infine la definizione di stabilità alla Lyapunov e la definizione di polo semplicemente stabile (oscillante), asintoticamente stabile e instabile, possiamo dedurre il seguente importante risultato per la stabilità dei sistemi meccanici LTI:

SISTEMA MECCANICO  
ASINTOTICAMENTE STABILE

Per tutti i poli vale  $Re p_i < 0, Re q_{jh} < 0$

SISTEMA MECCANICO  
INSTABILE

Per almeno un polo vale  $Re p_i > 0$  o  $Re q_{jh} > 0$

Per almeno un polo vale  $Re p_i = 0, r_i > 1$  o  $Re q_{jh} = 0, r_{jh} > 1$

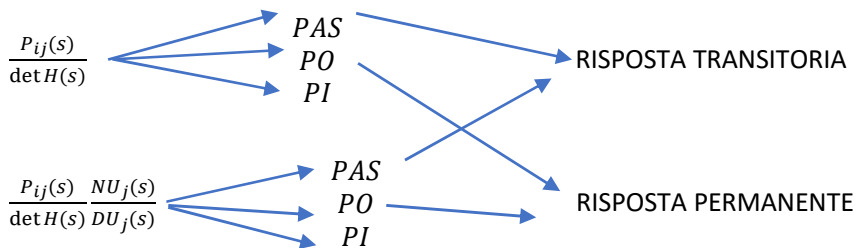
SISTEMA MECCANICO  
SEMPLICEMENTE STABILE

Per tutti i poli vale  $Re p_i \leq 0, Re q_{jh} \leq 0$

Per i poli con  $Re p_i = 0, Re q_{jh} = 0$  devo avere  $r_i = 1, r_{jh} = 1$ .

Se ne deduce a latere che, un sistema intrinsecamente stabile (tutti i poli  $p_i$  del sistema sono semplicemente o asintoticamente stabili) può diventare anche instabile a seguito dell'introduzione dei poli aggiuntivi  $q_{jh}$  associati alla forzante.

E' inoltre utile osservare come, in generale, sia la risposta libera  $\underline{x}_o(t)$  che quella forzata contribuiscano alla soluzione complessiva portando in essa poli semplicemente stabili o oscillanti (PO), poli asintoticamente stabili (PAS) e poli instabili (PI):



Nell'ipotesi in cui non ci siano poli instabili (sistema semplicemente o asintoticamente stabile), i poli asintoticamente stabili della risposta libera e della risposta forzata vanno a comporre la risposta transitoria (o transient) del sistema meccanico (destinata a esaurirsi nel tempo). I poli semplicemente stabili (oscillanti) della risposta libera e della risposta forzata vanno invece a formare la risposta permanente (o steady-state) del sistema meccanico (destinata a permanere nel tempo senza esaurirsi). Di conseguenza la risposta libera (soluzione generale dell'equazione omogenea) e la risposta forzata (soluzione particolare dell'equazione non omogenea) coincidono rispettivamente con la risposta transitoria e la risposta permanente solo nel caso (piuttosto frequente) in cui la risposta libera ha solo poli asintoticamente stabili (PAS) e la risposta forzata ha solo poli semplicemente stabili / oscillanti (PO).

## 1.4 Serie di Fourier e applicazione ai sistemi meccanici LTI

In questo caso la forzante del sistema

$$M\ddot{q} + H\dot{q} + Kq = \underline{Q}(t) \quad (1.4.1)$$

è una generica funzione periodica  $\underline{Q}(t)$  di periodo di  $T$  e pulsazione principale  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ . Possiamo dunque scomporre la forzante in serie di Fourier, ovvero in tanti input armonici elementari:

$$\underline{Q}(t) = \text{Re}[\sum_{k=0}^{\infty} \underline{c}_k e^{j\omega_0 kt}], \quad \underline{c}_k = \underline{a}_k - j\underline{b}_k \quad (1.4.2)$$

$$\underline{a}_k = \frac{2}{T} \int_0^T \underline{Q}(t) \cos k\omega_0 t \, dt$$

$$\underline{b}_k = \frac{2}{T} \int_0^T \underline{Q}(t) \sin k\omega_0 t \, dt$$

$$\underline{a}_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \, dt, \quad \underline{b}_0 = 0.$$

### APPLICAZIONE DELLA SERIE DI FOURIER AI SISTEMI MECCANICI LTI

A questo punto possiamo applicare la serie di Fourier al sistema meccanico e trovare la soluzione particolare dell'equazione non omogenea (risposta forzata) per forzanti periodiche. A tal scopo è sufficiente usare il principio di sovrapposizione degli effetti, proprietà fondamentale dei sistemi meccanici lineari.

Usando il principio di sovrapposizione degli effetti, la soluzione dell'equazione non omogenea sarà dunque la combinazione dei corrispondenti output armonici elementari:

$$\underline{q}_{no}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \underline{q}_k(t) = \text{Re}[\sum_{k=0}^{\infty} [\alpha(k\omega_0) \underline{c}_k e^{j\omega_0 kt}], \quad \underline{q}_k(t) = \text{Re}[\alpha(k\omega_0) \underline{c}_k e^{j\omega_0 kt}]. \quad (1.4.3)$$

Se applichiamo poi il teorema di sovrapposizione modale sulla generica armonica della soluzione, si ha:

$$\underline{q}_i(t) = \text{Re}[\alpha(i\omega_0) \underline{c}_i e^{j\omega_0 it}] = \text{Re} \left[ \sum_{k=1}^{2N} \frac{(q_{Rk} q_{Lk}^H)}{j\omega_0 i - s_k} \underline{c}_i e^{j\omega_0 it} \right] = \text{Re} \left[ \sum_{k=1}^{2N} \left( \frac{q_{Lk}^H \underline{c}_i}{j\omega_0 i - s_k} \right) \underline{q}_{Rk} e^{j\omega_0 it} \right]. \quad (1.4.4)$$

## 1.5 Trasformata di Fourier e applicazione ai sistemi meccanici LTI

La trasformata di Fourier di una funzione (un segnale, una misura, etc.) è definita come

$$F(\omega) = \mathcal{F}u(f(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt, \quad f: R \rightarrow R, \quad F: R \rightarrow C \quad (1.5.1)$$

$$\underline{F}(\omega) = \mathcal{F}u(\underline{f}(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{f}(t) e^{-j\omega t} dt, \quad \underline{f}: R \rightarrow R^n, \quad \underline{F}: R \rightarrow C^n. \quad (1.5.2)$$

Al contrario della trasformata di Laplace, in questo caso anche l'antitrasformata di Fourier è "semplice" da calcolare:

$$f(t) = Fu^{-1}(F(\omega)) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega, \quad f: R \rightarrow R, \quad F: R \rightarrow C \quad (1.5.1)$$

$$\underline{f}(t) = Fu^{-1}(\underline{F}(\omega)) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{F}(\omega)e^{j\omega t} d\omega, \quad \underline{f}: R \rightarrow R^n, \quad \underline{F}: R \rightarrow C^n. \quad (1.5.2)$$

L'interpretazione fisica dell'antitrasformata di Fourier è molto importante. Essa infatti, generalizzando la serie di Fourier, mostra come il segnale  $f(t)$  venga scomposto in una somma infinita non numerabile (un integrale) di singole componenti armoniche elementari  $F(\omega)e^{j\omega t}$ .

Normalmente modulo e fase della funzione  $F(\omega) = |F(\omega)|e^{j\varphi_F(\omega)}$  vengono rappresentati nei cosiddetti diagrammi di Bode (si veda la Fig. 1.5.1). Tali diagrammi normalmente sono logaritmici per praticità.

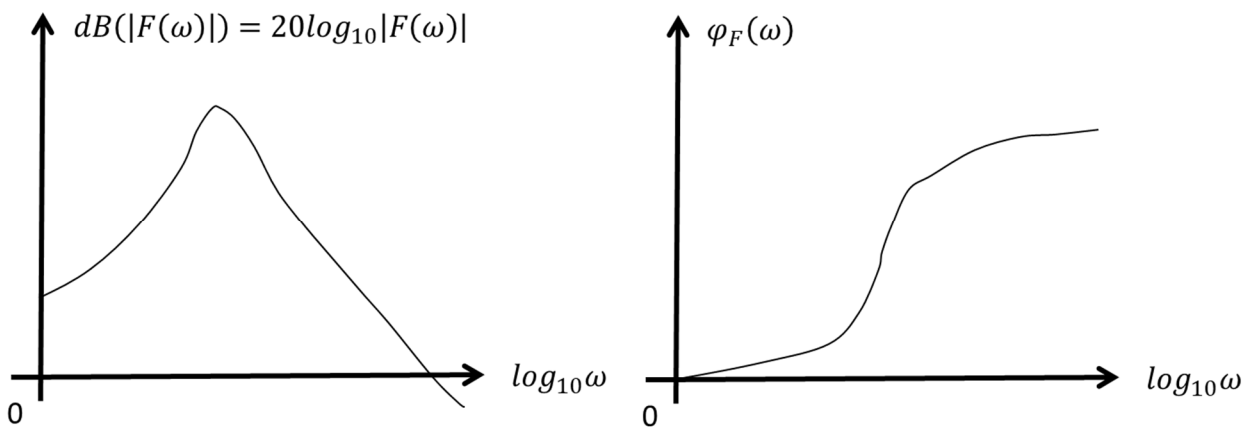


Figura 2 Grafico della funzione F (diagrammi di Bode)

Elenchiamo ora alcune proprietà di tale trasformata:

- 1) LINEARITA'

$$Fu(af_1 + bf_2) = aFu(f_1) + bFu(f_2) = aF_1 + bF_2 \quad (1.5.3)$$

- 2) TEOREMA DI DERIVAZIONE (manda funzioni razionali fratte in funzioni razionali fratte)

$$Fu(f'(t)) = j\omega F(\omega) \quad (1.5.4)$$

$$Fu(f^n(t)) = (j\omega)^n F(\omega)$$

- 3) TEOREMA DI INTEGRAZIONE (manda funzioni razionali fratte in funzioni razionali fratte)

$$Fu\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{j\omega} F(\omega) \quad (1.5.5)$$

4) TEOREMA DEL RITARDO (non ho più funzioni razionali fratte)

$$Fu(f(t - \tau)) = e^{-j\omega\tau} F(\omega) \quad (1.5.6)$$

$$Fu(f(t)e^{j\omega_0 t}) = F(\omega - \omega_0)$$

5) TEOREMA DELLA SCALATURA

$$Fu(f(at)) = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{|a|}\right) \quad (1.5.7)$$

6) TEOREMA DI SIMMETRIA

$$F(-\omega) = \overline{F(\omega)} \quad (1.5.8)$$

$$|F(-\omega)| = |\overline{F(\omega)}| = |F(\omega)| \text{ (il modulo di } F \text{ è una funzione pari)}$$

$$\varphi_F(-\omega) = \varphi_{\overline{F}}(\omega) = -\varphi_F(\omega) \text{ (la fase di } F \text{ è una funzione dispari)}$$

7) TEOREMA DI PARSEVAL

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad (1.5.9)$$

8) TRASFORMATA DI LAPLACE VS TRASFORMATA DI FOURIER

$$F(\omega) = Fu(f(t)) = L(f(t))\big|_{s=j\omega} = F(s)\big|_{s=j\omega} \quad (1.5.10)$$

Tale fatto è vero se  $F(\omega)$  e  $F(s)$  esistono, se il dominio di convergenza di  $F(s)$  contiene l'asse immaginario e se  $f(t) = 0$  per  $t < t_0$  (dove  $t_0$  è un tempo di riferimento iniziale).

## APPLICAZIONE DELLA TRASFORMATA DI FOURIER AI SISTEMI MECCANICI LTI

A questo punto possiamo applicare la serie di Fourier al sistema meccanico e trovare la soluzione particolare dell'equazione non omogenea (risposta forzata) per forzanti generiche:

$$M\ddot{q} + H\dot{q} + Kq = Q(t). \quad (1.5.11)$$

Definiamo intanto la trasformata di Fourier di input e output

$$\underline{\tilde{Q}}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{Q}(t)e^{-j\omega t} dt, \quad \underline{\tilde{q}}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{q}(t)e^{-j\omega t} dt \quad (1.5.12)$$

e applichiamo l'operatore di Fourier alle (1.5.11), ottenendo grazie alla sua linearità e alle proprietà appena descritte:

$$(-\omega^2 M + \omega jH + K)\underline{\tilde{q}}(\omega) = \underline{\tilde{Q}}(\omega) \quad (1.5.13)$$

$$\underline{\tilde{q}}(\omega) = \alpha(\omega)\underline{\tilde{Q}}(\omega) = (-\omega^2 M + \omega j H + K)^{-1} \underline{\tilde{Q}}(\omega). \quad (1.5.14)$$

Si noti che, anche in questo caso, tutti gli elementi della matrice di ricettanza  $\alpha_{ij}(\omega)$  sono funzioni razionali fratte della forma

$$\alpha_{ij}(\omega) = \frac{P_{ij}(\omega)}{\det H(\omega)}, \quad H(\omega) = -\omega^2 M + j\omega H + K. \quad (1.5.15)$$

La risposta forzata nel tempo (soluzione dell'equazione non omogenea) sarà quindi:

$$\underline{q}_{no}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{\tilde{q}}(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(\omega) \underline{\tilde{Q}}(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (1.5.16)$$

Se applichiamo poi il teorema di sovrapposizione modale alla generica componente della risposta  $\underline{\tilde{q}}(\omega) = \alpha(\omega)\underline{\tilde{Q}}(\omega)$ , si ha:

$$\underline{\tilde{q}}(\omega) = \alpha(\omega)\underline{\tilde{Q}}(\omega) = \sum_{k=1}^{2N} \frac{(q_{Rk} q_{Lk}^H)}{j\omega - s_k} \underline{\tilde{Q}}(\omega) = \sum_{k=1}^{2N} \left( \frac{q_{Lk}^H \underline{\tilde{Q}}(\omega)}{j\omega - s_k} \right) \underline{q}_{Rk}.$$

Per capire come il sistema meccanico LTI agisce sull'input (la forza) per produrre l'output (la forze) è utile concentrarsi sul caso monodimensionale:

$$q_{no}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{q}(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(\omega) \tilde{Q}(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (1.5.17)$$

In questo caso si nota come, essendo

$$\tilde{q}(\omega) = |\tilde{q}(\omega)| e^{j\varphi_{\tilde{q}}(\omega)}, \quad \tilde{Q}(\omega) = |\tilde{Q}(\omega)| e^{j\varphi_{\tilde{Q}}(\omega)}, \quad \alpha(\omega) = |\alpha(\omega)| e^{j\varphi_{\alpha}(\omega)}, \quad (1.5.18)$$

la componente armonica elementare dell'output  $\tilde{Q}(\omega)e^{j\omega t}$  associata alla generica pulsazione  $\omega$  viene modificata dal sistema nel seguente modo per produrre la componente armonica elementare dell'input  $\tilde{q}(\omega)e^{j\omega t}$ :

$$\tilde{q}(\omega)e^{j\omega t} = |\tilde{q}(\omega)| e^{j(\varphi_{\tilde{q}}(\omega) + \omega t)} = \alpha(\omega) \tilde{Q}(\omega) e^{j\omega t} = |\alpha(\omega)| |\tilde{Q}(\omega)| e^{j(\varphi_{\alpha}(\omega) + \varphi_{\tilde{Q}}(\omega) + \omega t)}. \quad (1.5.19)$$

Si ha dunque che il sistema meccanico LTI amplifica il modulo dell'input di un fattore  $|\alpha(\omega)|$  e ne sposta la fase di una quantità  $|\alpha(\omega)|$ :

$$|\tilde{q}(\omega)| = |\alpha(\omega)| |\tilde{Q}(\omega)| \quad (1.5.20)$$

$$\varphi_{\tilde{q}}(\omega) = \varphi_{\alpha}(\omega) + \varphi_{\tilde{Q}}(\omega).$$

A livello ingegneristico assume quindi grande importanza il modulo in quando esso rappresenta l'entità delle vibrazioni presenti sulla macchina a una certa pulsazione  $\omega$ .

Cerchiamo ora di capire come si comporta la trasformata di Fourier  $F(\omega) = |F(\omega)| e^{j\varphi_F(\omega)}$  di una funzione  $f(t)$  andando a studiare il suo modulo  $|F(\omega)|$  e la sua fase  $\varphi_F(\omega)$ . A seconda dei nostri scopi, la generica funzione razionale fratta  $F(\omega)$  che studieremo potrà essere una componente della risposta forzata del sistema  $\tilde{q}_i(\omega)$  (spostamento), una componente della forzante esterna  $\tilde{Q}_j(\omega)$ , una componente della matrice di ricettanza  $\alpha_{ij}(\omega)$  o, in generale, la trasformata di Fourier di una qualunque segnale misurato sulla macchina.

Nel caso della forzante  $\tilde{Q}_j(\omega)$  si ha (vedi il capitolo sulla trasformata di Laplace)

$$F(\omega) = \tilde{Q}_j(\omega) = \frac{NQ_j(\omega)}{DQ_j(\omega)}, \quad (1.5.21)$$



nel caso della ricettanza  $\alpha_{ij}(\omega)$  avremo

$$F(\omega) = \alpha_{ij}(\omega) = \frac{P_{ij}(\omega)}{\det H(\omega)}, \quad (1.5.22)$$

mentre nel caso dello spostamento  $\tilde{q}_i(\omega)$  si ha (mettendo a denominator comune):

$$F(\omega) = \tilde{q}_i(\omega) = \sum_{j=1}^N \frac{P_{ij}(\omega)}{\det H(\omega)} \frac{NQ_j(\omega)}{DQ_j(\omega)} = \frac{1}{\det H(\omega)} \frac{R_i(\omega)}{\prod_{j=1}^N DQ_j(\omega)}. \quad (1.5.23)$$

Partiamo quindi considerando la generica funzione razionale fratta espressa nel dominio della variabile  $s$  (ovvero la trasformata di Laplace della nostra funzione  $f(t)$ ):

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = A \frac{\prod_{j=1}^{N_z} (s-z_j)}{\prod_{j=1}^{N_p} (s-p_j)} \quad (1.5.24)$$

dove  $z_i$  e  $p_i$  sono tutti i poli del sistema ed  $A$  è la costante di ampiezza. Anche in questo caso supporremo  $N_z < N_p$ . Mettendo la funzione razionale fratta in forma normale e separando zeri / poli reale da zeri / poli complessi coniugati, si ottiene:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\mu \prod_{i=1}^{N_{zr}} (1+T_i s) \prod_{i=1}^{N_{zc}/2} (s^2/\omega_{nzi}^2 + 2\zeta_{zi}s/\omega_{nzi} + 1)}{s^g \prod_{i=1}^{N_{pr}} (1+\tau_i s) \prod_{i=1}^{N_{pc}/2} (s^2/\omega_{npi}^2 + 2\zeta_{pi}s/\omega_{npi} + 1)} \quad (1.5.25)$$

dove  $\omega_{nzi}$ ,  $\omega_{npi}$ ,  $\zeta_{nzi}$ ,  $\zeta_{npi}$  sono le pulsazioni naturali e gli smorzamenti adimensionali di zeri e poli complessi,  $\tau_i$  e  $T_i$  sono le costanti di tempo di poli e zeri reali,  $\mu$  è il guadagno statico della funzione e il parametro  $g$  conta il numero di zeri e poli presenti nell'origine (nello 0). Conviene inoltre introdurre le pulsazioni proprie associate a zeri e poli  $\omega_{pzi}$ ,  $\omega_{ppi}$ , definite come segue:

- POLI REALI:  $\omega_{ppi} = -1/\tau_i$ ,  $p_i = \omega_{ppi}$
- ZERI REALI:  $\omega_{pzi} = -1/T_i$ ,  $p_i = \omega_{ppi}$
- POLI COMPLESSI:  $\omega_{ppi} = \omega_{npi} \sqrt{1 - \zeta_{pi}^2}$ ,  $p_i, \bar{p}_i = -\zeta_{pi} \omega_{npi} \pm j \omega_{npi} \sqrt{1 - \zeta_{pi}^2} = -\zeta_{pi} \omega_{npi} \pm j \omega_{ppi}$
- ZERI COMPLESSI:  $\omega_{pzi} = \omega_{nzi} \sqrt{1 - \zeta_{zi}^2}$ ,  $z_i, \bar{z}_i = -\zeta_{zi} \omega_{nzi} \pm j \omega_{nzi} \sqrt{1 - \zeta_{zi}^2} = -\zeta_{zi} \omega_{nzi} \pm j \omega_{pzi}$ .

Con riferimento alla nomenclatura introdotta, nel caso in cui  $F(s) = \alpha_{ij}(s)$ , gli autovalori del sistema (corrispondenti ai poli del sistema) saranno dunque  $s_{i,i+N} = -\zeta_{pi} \omega_{npi} \pm j \omega_{npi} \sqrt{1 - \zeta_{pi}^2} = -\zeta_{pi} \omega_{npi} \pm j \omega_{ppi}$ .

Occorre quindi sottolineare nuovamente la stretta corrispondenza, a livello di sistemi meccanici LTI, tra i concetti di autovalore (e quindi auto vettore e modo di vibrare), pulsazione propria, polo della funzione di trasferimento (ricettanza) e, come vedremo tra poco, pulsazioni di risonanza (laddove l'amplificazione della vibrazione dovuta al sistema meccanico è massima).

Possiamo ora finalmente passare nel dominio della frequenza (della pulsazione in realtà) sfruttando direttamente la proprietà:

$$F(\omega) = Fu(f(t)) = L(f(t))|_{s=j\omega} = F(s)|_{s=j\omega} \quad (1.5.26)$$

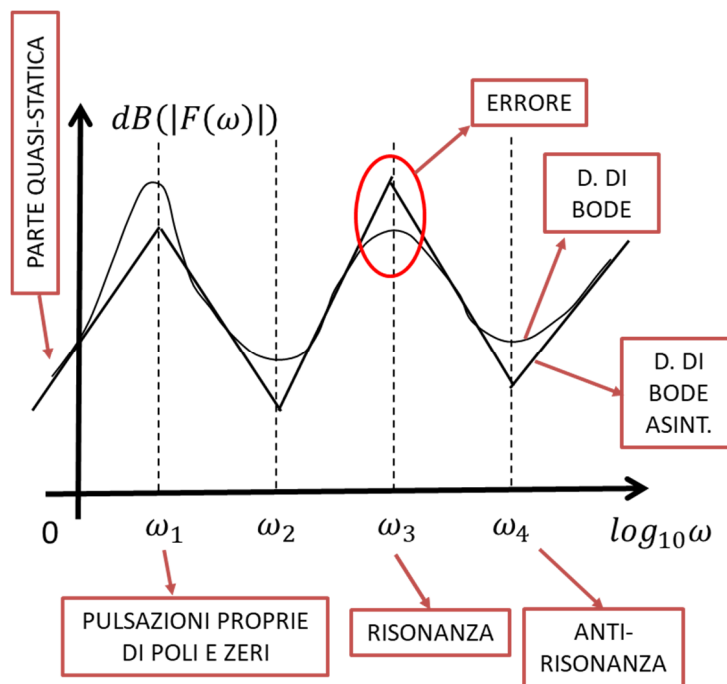
e ottenendo la trasformata di Fourier della nostra funzione  $f(t)$ :

$$F(\omega) = \frac{N(\omega)}{D(\omega)} = \frac{\mu}{(j\omega)^g} \frac{\prod_{i=1}^{N_{zr}} (1 + T_i j\omega) \prod_{i=1}^{N_{zc}/2} (-\omega^2/\omega_{nzi}^2 + 2\zeta_{zi} j\omega/\omega_{nzi} + 1)}{\prod_{i=1}^{N_{pr}} (1 + \tau_i j\omega) \prod_{i=1}^{N_{pc}/2} (-\omega^2/\omega_{npi}^2 + 2\zeta_{pi} j\omega/\omega_{npi} + 1)} \quad (1.5.27)$$

Per fare il grafico della funzione razionale fratta  $F(\omega) = |F(\omega)|e^{j\varphi_F(\omega)}$  faremo uso dei diagrammi di Bode per il modulo  $|F(\omega)|$  e per la fase  $\varphi_F(\omega)$  (si veda la Fig. 2). Il tracciamento dei diagrammi di Bode di  $F(\omega)$  in generale è complicato e richiede l'utilizzo di software numerici. Tuttavia, sotto un'opportuna ipotesi, l'andamento qualitativo di  $|F(\omega)|$  e  $\varphi_F(\omega)$  può essere studiato approssimativamente mediante i diagrammi di Bode asintotici. Tali diagrammi sono costituiti da delle spezzate e, se l'ipotesi di lavoro è ben verificata, tali spezzate ben approssimano il comportamento dei diagrammi veri. Chiaramente, anche se l'ipotesi è verificata, il tracciamento dei diagrammi veri e la valutazione dell'errore commesso usando i diagrammi asintotici richiedono comunque l'utilizzo di software numerici.

L'ipotesi di lavoro dietro l'utilizzo dei diagrammi di Bode asintotici prevede che le pulsazioni proprie associate a zeri e poli  $\omega_{pzi}, \omega_{ppi}$  siano "sufficientemente separate tra loro". Si noti che non stiamo chiedendo che gli zeri e, soprattutto, i poli abbiano molteplicità unitaria (zeri e poli semplici). Sia zeri che poli possono naturalmente essere anche multipli in questo caso.

Prima di tutto devo ordinare in senso crescente le pulsazione proprie di zeri e poli  $\omega_{pzi}, \omega_{ppi}$  ottenendo un'unica sequenza di pulsazioni  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ . Successivamente riporto queste pulsazioni proprie sulle ascisse dei due diagrammi di Bode. (si veda la Fig. 3).



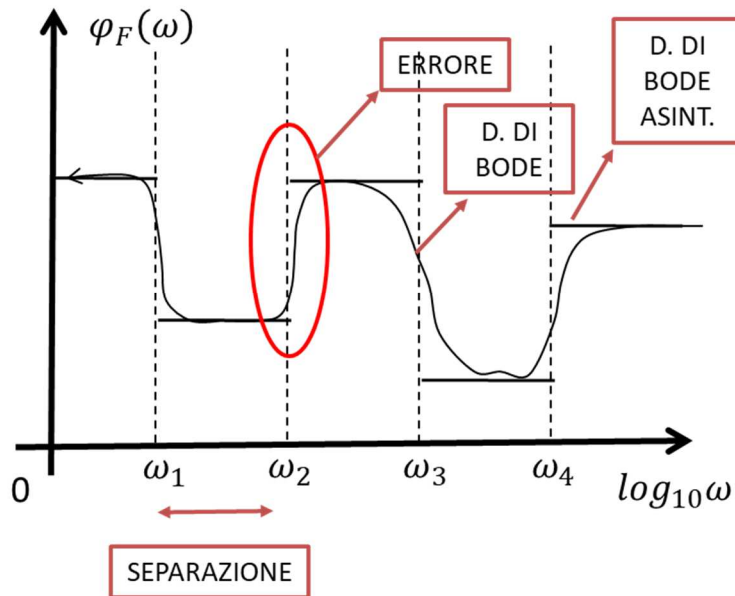


Figura 3 Diagrammi di Bode per il modulo e per la fase

Occorre poi determinare il comportamento quasi-statico (per piccole  $\omega$ ) del grafico di  $|F(\omega)|$  e  $\varphi_F(\omega)$ , ovvero il primo tratto della spezzata che costituisce i due diagrammi di Bode asintotici. Quando il primo tratto di tale spezzata incontra la retta verticale corrispondente alla prima pulsazione propria  $\omega_1$ , comincia il secondo tratto di spezzata (caratterizzato da pendenze diverse) che arriverà fino alla seconda pulsazione propria  $\omega_2$ . Il calcolo delle nuove caratteristiche del secondo tratto di spezzata (la pendenza tra  $\omega_1$  e  $\omega_2$ ) può essere fatto mediante opportune regole che riassumeremo a breve. Il tracciamento della spezzata con pendenza opportuna (e quindi dei diagrammi di Bode asintotici) può quindi proseguire in questo modo fin quando necessario (nell'intervallo tra  $\omega_2$  e  $\omega_3$ , in quello tra  $\omega_3$  e  $\omega_4$  e così via).

Il calcolo dell'andamento quasi-statico di  $|F(\omega)|$  e  $\varphi_F(\omega)$  (e quindi della relativa pendenza) può essere facilmente effettuato con la (1.5.27) supponendo che  $\omega$  sia piccolo (prossimo a 0):

$$F(\omega) = \frac{\mu}{(j\omega)^g} \quad (1.5.28)$$

$$|F(\omega)| = \frac{|\mu|}{|\omega|^g}$$

$$dB(|F(\omega)|) = 20 \log_{10}|F(\omega)| = 20 \log_{10}|k| - 20g \log_{10} \omega$$

$$\varphi_F(\omega) = \varphi_\mu - g \frac{\pi}{2}. \quad (1.5.29)$$

Le regole per il calcolo della pendenza negli intervalli successivi al primo (tra  $\omega_2$  e  $\omega_3$ , in quello tra  $\omega_3$  e  $\omega_4$  e così via) sono riassunte nella seguenti tabelle (Tab. 1 e Tab. 2).

ZERO REALE	<i>cambiamento pendenza: + 20 dB/dec</i>	per la relativa molteplicità
POLO REALE	-20 dB/dec	"
ZERO COMPLESSO CONIUGATO	+40 dB/dec	"
POLO COMPLESSO CONIUGATO	-40 dB/dec	"
ZERO NELL'ORIGINE	+20 dB/dec	"
POLO NELL'ORIGINE	-20 dB/dec	"

**Tabella 1 Regole per il tracciamento del diagramma di Bode asintotico per il modulo**

<i>Re &lt; 0</i>			<i>Re &gt; 0</i>		
ZERO REALE	$+\frac{\pi}{2}$	per la molt.	ZERO REALE	$-\frac{\pi}{2}$	per la molt.
POLO REALE	$-\frac{\pi}{2}$	"	POLO REALE	$+\frac{\pi}{2}$	"
ZERI COMPLESSI CONIUGATI	$+\pi$	"	ZERI COMPLESSI CONIUGATI	$\pi$	"
POLI COMPLESSI CONIUGATI	$-\pi$	"	POLI COMPLESSI CONIUGATI	$+\pi$	"
ZERO ORIGINE	$+\pi$	"	ZERO ORIGINE	$+\pi$	"
POLO ORIGINE	$-\pi$	"	POLO ORIGINE	$-\pi$	"
COSTANTI >0	0	"	COSTANTI >0	0	"
COSTANTI <0	$-\pi$	"	COSTANTI <0	$-\pi$	"

**Tabella 2 Regole per il tracciamento del diagramma di Bode asintotico per la fase**

Solitamente, per la generica funzione razionale fratta

$$F(\omega) = \frac{N(\omega)}{D(\omega)}, \quad g_N < g_D, \quad g_N = N_{zc} + N_{zr}, \quad g_D = N_{pc} + N_{pr} \quad (\text{trascurando poli e zeri in } 0) \quad (1.5.30)$$

le pulsazione proprie associate ai poli della funzione razionale fratta  $F(\omega)$  (radici di  $D$ )  $\omega_{ppi}$  sono dette pulsazioni di risonanza (se si esclude lo 0, in numero pari  $N_{pc}/2 + N_{pr}$ ) e corrispondono ai valori dove il modulo  $|F(\omega)|$  assume un massimo. Le pulsazioni proprie associate agli zeri della funzione razionale fratta  $F(\omega)$  (radici di  $D$ ) sono dette pulsazioni di antirisonanza (se si esclude lo 0, in numero pari  $N_{zc}/2 + N_{zr}$ ) e corrispondono ai minimi del modulo  $|F(\omega)|$ .

Nel caso in cui

$$F(\omega) = \frac{N(\omega)}{D(\omega)} = \alpha_{ij}(\omega) = \frac{P_{ij}(\omega)}{\det H(\omega)}, \quad (1.5.31)$$

si ha che  $g_N < g_D = 2N$ . In tal caso le risonanze sono sempre  $N_{pc}/2 + N_{pr}$  e sono sempre le stesse per tutti gli elementi della matrice  $\alpha_{ij}(\omega)$  (sono cioè una proprietà strutturale del sistema). Al contrario le antirisonanze possono cambiare. Si può dimostrare che, se  $i = j$ , le antirisonanze sono  $\frac{N_{pc}}{2} + N_{pr} - 1$  e ogni antirisonanza è situata in mezzo a due risonanze. Se invece  $i$  è diverso da  $j$ , le antirisonanze sono  $\leq \frac{N_{pc}}{2} + N_{pr} - 1$  e non può esserci più di una antirisonanza in mezzo a due risonanze (in certi casi quindi saranno presenti e in altri no.).

Concludiamo sottolineando come il diagramma asintotico di Bode sia una buona approssimazione del vero diagramma di Bode quando siamo lontani dalla pulsazioni proprie di zeri e poli  $\omega_{pzi}$ ,  $\omega_{ppi}$  (e quindi lontani da risonanze e antirisonanze). Da qui la condizione che tali pulsazioni siano ben separate tra loro (la nostra ipotesi di lavoro). Se così non fosse, non avremmo tratti in cui l'approssimazione del diagramma asintotico di Bode è buona. La valutazione dell'errore commesso vicino alle pulsazioni di zeri e poli  $\omega_{pzi}$ ,  $\omega_{ppi}$  (e quindi vicino a risonanze e

antirisonanze) richiede comunque l'utilizzo di software numerici così come il tracciamento del vero diagramma di Bode.

APPLICAZIONE: SISTEMI MECCANICI LTI SOGGETTI A FORZANTI ARMONICHE

Dimostriamo qui un'importante proprietà dei sistemi meccanici LTI: se un sistema meccanico LTI viene forzato in modo armonico a una certa frequenza, risponde in modo armonico alla stessa frequenza con modulo e fase differenti.

Consideriamo il sistema meccanico LTI a N DOF

$$M\ddot{\underline{q}} + H\dot{\underline{q}} + K\underline{q} = \underline{Q}(t). \quad (1.5.32)$$

forzato in modo armonico (da qui in avanti useremo una notazione "element-wise" per vettori e matrici al fine di compattare i calcoli):

$$\underline{Q}(t) = \text{Re} \left( \underline{Q}_0 e^{j\omega_f t} \right) = \frac{1}{2} \underline{m}_0 \cos(\omega_f t + \underline{\varphi}_0). \quad (1.5.33)$$

In tal caso si ha

$$\tilde{\underline{Q}}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{Q}(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2} \underline{m}_0 [\delta(\omega + \omega_f) + \delta(\omega - \omega_f)] e^{j\omega \underline{\varphi}_0 / \omega_f}. \quad (1.5.34)$$

Dal momento che la risposta forzata del sistema sarà

$$\underline{q}_{no}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\underline{q}}(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(\omega) \tilde{\underline{Q}}(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (1.5.35)$$

si ottiene per la generica componente della risposta

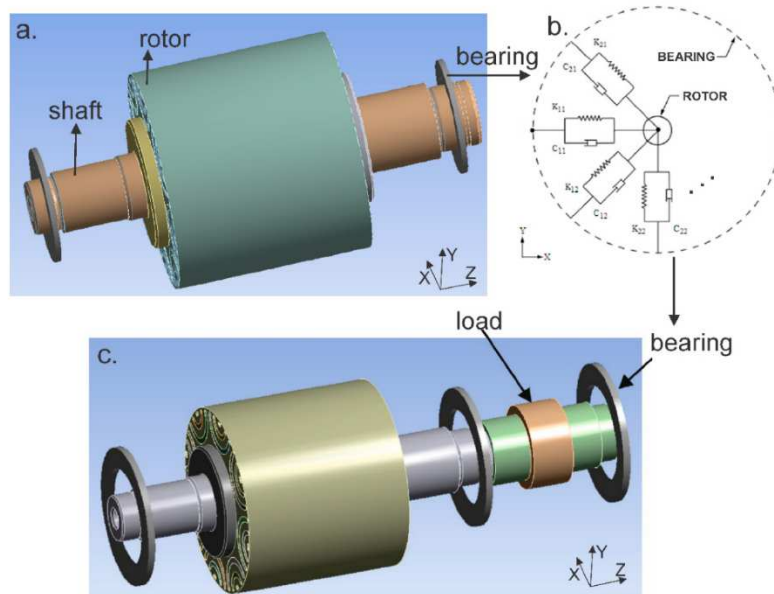
$$\begin{aligned} q_{noi}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^N \alpha(\omega)_{ij} \tilde{Q}_j(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} |\alpha(\omega)_{ij}| e^{j\varphi_{\alpha_{ij}}(\omega)} [m_{0j} [\delta(\omega + \omega_f) + \delta(\omega - \omega_f)] e^{j\omega \varphi_{0j} / \omega_f}] e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} [|\alpha(\omega_f)_{ij}| e^{j\varphi_{\alpha_{ij}}(\omega_f)} m_{0j} e^{j\varphi_{0j}} e^{j\omega_f t} + |\alpha(-\omega_f)_{ij}| e^{j\varphi_{\alpha_{ij}}(-\omega_f)} m_{0j} e^{-j\varphi_{0j}} e^{-j\omega_f t}] = \\ &= \sum_{j=1}^N |\alpha(\omega_f)_{ij}| m_{0j} \frac{1}{2} [e^{j(\varphi_{0j} + \varphi_{\alpha_{ij}}(\omega_f) + \omega_f t)} + e^{-j(\varphi_{0j} + \varphi_{\alpha_{ij}}(\omega_f) + \omega_f t)}] = \\ &= \sum_{j=1}^N |\alpha(\omega_f)_{ij}| m_{0j} \cos(\varphi_{0j} + \varphi_{\alpha_{ij}}(\omega_f) + \omega_f t) \end{aligned} \quad (1.5.36)$$

dalla quale si conclude che

$$\begin{aligned} \underline{q}_{no}(t) &= M_\alpha(\omega_f) \underline{m}_0 \cos(\omega_f t + \underline{\varphi}_0 + \Phi_\alpha) = \\ &= \text{Re}(M_\alpha(\omega_f) e^{j\Phi_\alpha} \underline{m}_0 e^{j\omega_f t}) = \\ &= \text{Re}(\alpha(\omega) \underline{m}_0 e^{j\varphi_0} e^{j\omega_f t}) = \end{aligned} \quad (1.5.37)$$

$$\begin{aligned} &= \operatorname{Re}(\alpha(\omega)\underline{Q}_0 e^{j\omega_f t}) = \\ &= \operatorname{Re}(\underline{q}_0 e^{j\omega_f t}). \quad \text{QED} \end{aligned}$$

## 2. VIBRAZIONI FLESSIONALI LIBERE: ROTORI RIGIDI



Tipico schema di rotore rigido e cuscinio a molla 3D

Cominciamo ora lo studio della dinamica delle macchine rotanti 1D (aventi una dimensione prevalente, coincidente con l'asse di rotazione principale). La dinamica 1D delle macchine rotanti fa ampio uso della teoria della trave 1D nello spazio che ha localmente 6 gradi di libertà (degrees of freedom, DOF). Si veda la Fig. 4 (convenzionalmente si sceglie l'asse  $z_f$  del sistema di riferimento inerziale lungo l'asse di rotazione). Questi 6 DOF si dividono in DOF traslazionali (traslazione lungo  $x_f, y_f, z_f$ ) e DOF rotazionali (rotazione attorno a  $x_f, y_f, z_f$ ). Nella teoria della trave 1D le traslazioni lungo  $x_f, y_f$  e le rotazioni attorno a  $x_f, y_f$  sono detti DOF flessionali, la rotazione attorno a  $z_f$  è detta DOF torsionale e la traslazione lungo a  $y_f$  è detta DOF assiale.

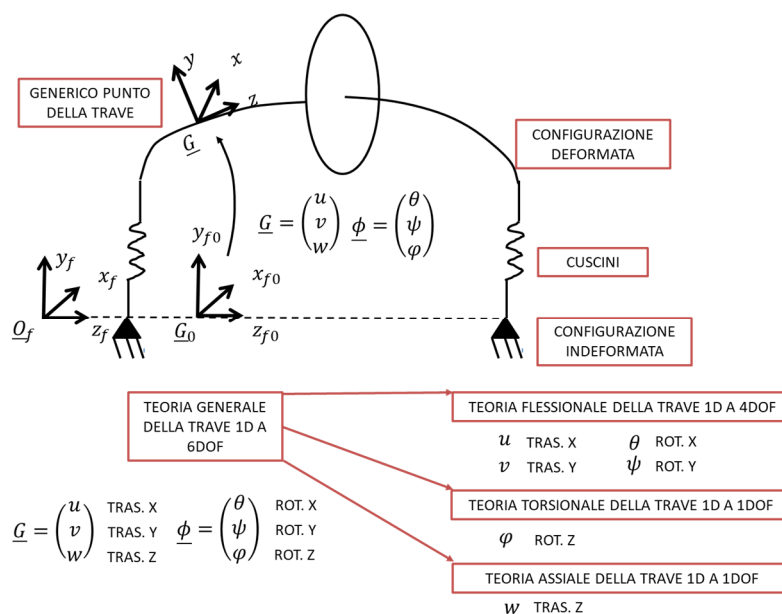


Figura 4 Teoria 1D della trave nello spazio

Sotto alcune ipotesi che vedremo, non è necessario studiare la dinamica delle macchine rotanti 1D con la generica teoria della trave 1D nello spazio a 6 DOF ma sarà possibile disaccoppiare e studiare separatamente la dinamica flessione (teoria flessionale della trave a 4DOF) da quella torsionale (teoria torsionale della trave a 1 DOF) e da quella assiale (teoria assiale della trave a 1DOF). Quando tali ipotesi non saranno verificate, allora sarà necessario l'impiego una teoria della trave 1D a 6DOF. In questi casi tuttavia, la complessità computazionale di tali teoria rende tale approccio non molto conveniente (soprattutto se si considera il compromesso tra accuratezza ed efficienza) ed è consigliabile passare direttamente a una modellazione 3D della macchina rotante (come vedremo).

In questo capitolo studieremo la dinamica flessionale 4DOF libera (senza forzanti) di macchine rotanti 1D (aventi una dimensione prevalente coincidente con l'asse di rotazione principale) approssimabili come corpi rigidi. Nel caso di rotore rigido non ha particolare importanza studiare la dinamica torsionale e la dinamica assiale dal momento che tali dinamiche si ridurrebbero banalmente a quelle di un corpo rigido che ruota attorno a un asse fisso e che trasla lungo una direzione fissa.

## 2.1 Equazioni di moto (approccio Newtoniano)

Troviamo ora le equazioni generali della dinamica del rotore rigido (corpo rigido assialsimmetrico, avente quindi una dimensione prevalente coincidente con l'asse di rotazione principale) nello spazio ancorato al telaio mediante due cuscini. A tal scopo useremo le equazioni cardinali della dinamica e per adesso modelleremo semplicemente i cuscini come delle molle tridimensionali. Le equazioni descrivono completamente il moto di qualunque rotore rigido e sono non lineari. Successivamente, come vedremo, linearizzeremo il problema studiando i "piccoli spostamenti" attorno alla configurazione nominale e considereremo solamente la dinamica flessionale del sistema (i 4 DOF flessionali).

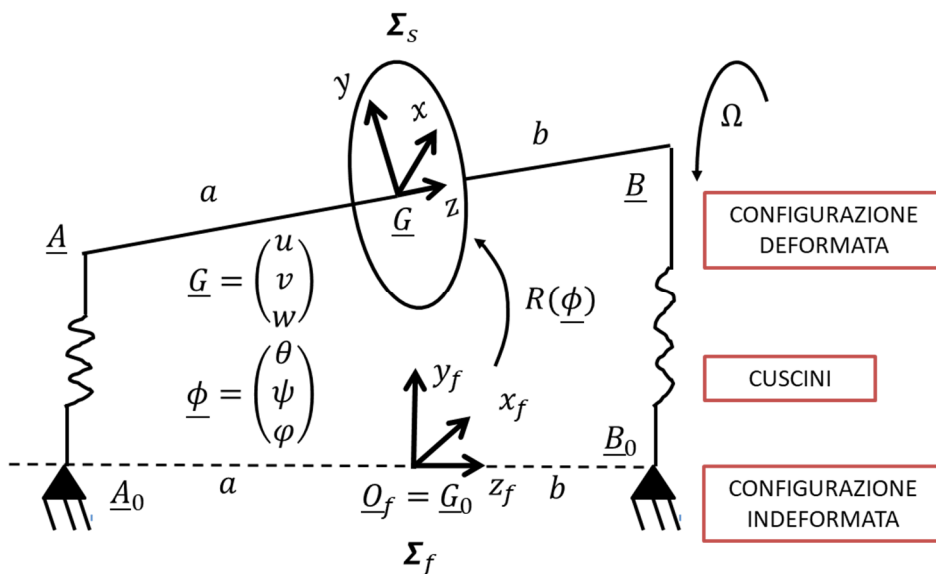


Figura 5 Rappresentazione schematica di un rotore rigido

Con riferimento alla Fig. 5, supponiamo che il rotore abbia massa e tensore d'inerzia (scritto rispetto alla terna solidale principale d'inerzia con asse z rivolto lungo l'asse del rotore stesso) noti:



$$m, \sigma_{Gs} = \begin{bmatrix} I_d & 0 & 0 \\ 0 & I_d & 0 \\ 0 & 0 & I_p \end{bmatrix} \quad (2.1.1)$$

dove  $I_d$  è il momento d'inerzia diametrale del rotore e  $I_p$  è il momento d'inerzia polare. Lo stato del corpo rigido è descritto dal suo centro di massa e da una terna di angoli di Eulero:

$$\underline{G} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \quad \underline{\phi} = \begin{pmatrix} \theta \\ \psi \\ \varphi \end{pmatrix} \quad (2.1.2)$$

in cui le componenti di  $\underline{G}$  rappresentano le traslazioni spaziali lungo  $x_f, y_f, z_f$  e le componenti di  $\underline{\phi}$  rappresentano le rotazioni attorno agli assi  $x_f, y_f, z_f$ . A livello di velocità si ha inoltre

$$\underline{\dot{G}} = \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix}, \quad \underline{\dot{\phi}} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \quad (2.1.3)$$

da cui introducendo le matrici di Eulero si ottiene la velocità angolare scritta nel sistema fisso e in quello solidale:

$$\underline{\omega}_f = T_f(\underline{\phi})\underline{\dot{\phi}}, \quad \underline{\omega}_s = T_s(\underline{\phi})\underline{\dot{\phi}}. \quad (2.1.4)$$

Scegliendo una composizione ZXY per gli angoli di Eulero, la matrice di rotazione che la lega la terna solidale a quella inerziale è data da:

$$R(\underline{\phi}) = R_z(\varphi)R_x(\theta)R_y(\psi) \quad (2.1.5)$$

$$R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad R_y(\psi) = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & 0 & \sin(\psi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\psi) & 0 & \cos(\psi) \end{pmatrix}.$$

dove naturalmente  $RR^T = R^T R = I$ ,  $R = R^{-1}$  e  $\det(R) = 1$ . Per una composizione degli angoli di Eulero ZXY la matrice  $T_f$  assume la forma

$$T_f(\underline{\phi}) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi)\cos(\theta) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi)\cos(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.1.6)$$

Ricordando infine che per definizione  $\underline{\omega}_f = R\underline{\omega}_s$ , sostituendo nella (2.1.4), si ha:

$$T_f(\underline{\phi}) = RT_s(\underline{\phi}). \quad (2.1.7).$$

Possiamo adesso introdurre le equazioni cardinali della dinamica:

$$\begin{cases} \underline{\dot{Q}}_f = m\underline{\ddot{G}}_f = \underline{F}_f^e \\ \underline{\dot{K}}_{Gf} = \underline{M}_{Gf}^e, \quad \underline{\dot{K}}_{Gs} = \underline{M}_{Gs}^e \end{cases} \quad (2.1.8)$$

in cui  $\underline{K}_{Gf} = \sigma_{Gf}\underline{\omega}_f$  o  $\underline{K}_{Gs} = \sigma_{Gs}\underline{\omega}_s$ . Ricordando che  $\underline{K}_{Gf} = R\underline{K}_{Gs}$  e  $\underline{\omega}_f = R\underline{\omega}_s$ , si ha che:

$$\sigma_{Gf} = R\sigma_{Gs}R^T. \quad (2.1.9)$$

La (2.1.9) è importante perché mi permette di calcolare semplicemente  $\sigma_{Gf}$  (tensore d'inerzia scritto in terna fissa e quindi variabile) in funzione di  $\sigma_{Gs}$  (tensore d'inerzia scritto in terna solidale e quindi costante e molto semplice da usare). A questo punto, a seconda della comodità, possiamo scrivere la seconda delle (2.1.8) sia nel sistema fisso che in quello solidale

$$\frac{d}{dt} [R\sigma_{Gs}R^T \underline{\omega}_f] = \underline{M}^e_{Gf} \quad (2.1.10)$$

$$\sigma_{Gs} \dot{\underline{\omega}}_s + \underline{\omega}_s \times \sigma_{Gs} \underline{\omega}_s = \underline{M}^e_{Gs} \cdot \quad (2.1.11)$$

Nel nostro caso, noi sceglieremo l'equazione scritta nel sistema inerziale. Per completezza riportiamo anche l'espressione dell'energia cinetica del corpo rigido (il nostro rotore) che ci sarà utile in seguito quando applicheremo l'approccio lagrangiano ai rotori elastici:

$$T = \frac{1}{2} m \|\dot{\underline{G}}_f\|^2 + \frac{1}{2} \underline{\omega}_f^T R \sigma_{Gs} R^T \underline{\omega}_f. \quad (2.1.12)$$

Per quanto riguarda questo esempio, supporremo che le azioni esterne  $\underline{F}^e_f, \underline{M}^e_{Gf}$  includano le azioni dovute ai cuscini  $\underline{F}^A_f, \underline{F}^B_f, \underline{M}^A_{Gf}, \underline{M}^B_{Gf}$  (che modelleremo come semplici elementi di forze, ovvero molle tridimensionali) ed eventuali forzanti esterne agenti sulla macchina non meglio precisate  $\underline{F}^{ext}_f, \underline{M}^{ext}_{Gf}$ :

$$\underline{F}^e_f = \underline{F}^A_f + \underline{F}^B_f + \underline{F}^{ext}_f \quad (2.1.13)$$

$$\underline{M}^e_{Gf} = \underline{M}^A_{Gf} + \underline{M}^B_{Gf} + \underline{M}^{ext}_{Gf}$$

Trattando i cuscini come delle semplici molle tridimensionali, possiamo scrivere le relative azioni come:

$$\underline{F}^A_f = - \begin{pmatrix} k_{xxA} & k_{yxA} & k_{zxA} \\ k_{xyA} & k_{yyA} & k_{zyA} \\ k_{xzA} & k_{yzA} & k_{zzA} \end{pmatrix} (\underline{A}_f - \underline{A}_0) - \begin{pmatrix} c_{xxA} & c_{yxA} & c_{zxA} \\ c_{xyA} & c_{yyA} & c_{zyA} \\ c_{xzA} & c_{yzA} & c_{zzA} \end{pmatrix} (\dot{\underline{A}}_f - \dot{\underline{A}}_0) = -K_A (\underline{A}_f - \underline{A}_0) - C_A (\dot{\underline{A}}_f - \dot{\underline{A}}_0) \quad (2.1.14)$$

$$\begin{aligned} \underline{F}^B_f &= - \begin{pmatrix} k_{xxB} & k_{yxB} & k_{zxB} \\ k_{xyB} & k_{yyB} & k_{zyB} \\ k_{xzB} & k_{yzB} & k_{zzB} \end{pmatrix} \cdot (\underline{B}_f - \underline{B}_0) - \begin{pmatrix} c_{xxB} & c_{yxB} & c_{zxB} \\ c_{xyB} & c_{yyB} & c_{zyB} \\ c_{xzB} & c_{yzB} & c_{zzB} \end{pmatrix} \cdot (\dot{\underline{B}}_f - \dot{\underline{B}}_0) = \\ &= -K_B (\underline{B}_f - \underline{B}_0) - K_B (\dot{\underline{B}}_f - \dot{\underline{B}}_0) \end{aligned}$$

in cui abbiamo supposto i cuscini asimmetrici come nella realtà (matrici di rigidezza e smorzamento dei cuscini asimmetriche) e

$$\underline{A}_f = \underline{G}_f + R \underline{A}_s, \quad \underline{A}_s = \underline{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}, \quad \underline{B}_f = \underline{G}_f + R \underline{B}_s, \quad \underline{B}_s = \underline{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}, \quad (2.1.15)$$

$$\dot{\underline{A}}_f = \dot{\underline{G}}_f + \underline{\omega}_f \times (\underline{A}_f - \underline{G}_f), \quad \dot{\underline{B}}_f = \dot{\underline{G}}_f + \underline{\omega}_f \times (\underline{B}_f - \underline{G}_f).$$

L'asimmetria delle matrici di cuscinio produrrà, come vedremo tra poco, l'asimmetria del sistema meccanico LTI che dovremo risolvere. Per quanto riguarda infine i momenti, considereremo il momento meccanico prodotto dai cuscini ma per ora trascureremo il momento intrinseco prodotto dai cuscini stessi (ad esempio a causa delle dissipazioni). Si ha quindi semplicemente:

$$\underline{M}_{Gf}^A = \underline{\dot{G}}_f + (\underline{A}_f - \underline{G}_f) \times \underline{F}_f^A, \quad \underline{M}_{Gf}^B = \underline{\dot{G}}_f + (\underline{B}_f - \underline{G}_f) \times \underline{F}_f^B. \quad (2.1.16)$$

Le equazioni non lineari generali per lo studio del moto di un rotore rigido (corpo rigido assialsimmetrico, avente quindi una dimensione prevalente coincidente con l'asse di rotazione principale) sono ora complete. E' opportuno sottolineare che, in virtù delle proprietà di un corpo rigido, è sufficiente studiare il comportamento di  $\underline{G}_f$  e  $\underline{\phi}$ . Questo è vero perché, se io volessi poi studiare come si comporta un'altra sezione della macchina (ad esempio la sezione in  $\underline{A}$  dove si trova un cuscinio), sarebbe sufficiente usare le formule fondamentali dei corpi rigidi (2.1.15).

Per concludere, facciamo due ipotesi di lavoro fondamentali che, tra le altre cose, garantiscono nel caso di rotore rigido anche il disaccoppiamento fondamentale tra dinamica flessionale (a 4DOF), dinamica torsionale (a 1DOF) e dinamica assiale (1DOF):

- 1) consideriamo solamente i gradi di libertà flessionali (visto che il nostro scopo è studiare la dinamica flessionale). In altre parole, delle 6 equazioni cardinali (2.1.8) considereremo solo la prima (traslazione lungo  $x_f$ ), la seconda (traslazione lungo  $y_f$ ), la quarta (rotazione attorno a  $x_f$ ) e la quinta (rotazione attorno a  $y_f$ ). Faremo inoltre le seguenti assunzioni sulle variabili del problema (soprattutto quelle relative ai DOF non di interesse):

$$\underline{G} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w = 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\dot{G}} = \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} = 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\ddot{G}} = \begin{pmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \\ \ddot{w} = 0 \end{pmatrix}, \quad (2.1.17)$$

$$\underline{\phi} = \begin{pmatrix} \theta \\ \psi \\ \varphi = 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\dot{\phi}} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\varphi} = \Omega = \text{cost} \end{pmatrix}, \quad \underline{\ddot{\phi}} = \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\varphi} = 0 \end{pmatrix}$$

dove  $\Omega$  è la speed della macchina (la velocità di rotazione della macchina attorno al suo asse di rotazione principale).

- 2) linearizziamo poi il problema nell'intorno della configurazione nominale. In altre parole, studiamo il problema ai "piccoli spostamenti" nell'intorno della configurazione in questione. Da un punto di vista fisico, consideriamo tutte variabili del problema (vedi la (2.1.17)) piccole (eccetto ovviamente la speed della macchina  $\Omega$ ) e consideriamo piccole anche le loro derivate. Applicare questa ipotesi alle equazioni cardinali (2.1.8) equivale a considerare solamente i termini di ordine 0 (le costanti) e i termini di ordine 1 (la variabili stesse), ignorando qualunque altro termine di ordine superiore.

Applicando le due ipotesi di lavoro alle equazioni (2.1.8), si ottengono, dopo aver riordinato opportunamente i termini, le equazioni della dinamica flessionale (a 4 DOF) per un rotore rigido:

$$\underline{M}\ddot{\underline{q}} + (\underline{\Omega G} + \underline{C})\dot{\underline{q}} + \underline{K}\underline{q} = \underline{Q}, \quad \underline{q} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \\ \psi \end{pmatrix} \quad (2.1.18)$$

dove

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d \end{bmatrix} \text{ simmetrica definita positiva, } \underline{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_p \\ 0 & 0 & -I_p & 0 \end{bmatrix} \text{ antisimmetrica} \quad (2.1.19)$$

$$K = \begin{pmatrix} k_{xx_A} + k_{xx_B} & k_{yx_B} + k_{yx_B} & k_{yx_A}a - k_{yx_B}b & k_{xx_B}b - k_{xx_A}a \\ k_{xy_A} + k_{xy_B} & k_{yy_A} + k_{yy_B} & k_{yy_A}a - k_{yy_B}b & -k_{xy_A}a + k_{xy_B}b \\ ak_{xy_A} - bk_{xy_B} & k_{yy_A}a - k_{yy_B}b & a^2k_{yy_A} + b^2k_{yy_B} & -a^2k_{xy_A}a - b^2k_{xy_B}b \\ -ak_{xx_A} + bk_{xx_B} & -k_{yx_A}a + k_{yx_B}b & -a^2k_{yx_A} - b^2k_{yx_B} & k_{xx_A}a^2 + k_{xx_B}b^2 \end{pmatrix}.$$

$M$  è la matrice di masse del sistema,  $G$  la matrice giroscopica e  $K$  la matrice di rigidezza. La matrice di smorzamento  $C$  è "identica" alla  $K$ , basta semplicemente sostituire le  $k$  con le  $c$ . La forzante è infine:

$$\underline{Q} = \begin{pmatrix} F_{xf}^{ext} \\ F_{yf}^{ext} \\ M_{xf}^{ext} \\ M_{yf}^{ext} \end{pmatrix}. \quad (2.1.20)$$

Si noti come la matrici di rigidezza e smorzamento  $K$  e  $C$  sono asimmetriche a meno che, caso piuttosto improbabile, non siano simmetriche la matrici dei cuscini (cuscini simmetrici) e non sia geometricamente simmetrico il rotore rigido. Inoltre, in accordo con quanto detto nel paragrafo 1.2, solamente la parte simmetrica della matrice di smorzamento  $C = C_S + C_A$  produce effettivamente un effetto smorzante a livello fisico e quindi a livello di smorzamento modale (la matrice giroscopica  $G$  non contribuisce in quanto antisimmetrica).

In questo particolare sistema solo i cuscini contribuiscono alla rigidezza e alle smorzamento dal momento che il rotore è rigido e non ci sono di conseguenza né la rigidezza strutturale né lo smorzamento del materiale.

Naturalmente nel caso di moto libero saranno assenti forzanti esterne vere e proprie  $\underline{Q} = \underline{0}$  e avremo:

$$M\underline{\ddot{q}} + (\Omega G + C)\underline{\dot{q}} + K\underline{q} = \underline{0}. \quad (2.1.21)$$

## 2.2 Diagrammi di Campbell, whirl libero, classificazione modale e mappa modale

Analizziamo ora la soluzione dell'equazione:

$$M\underline{\ddot{q}} + (\Omega G + C)\underline{\dot{q}} + K\underline{q} = \underline{0}. \quad (2.2.1)$$

Come detto nel paragrafo 1.2, l'analisi ci dice che la soluzione libera (associata al moto libero) ha la forma:

$$\underline{q}_l(t) = \sum_{i=1}^{2N} c_i \underline{q}_i e^{s_i t} \quad N = 4 \quad (2.2.2).$$

dove

$$s_{k,k+N} = -\zeta_k \omega_{nk} \pm j\omega_{nk} \sqrt{1 - \zeta_k^2} = -\zeta_k \omega_{nk} \pm j\omega_{pk}, \quad \underline{q}_k = \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \\ \theta_k \\ \psi_k \end{pmatrix}, \quad \underline{q}_{k+N} = \overline{\underline{q}_k}, \quad k = 1 \dots N \quad (2.2.3)$$

sono gli autovalori (associati alle pulsazioni proprie  $\omega_{p_i}$ ) e gli autovettori del problema (associati alle deformate modali).

I modi di vibrare del sistema sono definiti invece come

$$\underline{q}_i(t) = \begin{pmatrix} u_i(t) \\ v_i(t) \\ \theta_i(t) \\ \psi_i(t) \end{pmatrix} = Re(\underline{q}_i e^{s_i t}). \quad (2.2.4)$$

Si noti che il sistema ha 8 autovalori (4 coppie complesse coniugate), 8 autovettori (4 coppie complesse coniugate) e 8 modi di vibrare (4 coppie uguali). Di conseguenza le pulsazioni naturali / proprie e gli smorzamenti modali distinti saranno solamente 4.

Naturalmente sia gli autovalori che gli autovettori del problema dipendono dal parametro  $\Omega$  (la velocità di rotazione / speed della macchina):

$$s_i(\Omega), \omega_{ni}(\Omega), \omega_{pi}(\Omega), \zeta_i(\Omega), \underline{q}_i(\Omega) \quad \text{con } \Omega \in [0 \quad \Omega_{max}]. \quad (2.2.5)$$

E' dunque molto importante capire a livello qualitativo questa dipendenza sia per il autovalori (tramite il diagramma di Campbell) che per gli autovettori (tramite lo studio del moto (whirl libero) e la classificazione modale). Il tutto sarà infine riassunto dalla mappa modale.

Partendo dallo studio degli autovalori, si usa descrivere la dipendenza delle pulsazioni proprie o naturali  $\omega_{ni}(\Omega)$ ,  $\omega_{pi}(\Omega)$  e degli smorzamenti modali  $\zeta_i(\Omega)$  da  $\Omega$  in due diversi diagrammi Campbell (si veda la Fig. 6). In questo caso il sistema ha solamente 4 pulsazioni naturali / proprie e gli smorzamenti modali e quindi i diagrammi di Campbell sono formati da 4 rami. Tali pulsazioni costituiscono un grappolo (l'unico di un rotore rigido). Come sarà più chiaro quando studieremo i rotor elastic, se l'ipotesi di disaccoppiamento delle dinamiche flessionali, torsionali e assiali è verificata, gli autovalori relativi ai DOF flessionali tenderanno a raggrupparsi in grappoli di 4 mentre gli autovalori relativi ai DOF torsionali non formano alcun raggruppamento (sono indipendenti tra loro o formano "grappoli di un solo elemento") così come gli autovalori relativi ai DOF assiali. Purtroppo, se l'ipotesi di disaccoppiamento delle tre dinamiche non è più verificata, gli autovalori relativi alla dinamica flessionali tendono a perdere la tendenza a raggrupparsi.

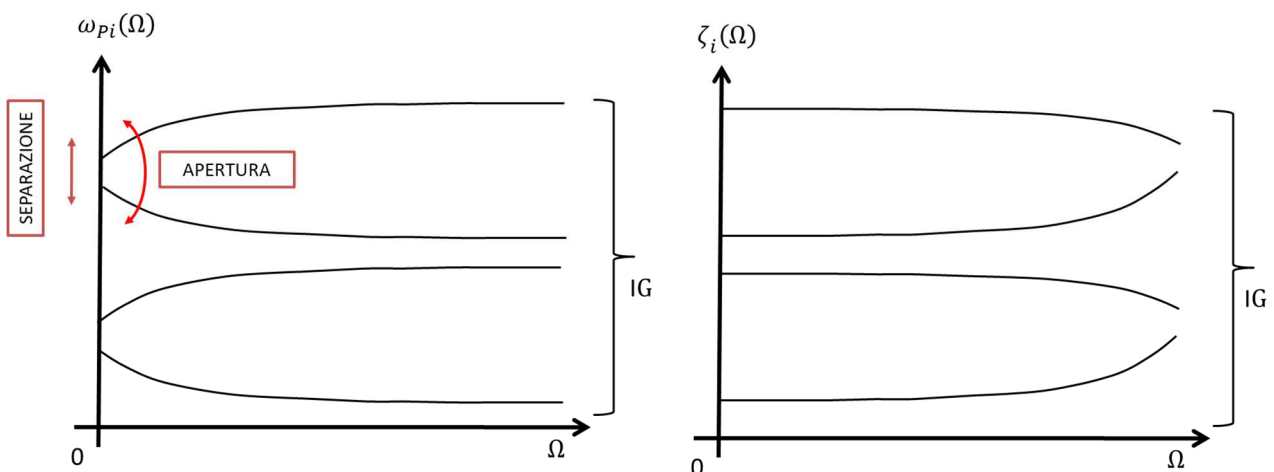


Figura 6 Diagramma di Campbell per il rotore rigido

Guardando alla Fig. 6 si nota come le pulsazioni naturali / proprie solitamente tendono a un valore asintotico per  $\Omega$  grandi mentre questo non è vero per gli smorzamenti. La separazione e l'apertura dei rami dei diagrammi di Campbell cresce se aumentano l'asimmetria e l'anisotropia dei cuscini e se aumentano gli effetti giroscopici  $\Omega I_p$  (quindi per  $\Omega$  grande o per  $I_p$  grande).

Passando poi allo studio degli autovettori, è importante introdurre la classificazione modale, ovvero un elenco qualitativo dei principali modi che il sistema può presentare (solitamente elencati al crescere della pulsazione naturale / propria).

Il primo modo a comparire solitamente in frequenza è il così detto modo di bouncing (rimbalzo), rappresentato in Fig. 7.

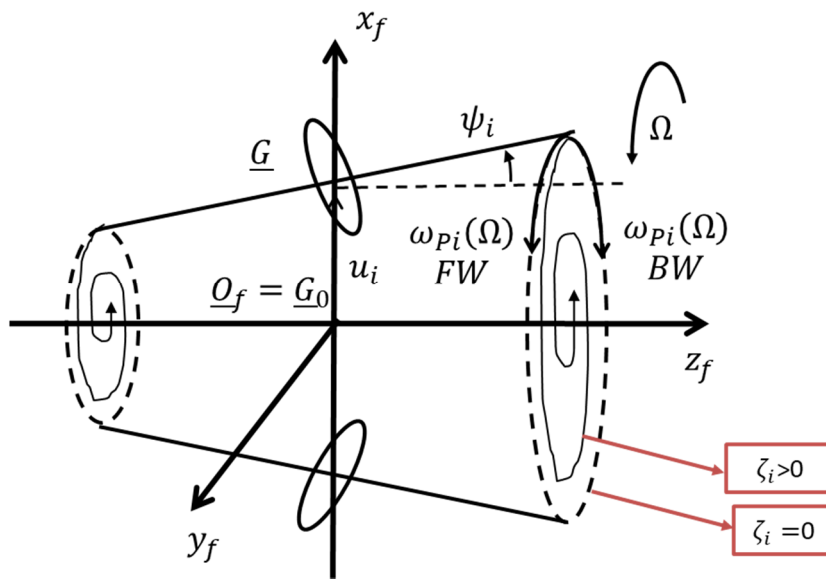


Figura 7 Rappresentazione 3D del modo di bouncing

La rotazione del rotore avviene chiaramente alla pulsazione  $\Omega$  (la speed della macchina) mentre il moto di rivoluzione attorno all'asse  $z_f$  avviene alla pulsazione propria  $\omega_{pi}(\Omega)$ . Il modo di bouncing è caratterizzato dal non avere punti nodali (ovvero punti di intersezione della deformata con l'asse  $z_f$ ).

Se la rotazione è concorde con la rivoluzione il modo si dice forward (FW), nel caso opposto viene detto backward (BW). Vedremo, quando parleremo a breve del whirl libero, come si fa a determinare la natura del modo (FW o BW) e vedremo anche come calcolare la traiettoria percorso dal centro di massa  $\underline{G}$  del rotore (ovvero un'ellissi come quella di qualunque altra sezione della macchina). Si noti chiaramente che  $\underline{G}$  si muove sul piano  $x_f y_f$  (la posizione  $w$  di  $\underline{G}$  lungo  $z_f$  è zero perché non sto studiando in questo momento il moto assiale).

La rappresentazione del modo di bouncing in sezione sul piano  $x_f y_f$  è riportata in Fig. 8. Come vedremo quando parleremo del whirl libero, le ellissi mostrate in Fig. 7 e Fig. 8 sono percorse solamente nel caso in cui lo smorzamento modale sia nullo  $\zeta_i = 0$  ( $\omega_{pi} = \omega_{ni}$ ). Nel caso in cui lo smorzamento sia positivo  $\zeta_i > 0$  al posto di ellissi avrò delle spirali convergenti a zero (BW o FW). A livello di stabilità passiamo di fatto da un polo semplicemente stabile (associato a un polo semplicemente stabile) a un modo asintoticamente stabile (associato a un polo asintoticamente stabile).

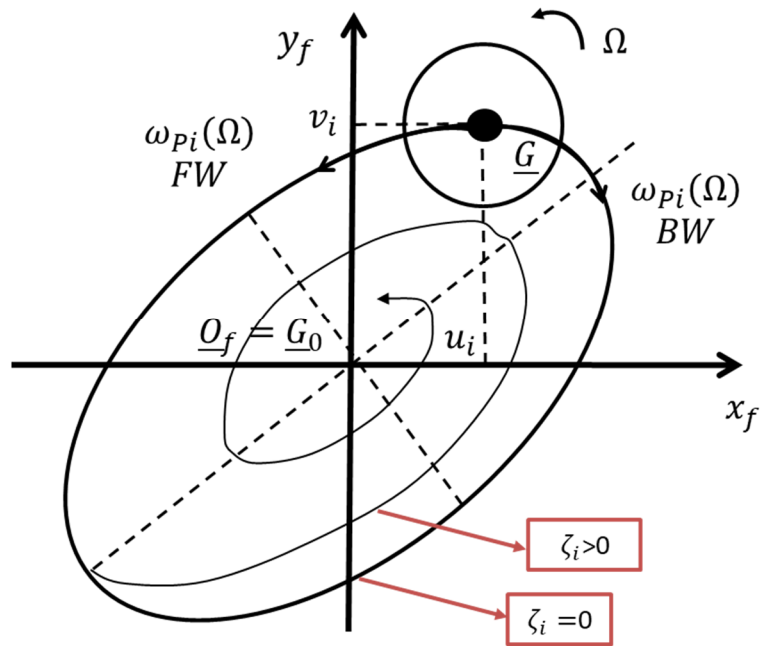


Figura 8 Rappresentazione sul piano xy del modo di bouncing (le componenti angolari  $\psi_i(t)$  e  $\theta_i(t)$  si comportano in modo analogo)

In generale la versione BW di un modo di vibrare (ad esempio quello di bouncing) tende a comparire a frequenze più basse della versione FW.

Il secondo modo a comparire solitamente in frequenza è il così detto modo di tilting (oscillante), rappresentato in Fig. 9 sia nella versione BW che in quella FW. Come nel caso precedente, l'ellisse mostrata in Fig. 9 è percorsa solamente nel caso in cui lo smorzamento modale sia nullo  $\zeta_i = 0$  ( $\omega_{Pi} = \omega_{ni}$ ). La rotazione del rotore avviene sempre alla pulsazione  $\Omega$  (la speed della macchina) mentre il moto di rivoluzione attorno all'asse  $z_f$  avviene alla pulsazione propria  $\omega_{Pi}(\Omega)$ . Il modo di tilting è caratterizzato dall'aver un punto nodale (ovvero punti di intersezione della deformata con l'asse  $z_f$ ).

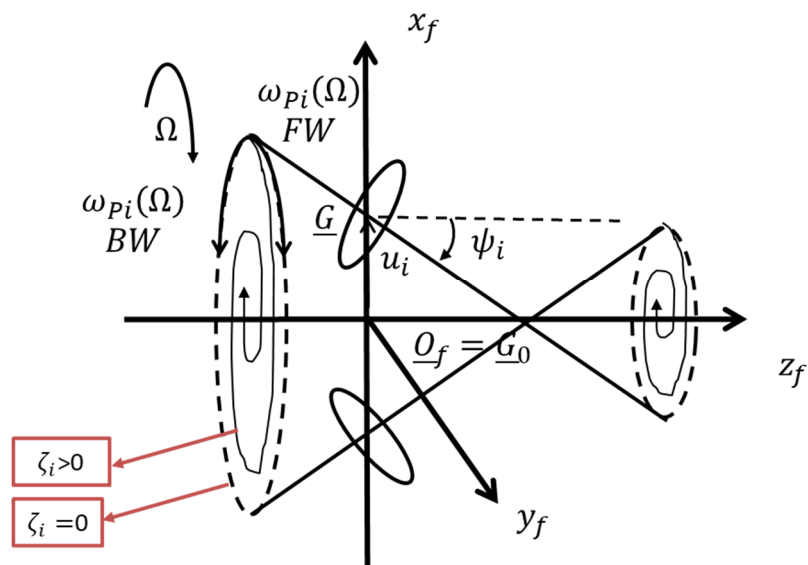


Figura 9 Rappresentazione 3D del modo di tilting

Nel caso in cui lo smorzamento sia positivo  $\zeta_i > 0$  al posto di ellissi avrò delle spirali convergenti a zero (BW o FW). A livello di stabilità passiamo di fatto da un polo semplicemente stabile (associato a un polo semplicemente stabile) a un modo asintoticamente stabile (associato a un polo asintoticamente stabile).

La rappresentazione del modo di tilting in sezione sul piano  $x_f y_f$  è identica a quella del modo di bouncing mostrata in Fig. 8.

Possiamo adesso determinare il moto di whirl libero, ovvero la traiettoria compiuta dal centro di massa  $\underline{G}$  del rotore sul piano  $x_f y_f$ . Tale traiettoria sarà, come anticipato, un'ellisse mentre nel caso in cui lo smorzamento modale sia nullo ( $\omega_{pi} = \omega_{ni}$ ). Nel caso in cui lo smorzamento sia positivo  $\zeta_i > 0$  al posto di ellissi avrò delle spirali convergenti a zero (BW o FW). Le traiettorie delle altre sezioni della macchina saranno anch'esse ellissi/spirali determinabili a partire da quella di  $\underline{G}$  mediante le formule fondamentali della cinematica dei corpi rigidi. Lo studio del moto di whirl libero permetterà anche di conoscere la versione del modo (se il modo è BW o FW).

Consideriamo dunque il generico modo:

$$\underline{q}_i(t) = \begin{pmatrix} u_i(t) \\ v_i(t) \\ \theta_i(t) \\ \psi_i(t) \end{pmatrix} = Re(\underline{q}_i e^{s_i t}) \quad (2.2.6)$$

e focalizziamoci sulla sua parte spaziale (le prime due componenti):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_i(t) \\ v_i(t) \end{pmatrix} &= Re \left[ \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} e^{s_i t} \right] = e^{-\zeta_i \omega_{ni} t} Re \begin{bmatrix} m_{ui} e^{j\varphi_{ui}} e^{j\omega_{pi} t} \\ m_{vi} e^{j\varphi_{vi}} e^{j\omega_{pi} t} \end{bmatrix} = e^{-\zeta_i \omega_{ni} t} \begin{bmatrix} m_{ui} \cos(\omega_{pi} t + \varphi_{ui}) \\ m_{vi} \cos(\omega_{pi} t + \varphi_{vi}) \end{bmatrix} = \\ &= e^{-\zeta_i \omega_{ni} t} \begin{pmatrix} m_{ui} \cos \varphi_{ui} - m_{ui} \sin \varphi_{ui} \\ m_{vi} \cos \varphi_{vi} - m_{vi} \sin \varphi_{vi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \omega_{pi} t \\ \sin \omega_{pi} t \end{pmatrix} = e^{-\zeta_i \omega_{ni} t} T \begin{pmatrix} \cos \omega_{pi} t \\ \sin \omega_{pi} t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_i(t) \\ v_i(t) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Dalla (2.2.7) si ottiene poi

$$\begin{pmatrix} \cos \omega_{pi} t \\ \sin \omega_{pi} t \end{pmatrix} = e^{-\zeta_i \omega_{ni} t} T^{-1} \begin{pmatrix} u_i(t) \\ v_i(t) \end{pmatrix} \quad (2.2.8)$$

da cui facendo la norma al quadrato

$$e^{-2\zeta_i \omega_{ni} t} = \begin{pmatrix} u_i(t) \\ v_i(t) \end{pmatrix}^T (T^{-1})^T T^{-1} \begin{pmatrix} u_i(t) \\ v_i(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_i(t) \\ v_i(t) \end{pmatrix}^T H \begin{pmatrix} u_i(t) \\ v_i(t) \end{pmatrix}. \quad (2.2.8)$$

Poiché la matrice  $H$  per costruzione è una matrice simmetrica definita positiva, nel caso in cui  $\zeta_i = 0$ , la (2.2.8) rappresenta l'equazione parametrica di un'ellisse centrata nell'origine ma ad assi ruotati. Più nel dettaglio, per il teorema spettrale, la matrice  $H$  ammette una base ortonormale di autovettori  $\underline{v}_{H1}$ ,  $\underline{v}_{H2}$  che determinano la direzione dei semiassi dell'ellisse in questione. La lunghezza dei semiassi è invece pari a  $\sqrt{\lambda_{H1}}$  e  $\sqrt{\lambda_{H2}}$  (gli autovalori sono reali e positivi perché  $H$ ). L'ellisse corrispondente al whirl libero è riportata in Fig. 10. Infine le fasi  $\varphi_{ui}$ ,  $\varphi_{vi}$  di  $u_i$  e  $v_i$  permettono di determinare anche la versione del modo (BW o FW). Se infatti vale la condizione

$$0 < \varphi_{vi} - \varphi_{ui} < \pi, \quad (2.2.9)$$



allora il modo è BW e l'ellisse sarà percorsa in senso BW. Se invece

$$-\pi < \varphi_{v_i} - \varphi_{u_i} < 0, \quad (2.2.10)$$

il modo è FW e l'ellisse sarà percorsa in senso FW. Nel caso in cui  $\zeta_i > 0$  non abbiamo chiaramente più un'ellisse ma una spirale convergente verso lo zero (si veda il membro di sinistra della (2.2.8)). A livello di stabilità passiamo di fatto da un polo semplicemente stabile (associato a un polo semplicemente stabile) a un modo asintoticamente stabile (associato a un polo asintoticamente stabile).

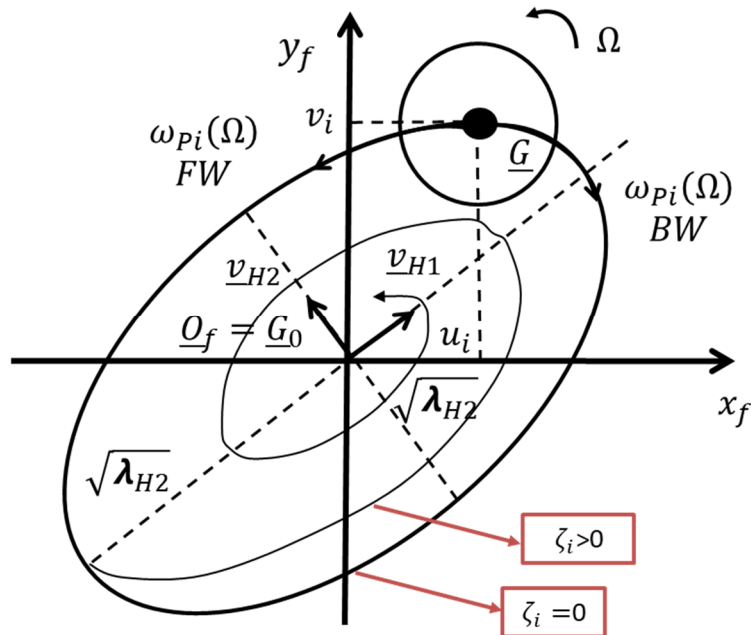


Figura 10 Ellissi associata al whirl libero (le componenti angolari  $\psi_i(t)$  e  $\theta_i(t)$  si comportano in modo analogo)

Tutto quanto è stato detto viene solitamente riassunto sulla mappa modale (vedi Fig. 11), ovvero un versione arricchita del diagramma di Campbell della pulsazioni proprie  $\omega_{p_i}(\Omega)$ . Su ognuno dei 4 rami del diagramma sono rappresentate, per ogni valore di  $\Omega$ , le forme modale che si manifestano sulla macchina considerata (bouncing e tilting) insieme alla versione di ciascun modo (BW o FW). Come si nota generalmente i modi bouncing capitano prima in frequenza e le versione BW dei modi capitano prima di quelle FW. Si noti inoltre che su ogni ramo, al variare di  $\Omega$ , possono esserci dei punti di transizione in cui la natura del modo di vibrare cambia (come ad esempio nel primo e nel terzo ramo dell'esempio riportato in Fig. 11). La transizione può riguardare la versione del modo (ad esempio da BW a FW) così come la natura del modo stesso (ad esempio da bouncing a tilting).

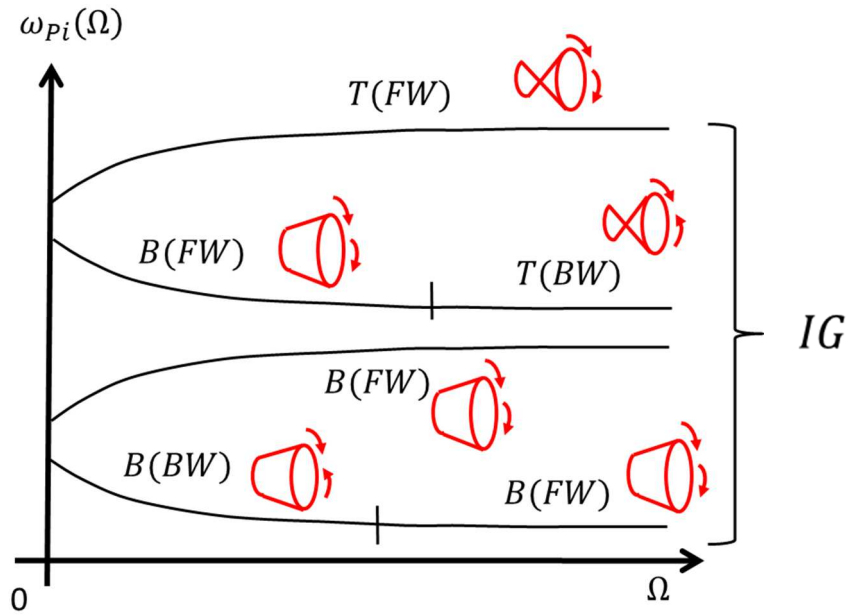
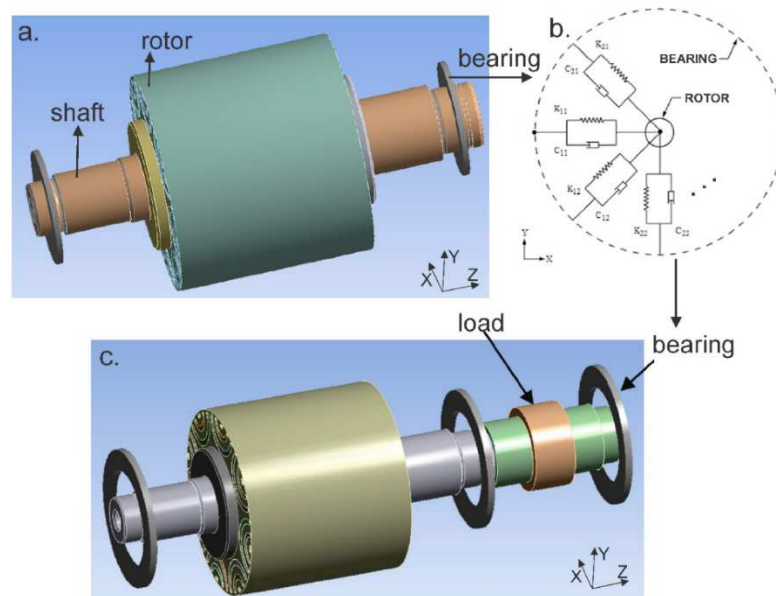


Figura 11 Esempio di mappa modale

ELENCO RIASSUNTIVO DELLE VARIE DEFORMATE MODALI:

- 1) FORMA: BOUNCING (B)  
CARATTERISTICA: BW o FW
- 2) FORMA: TILTING (T)  
CARATTERISTICA: BW o FW

### 3. VIBRAZIONI FLESSIONALI FORZATE: ROTORI RIGIDI



Tipico schema di rotore rigido e cuscinio a molla 3D

#### 3.1 Classificazione delle forzanti

Le principali forzanti che possono agire su una macchina rotante 1D (avente una dimensione prevalente, coincidente con l'asse di rotazione principale) sono le seguenti:

1) FORZANTE ARMONICA

$$\underline{Q}(t) = \begin{pmatrix} F_{x0} \\ F_{y0} \\ M_{x0} \\ M_{y0} \end{pmatrix} = Re \left[ \underline{Q}_0(\Omega) e^{j\omega_f(\Omega)t} \right]. \quad (3.1.1)$$

Se  $\omega_f(\Omega) = \Omega$  si parla di forzanti armoniche sincrone (prodotte ad esempio dagli sbilanciamenti presenti sul rotore), se  $\omega_f(\Omega) = n\Omega$  con  $n$  intero positivo o della forma  $1/m$  si parla di forzanti armoniche super/sub-sincrone (come ad esempio quelle derivanti dall'interazione palare (le forzanti di fluido), quelle derivanti da componenti come cuscini, giunti, riduttori, etc.), se  $\omega_f(\Omega) = \omega_f = cost$  si parla di forzanti armoniche asincrone (a esempio vibrazione a pulsazione costante provenienti dal basamento). Infine, ho una dipendenza qualunque  $\omega_f(\Omega)$ , si parla di forzanti armoniche generiche (derivanti per esempio da motori elettrici, generatori o altre macchine interagenti con quella considerata).

2) FORZANTE PERIODICA

$$\underline{Q}(t) = Re \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \underline{Q}_k(\Omega) e^{jk\omega_0(\Omega)t} \right], \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}. \quad (3.1.2)$$

In questo caso la forzante periodica di periodo  $T$  è caratterizzata dalla sovrapposizione di un numero infinito numerabile di forzanti armoniche elementari a pulsazione  $k\omega_0(\Omega)$  (si veda la serie di Fourier). Si noti che

la pulsazione principale  $\omega_0(\Omega)$  può dipendere dalla speed della macchina  $\Omega$  in uno qualunque dei modi descritti nel punto 1). Le forzanti periodiche sono anch'esse prodotte dall'interazione palare (le forzanti di fluido) e da componenti vari come cuscini, giunti, riduttori, etc.

### 3) FORZANTE GENERICA

$$\underline{Q}(t, \Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{\tilde{Q}}(\omega, \Omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad \underline{\tilde{Q}}(\omega, \Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{Q}(t, \Omega) e^{-j\omega t} dt \quad (3.1.3)$$

Nel caso di forzante generica, la forzante è la sovrapposizione di un numero infinito non numerabile di forzanti armoniche elementari di pulsazione  $\omega$ . In generale non è da escludere che anche lo spettro della forzante possa dipendere dalla speed della macchina  $\Omega$ :  $\underline{\tilde{Q}}(\omega, \Omega)$ . Anche in questo caso le forzanti generiche possono essere prodotte dall'interazione palare (le forzanti di fluido) e da componenti vari come cuscini, giunti, riduttori, etc. Si riporta in Fig. 12 un esempio di spettro di forzante generica, in questo caso una forzante simil-armonica. Si ricorda che nella realtà segnali armonici e periodici perfetti non esistono perché avrebbero un'energia infinita. Quando si misura una vibrazione armonica in realtà si misura un segnale simil-armonico avente uno spettro come quello riportato in Fig. 12.

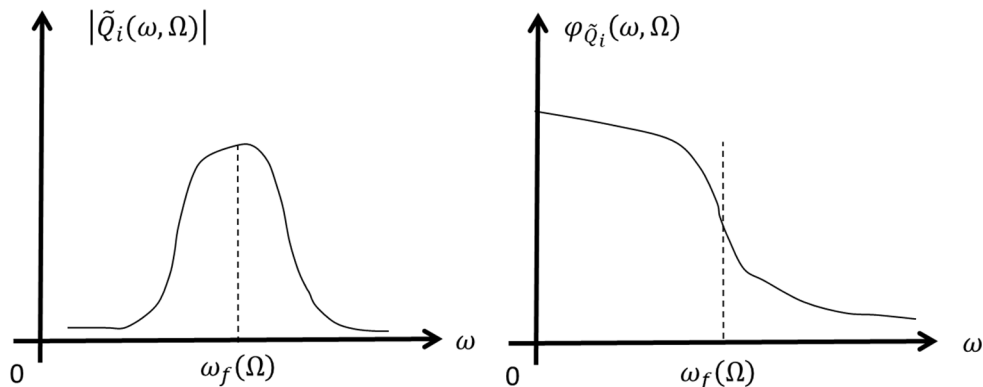


Figura 12 Esempio di spettro di forzante generica

Prima di proseguire dobbiamo ora sottolineare un fatto importante su rotor rigidi e rotor elastici, su cui torneremo in seguito. Nella realtà tutti i rotor sono ovviamente elastici (i corpi rigidi non esistono). Quando un rotore può dunque essere considerato approssimativamente rigido? Un rotore può essere considerato rigido se lo spettro della forzante si trova a frequenze ragionevolmente più basse delle frequenze dei primi modi elastici della macchina (quelli, come vedremo, associati alla sua elasticità). E perché è importante studiare i rotor rigidi, a parte l'ovvia semplificazione a livello modellistico? Come vedremo a breve, spesso (non sempre!) le pulsazioni caratteristiche dello spettro della forzante tendono a crescere quando la speed della macchina  $\Omega$  cresce. Dunque spesso la macchina viene forzata a frequenze tanto più alte quanto più alta è la sua velocità di rotazione  $\Omega$ . Quindi, in generale, una macchina potrà essere considerata approssimativamente rigida quando va piano ( $\Omega$  bassa). Studiare i rotor rigidi è dunque importante perché ci sono molte situazioni in cui la velocità della macchina è bassa (anche se la speed nominale e la speed massima sono molto alte!), come ad esempio quando la macchina rallenta, viene accesa o viene spenta. Bisogna dunque prestare attenzione al comportamento della macchina in tutto il range di velocità di lavoro  $\Omega \in [0 \quad \Omega_{max}]!$

### 3.2 Diagrammi di Campbell, diagrammi di Bode e whirl forzato

Studiamo ora la risposta forzata del sistema soggetto alle varie forzanti introdotte precedentemente e facendo uso degli strumenti descritti nel capitolo 1.

1) FORZANTE ARMONICA SINCRONA:

$$M\ddot{\underline{q}} + (\Omega G + C)\dot{\underline{q}} + K\underline{q} = \underline{Q}(t) = \text{Re} \left[ \underline{Q}_0(\Omega) e^{j\Omega t} \right]. \quad (3.2.1)$$

Tra i vari tipi di forzante armonica sincrona ci occupiamo di quella generata dallo sbilanciamento, essendo di gran lunga quello più importante a livello pratico:

$$M\ddot{\underline{q}} + (\Omega G + C)\dot{\underline{q}} + K\underline{q} = \underline{Q}_\varepsilon(t) = \text{Re} \left[ \underline{Q}_\varepsilon(\Omega) e^{j\Omega t} \right]. \quad (3.2.2)$$

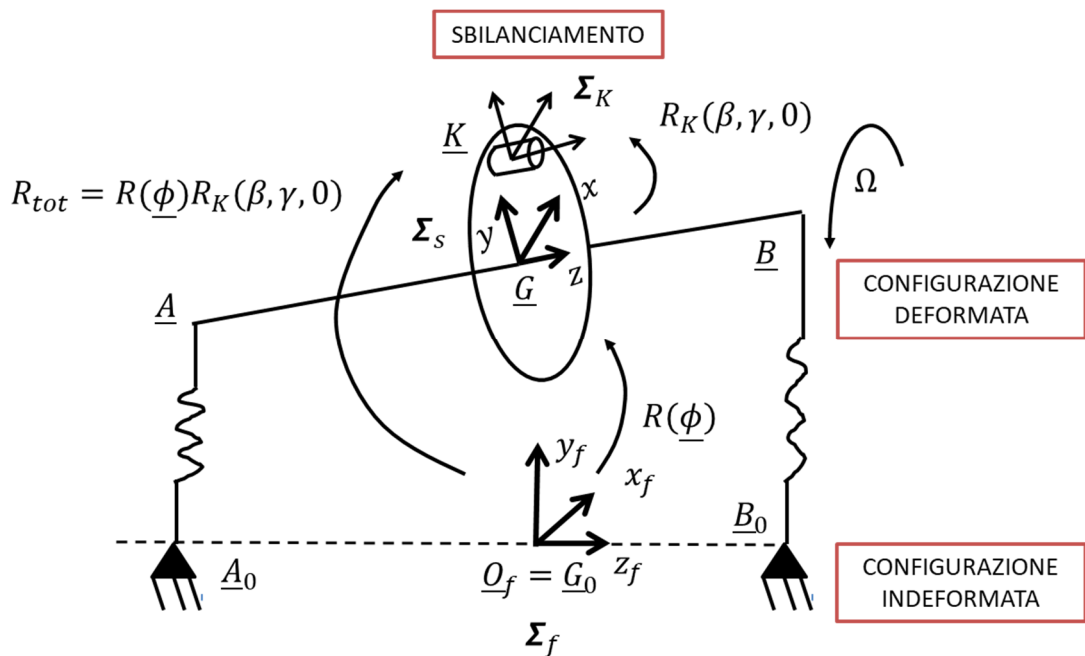


Figura 13 Rotore sbilanciato

Con riferimento alla Fig. 13, descriviamo il rotore attraverso il suo centro di massa  $\underline{G}$  e i suoi angoli di Eulero  $\underline{\phi}$

$$\underline{G} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \quad \underline{\phi} = \begin{pmatrix} \theta \\ \psi \\ \varphi \end{pmatrix} \quad (3.2.3)$$

e supponiamo massa e inerzia:

$$m, \quad \sigma_{Gs} = \begin{bmatrix} I_d & 0 & 0 \\ 0 & I_d & 0 \\ 0 & 0 & I_p \end{bmatrix}. \quad (3.2.4)$$

Posiziono dunque lo sbilanciamento (solidale al rotore rigido) nel punto  $\underline{K}$  sul piano  $xy$  della terna solidale. La sua posizione in tale terna sarà dunque

$$(\underline{K} - \underline{G})_S = \begin{pmatrix} \varepsilon \cos(\delta) \\ \varepsilon \sin(\delta) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.2.5)$$

dove  $\varepsilon$  è la distanza del punto dall'asse di rotazione del rotore e  $\delta$  è la sua fase. Lo sbilanciamento avrà proprietà inerziali (lo si può immaginare come un cilindretto rigidamente montato sul rotore)

$$m_K, \sigma_K = \begin{bmatrix} I_{dK} & 0 & 0 \\ 0 & I_{dK} & 0 \\ 0 & 0 & I_{pK} \end{bmatrix}. \quad (3.2.4)$$

Chiameremo poi  $R(\underline{\phi})$  la solita matrice di rotazione che lega la terna solidale al rotore a quella inerziale e  $R_K(\beta, \gamma, 0)$  la matrice di rotazione che lega la terna solidale al rotore con la terna (sempre solidale al rotore) posizionata nel punto  $K$  dove si trova lo sbilanciamento.  $\beta$  e  $\gamma$  sono gli angoli di disassamento (rispetto alla terna solidale al rotore) con cui il cilindretto della massa sbilanciante è montato sul rotore. Chiaramente la matrice di rotazione che lega la terna inerziale alla terna dello sbilanciamento posizionata in  $K$  sarà

$$R_{tot} = R(\underline{\phi})R_K(\beta, \gamma, 0). \quad (3.2.5)$$

A questo punto le azioni d'inerzia generate dallo sbilanciamento posto in  $K$  sul rotore possono essere calcolate in modo esatto come:

$$\underline{F}_\varepsilon(t) = -m_K \underline{a}_K = -m_K \left[ \ddot{\underline{G}}_f + \dot{\underline{\omega}}_f \times (\underline{K} - \underline{G})_f + \underline{\omega}_f \times (\underline{\omega}_f \times (\underline{K} - \underline{G})_f) \right] \quad (3.2.6)$$

$$\underline{M}_\varepsilon(t) = -(\sigma_{Kf} \underline{\omega}_f)' = -(R_{tot} \sigma_K R_{tot}^T \underline{\omega}_f)' + (\underline{K} - \underline{G})_f \times \underline{F}_\varepsilon(t).$$

Possiamo adesso semplificare e linearizzare queste complicate espressioni facendo le solite due ipotesi di lavoro che adottiamo nello studio delle vibrazioni flessionali della macchine rotanti 1D (si veda il paragrafo 2.1):

- consideriamo solamente i gradi di libertà flessionali (visto che il nostro scopo è studiare la dinamica flessionale). In altre parole, delle 6 equazioni (3.2.6) considereremo solo la prima (traslazione lungo  $x_f$ ), la seconda (traslazione lungo  $y_f$ ), la quarta (rotazione attorno a  $x_f$ ) e la quinta (rotazione attorno a  $y_f$ ). Faremo inoltre le seguenti assunzioni sulle variabili del problema (soprattutto quelle relative ai DOF non di interesse):

$$\underline{G} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w = 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\underline{G}} = \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} = 0 \end{pmatrix}, \quad \ddot{\underline{G}} = \begin{pmatrix} \ddot{u} \cong 0 \\ \ddot{v} \cong 0 \\ \ddot{w} = 0 \end{pmatrix}, \quad (3.2.7)$$

$$\underline{\phi} = \begin{pmatrix} \theta \\ \psi \\ \varphi = 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\underline{\phi}} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\varphi} = \Omega = \text{cost} \end{pmatrix}, \quad \ddot{\underline{\phi}} = \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \cong 0 \\ \ddot{\psi} \cong 0 \\ \ddot{\varphi} = 0 \end{pmatrix}$$

dove  $\Omega$  è la speed della macchina (la velocità di rotazione della macchina attorno al suo asse di rotazione principale). Si noti in questo caso si considerino trascurabili anche le accelerazioni del centro di massa (ovviamente nel calcolo delle azioni inerziali associate allo sbilanciamento, non certo nelle equazioni di moto).

- linearizziamo poi il problema nell'intorno della configurazione nominale. In altre parole, studiamo il problema ai "piccoli spostamenti" nell'intorno della configurazione in questione. Da un punto di vista fisico, consideriamo tutte variabili del problema (vedi la (3.2.7)) piccole (eccetto ovviamente la speed della macchina  $\Omega$ ) e consideriamo piccole anche le loro derivate. Applicare questa ipotesi alle equazioni (3.2.6) equivale a considerare solamente i termini di ordine 0 (le costanti) e i termini di ordine 1 (la variabili stesse), ignorando qualunque altro termine di ordine superiore.

Applicando tali ipotesi alla (3.2.6) si ottiene dunque, dopo aver riordinato i termini:

$$\underline{Q}_\varepsilon(t) = \begin{pmatrix} F_{x\varepsilon} \\ F_{y\varepsilon} \\ M_{x\varepsilon} \\ M_{y\varepsilon} \end{pmatrix} = -M_K \ddot{\underline{q}}_\varepsilon - \Omega G_K \dot{\underline{q}}_\varepsilon, \quad \underline{q}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon \cos(\Omega t + \delta) \\ \varepsilon \sin(\Omega t + \delta) \\ \beta \cos(\Omega t + \gamma) \\ \beta \sin(\Omega t + \gamma) \end{pmatrix}. \quad (3.2.8)$$

$$M_K = \begin{pmatrix} m_K & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{dK} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{dK} \end{pmatrix}, \quad G_K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{pK} \\ 0 & 0 & -I_{pK} & 0 \end{pmatrix}.$$

Le prime due componenti di  $\underline{Q}_\varepsilon(t)$  danno la forza centrifuga prodotta dalla massa sbilanciante in  $K$  mentre le altre due componenti danno i momenti dovuti alle inerzie diametrali e a quelle polari (sbilanciamenti giroscopici) Introducendo il classico formalismo complesso, si ottiene infine:

$$\underline{q}_\varepsilon = \text{Re} [\underline{q}_{\varepsilon_0} e^{j\Omega t}] = \text{Re} \left[ \begin{pmatrix} \varepsilon e^{j\delta} \\ -j\varepsilon e^{j\delta} \\ \beta e^{j\gamma} \\ -j\beta e^{j\gamma} \end{pmatrix} e^{j\Omega t} \right], \quad \underline{q}_{\varepsilon_0} = \begin{pmatrix} \varepsilon e^{j\delta} \\ -j\varepsilon e^{j\delta} \\ \beta e^{j\gamma} \\ -j\beta e^{j\gamma} \end{pmatrix} \quad (3.2.9)$$

da cui chiaramente si ha, sostituendo la (3.2.9) nella (3.2.8),

$$\underline{Q}_\varepsilon(t) = \text{Re} [(\Omega^2 M_K - j\Omega^2 G_K) \underline{q}_{\varepsilon_0} e^{j\Omega t}] = \text{Re} [\Omega^2 \underline{b} e^{j\Omega t}], \quad \underline{b} = (M_K - jG_K) \underline{q}_{\varepsilon_0}, \quad \underline{Q}_\varepsilon = \Omega^2 \underline{b}. \quad (3.2.10)$$

Si nota infine che, non solo la forzante in questione è una forzante armonica sincrona, ma anche che, purtroppo, il suo modulo dipende  $\Omega^2$  (cosa che era lecito aspettarsi in presenza di azioni inerziali centrifughe e giroscopiche).

La soluzione del moto forzato del sistema può essere facilmente determinata grazie agli strumenti matematici introdotti nel capitolo 1 e si ha:

$$\underline{q}_f(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ \theta(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix} = \text{Re} [\underline{q}_0 e^{j\Omega t}] \quad (3.2.11)$$

$$\underline{q}_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \theta_0 \\ \psi_0 \end{pmatrix} = \alpha(\Omega, \Omega) \underline{Q}_\varepsilon(\Omega) = \alpha(\Omega, \Omega) \Omega^2 \underline{b} = [-\Omega^2 M + j\Omega(C + \Omega G) + K]^{-1} \Omega^2 \underline{b}$$

dove in questi casi è utile distinguere nella ricettanza  $\alpha(\Omega, \Omega)$  la doppia dipendenza dalla pulsazione della forzante e dalla velocità di rotazione della macchina (in questo caso uguali essendo la forzante armonica sincrona!).

Applicando il teorema di sovrapposizione modale in questo caso abbiamo:

$$\underline{q}_o = \alpha(\Omega, \Omega) \underline{Q}_\varepsilon(\Omega) = \sum_{k=1}^{2N} \frac{(q_{Rk} q_{Lk}^H)}{j\Omega - s_k} \Omega^2 \underline{b} = \Omega^2 \sum_{k=1}^{2N} \left( \frac{q_{Lk}^H \underline{b}}{j\Omega - s_k} \right) \underline{q}_{Rk} \quad N = 4 \quad (3.2.12)$$

da cui possiamo dedurre che i modi che maggiormente contribuiscono alla soluzione sono quelli in cui  $\left( \frac{q_{Lk}^H \underline{b}}{j\Omega - s_k} \right)$  è grande, ovvero quando  $\Omega$  è vicina a una delle pulsazioni proprie del sistema  $\omega_{pk}$  contenuta in  $s_k$  (corrispondenti alle risonanze del sistema) o quando  $q_{Lk}^H \underline{b}$  è grande (sbilanciamenti ortogonali al corrispondente autovettore).

Il diagramma di Campbell associato a questo caso è riportato in Fig. 14. Rispetto allo studio nel moto libero abbiamo aggiunto la curva del carico  $\omega_f(\Omega) = \Omega$  sul diagramma relativo alle pulsazioni proprie  $\omega_{pi}$ . Le intersezioni della curva del carico con i rami del diagramma  $\Omega_c$  sono dette pulsazioni critiche. Come vedremo quando analizzeremo il diagramma di Bode, se la velocità angolare della macchina coincide con una pulsazione critica, il sistema si troverà necessariamente in risonanza, ovvero la forzante andrà inevitabilmente a sollecitare il sistema in una pulsazione di risonanza. Il valore di smorzamento modale associato alle varie pulsazioni critiche  $\zeta_c$  può essere facilmente trovato riportando la pulsazione critica in questione  $\Omega_c$  sul diagramma dello smorzamento.

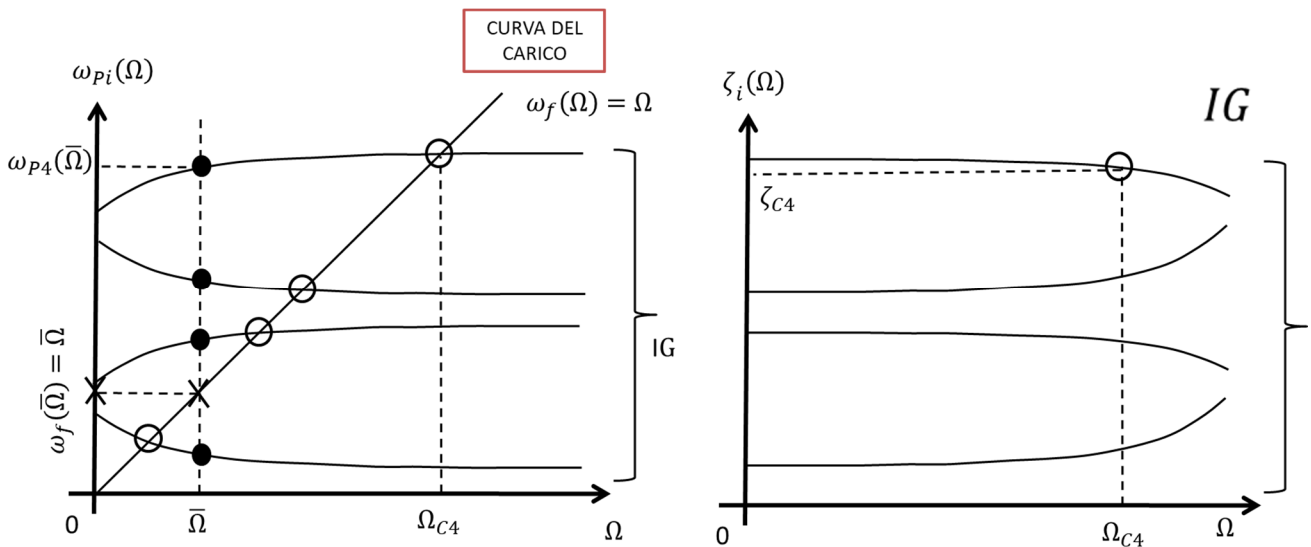


Figura 14 Diagramma di Campbell per rotore rigido con forzante armonica sincrona

Per capire quanto effettivamente vibra il sistema dobbiamo fare uso dei diagrammi di Bode. A tale fine dobbiamo prima specificare una velocità di lavoro della macchina  $\bar{\Omega}$  alla quale studiare il sistema. Riporto quindi tale velocità  $\bar{\Omega}$  sul diagramma di Campbell; l'intersezione tra la retta verticale passante per  $\bar{\Omega}$  e i 4 rami del diagramma delle pulsazioni proprie  $\omega_{pi}$  rappresentano le 4 pulsazioni proprie del sistema coincidenti, a loro volta, le pulsazioni di risonanza del sistema. A questo punto, supponendo di voler trovare quanto vale lo spostamento lungo  $x_f$  del centro di massa  $u_0$  (nel dominio della frequenza), posso tracciare i rispettivi diagrammi (Fig. 15). Per determinare il modulo e la fase dello spostamento  $u_0$  devo determinare sul diagramma di Bode il punto in cui agisce la forzante.



Ma questo può essere dedotto dal diagramma di Campbell intersecando la curva del carico con la sezione verticale passante per  $\bar{\Omega}$  (si vedano sempre la Fig. 14 e la Fig. 15).

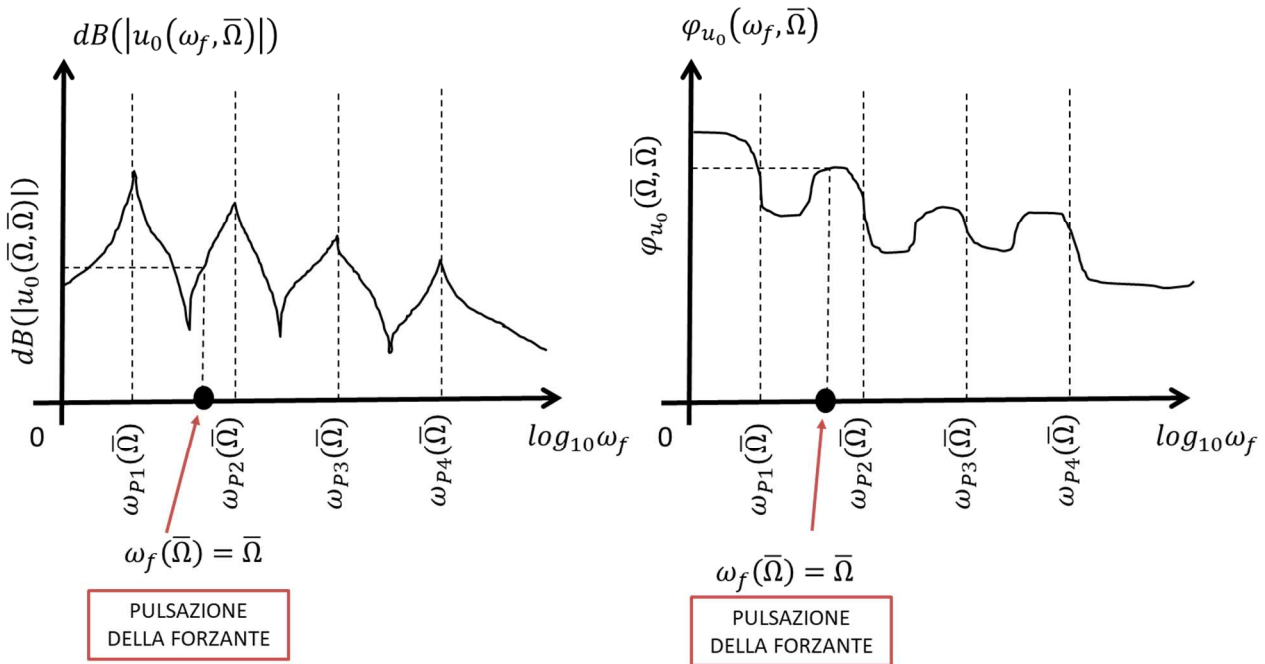


Figura 15 Diagramma di Bode per rotore rigido con forzante armonica sincrona

Guardando ai diagrammi di Campbell e di Bode, risulta chiaro il significato di pulsazione critica  $\Omega_c$ . Qualora infatti la pulsazione di lavoro della macchina  $\bar{\Omega}$  (la speed) si trovasse in corrispondenza di una critica  $\Omega_c$ , la pulsazione in cui la forzante agirebbe sulla macchina  $\omega_f(\bar{\Omega}) = \bar{\Omega}$  si troverebbe proprio in corrispondenza di una pulsazione propria  $\omega_{Pi}(\bar{\Omega})$  e quindi di una pulsazione di risonanza. Ci troveremmo quindi necessariamente in condizioni di massima amplificazione.

Concludiamo quindi con lo studio del whirl forzato, ovvero la traiettoria del centro di massa  $\underline{G}$  durante il suo moto forzato nel piano  $x_f y_f$ :

$$\underline{q}_f(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ \theta(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix} = \text{Re} \left[ \underline{q}_0 e^{j\Omega t} \right] = \text{Re} \left[ \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \theta_0 \\ \psi_0 \end{pmatrix} e^{j\Omega t} \right]. \quad (3.2.13)$$

Le traiettorie delle altre sezioni della macchina saranno anch'esse ellissi determinabili a partire da quella di  $\underline{G}$  mediante le formule fondamentali della cinematica dei corpi rigidi. Lo studio del moto di whirl forzato permette anche di conoscere direzione del moto di rivoluzione del rotore attorno all'asse  $z_f$  (se il modo è BW o FW). Analogamente a quanto fatto nel capitolo 2.1, ci concentriamo sulla parte traslazionale del moto

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} &= \text{Re} \left[ \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} e^{j\Omega t} \right] \\ \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} &= \text{Re} \left[ \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} e^{j\Omega t} \right] = \text{Re} \left[ \begin{matrix} m_{u0} e^{j\varphi_{u0}} e^{j\Omega t} \\ m_{v0} e^{j\varphi_{v0}} e^{j\Omega t} \end{matrix} \right] = \begin{bmatrix} m_{u0} \cos(\Omega t + \varphi_{u0}) \\ m_{v0} \cos(\Omega t + \varphi_{v0}) \end{bmatrix} = \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

$$= \begin{pmatrix} m_{u0} \cos \varphi_{u0} - m_{u0} \sin \varphi_{u0} \\ m_{v0} \cos \varphi_{v0} - m_{v0} \sin \varphi_{v0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \Omega t \\ \sin \Omega t \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \cos \Omega t \\ \sin \Omega t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}.$$

Dalla (3.2.14) si ottiene poi

$$\begin{pmatrix} \cos \Omega t \\ \sin \Omega t \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \quad (3.2.15)$$

da cui facendo la norma al quadrato

$$1 = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}^T (T^{-1})^T T^{-1} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}^T H \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}. \quad (3.2.16)$$

Poiché la matrice  $H$  per costruzione è una matrice simmetrica definita positiva, la (3.2.16) rappresenta l'equazione parametrica di un'ellisse centrata nell'origine ma ad assi ruotati. Più nel dettaglio, per il teorema spettrale, la matrice  $H$  ammette una base ortonormale di autovettori  $\underline{v}_{H1}$ ,  $\underline{v}_{H2}$  che determinano la direzione dei semiassi dell'ellisse in questione. La lunghezza dei semiassi è invece pari a  $\sqrt{\lambda_{H1}}$  e  $\sqrt{\lambda_{H2}}$  (gli autovalori sono reali e positivi perché  $H$ ). L'ellisse corrispondente al whirl libero è riportata in Fig. 16. Infine le fasi  $\varphi_{u0}$ ,  $\varphi_{v0}$  di  $u_0$  e  $v_0$  permettono di determinare anche la direzione (BW o FW) del moto forzato di rivoluzione del rotore attorno all'asse  $z$ . Se infatti vale la condizione

$$0 < \varphi_{v0} - \varphi_{u0} < \pi, \quad (3.2.17)$$

allora il moto di rivoluzione è BW e l'ellisse sarà percorsa in senso BW. Se invece

$$-\pi < \varphi_{v0} - \varphi_{u0} < 0, \quad (3.2.18)$$

il moto di rivoluzione è FW e l'ellisse sarà percorsa in senso FW. La rotazione del rotore avviene chiaramente alla pulsazione  $\Omega$  (la speed della macchina) mentre il moto di rivoluzione attorno all'asse  $z_f$  avviene alla pulsazione della forzante, in questo caso  $\omega_f(\bar{\Omega}) = \bar{\Omega}$ .

Si noti come, al contrario del moto libero, non essendo presente il termine esponenziale dovuto allo smorzamento, la traiettoria sarà sempre un'ellisse a prescindere dal valore dello smorzamento stesso. Se sono vicino a una risonanza e/o lo smorzamento modale è in generale piccolo, allora le dimensioni dell'ellisse saranno più grandi, altrimenti saranno più piccoli.

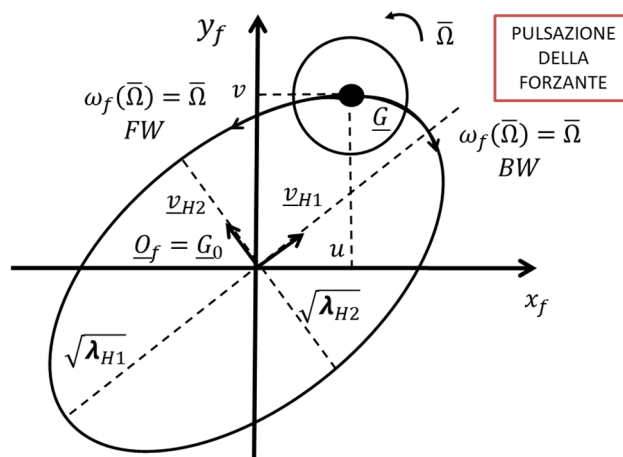


Figura 16 Whirl forzato per rotore rigido con forzante armonica sincrona (le componenti angolari  $\psi(t)$  e  $\theta(t)$  si comportano in modo analogo)

Le principali deformate forzate sono rappresentate in Fig. 17 e, nelle caratteristiche (BW e FW) e nella forma, ricordano i modi di vibrare bouncing e tilting descritti nel paragrafo 2.2. La prima deformata forzata IDF (simile al bouncing) non contiene punti nodali (ovvero punti di intersezione della deformata con l'asse  $z_f$ ) mentre la seconda IIDF (simile al tilting) ne contiene uno. Tuttavia le deformate forzate riguardano il moto forzato e non il moto libero, e non vanno dunque confuse con i modi di vibrare e le deformate modali!

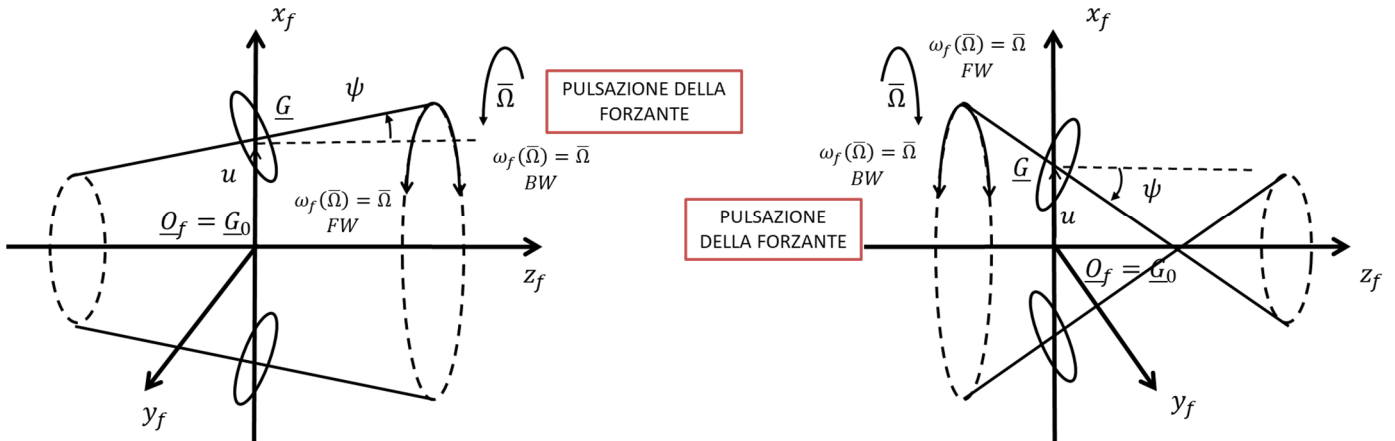


Figura 17 Deformate forzate per rotore rigido con forzante armonica sincrona

ELENCO RIASSUNTIVO DELLE VARIE DEFORMATE FORZATE:

- 1) FORMA: BOUNCING (B)  
CARATTERISTICA: BW o FW
- 2) FORMA: TILTING (T)  
CARETTERISTICA: BW o FW

2) FORZANTE ARMONICA SUPER /SUB-SINCRONA:

$$M\ddot{\underline{q}} + (\Omega G + C)\dot{\underline{q}} + K\underline{q} = \underline{Q}(t) = \text{Re} \left[ \underline{Q}_0(\Omega) e^{jn\Omega t} \right]. \quad (3.2.19)$$

La soluzione del moto forzato del sistema può essere facilmente determinata grazie agli strumenti matematici introdotti nel capitolo 1 e si ha:

$$\underline{q}_f(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ \theta(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix} = \text{Re} \left[ \underline{q}_0 e^{jn\Omega t} \right] \quad (3.2.20)$$

$$\underline{q}_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \theta_0 \\ \psi_0 \end{pmatrix} = \alpha(n\Omega, \Omega) \underline{Q}_0(\Omega) = [-n^2\Omega^2 M + jn\Omega(C + \Omega G) + K]^{-1} \underline{Q}_0(\Omega)$$

dove in questi casi è utile distinguere nella ricettanza  $\alpha(n\Omega, \Omega)$  la doppia dipendenza dalla pulsazione della forzante e dalla velocità di rotazione della macchina.

Applicando il teorema di sovrapposizione modale in questo caso abbiamo:

$$\underline{q}_o = \alpha(n\Omega, \Omega) \underline{Q}_o(\Omega) = \sum_{k=1}^{2N} \frac{(q_{Rk} q_{Lk}^H)}{jn\Omega - s_k} \underline{Q}_o(\Omega) = \sum_{k=1}^{2N} \left( \frac{q_{Lk}^H Q_o}{jn\Omega - s_k} \right) q_{Rk} \quad N = 4 \quad (3.2.21)$$

da cui possiamo dedurre che i modi che maggiormente contribuiscono alla soluzione sono quelli in cui  $\left( \frac{q_{Lk}^H Q_o}{jn\Omega - s_k} \right)$  è grande, ovvero quando  $n\Omega$  è vicina a una delle pulsazioni proprie del sistema  $\omega_{Pk}$  contenuta in  $s_k$  (corrispondenti alle risonanze del sistema) o quando  $q_{Lk}^H Q_o$  è grande (forzanti ortogonali al corrispondente autovettore).

Il diagramma di Campbell associato a questo caso è riportato in Fig. 18. Rispetto allo studio nel moto libero abbiamo aggiunto la curva del carico  $\omega_f(\Omega) = n\Omega$  sul diagramma relativo alle pulsazioni proprie  $\omega_{Pi}$ . Le intersezioni della curva del carico con i rami del diagramma  $\Omega_c$  sono ancora una volta le pulsazioni critiche. E' utile osservare come il caso di forzante armonica super-sincrona sia più problematico del caso di forzante armonica sub-sincrona in quanto una retta di carico più inclinata genera un maggior numero di pulsazioni critiche all'interno del range di velocità di lavoro della macchina (ovvero di intersezioni tra la retta di carico e i rami del diagramma). Il valore di smorzamento modale associato alle varie pulsazioni critiche  $\zeta_c$  può essere facilmente trovato riportando la pulsazione critica in questione  $\Omega_c$  sul diagramma dello smorzamento.

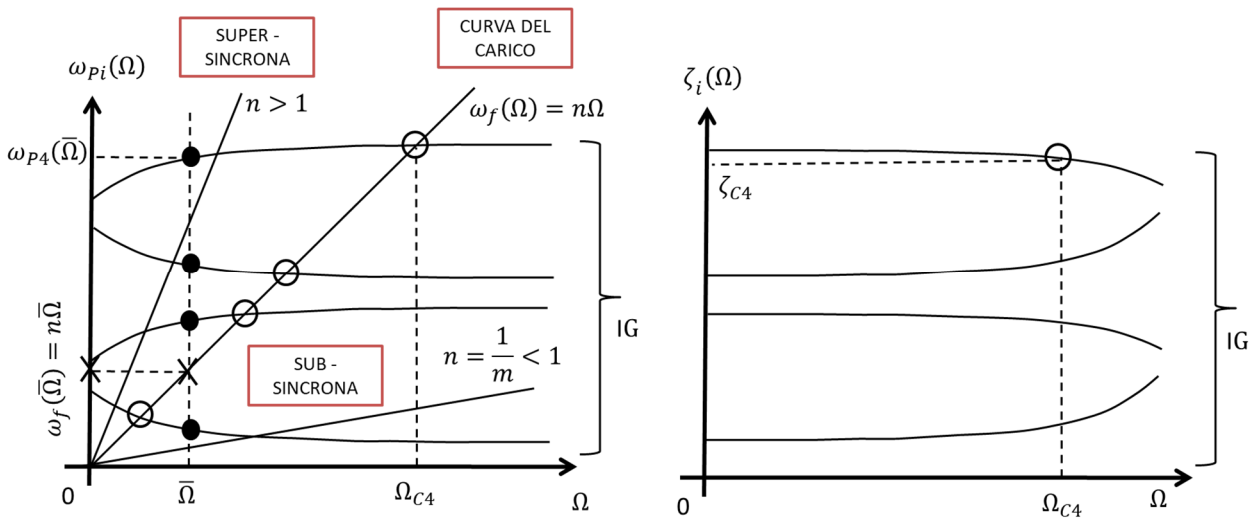


Figura 18 Diagramma di Campbell per rotore rigido con forzante armonica sub/super-sincrona

Per capire quanto effettivamente vibra il sistema dobbiamo fare uso dei diagrammi di Bode. A tale fine dobbiamo prima specificare una velocità di lavoro della macchina  $\bar{\Omega}$  alla quale studiare il sistema. Riporto quindi tale velocità  $\bar{\Omega}$  sul diagramma di Campbell; l'intersezione tra la retta verticale passante per  $\bar{\Omega}$  e i 4 rami del diagramma delle pulsazioni proprie  $\omega_{Pi}$  rappresentano le 4 pulsazioni proprie del sistema coincidenti, a loro volta, le pulsazioni di risonanza del sistema (qui per esempio nel caso supersincrono). A questo punto, supponendo di voler trovare quanto vale lo spostamento lungo  $x_f$  del centro di massa  $u_0$  (nel dominio della frequenza), posso tracciare i rispettivi diagrammi (Fig. 19). Per determinare il modulo e la fase dello spostamento  $u_0$  devo determinare sul

diagramma di Bode il punto in cui agisce la forzante. Ma questo può essere dedotto dal diagramma di Campbell intersecando la curva del carico con la sezione verticale passante per  $\bar{\Omega}$  (si vedano sempre la Fig. 18 e la Fig. 19).

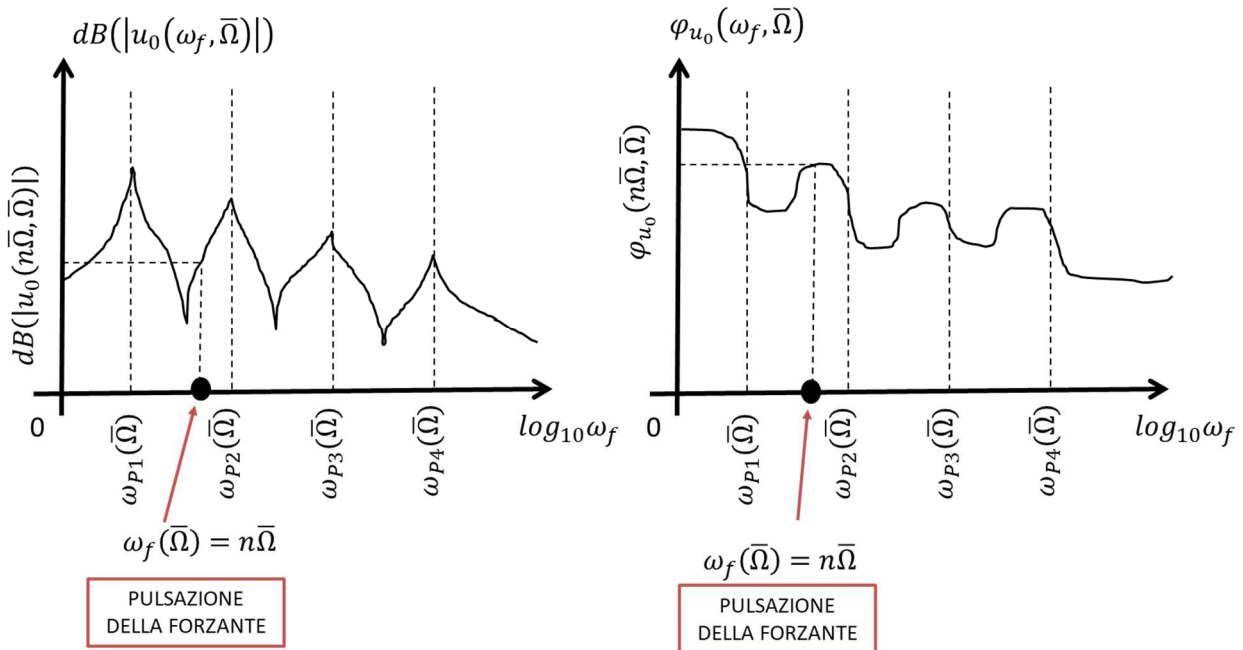


Figura 19 Diagramma di Bode per rotore rigido con forzante armonica sub/super-sincrona

Guardando ai diagrammi di Campbell e di Bode, risulta chiaro il significato di pulsazione critica  $\Omega_c$ . Qualora infatti la pulsazione di lavoro della macchina  $\bar{\Omega}$  (la speed) si trovasse in corrispondenza di una critica  $\Omega_c$ , la pulsazione in cui la forzante agirebbe sulla macchina  $\omega_f(\bar{\Omega}) = n\bar{\Omega}$  si troverebbe proprio in corrispondenza di una pulsazione propria  $\omega_{Pi}(\bar{\Omega})$  e quindi di una pulsazione di risonanza. Ci troveremmo quindi necessariamente in condizioni di massima amplificazione.

Concludiamo quindi con lo studio del whirl forzato, ovvero la traiettoria del centro di massa  $\underline{G}$  durante il suo moto forzato nel piano  $xy$ :

$$\underline{q}_f(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ \theta(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix} = Re \left[ \underline{q}_0 e^{jn\Omega t} \right] = Re \left[ \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \theta_0 \\ \psi_0 \end{pmatrix} e^{jn\Omega t} \right]. \quad (3.2.22)$$

Le traiettorie delle altre sezioni della macchina saranno anch'esse ellissi determinabili a partire da quella di  $\underline{G}$  mediante le formule fondamentali della cinematica dei corpi rigidi. Lo studio del moto di whirl forzato permette anche di conoscere direzione del moto di rivoluzione del rotore attorno all'asse  $z_f$  (se il modo è BW o FW). Analogamente a quanto fatto nel capitolo 2.1, ci concentriamo sulla parte traslazionale del moto

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = Re \left[ \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} e^{jn\Omega t} \right] \quad (3.2.23)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} &= Re \left[ \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} e^{jn\Omega t} \right] = Re \left[ \begin{pmatrix} m_{u0} e^{j\varphi_{u0}} e^{jn\Omega t} \\ m_{v0} e^{j\varphi_{v0}} e^{jn\Omega t} \end{pmatrix} \right] = \begin{bmatrix} m_{u0} \cos(n\Omega t + \varphi_{u0}) \\ m_{v0} \cos(n\Omega t + \varphi_{v0}) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} m_{u0} \cos \varphi_{u0} - m_{u0} \sin \varphi_{u0} \\ m_{v0} \cos \varphi_{v0} - m_{v0} \sin \varphi_{v0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos n\Omega t \\ \sin n\Omega t \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \cos n\Omega t \\ \sin n\Omega t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dalla (3.2.23) si ottiene poi

$$\begin{pmatrix} \cos n\Omega t \\ \sin n\Omega t \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \quad (3.2.24)$$

da cui facendo la norma al quadrato

$$1 = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}^T (T^{-1})^T T^{-1} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}^T H \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}. \quad (3.2.25)$$

Poiché la matrice  $H$  per costruzione è una matrice simmetrica definita positiva, la (3.2.25) rappresenta l'equazione parametrica di un'ellisse centrata nell'origine ma ad assi ruotati. Più nel dettaglio, per il teorema spettrale, la matrice  $H$  ammette una base ortonormale di autovettori  $\underline{v}_{H1}, \underline{v}_{H2}$  che determinano la direzione dei semiassi dell'ellisse in questione. La lunghezza dei semiassi è invece pari a  $\sqrt{\lambda_{H1}}$  e  $\sqrt{\lambda_{H2}}$  (gli autovalori sono reali e positivi perché  $H$ ). L'ellisse corrispondente al whirl libero è riportata in Fig. 20. Infine le fasi  $\varphi_{u0}, \varphi_{v0}$  di  $u_0$  e  $v_0$  permettono di determinare anche la direzione (BW o FW) del moto forzato di rivoluzione del rotore attorno all'asse  $z_f$ . Se infatti vale la condizione

$$0 < \varphi_{v_0} - \varphi_{u_0} < \pi, \quad (3.2.26)$$

allora il moto di rivoluzione è BW e l'ellisse sarà percorsa in senso BW. Se invece

$$-\pi < \varphi_{v_0} - \varphi_{u_0} < 0, \quad (3.2.27)$$

il moto di rivoluzione è FW e l'ellisse sarà percorsa in senso FW. La rotazione del rotore avviene chiaramente alla pulsazione  $\Omega$  (la speed della macchina) mentre il moto di rivoluzione attorno all'asse  $z$  avviene alla pulsazione della forzante, in questo caso  $\omega_f(\bar{\Omega}) = n\bar{\Omega}$ .

Si noti come, al contrario del moto libero, non essendo presente il termine esponenziale dovuto allo smorzamento, la traiettoria sarà sempre un'ellisse a prescindere dal valore dello smorzamento stesso. Se sono vicino a una risonanza e/o lo smorzamento modale è in generale piccolo, allora le dimensioni dell'ellisse saranno più grandi, altrimenti saranno più piccoli.

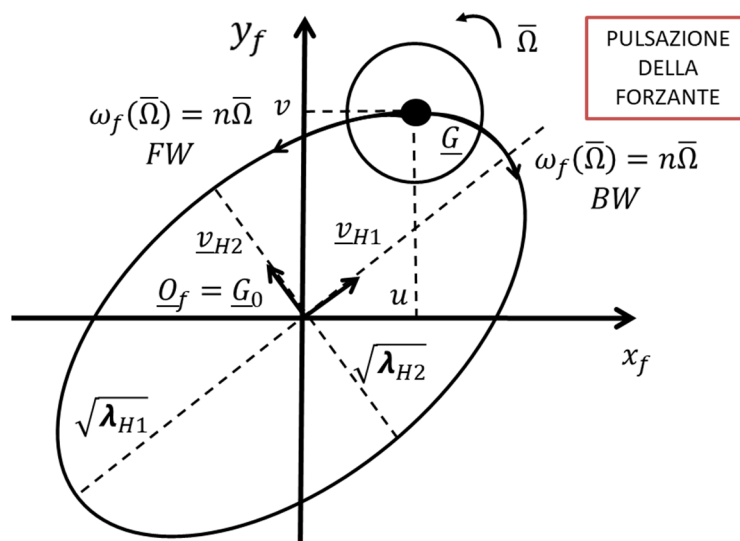


Figura 20 Whirl forzato per rotore rigido con forzante armonica sub/super-sincrona (le componenti angolari  $\psi(t)$  e  $\theta(t)$  si comportano in modo analogo)

Le principali deformate forzate sono rappresentate in Fig. 21 e, nelle caratteristiche (BW e FW) e nella forma, ricordano i modi di vibrare bouncing e tilting descritti nel paragrafo 2.2. La prima deformata forzata IDF (simile al bouncing) non contiene punti nodali (ovvero punti di intersezione della deformata con l'asse  $z_f$ ) mentre la seconda IIDF (simile al tilting) ne contiene uno. Tuttavia le deformate forzate riguardano il moto forzato e non il moto libero, e non vanno dunque confuse con i modi di vibrare e le deformate modali!

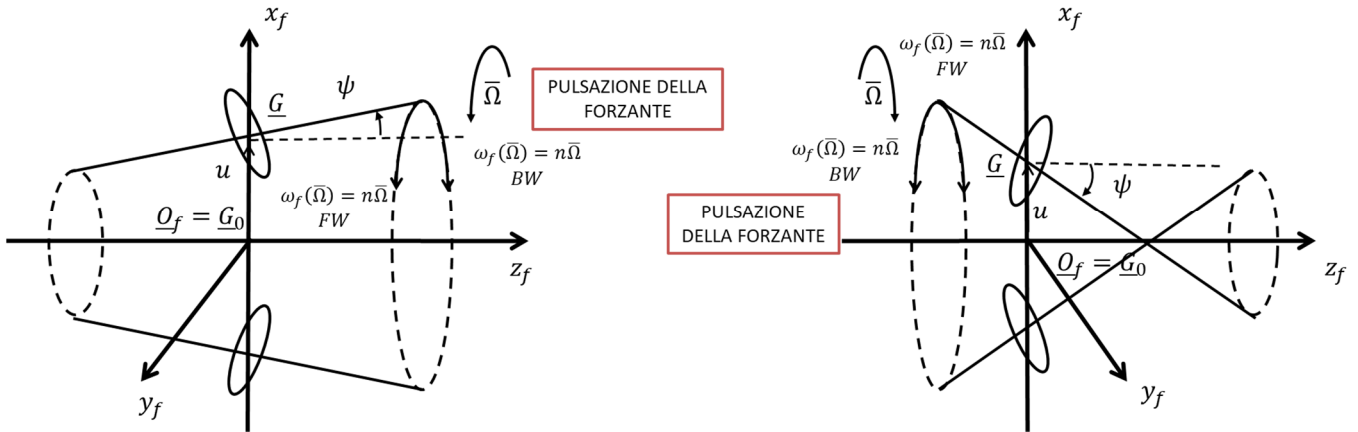


Figura 21 Deformate forzate per rotore rigido con forzante armonica sub/super-sincrona

ELENCO RIASSUNTIVO DELLE VARIE DEFORMATE FORZATE:

- 1) FORMA: BOUNCING (B)  
CARATTERISTICA: BW o FW
- 2) FORMA: TILTING (T)  
CARETTERISTICA: BW o FW

3) FORZANTE ARMONICA ASINCRONA:

$$M\ddot{\underline{q}} + (\Omega G + C)\dot{\underline{q}} + K\underline{q} = \underline{Q}(t) = \text{Re} \left[ \underline{Q}_0(\Omega) e^{j\omega_f t} \right]. \quad (3.2.28)$$

La soluzione del moto forzato del sistema può essere facilmente determinata grazie agli strumenti matematici introdotti nel capitolo 1 e si ha:

$$\underline{q}_f(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ \theta(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix} = \text{Re} \left[ \underline{q}_0 e^{j\omega_f t} \right] \quad (3.2.29)$$

$$\underline{q}_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \theta_0 \\ \psi_0 \end{pmatrix} = \alpha(\omega_f, \Omega) \underline{Q}_0(\Omega) = [-\omega_f^2 M + j\omega_f(C + \Omega G) + K]^{-1} \underline{Q}_0(\Omega)$$

dove in questi casi è utile distinguere nella ricettanza  $\alpha(\omega_f, \Omega)$  la doppia dipendenza dalla pulsazione della forzante e della velocità di rotazione della macchina.

Applicando il teorema di sovrapposizione modale in questo caso abbiamo:

$$\underline{q}_0 = \alpha(\omega_f, \Omega) \underline{Q}_0(\Omega) = \sum_{k=1}^{2N} \frac{(q_{Rk} q_{Lk}^H)}{j\omega_f - s_k} \underline{Q}_0(\Omega) = \sum_{k=1}^{2N} \left( \frac{q_{Lk}^H \underline{Q}_0}{j\omega_f - s_k} \right) q_{Rk} \quad N = 4 \quad (3.2.30)$$

da cui possiamo dedurre che i modi che maggiormente contribuiscono alla soluzione sono quelli in cui  $\left( \frac{q_{Lk}^H \underline{Q}_0}{j\omega_f - s_k} \right)$  è grande, ovvero quando  $\omega_f$  è vicina a una delle pulsazioni proprie del sistema  $\omega_{pk}$  contenuta in  $s_k$  (corrispondenti alle risonanze del sistema) o quando  $q_{Lk}^H \underline{Q}_0$  è grande (forzanti ortogonali al corrispondente autovettore).

Il diagramma di Campbell associato a questo caso è riportato in Fig. 22. Rispetto allo studio nel moto libero abbiamo aggiunto la curva del carico  $\omega_f(\Omega) = \omega_f = cost$  sul diagramma relativo alle pulsazioni proprie  $\omega_{pi}$ . Le intersezioni della curva del carico con i rami del diagramma  $\Omega_c$  sono ancora una volta le pulsazioni critiche. E' utile osservare come il caso di forzante armonica asincrona sia particolarmente favorevole in quanto una retta di carico orizzontale genera al massimo una pulsazione critica all'interno del range di velocità di lavoro della macchina (ovvero al massimo una intersezione tra la retta di carico e i rami del diagramma). Il valore di smorzamento modale associato alle varie pulsazioni critiche  $\zeta_c$  può essere facilmente trovato riportando la pulsazione critica in questione  $\Omega_c$  sul diagramma dello smorzamento.

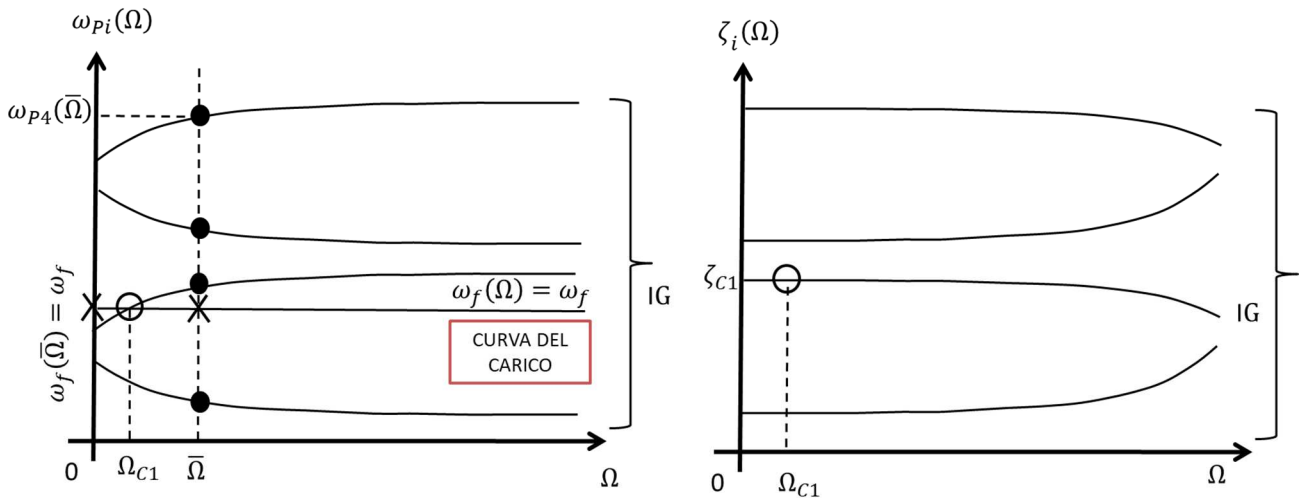


Figura 22 Diagramma di Campbell per rotore rigido con forzante armonica asincrona

Per capire quanto effettivamente vibra il sistema dobbiamo fare uso dei diagrammi di Bode. A tale fine dobbiamo prima specificare una velocità di lavoro della macchina  $\bar{\Omega}$  alla quale studiare il sistema. Riporto quindi tale velocità  $\bar{\Omega}$  sul diagramma di Campbell; l'intersezione tra la retta verticale passante per  $\bar{\Omega}$  e i 4 rami del diagramma delle pulsazioni proprie  $\omega_{pi}$  rappresentano le 4 pulsazioni proprie del sistema coincidenti, a loro volta, le pulsazioni di risonanza del sistema. A questo punto, supponendo di voler trovare quanto vale lo spostamento lungo  $x_f$  del centro di massa  $u_0$  (nel dominio della frequenza), posso tracciare i rispettivi diagrammi (Fig. 23). Per determinare il modulo e la fase dello spostamento  $u_0$  devo determinare sul diagramma di Bode il punto in cui agisce la forzante.



Ma questo può essere dedotto dal diagramma di Campbell intersecando la curva del carico con la sezione verticale passante per  $\bar{\Omega}$  (si vedano sempre la Fig. 22 e la Fig. 23).

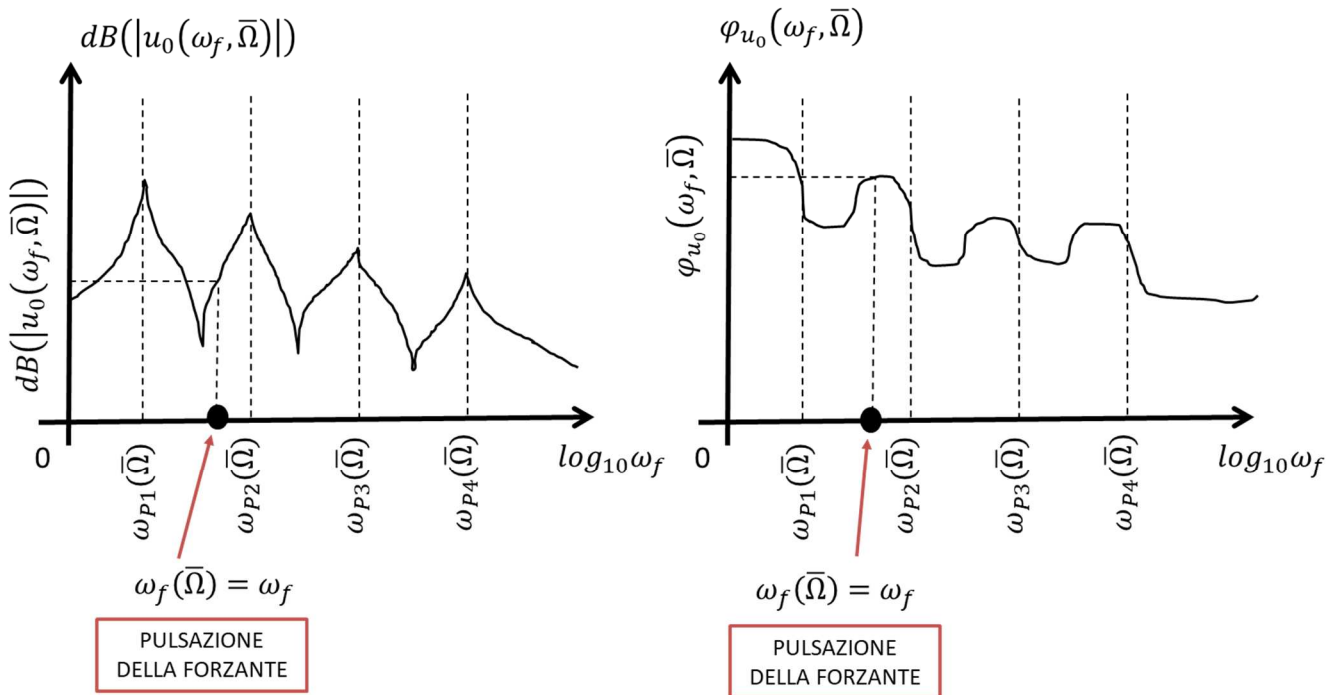


Figura 23 Diagramma di Bode per rotore rigido con forzante armonica asincrona

Guardando ai diagrammi di Campbell e di Bode, risulta chiaro il significato di pulsazione critica  $\Omega_c$ . Qualora infatti la pulsazione di lavoro della macchina  $\bar{\Omega}$  (la speed) si trovasse in corrispondenza di una critica  $\Omega_c$ , la pulsazione in cui la forzante agirebbe sulla macchina  $\omega_f(\bar{\Omega}) = \omega_f$  si troverebbe proprio in corrispondenza di una pulsazione propria  $\omega_{Pi}(\bar{\Omega})$  e quindi di una pulsazione di risonanza. Ci troveremmo quindi necessariamente in condizioni di massima amplificazione.

Concludiamo quindi con lo studio del whirl forzato, ovvero la traiettoria del centro di massa  $\underline{G}$  durante il suo moto forzato nel piano  $x_f y_f$ :

$$\underline{q}_f(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ \theta(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix} = Re \left[ \underline{q}_0 e^{j\omega_f t} \right] = Re \left[ \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \theta_0 \\ \psi_0 \end{pmatrix} e^{j\omega_f t} \right]. \quad (3.2.31)$$

Le traiettorie delle altre sezioni della macchina saranno anch'esse ellissi determinabili a partire da quella di  $\underline{G}$  mediante le formule fondamentali della cinematica dei corpi rigidi. Lo studio del moto di whirl forzato permette anche di conoscere direzione del moto di rivoluzione del rotore attorno all'asse  $z_f$  (se il modo è BW o FW). Analogamente a quanto fatto nel capitolo 2.1, ci concentriamo sulla parte traslazionale del moto

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \text{Re} \left[ \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} e^{j\omega_f t} \right] \quad (3.2.32)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} &= \text{Re} \left[ \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} e^{j\omega_f t} \right] = \text{Re} \left[ \begin{matrix} m_{u0} e^{j\varphi_{u0}} e^{j\omega_f t} \\ m_{v0} e^{j\varphi_{v0}} e^{j\omega_f t} \end{matrix} \right] = \begin{bmatrix} m_{u0} \cos(\omega_f t + \varphi_{u0}) \\ m_{v0} \cos(\omega_f t + \varphi_{v0}) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} m_{u0} \cos \varphi_{u0} - m_{u0} \sin \varphi_{u0} \\ m_{v0} \cos \varphi_{v0} - m_{v0} \sin \varphi_{v0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \omega_f t \\ \sin \omega_f t \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \cos \omega_f t \\ \sin \omega_f t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dalla (3.2.32) si ottiene poi

$$\begin{pmatrix} \cos \omega_f t \\ \sin \omega_f t \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \quad (3.2.33)$$

da cui facendo la norma al quadrato

$$1 = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}^T (T^{-1})^T T^{-1} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}^T H \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}. \quad (3.2.34)$$

Poiché la matrice  $H$  per costruzione è una matrice simmetrica definita positiva, la (3.2.34) rappresenta l'equazione parametrica di un'ellisse centrata nell'origine ma ad assi ruotati. Più nel dettaglio, per il teorema spettrale, la matrice  $H$  ammette una base ortonormale di autovettori  $\underline{v}_{H1}, \underline{v}_{H2}$  che determinano la direzione dei semiassi dell'ellisse in questione. La lunghezza dei semiassi è invece pari a  $\sqrt{\lambda_{H1}}$  e  $\sqrt{\lambda_{H2}}$  (gli autovalori sono reali e positivi perché  $H$ ). L'ellisse corrispondente al whirl libero è riportata in Fig. 24. Infine le fasi  $\varphi_{u0}, \varphi_{v0}$  di  $u_0$  e  $v_0$  permettono di determinare anche la direzione (BW o FW) del moto forzato di rivoluzione del rotore attorno all'asse  $z_f$ . Se infatti vale la condizione

$$0 < \varphi_{v0} - \varphi_{u0} < \pi, \quad (3.2.35)$$

allora il moto di rivoluzione è BW e l'ellisse sarà percorsa in senso BW. Se invece

$$-\pi < \varphi_{v0} - \varphi_{u0} < 0, \quad (3.2.36)$$

il moto di rivoluzione è FW e l'ellisse sarà percorsa in senso FW. La rotazione del rotore avviene chiaramente alla pulsazione  $\Omega$  (la speed della macchina) mentre il moto di rivoluzione attorno all'asse  $z_f$  avviene alla pulsazione della forzante, in questo caso  $\omega_f(\bar{\Omega}) = \omega_f$ .

Si noti come, al contrario del moto libero, non essendo presente il termine esponenziale dovuto allo smorzamento, la traiettoria sarà sempre un'ellisse a prescindere dal valore dello smorzamento stesso. Se sono vicino a una risonanza e/o lo smorzamento modale è in generale piccolo, allora le dimensioni dell'ellisse saranno più grandi, altrimenti saranno più piccoli.

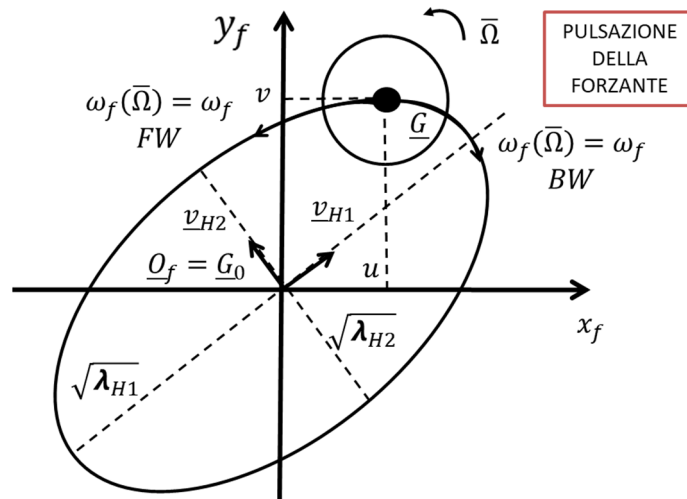


Figura 24 Whirl forzato per rotore rigido con forzante armonica asincrona (le componenti angolari  $\psi(t)$  e  $\theta(t)$  si comportano in modo analogo)

Le principali deformate forzate sono rappresentate in Fig. 25 e, nelle caratteristiche (BW e FW) e nella forma, ricordano i modi di vibrare bouncing e tilting descritti nel paragrafo 2.2. La prima deformata forzata IDF (simile al bouncing) non contiene punti nodali (ovvero punti di intersezione della deformata con l'asse  $z_f$ ) mentre la seconda IIDF (simile al tilting) ne contiene uno. Tuttavia le deformate forzate riguardano il moto forzato e non il moto libero, e non vanno dunque confuse con i modi di vibrare e le deformate modali!

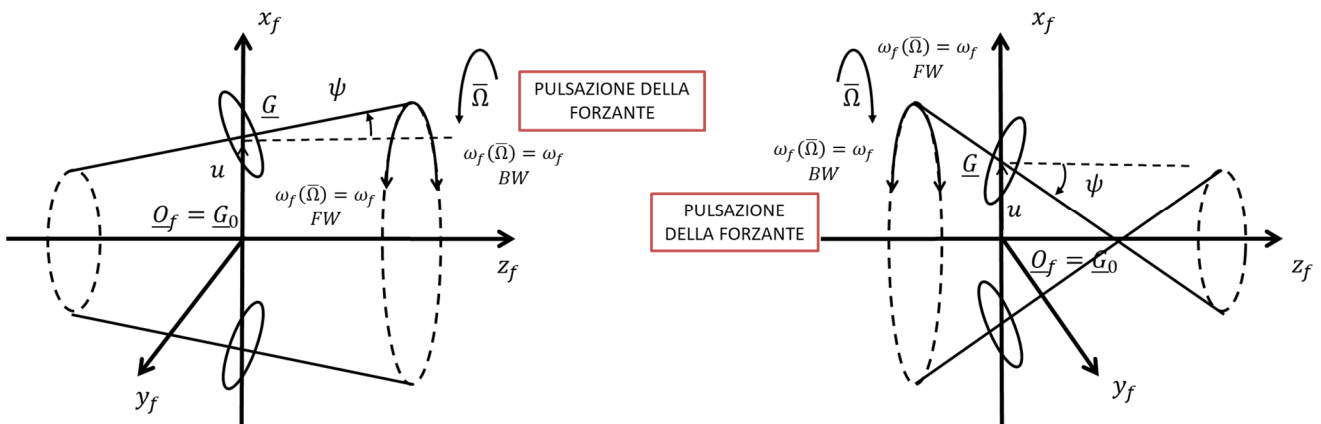


Figura 25 Deformate forzate per rotore rigido con forzante armonica asincrona

ELENCO RIASSUNTIVO DELLE VARIE DEFORMATE FORZATE:

- 1) FORMA: BOUNCING (B)  
CARATTERISTICA: BW o FW
- 2) FORMA: TILTING (T)  
CARETTERISTICA: BW o FW

4) FORZANTE ARMONICA GENERICI:

$$M\ddot{\underline{q}} + (\Omega G + C)\dot{\underline{q}} + K\underline{q} = \underline{Q}(t) = \text{Re} \left[ \underline{Q}_0(\Omega) e^{j\omega_f(\Omega)t} \right]. \quad (3.2.37)$$

La soluzione del moto forzato del sistema può essere facilmente determinata grazie agli strumenti matematici introdotti nel capitolo 1 e si ha:

$$\underline{q}_f(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ \theta(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix} = \text{Re} \left[ \underline{q}_0 e^{j\omega_f(\Omega)t} \right] \quad (3.2.38)$$

$$\underline{q}_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \theta_0 \\ \psi_0 \end{pmatrix} = \alpha(\omega_f(\Omega), \Omega) \underline{Q}_0(\Omega) = [-\omega_f(\Omega)^2 M + j\omega_f(\Omega)(C + \Omega G) + K]^{-1} \underline{Q}_0(\Omega)$$

dove in questi casi è utile distinguere nella ricettanza  $\alpha(\omega_f(\Omega), \Omega)$  la doppia dipendenza dalla pulsazione della forzante e della velocità di rotazione della macchina.

Applicando il teorema di sovrapposizione modale in questo caso abbiamo:

$$\underline{q}_0 = \alpha(\omega_f(\Omega), \Omega) \underline{Q}_0(\Omega) = \sum_{k=1}^{2N} \frac{(q_{Rk} q_{Lk}^H)}{j\omega_f(\Omega) - s_k} \underline{Q}_0(\Omega) = \sum_{k=1}^{2N} \left( \frac{q_{Lk}^H Q_0}{j\omega_f(\Omega) - s_k} \right) \underline{q}_{Rk} \quad N = 4 \quad (3.2.39)$$

da cui possiamo dedurre che i modi che maggiormente contribuiscono alla soluzione sono quelli in cui  $\left( \frac{q_{Lk}^H Q_0}{j\omega_f(\Omega) - s_k} \right)$  è grande, ovvero quando  $\omega_f(\Omega)$  è vicina a una delle pulsazioni proprie del sistema  $\omega_{Pk}$  contenuta in  $s_k$  (corrispondenti alle risonanze del sistema) o quando  $q_{Lk}^H Q_0$  è grande (forzanti ortogonali al corrispondente autovettore).

Il diagramma di Campbell associato a questo caso è riportato in Fig. 26. Rispetto allo studio nel moto libero abbiamo aggiunto la curva del carico  $\omega_f(\Omega)$  sul diagramma relativo alle pulsazioni proprie  $\omega_{Pi}$ . Le intersezioni della curva del carico con i rami del diagramma  $\Omega_c$  sono ancora una volta le pulsazioni critiche. Il valore di smorzamento modale associato alle varie pulsazioni critiche  $\zeta_c$  può essere facilmente trovato riportando la pulsazione critica in questione  $\Omega_c$  sul diagramma dello smorzamento.

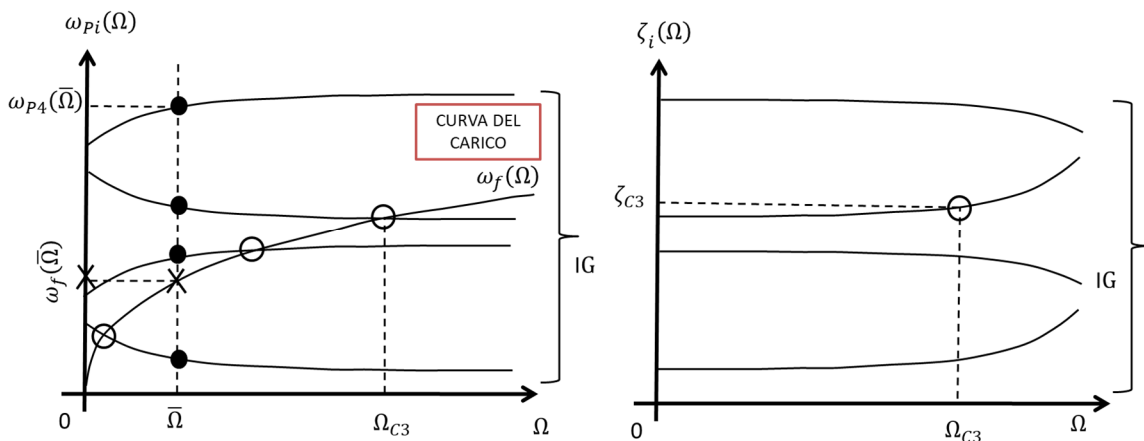


Figura 26 Diagramma di Campbell per rotore rigido con forzante armonica generica

Per capire quanto effettivamente vibra il sistema dobbiamo fare uso dei diagrammi di Bode. A tale fine dobbiamo prima specificare una velocità di lavoro della macchina  $\bar{\Omega}$  alla quale studiare il sistema. Riporto quindi tale velocità  $\bar{\Omega}$  sul diagramma di Campbell; l'intersezione tra la retta verticale passante per  $\bar{\Omega}$  e i 4 rami del diagramma delle pulsazioni proprie  $\omega_{p_i}$  rappresentano le 4 pulsazioni proprie del sistema coincidenti, a loro volta, le pulsazioni di risonanza del sistema. A questo punto, supponendo di voler trovare quanto vale lo spostamento lungo  $x_f$  del centro di massa  $u_0$  (nel dominio della frequenza), posso tracciare i rispettivi diagrammi (Fig. 27). Per determinare il modulo e la fase dello spostamento  $u_0$  devo determinare sul diagramma di Bode il punto in cui agisce la forzante. Ma questo può essere dedotto dal diagramma di Campbell intersecando la curva del carico con la sezione verticale passante per  $\bar{\Omega}$  (si vedano sempre la Fig. 26 e la Fig. 27).

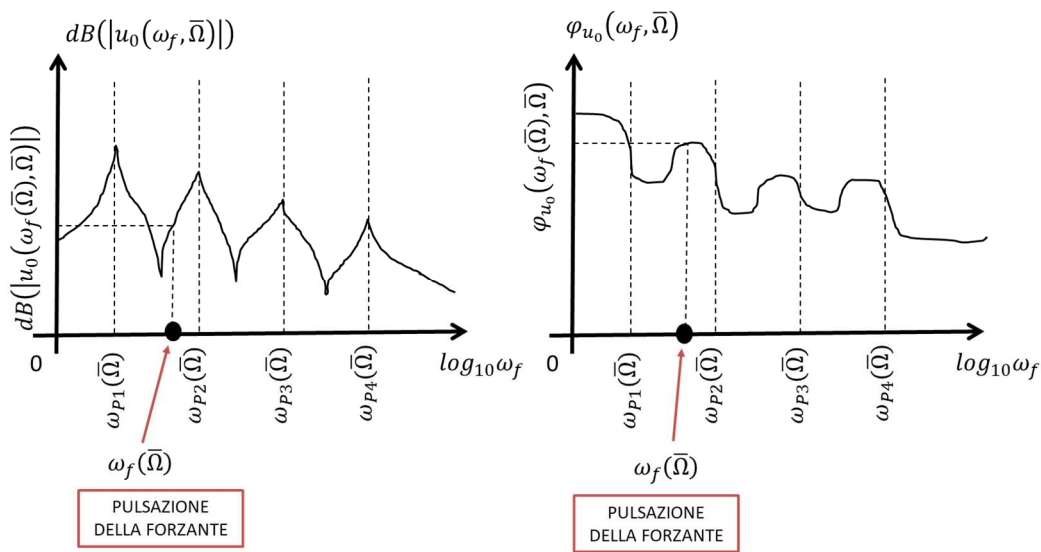


Figura 27 Diagramma di Bode per rotore rigido con forzante armonica generica

Guardando ai diagrammi di Campbell e di Bode, risulta chiaro il significato di pulsazione critica  $\Omega_c$ . Qualora infatti la pulsazione di lavoro della macchina  $\bar{\Omega}$  (la speed) si trovasse in corrispondenza di una critica  $\Omega_c$ , la pulsazione in cui la forzante agirebbe sulla macchina  $\omega_f(\bar{\Omega})$  si troverebbe proprio in corrispondenza di una pulsazione propria  $\omega_{p_i}(\bar{\Omega})$  e quindi di una pulsazione di risonanza. Ci troveremmo quindi necessariamente in condizioni di massima amplificazione.

Concludiamo quindi con lo studio del whirl forzato, ovvero la traiettoria del centro di massa  $\underline{G}$  durante il suo moto forzato nel piano  $x_f y_f$ :

$$\underline{q}_f(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ \theta(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix} = Re \left[ \underline{q}_0 e^{j\omega_f(\Omega)t} \right] = Re \left[ \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \theta_0 \\ \psi_0 \end{pmatrix} e^{j\omega_f(\Omega)t} \right]. \quad (3.2.40)$$

Le traiettorie delle altre sezioni della macchina saranno anch'esse ellissi determinabili a partire da quella di  $\underline{G}$  mediante le formule fondamentali della cinematica dei corpi rigidi. Lo studio del moto di whirl forzato permette anche di conoscere direzione del moto di rivoluzione del rotore attorno all'asse  $z_f$  (se il modo è BW o FW). Analogamente a quanto fatto nel capitolo 2.1, ci concentriamo sulla parte traslazionale del moto

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \text{Re} \left[ \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} e^{j\omega_f(\Omega)t} \right] \quad (3.2.41)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} &= \text{Re} \left[ \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} e^{j\omega_f(\Omega)t} \right] = \text{Re} \begin{bmatrix} m_{u0} e^{j\varphi_{u0}} e^{j\omega_f(\Omega)t} \\ m_{v0} e^{j\varphi_{v0}} e^{j\omega_f(\Omega)t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{u0} \cos(\omega_f(\Omega)t + \varphi_{u0}) \\ m_{v0} \cos(\omega_f(\Omega)t + \varphi_{v0}) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} m_{u0} \cos \varphi_{u0} - m_{u0} \sin \varphi_{u0} \\ m_{v0} \cos \varphi_{v0} - m_{v0} \sin \varphi_{v0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \omega_f(\Omega)t \\ \sin \omega_f(\Omega)t \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \cos \omega_f(\Omega)t \\ \sin \omega_f(\Omega)t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dalla (3.2.41) si ottiene poi

$$\begin{pmatrix} \cos \omega_f t \\ \sin \omega_f t \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \quad (3.2.42)$$

da cui facendo la norma al quadrato

$$1 = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}^T (T^{-1})^T T^{-1} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}^T H \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}. \quad (3.2.43)$$

Poiché la matrice  $H$  per costruzione è una matrice simmetrica definita positiva, la (3.2.43) rappresenta l'equazione parametrica di un'ellisse centrata nell'origine ma ad assi ruotati. Più nel dettaglio, per il teorema spettrale, la matrice  $H$  ammette una base ortonormale di autovettori  $\underline{v}_{H1}$ ,  $\underline{v}_{H2}$  che determinano la direzione dei semiassi dell'ellisse in questione. La lunghezza dei semiassi è invece pari a  $\sqrt{\lambda_{H1}}$  e  $\sqrt{\lambda_{H2}}$  (gli autovalori sono reali e positivi perché  $H$ ). L'ellisse corrispondente al whirl libero è riportata in Fig. 28. Infine le fasi  $\varphi_{u0}$ ,  $\varphi_{v0}$  di  $u_0$  e  $v_0$  permettono di determinare anche la direzione (BW o FW) del moto forzato di rivoluzione del rotore attorno all'asse  $z_f$ . Se infatti vale la condizione

$$0 < \varphi_{v0} - \varphi_{u0} < \pi, \quad (3.2.44)$$

allora il moto di rivoluzione è BW e l'ellisse sarà percorsa in senso BW. Se invece

$$-\pi < \varphi_{v0} - \varphi_{u0} < 0, \quad (3.2.45)$$

il moto di rivoluzione è FW e l'ellisse sarà percorsa in senso FW. La rotazione del rotore avviene chiaramente alla pulsazione  $\Omega$  (la speed della macchina) mentre il moto di rivoluzione attorno all'asse  $z_f$  avviene alla pulsazione della forzante, in questo caso  $\omega_f(\bar{\Omega})$ .

Si noti come, al contrario del moto libero, non essendo presente il termine esponenziale dovuto allo smorzamento, la traiettoria sarà sempre un'ellisse a prescindere dal valore dello smorzamento stesso. Se sono vicino a una risonanza e/o lo smorzamento modale è in generale piccolo, allora le dimensioni dell'ellisse saranno più grandi, altrimenti saranno più piccoli.

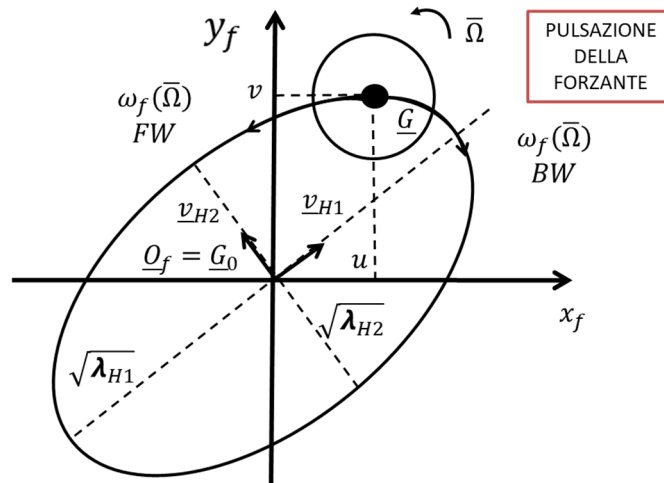


Figura 28 Whirl forzato per rotore rigido con forzante armonica generica (le componenti angolari  $\psi(t)$  e  $\theta(t)$  si comportano in modo analogo)

Le principali deformate forzate sono rappresentate in Fig. 29 e, nelle caratteristiche (BW e FW) e nella forma, ricordano i modi di vibrare bouncing e tilting descritti nel paragrafo 2.2. La prima deformata forzata IDF (simile al bouncing) non contiene punti nodali (ovvero punti di intersezione della deformata con l'asse  $z_f$ ) mentre la seconda IIDF (simile al tilting) ne contiene uno. Tuttavia le deformate forzate riguardano il moto forzato e non il moto libero, e non vanno dunque confuse con i modi di vibrare e le deformate modali!

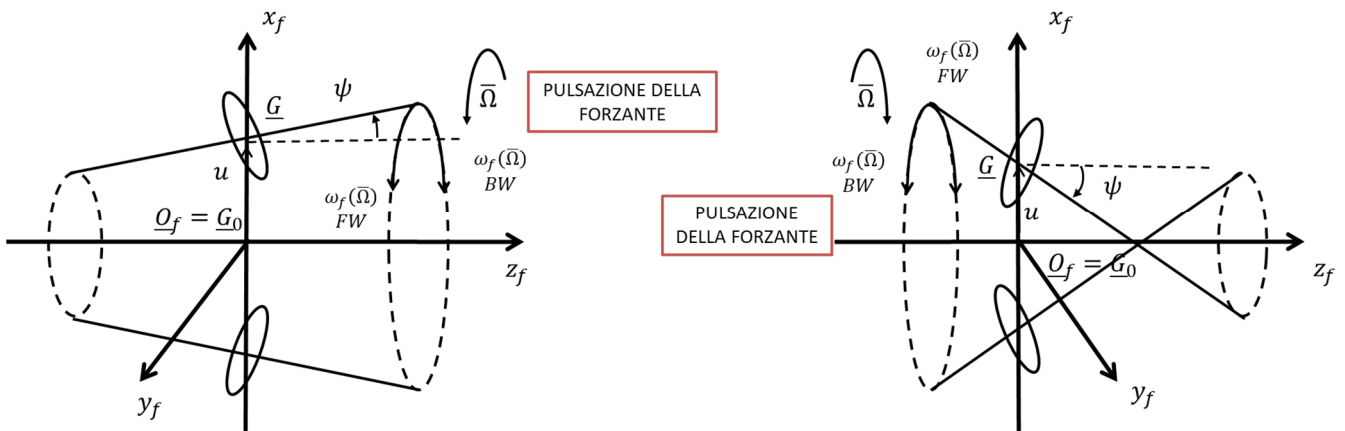


Figura 29 Deformate forzate per rotore rigido con forzante armonica generica

ELENCO RIASSUNTIVO DELLE VARIE DEFORMATE FORZATE:

- 1) FORMA: BOUNCING (B)  
CARATTERISTICA: BW o FW
- 2) FORMA: TILTING (T)  
CARETTERISTICA: BW o FW

5) FORZANTE PERIODICA:

$$M\ddot{\underline{q}} + (\Omega G + C)\dot{\underline{q}} + K\underline{q} = \underline{Q}(t) = Re\left[\sum_{k=0}^{\infty} \underline{c}_k(\Omega)e^{j\omega_0(\Omega)kt}\right]. \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}. \quad (3.2.46)$$

La soluzione del moto forzato del sistema può essere facilmente determinata grazie agli strumenti matematici introdotti nel capitolo 1 e si ha:

$$\underline{q}_f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \underline{q}_k(t) = Re\left(\sum_{k=0}^{\infty} [\alpha(k\omega_0, \Omega)\underline{c}_k(\Omega)e^{j\omega_0(\Omega)kt}]\right),$$

$$\underline{q}_k(t) = Re\left[\alpha(k\omega_0, \Omega)\underline{c}_k(\Omega)e^{j\omega_0(\Omega)kt}\right] \quad (3.2.47)$$

$$\underline{q}_{k0} = \begin{pmatrix} u_{k0} \\ v_{k0} \\ \theta_{k0} \\ \psi_{k0} \end{pmatrix} = \alpha(k\omega_0(\Omega), \Omega)\underline{c}_k(\Omega) = [-k^2\omega_0(\Omega)^2M + jk\omega_0(\Omega)(C + \Omega G) + K]^{-1}\underline{c}_k(\Omega)$$

dove in questi casi è utile distinguere nella ricettanza  $\alpha(k\omega_0(\Omega), \Omega)$  la doppia dipendenza dalla pulsazione della forzante e della velocità di rotazione della macchina.

Applicando il teorema di sovrapposizione modale in questo caso abbiamo:

$$\underline{q}_k(t) = Re\left[\alpha(k\omega_0(\Omega), \Omega)\underline{c}_k(\Omega)e^{j\omega_0(\Omega)kt}\right] = Re\left[\sum_{m=1}^{2N} \frac{(q_{Rm} q_{Lm}^H)}{j\omega_0(\Omega)k - s_m} \underline{c}_k(\Omega)e^{j\omega_0(\Omega)kt}\right] =$$

$$Re\left[\sum_{m=1}^{2N} \left(\frac{q_{Lm}^H \underline{c}_k}{j\omega_0(\Omega)k - s_m}\right) q_{Rm} e^{j\omega_0(\Omega)kt}\right], \quad N = 4 \quad (3.2.48)$$

da cui possiamo dedurre che i modi che maggiormente contribuiscono alle singole armoniche della soluzione sono quelli in cui  $\left(\frac{q_{Lm}^H \underline{c}_k}{j\omega_0(\Omega)k - s_m}\right)$  è grande, ovvero quando  $\omega_0(\Omega)k$  è vicina a una delle pulsazioni proprie del sistema  $\omega_{pk}$  contenuta in  $s_k$  (corrispondenti alle risonanze del sistema) o quando  $q_{Lk}^H \underline{c}_k$  è grande (forzanti ortogonali al corrispondente autovettore).

Il diagramma di Campbell associato a questo caso è riportato in Fig. 30. Rispetto allo studio nel moto libero abbiamo aggiunto la curva del carico  $\omega_0(\Omega)k$  sul diagramma relativo alle pulsazioni proprie  $\omega_{pi}$ . Le intersezioni della curva del carico con i rami del diagramma  $\Omega_c$  sono ancora una volta le pulsazioni critiche. Il valore di smorzamento modale associato alle varie pulsazioni critiche  $\zeta_c$  può essere facilmente trovato riportando la pulsazione critica in questione  $\Omega_c$  sul diagramma dello smorzamento.



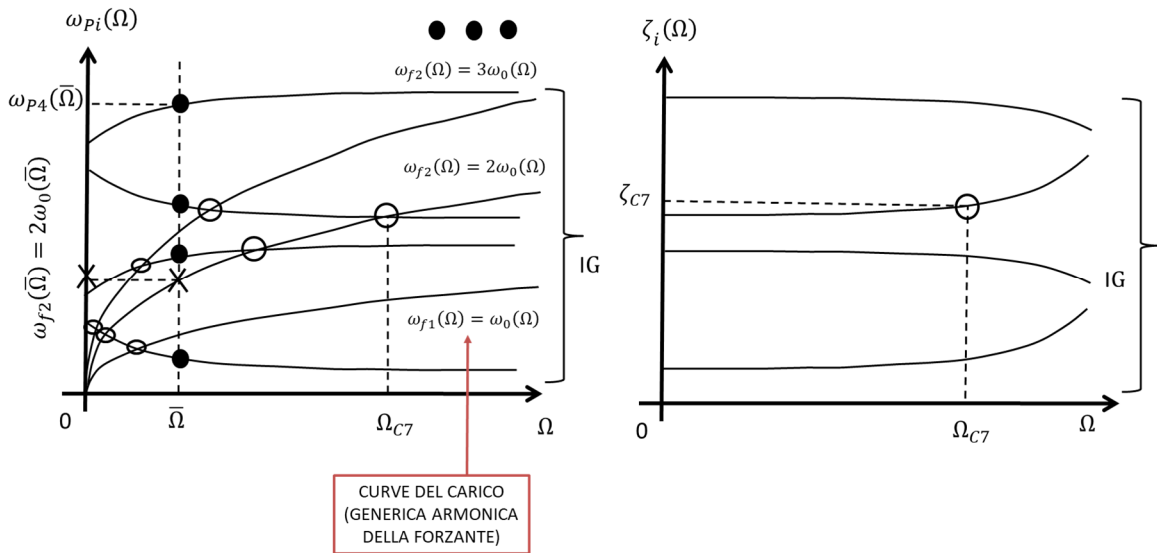


Figura 30 Diagramma di Campbell per rotore rigido con forzante periodica

Per capire quanto effettivamente vibra il sistema dobbiamo fare uso dei diagrammi di Bode. A tale fine dobbiamo prima specificare una velocità di lavoro della macchina  $\bar{\Omega}$  alla quale studiare il sistema. Riporto quindi tale velocità  $\bar{\Omega}$  sul diagramma di Campbell; l'intersezione tra la retta verticale passante per  $\bar{\Omega}$  e i 4 rami del diagramma delle pulsazioni proprie  $\omega_{pi}$  rappresentano le 4 pulsazioni proprie del sistema coincidenti, a loro volta, le pulsazioni di risonanza del sistema. A questo punto, supponendo di voler trovare quanto vale lo spostamento lungo  $x_f$  del centro di massa  $u_{k0}$  (nel dominio della frequenza), posso tracciare i rispettivi diagrammi (Fig. 31) (per ogni singola componente armonica!). Per determinare il modulo e la fase dello spostamento  $u_{k0}$  devo determinare sul diagramma di Bode il punto in cui agisce la forzante. Ma questo può essere dedotto dal diagramma di Campbell intersecando la curva del carico con la sezione verticale passante per  $\bar{\Omega}$  (si vedano sempre la Fig. 30 e la Fig. 31).

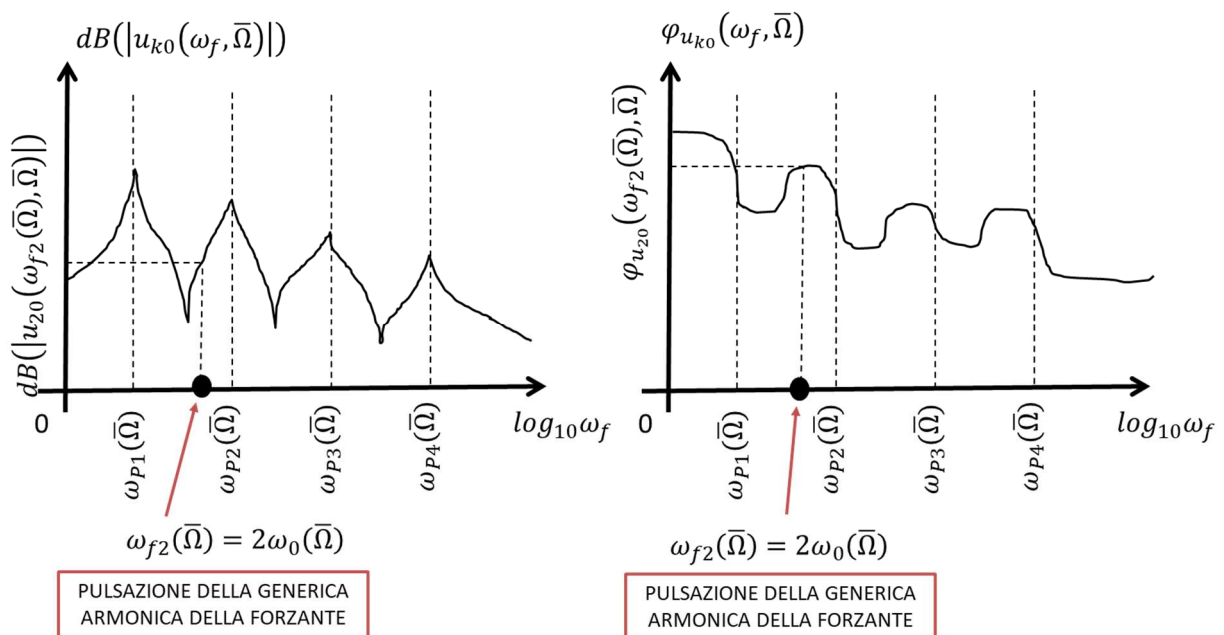


Figura 31 Diagramma di Bode per rotore rigido con forzante periodica

Guardando ai diagrammi di Campbell e di Bode, risulta chiaro il significato di pulsazione critica  $\Omega_c$ . Qualora infatti la pulsazione di lavoro della macchina  $\bar{\Omega}$  (la speed) si trovasse in corrispondenza di una critica  $\Omega_c$ , la pulsazione in cui la forzante agirebbe sulla macchina  $k\omega_0(\bar{\Omega})$  si troverebbe proprio in corrispondenza di una pulsazione propria  $\omega_{pi}(\bar{\Omega})$  e quindi di una pulsazione di risonanza. Ci troveremmo quindi necessariamente in condizioni di massima amplificazione.

Concludiamo quindi con lo studio del whirl forzato, ovvero la traiettoria del centro di massa  $\underline{G}$  durante il suo moto forzato nel piano  $x_f y_f$  (per ogni singola componente armonica!):

$$\underline{q}_k(t) = \begin{pmatrix} u_k(t) \\ v_k(t) \\ \theta_k(t) \\ \psi_k(t) \end{pmatrix} = Re \left[ \underline{q}_k e^{j\omega_0(\Omega)kt} \right] = Re \left[ \begin{pmatrix} u_{k0} \\ v_{k0} \\ \theta_{k0} \\ \psi_{k0} \end{pmatrix} e^{j\omega_0(\Omega)kt} \right]. \quad (3.2.49)$$

Le traiettorie delle altre sezioni della macchina saranno anch'esse ellissi determinabili a partire da quella di  $\underline{G}$  mediante le formule fondamentali della cinematica dei corpi rigidi. Lo studio del moto di whirl forzato permette anche di conoscere direzione del moto di rivoluzione del rotore attorno all'asse  $z_f$  (se il modo è BW o FW). Analogamente a quanto fatto nel capitolo 2.1, ci concentriamo sulla parte traslazionale del moto

$$\begin{pmatrix} u_k(t) \\ v_k(t) \end{pmatrix} = Re \left[ \begin{pmatrix} u_{k0} \\ v_{k0} \end{pmatrix} e^{j\omega_0(\Omega)kt} \right] \quad (3.2.50)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_k(t) \\ v_k(t) \end{pmatrix} &= Re \left[ \begin{pmatrix} u_{k0} \\ v_{k0} \end{pmatrix} e^{j\omega_0(\Omega)kt} \right] = Re \left[ \begin{matrix} m_{uk0} e^{j\varphi_{uk0}} e^{j\omega_0(\Omega)kt} \\ m_{vk0} e^{j\varphi_{vk0}} e^{j\omega_0(\Omega)kt} \end{matrix} \right] = \begin{bmatrix} m_{uk0} \cos(\omega_0(\Omega)kt + \varphi_{uk0}) \\ m_{vk0} \cos(\omega_0(\Omega)kt + \varphi_{vk0}) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} m_{uk0} \cos \varphi_{uk0} - m_{uk0} \sin \varphi_{uk0} \\ m_{vk0} \cos \varphi_{vk0} - m_{vk0} \sin \varphi_{vk0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \omega_0(\Omega)kt \\ \sin \omega_0(\Omega)kt \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \cos \omega_0(\Omega)kt \\ \sin \omega_0(\Omega)kt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_k(t) \\ v_k(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dalla (3.2.50) si ottiene poi

$$\begin{pmatrix} \cos \omega_0 kt \\ \sin \omega_0 kt \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} u_k(t) \\ v_k(t) \end{pmatrix} \quad (3.2.51)$$

da cui facendo la norma al quadrato

$$1 = \begin{pmatrix} u_k(t) \\ v_k(t) \end{pmatrix}^T (T^{-1})^T T^{-1} \begin{pmatrix} u_k(t) \\ v_k(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_k(t) \\ v_k(t) \end{pmatrix}^T H \begin{pmatrix} u_k(t) \\ v_k(t) \end{pmatrix}. \quad (3.2.52)$$

Poiché la matrice  $H$  per costruzione è una matrice simmetrica definita positiva, la (3.2.52) rappresenta l'equazione parametrica di un'ellisse centrata nell'origine ma ad assi ruotati. Più nel dettaglio, per il teorema spettrale, la matrice  $H$  ammette una base ortonormale di autovettori  $\underline{v}_{H1}, \underline{v}_{H2}$  che determinano la direzione dei semiassi dell'ellisse in questione. La lunghezza dei semiassi è invece pari a  $\sqrt{\lambda_{H1}}$  e  $\sqrt{\lambda_{H2}}$  (gli autovalori sono reali e positivi perché  $H$ ). L'ellisse corrispondente al whirl libero è riportata in Fig. 32. Infine le fasi  $\varphi_{uk0}, \varphi_{vk0}$  di  $u_{k0}$  e  $v_{k0}$  permettono di determinare anche la direzione (BW o FW) del moto forzato di rivoluzione del rotore attorno all'asse  $z_f$ . Se infatti vale la condizione

$$0 < \varphi_{vk0} - \varphi_{uk0} < \pi, \quad (3.2.53)$$

allora il moto di rivoluzione è BW e l'ellisse sarà percorsa in senso BW. Se invece

$$-\pi < \varphi_{v_{k0}} - \varphi_{u_{k0}} < 0, \tag{3.2.54}$$

il moto di rivoluzione è FW e l'ellisse sarà percorsa in senso FW. La rotazione del rotore avviene chiaramente alla pulsazione  $\Omega$  (la speed della macchina) mentre il moto di rivoluzione attorno all'asse  $z_f$  avviene alla pulsazione della forzante, in questo caso  $\omega_0(\bar{\Omega})k$ .

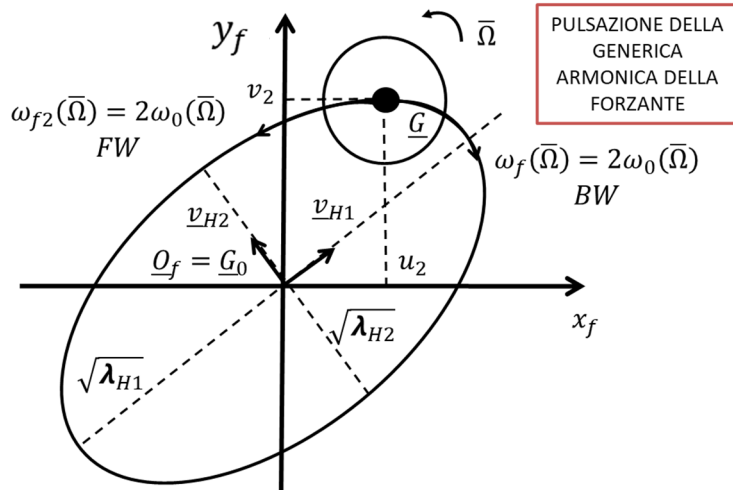


Figura 32 Whirl forzato per rotore rigido con forzante periodica (le componenti angolari  $\psi_4(t)$  e  $\theta_4(t)$  si comportano in modo analogo)

Si noti come, al contrario del moto libero, non essendo presente il termine esponenziale dovuto allo smorzamento, la traiettoria sarà sempre un'ellisse a prescindere dal valore dello smorzamento stesso. Se sono vicino a una risonanza e/o lo smorzamento modale è in generale piccolo, allora le dimensioni dell'ellisse saranno più grandi, altrimenti saranno più piccoli.

Le principali deformate forzate sono rappresentate (per ogni singola componente armonica!) in Fig. 33 e, nelle caratteristiche (BW e FW) e nella forma, ricordano i modi di vibrare bouncing e tilting descritti nel paragrafo 2.2. La prima deformata forzata IDF (simile al bouncing) non contiene punti nodali (ovvero punti di intersezione della deformata con l'asse  $z_f$ ) mentre la seconda IIDF (simile al tilting) ne contiene uno. Tuttavia le deformate forzate riguardano il moto forzato e non il moto libero, e non vanno dunque confuse con i modi di vibrare e le deformate modali!

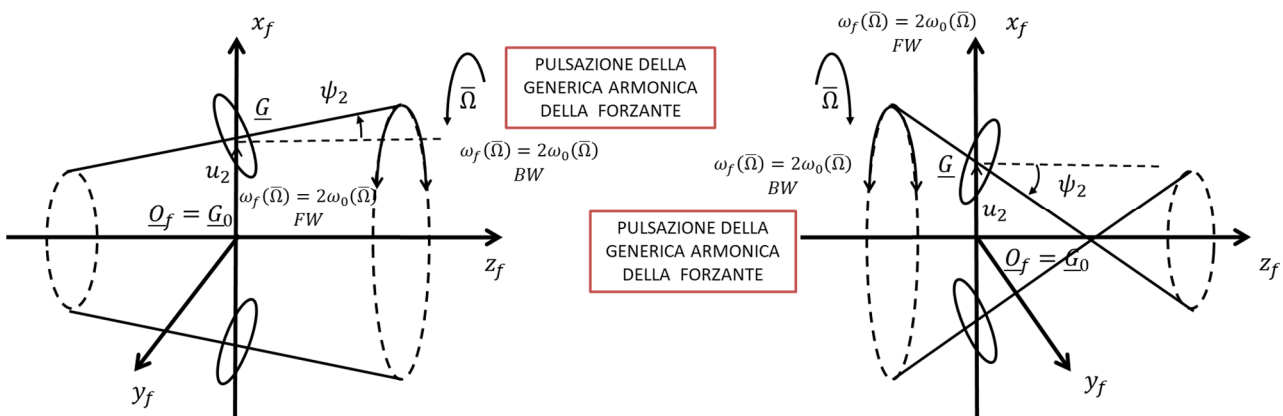


Figura 33 Deformate forzate per rotore rigido con forzante periodica

ELENCO RIASSUNTIVO DELLE VARIE DEFORMATE FORZATE:

- 1) FORMA: BOUNCING (B)  
CARATTERISTICA: BW o FW
- 2) FORMA: TILTING (T)  
CARATTERISTICA: BW o FW

- 6) FORZANTE GENERICA:

$$M\ddot{\underline{q}} + (\Omega G + C)\dot{\underline{q}} + K\underline{q} = \underline{Q}(t, \Omega) \quad (3.2.55)$$

$$\underline{Q}(t, \Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{\tilde{Q}}(\omega, \Omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad \underline{\tilde{Q}}(\omega, \Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{Q}(t, \Omega) e^{-j\omega t} dt. \quad (3.2.56)$$

La soluzione del moto forzato del sistema può essere facilmente determinata grazie agli strumenti matematici introdotti nel capitolo 1 e si ha:

$$\underline{q}_f(t, \Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{\tilde{q}}(\omega, \Omega) e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(\omega, \Omega) \underline{\tilde{Q}}(\omega, \Omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.2.57)$$

$$\underline{\tilde{q}}(\omega, \Omega) = \begin{pmatrix} u_\omega \\ v_\omega \\ \theta_\omega \\ \psi_\omega \end{pmatrix} = \alpha(\omega, \Omega) \underline{\tilde{Q}}(\omega, \Omega) = [-\omega^2 M + j\omega(C + \Omega G) + K]^{-1} \underline{\tilde{Q}}(\omega, \Omega)$$

dove in questi casi è utile distinguere nella ricettanza  $\alpha(\omega, \Omega)$  la doppia dipendenza dalla pulsazione della forzante e della velocità di rotazione della macchina.

Applicando il teorema di sovrapposizione modale in questo caso abbiamo:

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{q}}(\omega, \Omega) &= \alpha(\omega, \Omega) \underline{\tilde{Q}}(\omega, \Omega) = \sum_{k=1}^{2N} \frac{(q_{Rk} \underline{q}_{Lk}^H)}{j\omega - s_k} \underline{\tilde{Q}}(\omega, \Omega) = \\ &= \sum_{k=1}^{2N} \left( \frac{q_{Lk}^H \underline{\tilde{Q}}(\omega, \Omega)}{j\omega - s_k} \right) \underline{q}_{Rk}, \quad N = 4 \end{aligned} \quad (3.2.58)$$

da cui possiamo dedurre che i modi che maggiormente contribuiscono alle singole armoniche della soluzione sono quelli in cui  $\left( \frac{q_{Lk}^H \underline{\tilde{Q}}(\omega, \Omega)}{j\omega - s_k} \right)$  è grande, ovvero quando  $\omega$  è vicina a una delle pulsazioni proprie del sistema  $\omega_{pk}$  contenuta in  $s_k$  (corrispondenti alle risonanze del sistema) o quando  $q_{Lk}^H \underline{\tilde{Q}}(\omega, \Omega)$  è grande (forzanti ortogonali al corrispondente autovettore).

Consideriamo a titolo di pure esempio una forzante generica come quella in Fig. 34 (un tipico segnale passabanda con frequenza portante  $\omega_f(\Omega)$ , ovvero come nella realtà appare un segnale puramente armonico). In questo caso  $\delta(\Omega)$  e  $\Delta(\Omega)$  sono le soglie di sensibilità del segnale, utili per determinare in quale range dello spettro il contributo in frequenza del segnale sia realmente apprezzabile. Per semplicità supporremo che, come spesso accade in

questo caso,  $\delta(\Omega)$ ,  $\Delta(\Omega)$  e la frequenza portante del segnale  $\omega_f(\Omega)$  siano le stesse per ogni componente della forzante  $\underline{\tilde{Q}}(\omega, \Omega)$ .

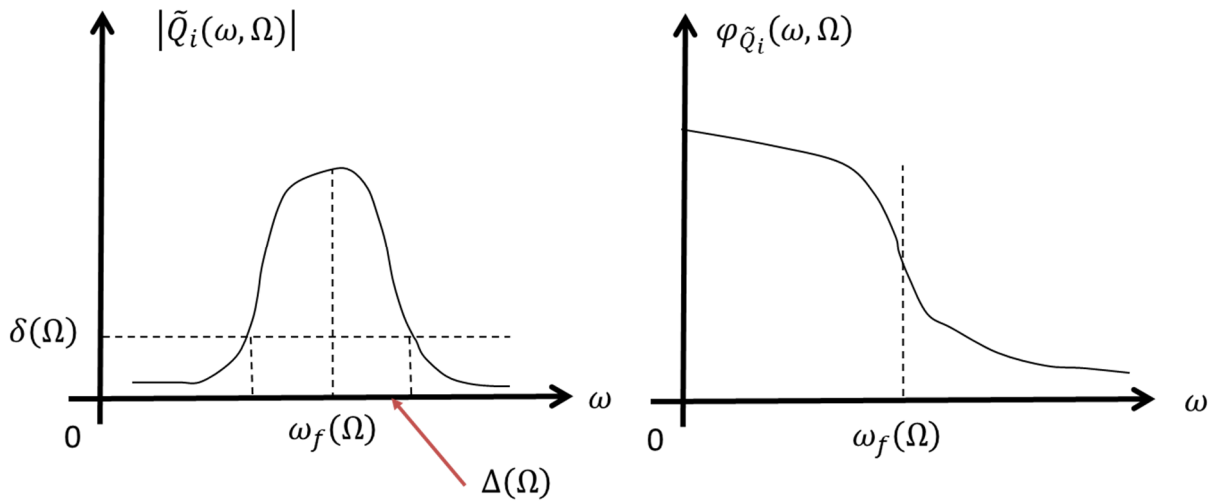


Figura 34 Forzante generica del sistema

Il diagramma di Campbell associato a questo caso è riportato in Fig. 35. Rispetto allo studio nel moto libero abbiamo aggiunto la banda del carico ( $\omega_f(\Omega), \Delta(\Omega)$ ) sul diagramma relativo alle pulsazioni proprie  $\omega_{pi}$ . Le intersezioni della banda del carico con i rami del diagramma  $I\Omega_c$  rappresentano le bande critiche. Il valore di smorzamento modale (banda di smorzamento) associato alle bande critiche  $I\zeta_c$  può essere facilmente trovato riportando la banda critica in questione  $I\Omega_c$  sul diagramma dello smorzamento.

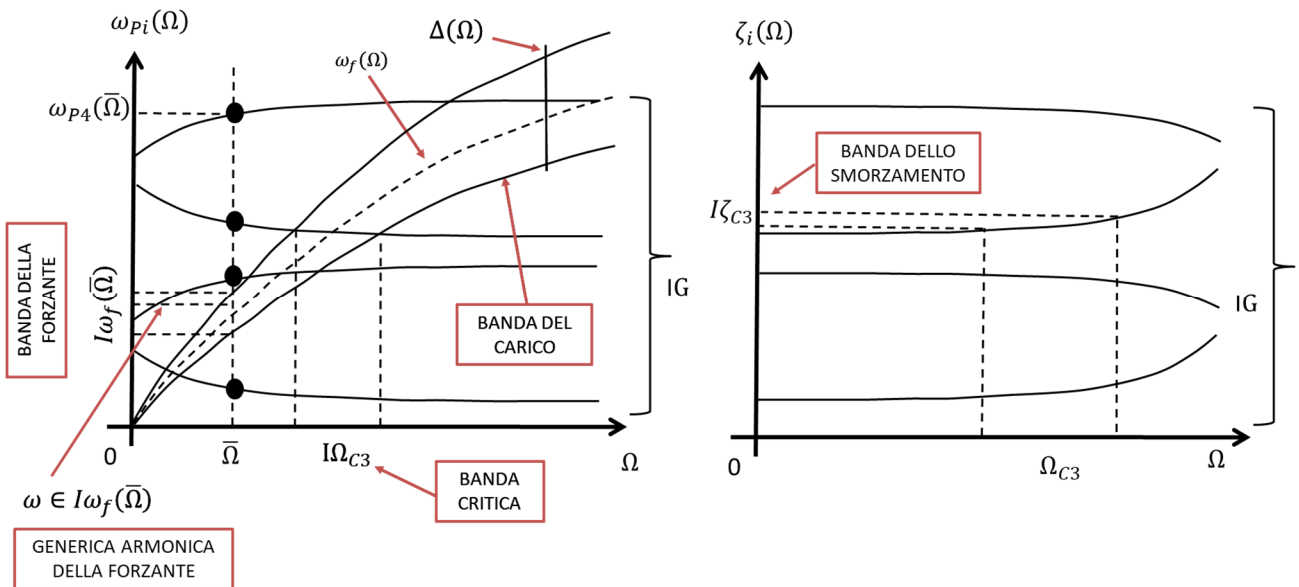


Figura 35 Diagramma di Campbell per rotore rigido con forzante generica

Per capire quanto effettivamente vibra il sistema dobbiamo fare uso dei diagrammi di Bode. A tale fine dobbiamo prima specificare una velocità di lavoro della macchina  $\bar{\Omega}$  alla quale studiare il sistema. Riporto quindi tale velocità

$\bar{\Omega}$  sul diagramma di Campbell; le intersezioni tra la retta verticale passante per  $\bar{\Omega}$  e i 4 rami del diagramma delle pulsazioni proprie  $\omega_{p_i}$  rappresentano le 4 pulsazioni proprie del sistema coincidenti, a loro volta, le pulsazioni di risonanza del sistema. A questo punto, supponendo di voler trovare quanto vale lo spostamento lungo  $x_f$  del centro di massa  $u$  (nel dominio della frequenza), posso tracciare i rispettivi diagrammi (Fig. 36). Per determinare le bande del modulo e della fase dello spostamento  $u_\omega$  devo determinare sul diagramma di Bode la banda in cui agisce la forzante. Ma questa può essere dedotto dal diagramma di Campbell intersecando la banda del carico con la sezione verticale passante per  $\bar{\Omega}$  (si vedano sempre la Fig. 35 e la Fig. 36). Lo stesso ragionamento può essere effettuato per la generica componente armonica a pulsazione  $\omega \in I\omega_f(\bar{\Omega})$  appartenente alla banda  $I\omega_f(\bar{\Omega})$  in cui agisce la forzante (Fig. 35 e la Fig. 36).

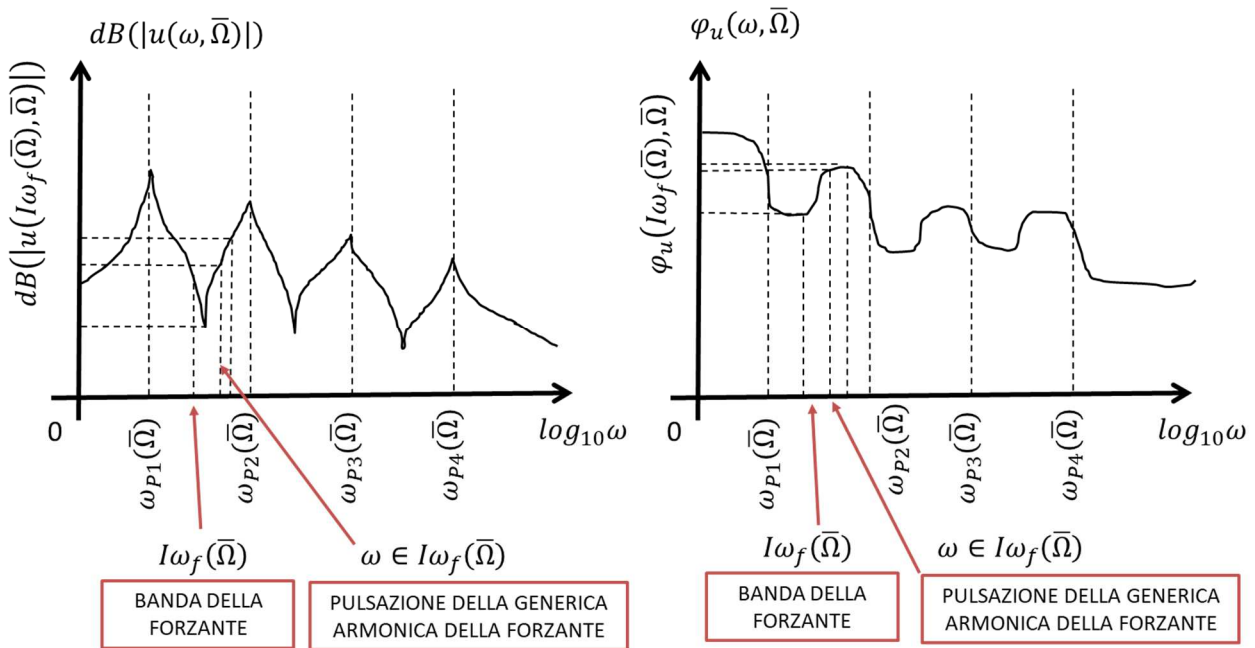


Figura 36 Diagramma di Bode per rotore rigido con forzante generica

Guardando ai diagrammi di Campbell e di Bode, risulta chiaro il significato di banda critica  $I\Omega_c$ . Qualora infatti la pulsazione di lavoro della macchina  $\bar{\Omega}$  (la speed) si trovasse in corrispondenza di una banda critica  $I\Omega_c$ , la banda in cui la forzante agirebbe sulla macchina  $I\omega_f(\bar{\Omega})$  includerebbe proprio una pulsazione propria  $\omega_{p_i}(\bar{\Omega})$  e quindi una pulsazione di risonanza. Ci troveremmo quindi necessariamente in condizioni di massima amplificazione.

Concentriamoci ora sulla generica componente armonica a pulsazione  $\omega \in I\omega_f(\bar{\Omega})$  appartenente alla banda  $I\omega_f(\bar{\Omega})$  in cui agisce la forzante e concludiamo quindi con lo studio del whirl forzato, ovvero la traiettoria del centro di massa  $\underline{G}$  durante il suo moto forzato nel piano  $x_f y_f$  (associata a quella componente armonica  $\omega$ ):

$$\underline{q}_{f\omega}(t) = \begin{pmatrix} u_\omega(t) \\ v_\omega(t) \\ \theta_\omega(t) \\ \psi_\omega(t) \end{pmatrix} = \text{Re} \left[ \underline{\tilde{q}}(\omega, \Omega) e^{j\omega t} \right] = \text{Re} \left[ \begin{pmatrix} u_\omega \\ v_\omega \\ \theta_\omega \\ \psi_\omega \end{pmatrix} e^{j\omega t} \right]. \quad (3.2.59)$$

Le traiettorie delle altre sezioni della macchina saranno anch'esse ellissi determinabili a partire da quella di  $\underline{G}$  mediante le formule fondamentali della cinematica dei corpi rigidi. Lo studio del moto di whirl forzato permette

anche di conoscere direzione del moto di rivoluzione del rotore attorno all'asse  $z_f$  (se il modo è BW o FW). Analogamente a quanto fatto nel capitolo 2.1, ci concentriamo sulla parte traslazionale del moto

$$\begin{pmatrix} u_\omega(t) \\ v_\omega(t) \end{pmatrix} = \text{Re} \left[ \begin{pmatrix} u_\omega \\ v_\omega \end{pmatrix} e^{j\omega t} \right] \quad (3.2.60)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_\omega(t) \\ v_\omega(t) \end{pmatrix} &= \text{Re} \left[ \begin{pmatrix} u_\omega \\ v_\omega \end{pmatrix} e^{j\omega t} \right] = \text{Re} \left[ \begin{matrix} m_{u\omega} e^{j\varphi_{u\omega}} e^{j\omega t} \\ m_{v\omega} e^{j\varphi_{v\omega}} e^{j\omega t} \end{matrix} \right] = \begin{bmatrix} m_{u\omega} \cos(\omega t + \varphi_{u\omega}) \\ m_{v\omega} \cos(\omega t + \varphi_{v\omega}) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} m_{u\omega} \cos \varphi_{u\omega} - m_{u\omega} \sin \varphi_{u\omega} & \cos \omega t \\ m_{v\omega} \cos \varphi_{v\omega} - m_{v\omega} \sin \varphi_{v\omega} & \sin \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_\omega(t) \\ v_\omega(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dalla (3.2.60) si ottiene poi

$$\begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} u_\omega(t) \\ v_\omega(t) \end{pmatrix} \quad (3.2.61)$$

da cui facendo la norma al quadrato

$$1 = \begin{pmatrix} u_\omega(t) \\ v_\omega(t) \end{pmatrix}^T (T^{-1})^T T^{-1} \begin{pmatrix} u_\omega(t) \\ v_\omega(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_\omega(t) \\ v_\omega(t) \end{pmatrix}^T H \begin{pmatrix} u_\omega(t) \\ v_\omega(t) \end{pmatrix}. \quad (3.2.62)$$

Poiché la matrice  $H$  per costruzione è una matrice simmetrica definita positiva, la (3.2.62) rappresenta l'equazione parametrica di un'ellisse centrata nell'origine ma ad assi ruotati. Più nel dettaglio, per il teorema spettrale, la matrice  $H$  ammette una base ortonormale di autovettori  $\underline{v}_{H1}$ ,  $\underline{v}_{H2}$  che determinano la direzione dei semiassi dell'ellisse in questione. La lunghezza dei semiassi è invece pari a  $\sqrt{\lambda_{H1}}$  e  $\sqrt{\lambda_{H2}}$  (gli autovalori sono reali e positivi perché  $H$ ). L'ellisse corrispondente al whirl libero è riportata in Fig. 37. Infine le fasi  $\varphi_{u\omega}$ ,  $\varphi_{v\omega}$  di  $u_\omega$  e  $v_\omega$  permettono di determinare anche la direzione (BW o FW) del moto forzato di rivoluzione del rotore attorno all'asse  $z_f$ . Se infatti vale la condizione

$$0 < \varphi_{v\omega} - \varphi_{u\omega} < \pi, \quad (3.2.63)$$

allora il moto di rivoluzione è BW e l'ellisse sarà percorsa in senso BW. Se invece

$$-\pi < \varphi_{v\omega} - \varphi_{u\omega} < 0, \quad (3.2.64)$$

il moto di rivoluzione è FW e l'ellissi sarà percorsa in senso FW. La rotazione del rotore avviene chiaramente alla pulsazione  $\Omega$  (la speed della macchina) mentre il moto di rivoluzione attorno all'asse  $z_f$  avviene alla pulsazione della forzante, in questo caso  $\omega \in I_{\omega_f}(\bar{\Omega})$ .

Si noti come, al contrario del moto libero, non essendo presente il termine esponenziale dovuto allo smorzamento, la traiettoria sarà sempre un'ellisse a prescindere dal valore dello smorzamento stesso. Se sono vicino a una risonanza e/o lo smorzamento modale è in generale piccolo, allora le dimensioni dell'ellisse saranno più grandi, altrimenti saranno più piccoli.

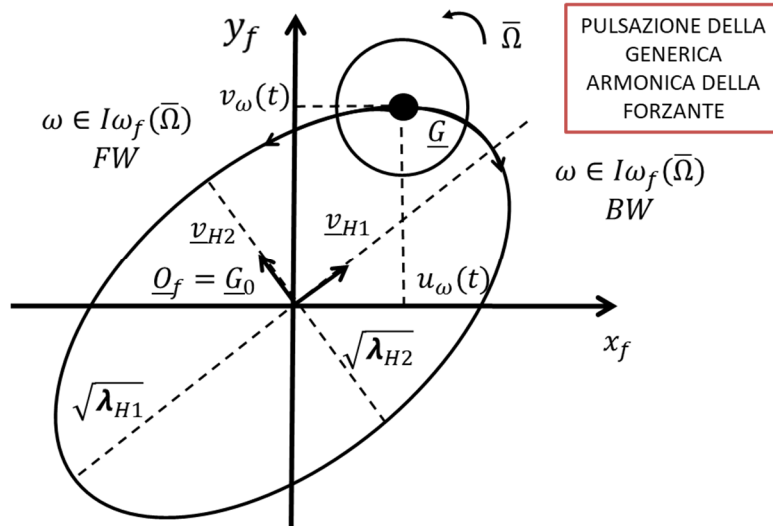


Figura 37 Whirl forzato per rotore rigido con forzante generica (le componenti angolari  $\psi_\omega(t)$  e  $\theta_\omega(t)$  si comportano in modo analogo)

Le principali deformate forzate sono rappresentate (per ogni singola componente armonica!) in Fig. 38 e, nelle caratteristiche (BW e FW) e nella forma, ricordano i modi di vibrare bouncing e tilting descritti nel paragrafo 2.2. La prima deformata forzata IDF (simile al bouncing) non contiene punti nodali (ovvero punti di intersezione della deformata con l'asse  $z_f$ ) mentre la seconda IIDF (simile al tilting) ne contiene uno. Tuttavia le deformate forzate riguardano il moto forzato e non il moto libero, e non vanno dunque confuse con i modi di vibrare e le deformate modali!

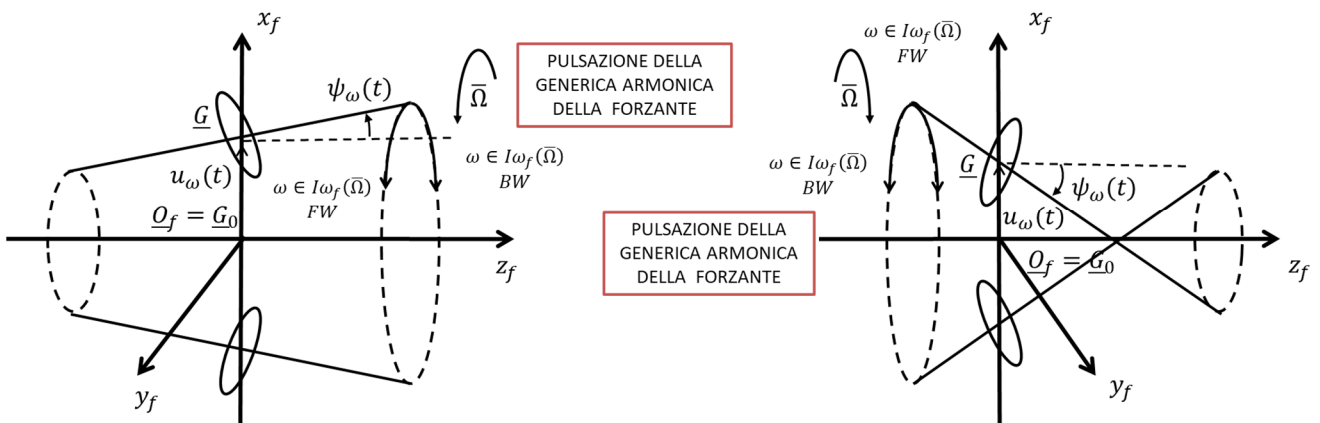


Figura 38 Deformate forzate per rotore rigido con forzante generica

ELENCO RIASSUNTIVO DELLE VARIE DEFORMATE FORZATE:

- 1) FORMA: BOUNCING (B)  
CARATTERISTICA: BW o FW
- 2) FORMA: TILTING (T)  
CARETTERISTICA: BW o FW



### 3.3 Effetto della gravità

E' abbastanza utile discutere brevemente quali sia l'effetto di azioni esterne costanti su sistemi meccanici lineari e, nello specifico, della gravità. Partiamo cercando di capire come un'azione esterna costante (come ad esempio la gravità) possa essere applicata al centro di massa  $\underline{G}$  del nostro sistema (già linearizzato perché parliamo di vibrazioni flessionali a 4DOF!):

$$\underline{Q}_g = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.3.1)$$

dove  $g$  è l'accelerazione di gravità. Analizziamo quindi l'equazione:

$$M\underline{\ddot{q}} + (\Omega G + C)\underline{\dot{q}} + K\underline{q} = \underline{Q}_{cost} + \underline{Q}(t) \quad (3.3.2)$$

dove  $\underline{Q}_{cost}$  è una qualunque azione costante (in questo caso  $\underline{Q}_{cost} = \underline{Q}_g$ ) e  $\underline{Q}(t)$  è una forzante generica (per semplicità possiamo supporre che  $\underline{Q}(t)$  non abbia un componente costante oppure, se essa è presente, possiamo inglobarla dentro  $\underline{Q}_{cost}$ ). Il punto di equilibrio del sistema sarà chiaramente

$$\underline{q}^{eq} = K^{-1}\underline{Q}_{cost}. \quad (3.3.3)$$

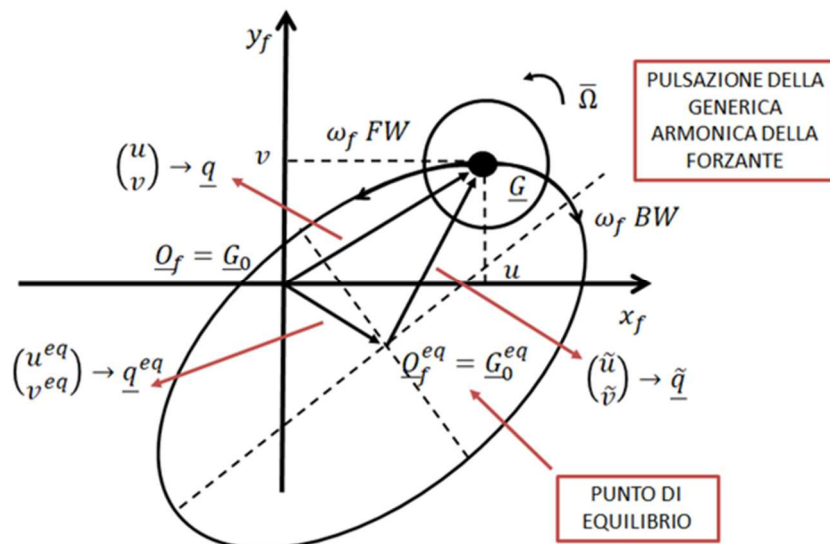
Descrivendo ora la dinamica del problema rispetto alla posizione di equilibrio  $\underline{q}^{eq}$

$$\underline{q} = \underline{q}^{eq} + \underline{\tilde{q}}, \quad (3.3.4)$$

e sostituendo la (3.3.4) nella (3.3.3), si ha

$$M\underline{\ddot{\tilde{q}}} + (\Omega G + C)\underline{\dot{\tilde{q}}} + K\underline{\tilde{q}} = \underline{Q}(t). \quad (3.3.5)$$

Si nota dunque come, con questo semplice cambio di variabili, la dinamica del sistema sia stata ricondotta a quella sempre studiata fino ad ora. L'effetto di una qualunque azione costante su un sistema meccanico lineare è semplicemente quello di spostare il punto di equilibrio (si veda la Fig. 89).



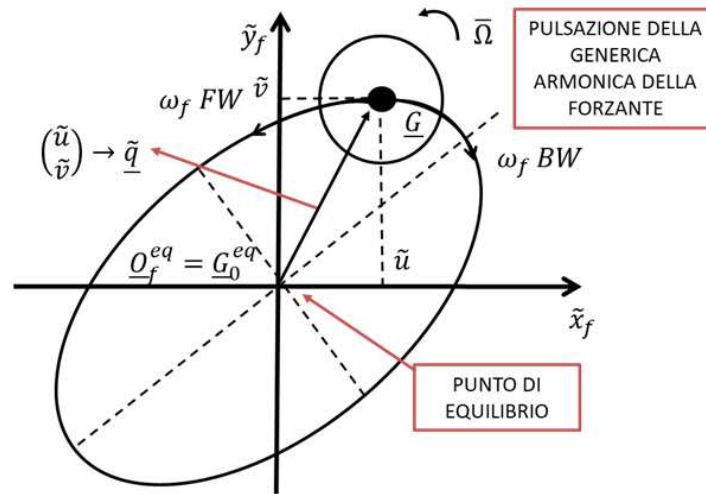
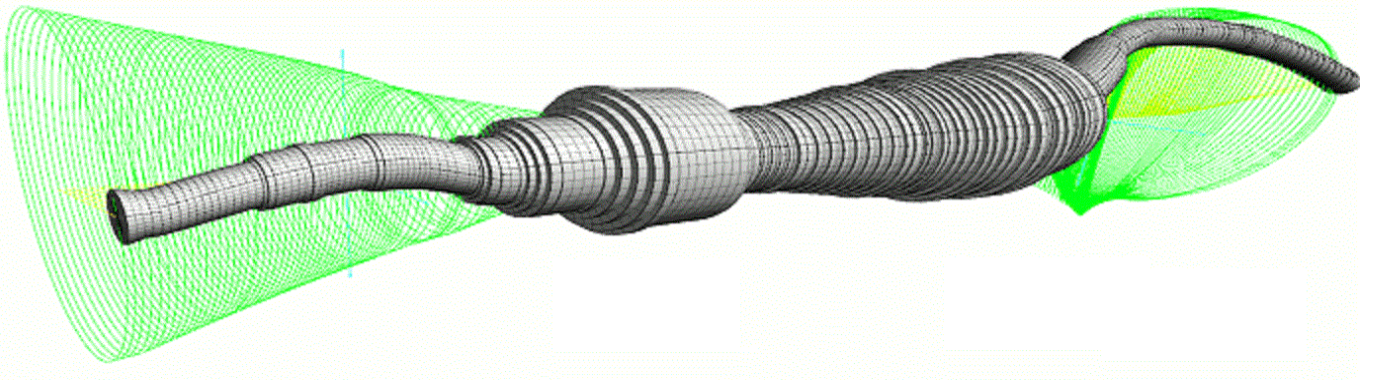


Figura 39 bis Effetto delle azioni esterne costanti e della gravità

L'effetto di forzanti costanti come la gravità può di conseguenza essere inizialmente ignorato in tutte le analisi studiate finora (se il sistema meccanico è lineare!) a patto poi di traslare alla fine i risultati di una quantità  $\underline{q}^{eq}$ . Nel caso di turbomacchine e motori, viste le alte sollecitazioni in gioco, tale quantità è spesso piccola rispetto alle orbite compiute dal centro di massa  $\underline{G}$  del rotore e può quindi essere trascurata.

## 4. VIBRAZIONI FLESSIONALI LIBERE: ROTORI ELASTICI 1D



Tipico schema di rotore elastico 1D per analisi flessionale

Proseguiamo ora con lo studio della dinamica delle macchine rotanti 1D (aventi una dimensione prevalente, coincidente con l'asse di rotazione principale) elastiche. Come preannunciato, la dinamica 1D delle macchine rotanti fa ampio uso della teoria della trave 1D nello spazio che ha localmente 6 gradi di libertà (degrees of freedom, DOF). Si veda la Fig. 39 (convenzionalmente si sceglie l'asse  $z$  del sistema di riferimento inerziale lungo l'asse di rotazione). Questi 6 DOF si dividono in DOF traslazionali (traslazione lungo  $x, y, z$ ) e DOF rotazionali (rotazione attorno  $x, y, z$ ). Nella teoria della trave 1D le traslazioni lungo  $x, y$  e le rotazioni attorno a  $x, y$  sono detti DOF flessionali, la rotazione attorno a  $z$  è detta DOF torsionale e la traslazione lungo a  $z$  è detta DOF assiale.

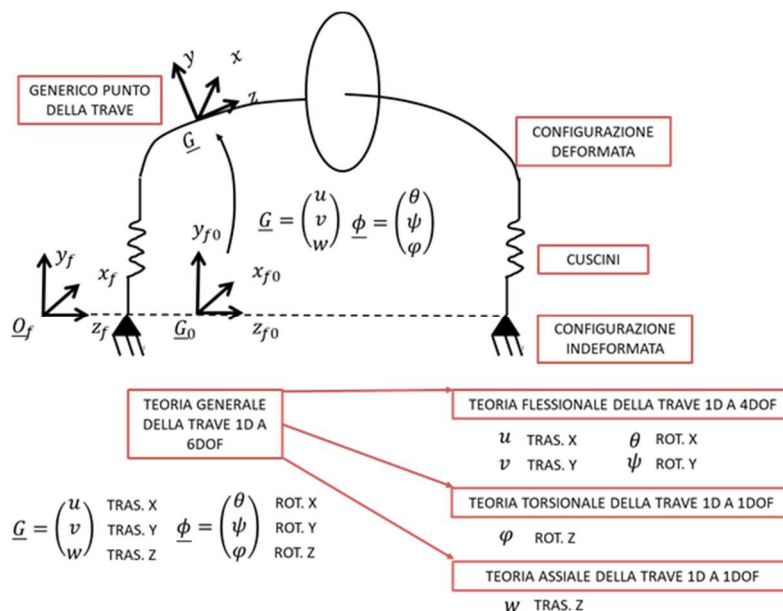


Figura 39 Teoria 1D della trave nello spazio

Sotto alcune ipotesi che vedremo, non è necessario studiare la dinamica delle macchine rotanti 1D con la generica teoria della trave 1D nello spazio a 6 DOF ma sarà possibile disaccoppiare e studiare separatamente la dinamica

flessione (teoria flessionale della trave a 4DOF) da quella torsionale (teoria torsionale della trave a 1 DOF) e da quella assiale (teoria assiale della trave a 1DOF). Quando tali ipotesi non saranno verificate, allora sarà necessario l'impiego una teoria della trave 1D a 6DOF. In questi casi tuttavia, la complessità computazionale di tali teoria rende tale approccio non molto conveniente (soprattutto se si considera il compromesso tra accuratezza ed efficienza) ed è consigliabile passare direttamente a una modellazione 3D della macchina rotante (come vedremo).

### 4.1 Equazioni di moto (approccio Lagrangiano)

Introduciamo intanto il problema e fissiamo la nomenclatura nell'ottica di sviluppare un modello FEM di macchina rotante 1D (a 4 DOF per nodo e a 2 nodo per elemento) per studiare la dinamica flessionale del rotore a 4DOF.

Supponiamo intanto che la mesh sia nota (posizione dei nodi, caratteristiche degli elementi e funzioni di forma note). Non entreremo in seguito in questi argomenti che supporremo noti. Si consideri quindi la situazione descritta in Fig. 40.

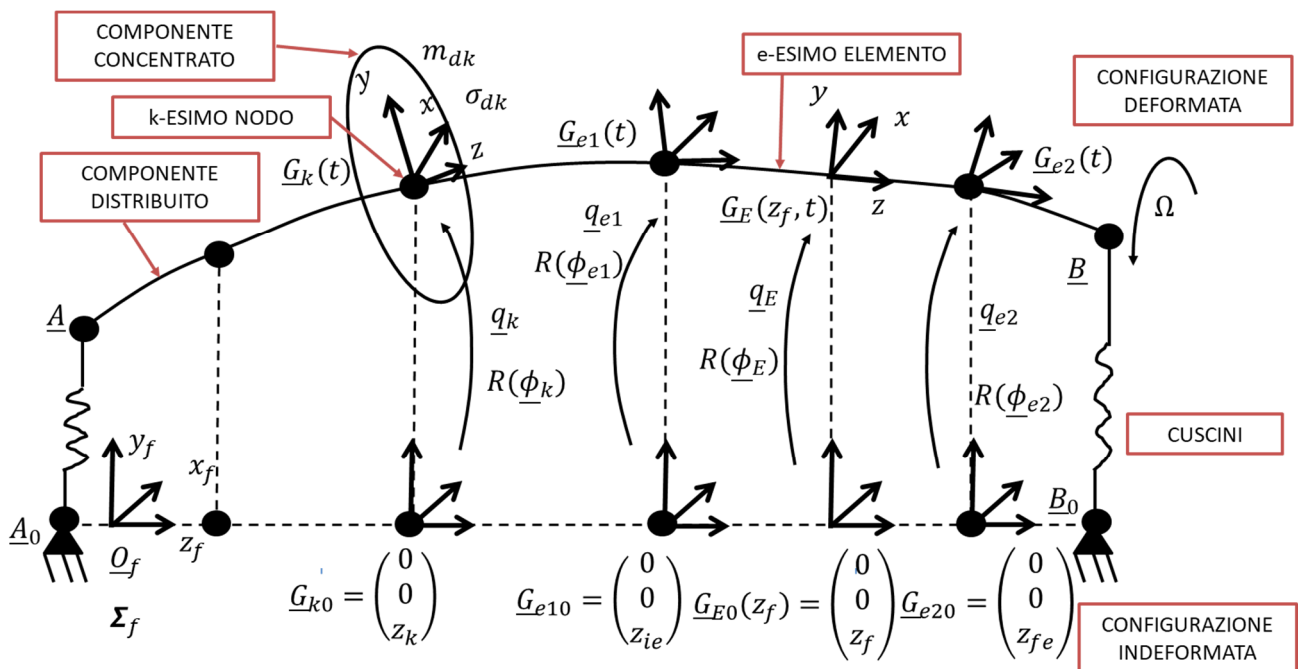


Figura 40 Modello FEM di rotore elastico 1D con 2 nodi per elemento e 4DOF per nodo

Si introducono quindi le grandezze legate al generico nodo (spostamenti e rotazioni elastiche e relative derivate) espresse nella corrispondente terna nodale in configurazione indeformata centrata nella posizione a riposo del nodo  $\underline{G}_{k0}$  (per semplicità prenderemo tali terne sempre parallele alla terna inerziale centrata in  $\underline{Q}_f$ ):

$$\underline{G}_k(t) = \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k = 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\underline{G}}_k(t) = \begin{pmatrix} \dot{u}_k \\ \dot{v}_k \\ \dot{w}_k = 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\phi}_k(t) = \begin{pmatrix} \theta_k \\ \psi_k \\ \varphi_k = 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\underline{\phi}}_k(t) = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_k \\ \dot{\psi}_k \\ \dot{\varphi}_k = \Omega = \text{cost} \end{pmatrix} \quad (4.1.1)$$

A questo punto introduciamo le principali ipotesi di lavoro:

- trave snella (presenza di una dimensione prevalente, tipica della strutture 1D, e coincidente in questo caso con l'asse di rotazione principale) ad asse rettilineo.
- trave a sezione piana: la generica sezione della trave associata al nodo  $\underline{G}_k$  rimane sempre contenuta nel piano  $xy$  della terna solidale al nodo stesso e non si deforma; la sezione della trave può quindi rototraslare nello spazio con 6DOF disponibili  $\underline{G}_k, \underline{\phi}_k$  (la generica trave a sezione piana nello spazio è quindi a 6DOF).
- elasticità lineari (caratteristiche elastiche dei materiali lineari).
- linearizziamo poi il problema nell'intorno della configurazione nominale. In altre parole, studiamo il problema ai "piccoli spostamenti" nell'intorno della configurazione in questione. Da un punto di vista fisico, consideriamo tutte variabili del problema (vedi la (4.1.1)) piccole (eccetto ovviamente la speed della macchina  $\Omega$ ) e consideriamo piccole anche le loro derivate. Applicare questa ipotesi a una quantità fisica equivale a considerare solamente i termini di ordine 0 (le costanti) e i termini di ordine 1 (la variabili stesse), ignorando qualunque altro termine di ordine superiore.
- consideriamo solamente i gradi di libertà flessionali (visto che il nostro scopo è studiare la dinamica flessionale). In altre parole nelle equazioni spaziali, delle 6 equazioni normalmente presenti, considereremo solo la prima (traslazione lungo  $x$ ), la seconda (traslazione lungo  $y$ ), la quarta (rotazione attorno a  $x$ ) e la quinta (rotazione attorno a  $y$ ). Faremo inoltre sulle variabili nodali del problema (soprattutto quelle relative ai DOF non di interesse) le assunzioni riportate nella (4.1.1).

Le ipotesi sopraelencate, tra le altre cose, garantiscono nel caso di rotore elastico anche il disaccoppiamento fondamentale tra dinamica flessionale (a 4DOF), dinamica torsionale (a 1DOF) e dinamica assiale (1DOF). Quando tali ipotesi non saranno verificate, allora sarà necessario l'impiego una teoria della trave 1D a 6DOF. In questi casi tuttavia, la complessità computazionale di tali teoria rende tale approccio non molto conveniente (soprattutto se si considera il compromesso tra accuratezza ed efficienza) ed è consigliabile passare direttamente a una modellazione 3D della macchina rotante (come vedremo).

Si introducono poi, espresse nella corrispondente terna in configurazione indeformata, le grandezze legate al generico elemento (spostamenti e rotazioni elastici e relative derivate) delimitato da 2 nodi consecutivi:

$$\begin{aligned} \underline{G}_{e1}(t) &= \begin{pmatrix} u_{e1} \\ v_{e1} \\ w_{e1} = 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\underline{G}}_{e1}(t) = \begin{pmatrix} \dot{u}_{e1} \\ \dot{v}_{e1} \\ \dot{w}_{e1} = 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\phi}_{e2}(t) = \begin{pmatrix} \theta_{e1} \\ \psi_{e1} \\ \varphi_{e1} = 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\underline{\phi}}_{e2}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_{e1} \\ \dot{\psi}_{e1} \\ \dot{\varphi}_{e1} = \Omega = \text{cost} \end{pmatrix} \\ \underline{G}_{e2}(t) &= \begin{pmatrix} u_{e2} \\ v_{e2} \\ w_{e2} = 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\underline{G}}_{e2}(t) = \begin{pmatrix} \dot{u}_{e2} \\ \dot{v}_{e2} \\ \dot{w}_{e2} = 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\phi}_{e2}(t) = \begin{pmatrix} \theta_{e2} \\ \psi_{e2} \\ \varphi_{e2} = 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\underline{\phi}}_{e2}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_{e2} \\ \dot{\psi}_{e2} \\ \dot{\varphi}_{e2} = \Omega = \text{cost} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

Per quanto riguarda il generico elemento è utile anche introdurre la soluzione fisica espressa nella corrispondente terna in configurazione indeformata centrata in  $\underline{G}_{E0}$  (descritta dal solito indice ma in maiuscolo), ovvero la soluzione che otterrei se risolvessi analiticamente le equazioni della teoria della trave:

$$\underline{G}_E(z_f, t) = \begin{pmatrix} u_E \\ v_E \\ w_E = 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\underline{G}}_E(z_f, t) = \begin{pmatrix} \dot{u}_E \\ \dot{v}_E \\ \dot{w}_E = 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\phi}_E(z_f, t) = \begin{pmatrix} \theta_E \\ \psi_E \\ \varphi_E = 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\underline{\phi}}_E(z_f, t) = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_E \\ \dot{\psi}_E \\ \dot{\varphi}_E = \Omega = \text{cost} \end{pmatrix}. \quad (4.1.3)$$

Naturalmente tali variabili dipendono sia dallo spazio che dal tempo, al contrario delle variabili nodali che dipendono invece solamente dal tempo (la posizione del nodo nello spazio è fissata). Abbiamo ora tutti gli elementi Prof. Enrico Meli, Dipartimento di Ingegneria Industriale, Università di Firenze

per definire il vettore della variabili nodali (contente solo i 4 DOF nodali flessionali) e il vettore contenente tutte le variabili Lagrangiane del sistema:

$$\underline{q}_k(t) = \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \\ \theta_k \\ \psi_k \end{pmatrix} \in R^{\text{DOFN}=4}, \quad k = 1 \dots NN, \quad \underline{q}(t) = \begin{pmatrix} q_1 \\ \dots \\ q_{NN} \end{pmatrix} \in R^{\text{DOFN} \cdot NN = 4NN} \quad (4.1.4)$$

e le equivalenti grandezze per il generico elemento:

$$\underline{q}_{e1}(t) = \begin{pmatrix} u_{e1} \\ v_{e1} \\ \theta_{e1} \\ \psi_{e1} \end{pmatrix} \in R^{\text{DOFN}=4}, \quad \underline{q}_{e2}(t) = \begin{pmatrix} u_{e2} \\ v_{e2} \\ \theta_{e2} \\ \psi_{e2} \end{pmatrix} \in R^{\text{DOFN}=4}, \quad \underline{q}_E(z_f, t) = \begin{pmatrix} u_E \\ v_E \\ \theta_E \\ \psi_E \end{pmatrix} \in R^{\text{DOFN}=4} \quad (4.1.5)$$

$$\underline{q}_e(t) = \begin{pmatrix} q_{e1} \\ q_{e2} \end{pmatrix} \in R^{\text{DOFN} \cdot Ne = 4 \cdot 2 = 8}, \quad e = 1 \dots NE \quad (4.1.6)$$

dove  $\underline{q}_e(t)$  è il vettore che contiene le variabili nodali dei nodi appartenenti all'elemento considerato. Un utile strumento per estrarre  $\underline{q}_k$  e  $\underline{q}_e$  dal vettore contenente tutte le variabili lagrangiane  $\underline{q}$  sono le matrici di connessione (matrici binarie formate da 0 e 1):

$$\underline{q}_k = J_k \underline{q}, \quad \underline{q}_e = H_e \underline{q}. \quad (4.1.7)$$

Usando un approccio Lagrangiano, dovremo arrivare a scrivere le equazioni di Lagrange per il nostro sistema

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)^T - \left( \frac{\partial L}{\partial q} \right)^T = \underline{Q}_{NC}, \quad L = T - V. \quad (4.1.8)$$

Dovremo quindi essere in grado di scrivere l'energia cinetica  $T$ , l'energia potenziale  $V$  e le azioni Lagrangiane non conservative del nostro sistema.

Alla fine (si veda sempre la Fig. 40) dovremo considerare i seguenti componenti della macchina rotante 1D:

- 1) COMPONENTI CONCENTRATI: entità concentrate dotate di massa e inerzia ma non di proprietà elastiche (stadi, giranti, etc.); i componenti concentrati dovranno essere posizionati sull'albero, solidalmente collegati a un nodo di riferimento del modello FEM (naturalmente non tutti i nodi sono associati a un componente concentrato!). Tali componenti avranno un'energia cinetica  $T_{dk}$  (d sta per disk) e un'energia potenziale  $V_{dk}$  solitamente trascurabile ( $V_{dk} = cost$ ).
- 2) COMPONENTI DISTRIBUITI / ELASTICI: entità distribuite dotate di massa, inerzia e di proprietà elastiche (solitamente sono i tratti di albero); i componenti elastici sono quasi sempre associati agli elementi del modello FEM. Tali componenti avranno un'energia cinetica  $T_e$  e un'energia potenziale  $V_e$ .
- 3) COMPONENTI ESTERNI / NON CONSERVATIVI: comprendono tutto quello che agisce sulla macchina dall'esterno come forzanti esterne (carichi palari / forzanti di fluido, azioni dovute a motori/generatori, azione della gravità o di altri campi di forza esterni, etc.), componenti modellabili come elementi di forza (cuscini, tenute, giunti, riduttori, etc.), smorzamento dei materiali e altri effetti strutturali non conservativi modellati come azioni esterne usando il Principio dei Lavori Virtuali. I componenti esterni / non conservativi sono chiaramente associati alle azioni Lagrangiane non conservative  $\underline{Q}_{NC}$ . In questo capitolo parleremo delle forzanti esterne più comuni e in modo assai semplificato dello smorzamento. Nel capitolo

5 parleremo degli elementi di forza e soprattutto dei cuscini fluidodinamici e nel capitolo 9 torneremo a parlare di forzanti esterne soffermandoci sulla modellazione delle forzanti di fluido (interazione fluido-struttura).

Nel complesso avremo dunque

$$L = T - V = \sum_{k=1}^{NN} T_{dk} + \sum_{e=1}^{NE} T_e - \sum_{e=1}^{NE} V_e. \quad (4.1.9)$$

## 4.2 Elementi concentrati

Per quanto riguarda gli elementi concentrati, modellabili come corpi rigidi concentrati solidalmente collegati alla terna associata al generico nodo  $k$ -esimo, calcoleremo l'energia cinetica  $T_{dk}$  e trascureremo l'energia potenziale  $V_{dk} = cost$ : si trascurano per ora le variazioni di quota di elementi e gli effetti della gravità (la gravità verrà trattata come azione esterna in seguito). L'energia cinetica  $T_{dk}$  può essere calcolata ricordando l'espressione dell'energia cinetica del generico corpo rigido:

$$T_{dk} = \frac{1}{2} m_{dk} \|\underline{\dot{G}}_k\|^2 + \frac{1}{2} \underline{\omega}_f^T(\underline{\phi}_k, \underline{\dot{\phi}}_k) R(\underline{\phi}_k) \sigma_{dk} R^T(\underline{\phi}_k) \underline{\omega}_f(\underline{\phi}_k, \underline{\dot{\phi}}_k). \quad (4.2.1)$$

e supponendo di conoscere le caratteristiche inerziali del componente concentrato (rispetto alla terna solidale al nodo associato a tale componente):

$$m_{dk}, \sigma_{dk} = \begin{bmatrix} I_{dk} & 0 & 0 \\ 0 & I_{dk} & 0 \\ 0 & 0 & I_{pk} \end{bmatrix}. \quad (4.2.2)$$

Applicando alla (4.1.10) le solite ipotesi semplificative, otteniamo infine l'espressione desiderata:

$$T_{dk} = \frac{1}{2} \underline{\dot{q}}_k^T M_{dk} \underline{\dot{q}}_k - \Omega \underline{q}_k^T A_{dk} \underline{\dot{q}}_k \quad (4.2.3)$$

con

$$M_{dk} = \begin{pmatrix} m_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{dk} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{dk} \end{pmatrix}, \quad A_{dk} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{pk} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.2.4)$$

Come vedremo, la matrice  $M_{dk}$  contribuirà alla matrice di massa complessiva del sistema mentre  $A_{dk}$  a quella giroscopica.

### 4.3 Elementi elastici (trave di Eulero - Bernoulli)

Per calcolare l'energia cinetica  $T_e$  e l'energia potenziale elastica  $V_e$  degli elementi elastici faremo uso della teoria flessionale della trave 1D a 4 DOF. In questo caso useremo la trave di Eulero - Bernoulli. Per la nomenclatura si faccia riferimento alla Fig. 41.

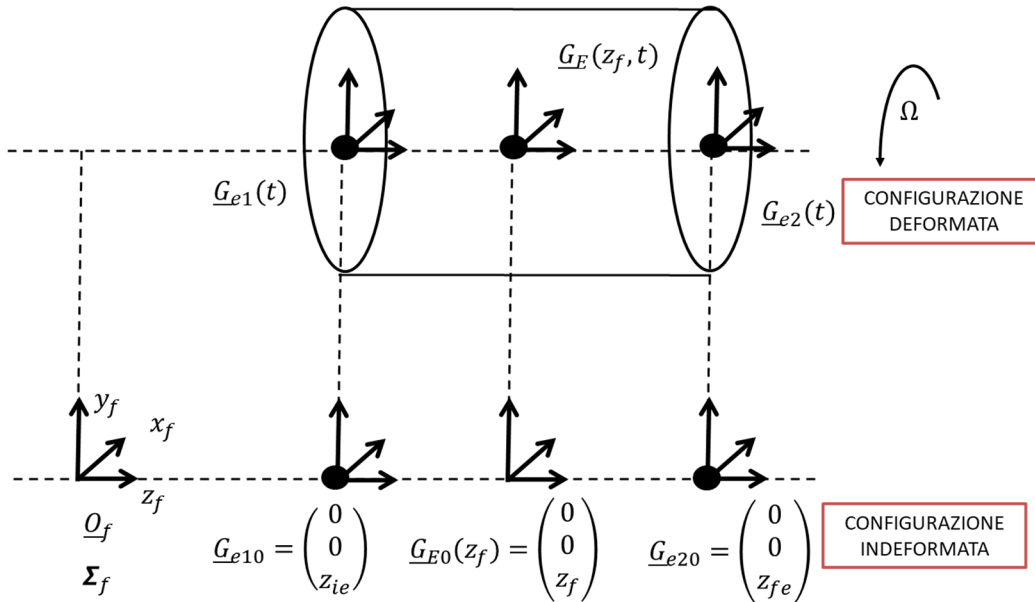


Figura 41 Elemento FEM 1D con 2 nodi per elemento e 4DOF per nodo

Una volta richiamata la nomenclatura, è il momento di introdurre la così detta approssimazione FEM:

$$\underline{q}_E(z_f, t) = \begin{pmatrix} u_E(z_f, t) \\ v_E(z_f, t) \\ \theta_E(z_f, t) \\ \psi_E(z_f, t) \end{pmatrix} \cong N_e(z_f) \underline{q}_e(t) = \begin{pmatrix} N_{e1}(z_f) \\ N_{e2}(z_f) \\ N_{e3}(z_f) \\ N_{e4}(z_f) \end{pmatrix} \underline{q}_e(t). \quad (4.3.1)$$

L'idea alla base del FEM è infatti quella di determinare la soluzione del problema solamente in alcuni punti specifici del dominio (e degli elementi della mesh in cui il dominio è suddiviso), ovvero nei nodi. Si ignora di conseguenza come si comporti realmente la soluzione all'interno dell'elemento e si prova ad approssimare il suo andamento in questa zona supponendo che esso sia una combinazione lineare dei valori presi dalla soluzione ai nodi (cioè delle variabili nodali). Il modo più generale per scrivere questa combinazione lineare è la (4.3.1). Naturalmente, poiché la posizione spaziale dei nodi è bloccata, le variabili nodali dipendono solo dal tempo. Di conseguenza la dipendenza della soluzione fisica  $\underline{q}_E(z_f, t)$  dallo spazio viene presa in carico dalla matrice / funzione di forma  $N_e(z_f)$ . In questo caso  $N_e(z_f)$  è una matrice 4x8 (coerentemente con la (4.3.1)) composta da 4 righe  $N_{ei}(z_f)$  1x8 e ognuno dei sui 32 elementi è fatto da polinomi interpolanti. Più è alto il grado di questi polinomi (e quindi il l'ordine dell'elemento) maggiore sarà l'accuratezza dell'elemento in questione e la sua capacità di garantire la continuità della soluzione, la continuità delle sue derivate prime e così via. L'aver scelto come funzioni interpolanti dei polinomi rende i calcoli successivi molto semplici (si note come il prodotto di polinomi è sempre un polinomio e la derivazione / integrazione di polinomi producono sempre polinomi e sono estremamente facili da effettuare).



E infine fondamentale notare come l'approssimazione FEM (4.3.1) separi di fatto la dipendenza spaziale ( $z_f$ ) da quella temporale. Questo trasforma immediatamente ogni derivata parziale di  $q_E(z_f, t)$  in una derivata ordinaria di  $N_e(z_f)$  (nel caso di derivate spaziali) e di  $q_e(t)$  (nel caso di derivate temporali). Questa trasformazione ha il notevole effetto di tramutare sistemi di equazioni differenziali alle derivate parziali (PDE) in sistemi di equazioni differenziali ordinarie (ODE) molto più semplici da risolvere e che costituiscono il punto di arrivo quando si discretizza una teoria fisica con un approccio FEM.

Alle 5 ipotesi di lavoro fatte all'inizio del capitolo 4, aggiungiamo altre 2 ipotesi di natura fisica che caratterizzano la trave di Eulero – Bernoulli, ovvero (queste ipotesi saranno poi rimosse nel prossimo paragrafo quando tratteremo la trave di Timoshenko):

- trascuriamo a livello tensionale gli effetti di taglio e consideriamo solamente gli effetti della flessione;
- trascuriamo gli effetti inerziali rotazionali della sezione e consideriamo solamente gli effetti inerziali di traslazione.

Serve infine un'altra ipotesi per arrivare a descrivere la teoria della trave 1D a 4 DOF di Eulero – Bernoulli (tale ipotesi sarà presente anche per la teoria della trave 1D a 4 DOF di Timoshenko), ovvero l'ipotesi del disaccoppiamento dei piani di inflessione. Supponiamo quindi che la dinamica della trave sul piano di inflessione  $xz$  (descritta dalle variabili  $(u_E, \psi_E)$ ) sia disaccoppiata dalla dinamica della trave sul piano di inflessione  $yz$  (descritta dalle variabili  $(v_E, \theta_E)$ ). Tale ipotesi è formalmente indipendente dalle ipotesi elencate a inizio del capitolo 4 e permette di studiare separatamente le due dinamiche mediante la solita equazione della trave (l'equazione sarà uguale ma le variabili ovviamente saranno diversi nei 2 piani di inflessione!). In questo caso, a livello formale, si passa dunque da una teoria flessionale della trave 1D completa a 4DOF a una teoria a 2+2DOF. Naturalmente, quando tale ipotesi non è verificata, la dinamica flessionale della trave 1D andrà studiata mediante una teoria della trave a 4DOF completa.

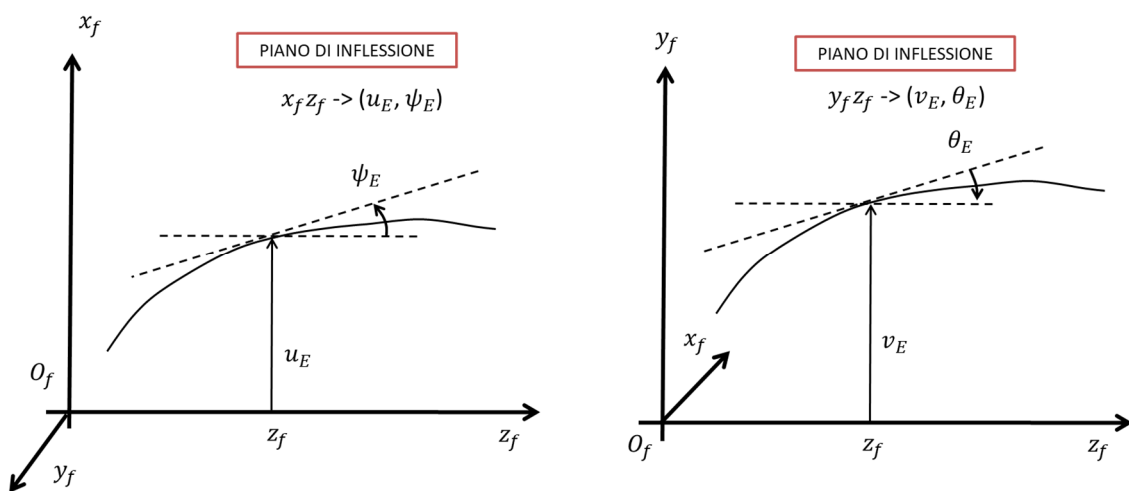


Figura 42 Disaccoppiamento dei piani di inflessione

Dal momento che la dinamica della trave è la stessa nei due piani di inflessione, prenderemo ora come riferimento il piano  $xz$  in cui la trave è descritta dalle variabili  $(u_E, \psi_E)$  (si veda la Fig. 42). La teoria della trave di Eulero – Bernoulli è brevemente riassunta in

$$\begin{cases} \rho A \frac{\partial^2 u_E}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial z_f} \left( E I_x \frac{\partial^2 u_E}{\partial z_f^2} \right) = q(z_f, t) \\ \psi_E = \frac{\partial u_E}{\partial z_f} \end{cases} \quad (4.3.2)$$

$$\varepsilon_{zz} = -x \frac{\partial^2 u_E}{\partial z_f^2}, \quad \sigma_{zz} = E \varepsilon_{zz} = -E x \frac{\partial^2 u_E}{\partial z_f^2} \quad (4.3.3)$$

dove  $\rho$  è la densità del materiale,  $A$  è l'area della sezione,  $E$  il modulo di Young,  $I_x$  è il momento geometrico della sezione e  $q(z_f, t)$  l'eventuale carico distribuito lungo la trave. La (4.3.3) riporta la distribuzione "a farfalla" di strain e di stress sulla sezione della trave (gli effetti di taglio vengono ignorati). A seguito della seconda delle (4.3.2) nella teoria della trave di Eulero-Bernoulli la sezione della trave è sempre ortogonale alla deformata della trave (si veda la Fig. 43).

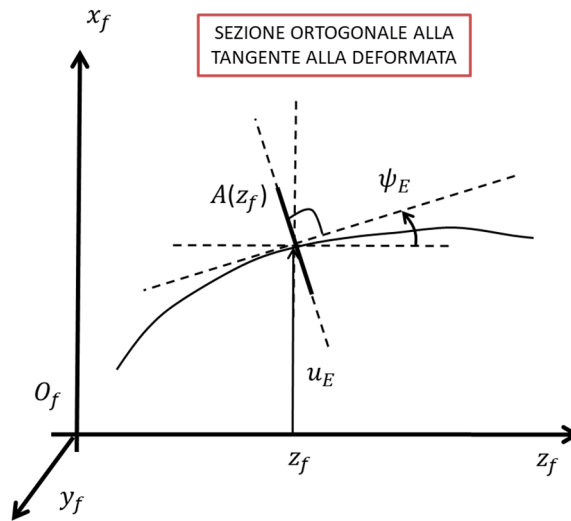


Figura 43 Caratteristiche della sezione nella trave di Eulero - Bernoulli

Troviamo ora l'energia potenziale elastica del generico elemento  $V_{eu}$  associata la piano di inflessione  $xz$ :

$$\begin{aligned} V_{eu} &= \frac{1}{2} \int_{V_e} \sum_{i,j} \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} dV = \frac{1}{2} \int_{V_e} \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} dV = \frac{1}{2} \int_{z_{ie}}^{z_{fe}} \int_A E x^2 \left( \frac{\partial^2 u_E}{\partial z_f^2} \right)^2 dA dz_f = \\ &= \frac{1}{2} \int_{z_{ie}}^{z_{fe}} I_x E \left( \underline{q}_e^T N_{e_1}''^T \right) \left( N_{e_1}'' \underline{q}_e \right) dz_f = \\ &= \frac{1}{2} \underline{q}_e^T \left[ \int_{z_{ie}}^{z_{fe}} I_x E N_{e_1}''^T(z_f) N_{e_1}''(z_f) dz_f \right] \underline{q}_e = \\ &= \frac{1}{2} \underline{q}_e^T K_{eu} \underline{q}_e. \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

Un analogo risultato si ottiene per il piano di inflessione  $yz$ ,  $V_{ev} = \frac{1}{2} \underline{q}_e^T K_{ev} \underline{q}_e$ , da cui

$$V_e = V_{eu} + V_{ev} = \frac{1}{2} \underline{q}_e^T K_e \underline{q}_e \quad \text{con} \quad K_e = K_{eu} + K_{ev}. \quad (4.3.5)$$

Si noti come la matrice  $K_e$  sia molto facile da calcolare proprio perché le funzioni di forma contengono solamente polinomi interpolanti. Il calcolo dell'energia potenziale elastica del generico elemento  $T_e$

$$T_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} \rho \|\underline{v}_P\|^2 dV \quad (4.3.6)$$

richiede qualche cautela in più perché prima deve essere calcolata la velocità  $\underline{v}_P$  della generica particella nel volume dell'elemento (vedi la Fig. 41). Dal momento che abbiamo supposto che la trave sia a sezione piana, possiamo trovare  $\underline{v}_P$  con la formula dei moti rigidi:

$$\underline{v}_P = \dot{\underline{G}}_E + \underline{\omega}_f(\underline{\phi}_E, \dot{\underline{\phi}}_E) \times (\underline{P}_f - \underline{G}_E), \quad \underline{P}_f = \underline{G}_E + R(\underline{\phi}_E)\underline{P}_e, \quad \underline{P}_e = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.3.7)$$

A questo, facciamo le solite ipotesi semplificative per poter usare la (4.3.7) nella modellazione flessionale a 4DOF di travi 1D:

- consideriamo solamente i gradi di libertà flessionali (si vedano le (4.1.3));
- linearizziamo il problema nell'intorno della configurazione nominale supponendo che tutte variabili del problema e tutte le loro derivate (vedi la (4.1.3)) siano piccole (eccetto ovviamente la speed della macchina  $\Omega$ ). Studiamo cioè il problema ai "piccoli spostamenti". Applicare questa ipotesi all'equazione (4.3.7) equivale a considerare solamente i termini di ordine 0 (le costanti) e i termini di ordine 1 (la variabili stesse), ignorando qualunque altro termine di ordine superiore.

Linearizzando  $\underline{v}_P$  e sostituendo 4.3.6 otteniamo:

$$T_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} \rho \|\underline{v}_P\|^2 dV = \frac{1}{2} \int_{V_e} \rho [\dot{u}_E^2 + \dot{v}_E^2 + y^2 \dot{\theta}_E^2 + x^2 \dot{\psi}_E^2 - 4(x^2 + y^2)\Omega \theta_E \dot{\psi}_E + (x^2 + y^2)\Omega^2] dV \quad (4.3.8)$$

dove  $r^2 = x^2 + y^2$ . Trascurando, come da ipotesi i contributi inziali rotazionali della sezione (terzo e quarto termine) si ha quindi

$$T_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} \rho [\dot{u}_E^2 + \dot{v}_E^2 - 4r^2 \Omega \theta_E \dot{\psi}_E + r^2 \Omega^2] dV = \frac{1}{2} \int_{V_e} \rho [\dot{u}_E^2 + \dot{v}_E^2 - 4r^2 \Omega \theta_E \dot{\psi}_E] dV + \frac{1}{2} J_e \Omega^2 \quad (4.3.9)$$

dove, come ultimo termine, è comparso il momento d'inerzia polare dell'elemento  $J_e$ . Questo termine, essendo costante, scomparirà per derivazione una volta inserito all'interno delle equazioni di Lagrange e quindi non ha importanza. Inserendo infine le funzioni di forma otteniamo

$$T_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} \rho \left[ (\dot{q}_e^T N_{e1}^T) (N_{e1} \dot{q}_e) \right] dV + \frac{1}{2} \int_{V_e} \rho \left[ (\dot{q}_e^T N_{e2}^T) (N_{e2} \dot{q}_e) \right] dV + \frac{1}{2} \int_{V_e} \rho r^2 \left[ (q_e^T N_{e3}^T) (N_{e3} \dot{q}_e) \right] dV + \frac{1}{2} J_e \Omega^2 = \frac{1}{2} \int_{z_{ie}}^{z_{fe}} \int_A \rho \left[ (\dot{q}_e^T N_{e1}^T) (N_{e1} \dot{q}_e) \right] dA dz_f + \frac{1}{2} \int_{z_{ie}}^{z_{fe}} \int_A \rho \left[ (\dot{q}_e^T N_{e2}^T) (N_{e2} \dot{q}_e) \right] dA dz_f + 2\Omega \int_{z_{ie}}^{z_{fe}} \int_A \rho r^2 \left[ (q_e^T N_{e3}^T) (N_{e3} \dot{q}_e) \right] dA dz_f + \frac{1}{2} J_e \Omega^2 =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \dot{q}_e^T \int_{z_{ie}}^{z_{fe}} \rho A N_{e1}^T N_{e1} dz_f \dot{q}_e + \frac{1}{2} \dot{q}_e^T \int_{z_{ie}}^{z_{fe}} \rho A N_{e2}^T N_{e2} dz_f \dot{q}_e - 2 \Omega \dot{q}_e^T \int_{z_{ie}}^{z_{fe}} \rho J N_{e3}^T N_{e4} dz_f \dot{q}_e + \frac{1}{2} J_e \Omega^2 = \\
 &= \frac{1}{2} \dot{q}_e^T M_{eu} \dot{q}_e + \frac{1}{2} \dot{q}_e^T M_{ev} \dot{q}_e - 2 \Omega \dot{q}_e^T A_e \dot{q}_e + \frac{1}{2} J_e \Omega^2 = \frac{1}{2} \dot{q}_e^T M_e \dot{q}_e - \Omega \dot{q}_e^T A_e \dot{q}_e + \frac{1}{2} J_e \Omega^2 = \\
 &= T_{eu} + T_{ev} + T_{eg} + T_0 = T_{eq} + T_{eg} + T_{e0}, \quad M_e = M_{eu} + M_{ev}
 \end{aligned}$$

dove  $J$  è il momento geometrico polare della sezione e  $T_{e0}$  è il termine costante che andrà via in derivazione dentro le equazioni di Lagrange. Per concludere occorre osservare che il termine non quadratico puro  $T_{eg}$ , responsabile come vedremo degli effetti giroscopici nell'equazione di moto, coinvolge termini associati a piani di inflessione diversi:  $\dot{\psi}_E$  per il piano  $xz$  e  $\dot{\theta}_E$  per il piano  $yz$ . Tale termine accoppia quindi i due piani di inflessione violando l'ipotesi di disaccoppiamento di tali piani. Il termine misto  $T_{eg}$  è quindi un buon indicatore di quanto questa ipotesi sia veritiera. Se  $T_{eg}$  è piccola, allora l'ipotesi di disaccoppiamento dei piani di inflessione è ben verificata, altrimenti no.

## 4.4 Elementi elastici (trave di Timoshenko)

Ripetiamo ora lo stesso ragionamento descritto nel paragrafo precedente per trovare le energie potenziale elastica  $V_e$  e cinetica  $T_e$  dell'elemento FEM ma usando questa la teoria della trave 1D a 4 DOF di Timoshenko. La trave di Timoshenko è fisica mente più accurata della trave di Eulero-Bernoulli perché tiene anche in considerazione gli effetti di taglio e di inerzia rotazionale della sezione (le due ipotesi di lavoro fatte nel caso di Eulero-Bernoulli vengono quindi rimosse). Rimane anche in questo caso l'ipotesi di disaccoppiamento dei piani di inflessione  $xz$  (dinamica della trave governata dalle variabili  $(u_E \psi_E)$ ) e  $yz$  (dinamica della trave governata dalle variabili  $(v_E \theta_E)$ ). Anche la trave di Timoshenko può dunque essere considerata una teoria a 2+2DOF. In termini di frequenze, la trave di Eulero- Bernoulli è solitamente accurata fino a 100-200Hz mentre la trave di Timoshenko estende questo range fino a 500-1000Hz. Oltre queste frequenze, a seconda della validità delle ipotesi fatte e del rapporto accuratezze – efficienze numerica richiesto, occorre passare a teorie della trave 1D a 4DOF complete, 6DOF o direttamente alla modellazione 3D del nostro sistema.

Come nel caso precedente, riassumiamo qui brevemente le equazioni della teoria della trave di Timoshenko:

$$\begin{cases} \rho A \frac{\partial^2 u_E}{\partial t^2} - q(z_f, t) = \frac{\partial}{\partial z_f} \left[ kAG \left( \frac{\partial u_E}{\partial z_f} - \psi_E \right) \right] \\ \rho I \frac{\partial^2 \psi_E}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z_f} \left( EI_x \frac{\partial u_E}{\partial z_f} \right) + kAG \left( \frac{\partial u_E}{\partial z_f} - \psi_E \right) \end{cases} \quad (4.4.1)$$

$$\varepsilon_{zz} = -x \frac{\partial \psi_E}{\partial z_f}, \quad \sigma_{zz} = E \varepsilon_{zz} = -Ex \frac{\partial \psi_E}{\partial z_f}, \quad \gamma = k \left( \frac{\partial u_E}{\partial z_f} - \psi_E \right), \quad \tau = G\gamma = Gk \left( \frac{\partial u_E}{\partial z_f} - \psi_E \right)$$

dove  $k$  è il fattore di taglio di Timoshenko associato a una certa sezione della trave e  $\beta$  è l'angolo di Timoshenko, ovvero l'angolo  $\beta = \psi_E - \frac{\partial u_E}{\partial z_f}$  che la sezione (piana!) forma rispetto alla normale alla deformata della trave (si veda la Fig. 44).

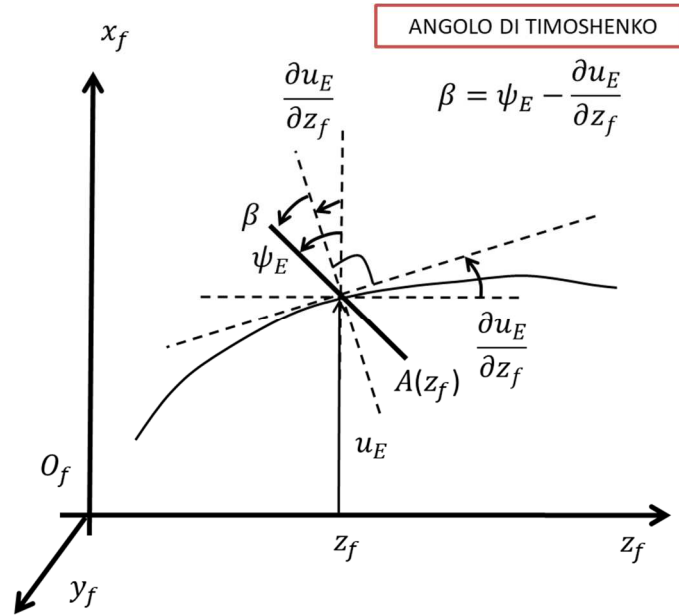


Figura 44 Caratteristiche della sezione nella trave di Timoshenko

Per la nomenclatura FEM faremo sempre riferimento al paragrafo 4.1 e alla Fig. 41. Questa volta per calcolare l'energia potenziale elastica  $V_e$ , come preannunciato, terremo conto anche del taglio tra i vari contributi di deformazione (oltre a quello della flessione). Per il piano di inflessione  $xz$  si ha:

$$\begin{aligned}
 V_{eu} &= \frac{1}{2} \int_{V_e} \sum_{i,j} \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} dV = \frac{1}{2} \int_{V_e} [\sigma_{zz} \varepsilon_{zz} + \gamma \tau] dV = \frac{1}{2} \int_{V_e} \left[ E x^2 \left( \frac{\partial \psi_E}{\partial z_f} \right)^2 + k^2 G \left( \frac{\partial u_E}{\partial z_f} - \psi_E \right)^2 \right] dV = \quad (4.4.2) \\
 &= \frac{1}{2} \int_{z_{ie}}^{z_{fe}} \int_A \left[ E x^2 \left( \frac{\partial \psi_E}{\partial z_f} \right)^2 + k^2 G \left( \frac{\partial u_E}{\partial z_f} - \psi_E \right)^2 \right] dA dz_f = \\
 &= \int_{z_{ie}}^{z_{fe}} \left[ E I_x \left( \frac{\partial \psi_E}{\partial z_f} \right)^2 + k^2 G A \left( \frac{\partial u_E}{\partial z_f} - \psi_E \right)^2 \right] dz_f.
 \end{aligned}$$

Ricordando a questo punto l'approssimazione FEM (modello FEM per trave 1D a 2 nodi per elemento e 4 DOF per nodo):

$$\underline{q}_E(z_f, t) = \begin{pmatrix} u_E(z_f, t) \\ v_E(z_f, t) \\ \theta_E(z_f, t) \\ \psi_E(z_f, t) \end{pmatrix} \cong N_e(z_f) \underline{q}_e(t) = \begin{pmatrix} N_{e1}(z_f) \\ N_{e2}(z_f) \\ N_{e3}(z_f) \\ N_{e4}(z_f) \end{pmatrix} \underline{q}_e(t). \quad (4.4.3)$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
 V_{eu} &= \int_{z_{ie}}^{z_{fe}} \left[ E I_x \left( \underline{q}_e^T N_{e4}^T \right) \left( N'_{e4} \underline{q}_e \right) + k^2 G A \left( \underline{q}_e^T N_{e1}^T - \underline{q}_e^T N_{e4}^T \right) \left( N'_{e1} \underline{q}_e - N_{e4} \underline{q}_e \right) \right] dz_f = \quad (4.4.4) \\
 &= \underline{q}_e^T \int_{z_{ie}}^{z_{fe}} \left[ E I_x N_{e4}^T N'_{e4} + k^2 G A \left( N_{e1}^T N'_{e1} - N_{e1}^T N_{e4} - N_{e4}^T N'_{e1} + N_{e4}^T N_{e4} \right) \right] dz_f \underline{q}_e = \\
 &= \frac{1}{2} \underline{q}_e^T K_{eu} \underline{q}_e.
 \end{aligned}$$

Un analogo risultato si ottiene per il piano di inflessione  $yz$ ,  $V_{ev} = \frac{1}{2} \underline{q}_e^T K_{ev} \underline{q}_e$ , da cui

$$V_e = V_{eu} + V_{ev} = \frac{1}{2} \underline{q}_e^T K_e \underline{q}_e \quad \text{con} \quad K_e = K_{eu} + K_{ev}. \quad (4.4.5)$$

Si noti come la matrice  $K_e$  sia molto facile da calcolare proprio perché le funzioni di forma contengono solamente polinomi interpolanti.

Anche per la trave di Timoshenko, il calcolo dell'energia potenziale elastica del generico elemento  $T_e$

$$T_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} \rho \|\underline{v}_P\|^2 dV \quad (4.4.6)$$

richiede qualche cautela in più perché prima deve nuovamente essere calcolata la velocità  $\underline{v}_P$  della generica particella nel volume dell'elemento (vedi la Fig. 41). Dal momento che abbiamo supposto che la trave sia a sezione piana, possiamo trovare  $\underline{v}_P$  con la formula dei moti rigidi:

$$\underline{v}_P = \underline{\dot{G}}_E + \underline{\omega}_f(\underline{\phi}_E, \underline{\dot{\phi}}_E) \times (\underline{P}_f - \underline{G}_E), \quad \underline{P}_f = \underline{G}_E + R(\underline{\phi}_E) \underline{P}, \quad \underline{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.4.7)$$

A questo, facciamo le solite ipotesi semplificative per poter usare la (4.4.7) nella modellazione flessionale a 4DOF di travi 1D:

- consideriamo solamente i gradi di libertà flessionali (si vedano le (4.1.3));
- linearizziamo il problema nell'intorno della configurazione nominale supponendo che tutte variabili del problema e tutte le loro derivate (vedi la (4.1.3)) siano piccole (eccetto ovviamente la speed della macchina  $\Omega$ ). Studiamo cioè il problema ai "piccoli spostamenti". Applicare questa ipotesi all'equazione (4.4.7) equivale a considerare solamente i termini di ordine 0 (le costanti) e i termini di ordine 1 (la variabili stesse), ignorando qualunque altro termine di ordine superiore.

Linearizzando  $\underline{v}_P$  e sostituendo 4.3.6 otteniamo:

$$T_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} \rho \|\underline{v}_P\|^2 dV = \frac{1}{2} \int_{V_e} \rho [\dot{u}_E^2 + \dot{v}_E^2 + y^2 \dot{\theta}_E^2 + x^2 \dot{\psi}_E^2 - 4(x^2 + y^2) \Omega \theta_E \dot{\psi}_E + (x^2 + y^2) \Omega^2] dV =$$

dove  $r^2 = x^2 + y^2$ . Si ha poi (questa volta non si trascurano le inerzie rotazionali della sezione):

$$T_e = \frac{1}{2} \int_{z_{ie}}^{z_{fe}} \int_A \rho [\dot{u}_E^2 + \dot{v}_E^2 + y^2 \dot{\theta}_E^2 + x^2 \dot{\psi}_E^2 - 4r^2 \Omega \theta_E \dot{\psi}_E + r^2 \Omega^2] dA dz_f = \int_{z_{ie}}^{z_{fe}} \rho [A \dot{u}_E^2 + A \dot{v}_E^2 + I_y \dot{\theta}_E^2 + I_x \dot{\psi}_E^2 - 4J \Omega \theta_E \dot{\psi}_E + r^2 \Omega^2] dz_f. \quad (4.4.9)$$

Introduco poi l'approssimazione e ottengo

$$T_e = \frac{1}{2} \underline{\dot{q}}_e^T \int_{z_{ie}}^{z_{fe}} \rho A N_{e1}^T N_{e1} dz_f \underline{\dot{q}}_e + \frac{1}{2} \underline{\dot{q}}_e^T \int_{z_{ie}}^{z_{fe}} \rho A N_{e2}^T N_{e2} dz_f \underline{\dot{q}}_e + \frac{1}{2} \underline{\dot{q}}_e^T \int_{z_{ie}}^{z_{fe}} \rho I_y N_{e3}^T N_{e3} dz_f \underline{\dot{q}}_e + \frac{1}{2} \underline{\dot{q}}_e^T \int_{z_{ie}}^{z_{fe}} \rho I_x N_{e4}^T N_{e4} dz_f \underline{\dot{q}}_e - 2 \Omega \underline{q}_e^T \int_{z_{ie}}^{z_{fe}} \rho J N_{e3}^T N_{e4} dz_f \underline{\dot{q}}_e + \frac{1}{2} J_e \Omega^2 = \quad (4.4.10)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \dot{q}_e^T M_{eu} \dot{q}_e + \frac{1}{2} \dot{q}_e^T M_{e\psi} \dot{q}_e + \frac{1}{2} \dot{q}_e^T M_{e\theta} \dot{q}_e + \frac{1}{2} \dot{q}_e^T M_{e\psi} \dot{q}_e - 2\Omega \underline{q}_e^T A_{eu} \dot{q}_e + \frac{1}{2} J_e \Omega^2 = \\
 &= \frac{1}{2} \dot{q}_e^T (M_{eu} + M_{e\psi}) \dot{q}_e + \frac{1}{2} \dot{q}_e^T (M_{e\psi} + M_{e\theta}) \dot{q}_e - \Omega \underline{q}_e^T A_{eu} \dot{q}_e + \frac{1}{2} J_e \Omega^2 = \\
 &= \frac{1}{2} \dot{q}_e^T M_e \dot{q}_e - \Omega \underline{q}_e^T A_{eu} \dot{q}_e + \frac{1}{2} J_e \Omega^2 = \\
 &= T_{eu} + T_{e\psi} + T_{e\theta} + T_0 = T_e + T_{eg} + T_{e0}, \quad M_e = M_{eu} + M_{e\psi} + M_{e\theta} + M_{e0}
 \end{aligned}$$

dove  $J$  è il momento geometrico polare della sezione,  $J_e$  è il momento d'inerzia polare dell'elemento e  $T_{e0}$  è il termine costante che andrà via in derivazione dentro le equazioni di Lagrange. Per concludere occorre nuovamente osservare che il termine non quadratico puro  $T_{eg}$ , responsabile come vedremo degli effetti giroscopici nell'equazione di moto, coinvolge termini associati a piani di inflessione diversi:  $\psi_E$  per il piano  $xz$  e  $\theta_E$  per il piano  $yz$ . Tale termine accoppia quindi i due piani di inflessione violando l'ipotesi di disaccoppiamento di tali piani. Il termine misto  $T_{eg}$  è quindi un buon indicatore di quanto questa ipotesi sia veritiera. Se  $T_{eg}$  è piccola, allora l'ipotesi di disaccoppiamento dei piani di inflessione è ben verificata, altrimenti no.

## 4.5 Assemblaggio delle equazioni

L'assemblaggio delle equazioni di moto è abbastanza facile una volta determinati i vari contributi. Ricordando che

$$L = T - V = \sum_{k=1}^{NN} T_{dk} + \sum_{e=1}^{NE} T_e - \sum_{e=1}^{NE} V_e, \quad (4.5.1)$$

alla luce dei risultati per paragrafo 4.4, possiamo scrivere per gli elementi concentrati e per gli elementi distribuiti:

$$T_{dk} = \frac{1}{2} \dot{q}_k^T M_{dk} \dot{q}_k - \Omega \underline{q}_k^T A_{dk} \dot{q}_k \quad (4.5.2)$$

$$V_e = \frac{1}{2} \underline{q}_e^T K_e \underline{q}_e$$

$$T_e = \frac{1}{2} \dot{q}_e^T M_e \dot{q}_e - \Omega \underline{q}_e^T A_{eu} \dot{q}_e + \frac{1}{2} J_e \Omega^2.$$

Introducendo le (4.5.2) nella (4.5.1) e usando le matrici di connessione  $\underline{q}_k = J_k \underline{q}$  e  $\underline{q}_k = H_e \underline{q}$ , si ottiene

$$V_{etot} = \sum_{e=1}^{NE} V_e = \sum_{e=1}^{NE} \frac{1}{2} \underline{q}_e^T K_e \underline{q}_e = \frac{1}{2} \underline{q}^T \left( \sum_{e=1}^{NE} H_e^T K_e H_e \right) \underline{q} = \frac{1}{2} \underline{q}^T K_{etot} \underline{q} \quad (4.5.3)$$

$$\begin{aligned}
 T_{etot} &= \sum_{e=1}^{NE} T_e = \sum_{e=1}^{NE} \left( \frac{1}{2} \dot{q}_e^T M_e \dot{q}_e - \Omega \underline{q}_e^T A_{eu} \dot{q}_e \right) = \frac{1}{2} \dot{q}^T \left( \sum_{e=1}^{NE} H_e^T M_e H_e \right) \dot{q} - \Omega \underline{q}^T \left( \sum_{e=1}^{NE} H_e^T A_{eu} H_e \right) \dot{q} = \\
 &= \frac{1}{2} \dot{q}^T M_{etot} \dot{q} - \Omega \underline{q}^T A_{etot} \dot{q}
 \end{aligned}$$

$$T_{dtot} = \sum_{k=1}^{NN} T_{dk} = \sum_{k=1}^{NN} \left( \frac{1}{2} \dot{\underline{q}}_k^T M_{dk} \dot{\underline{q}}_k - \Omega \underline{q}_k^T A_{dk} \dot{\underline{q}}_k \right) = \frac{1}{2} \dot{\underline{q}}^T \left( \sum_{k=1}^{NN} J_k^T M_{dk} J_k \right) \dot{\underline{q}} - \Omega \underline{q}^T \left( \sum_{k=1}^{NN} J_k^T A_{dk} J_k \right) \dot{\underline{q}}$$

$$= \frac{1}{2} \dot{\underline{q}}^T M_{dtot} \dot{\underline{q}} - \Omega \underline{q}^T A_{dtot} \dot{\underline{q}}.$$

Sostituendo infine le (4.5.3) nelle equazioni di Lagrange (4.1.8) si arriva alla seguente equazione:

$$(M_{dtot} + M_{etot}) \ddot{\underline{q}} + \Omega (A_{dtot} + A_{etot} - A_{dtot}^T - A_{etot}^T) \dot{\underline{q}} + K_{etot} \underline{q} = \underline{Q}_{NC} = \underline{Q}_b + \underline{Q}_{sm} + \underline{Q}_{ext} \quad (4.5.4)$$

$$(M_{dtot} + M_{etot}) \ddot{\underline{q}} + \Omega G \dot{\underline{q}} + K_{etot} \underline{q} = \underline{Q}_{NC} = \underline{Q}_b + \underline{Q}_{sm} + \underline{Q}_{ext}$$

dove  $G$  è la matrice giroscopica del sistema (antisimmetrica) e dove, dentro le azioni lagrangiane non conservative  $\underline{Q}_{NC}$ , abbiamo considerato le generiche forzanti esterne  $\underline{Q}_{ext}$  agenti sulla macchina (carichi palari / forzanti di fluido, azioni dovute a motori/generatori, azione della gravità o di altri campi di forza esterni, etc.), lo smorzamento del materiale  $\underline{Q}_{sm}$  (modellato come azione esterna usando il Principio dei Lavori Virtuali) e le azioni  $\underline{Q}_b$  dei componenti modellabili come elementi di forza (cuscini, tenute, giunti, riduttori, etc.). Solitamente le matrici  $M_{dtot}, M_{etot}$  sono simmetriche definite positive mentre la matrice  $K_{etot}$  è simmetrica semidefinita positiva.

In questo capitolo parleremo delle forzanti esterne più comuni e in modo assai semplificato dello smorzamento. Nel capitolo 5 parleremo degli elementi di forza e soprattutto dei cuscini fluidodinamici e nel capitolo 9 torneremo a parlare di forzanti esterne soffermandoci sulla modellazione delle forzanti di fluido (interazione fluido-struttura).

Supponiamo per ora di adottare per gli elementi di forza (e soprattutto per cuscini e tenute) agenti sul generico nodo  $k$ -esimo una classica formulazione linearizzata tipo molla tridimensionale:

$$\underline{Q}_{bk} = -K_{Ck}(\Omega) \underline{q}_k - C_{Ck}(\Omega) \dot{\underline{q}}_k. \quad (4.5.5)$$

in cui, come vedremo, le matrici di cuscino non sono simmetriche e potranno dipendere dalla speed  $\Omega$  e da altri parametri del sistema. Il vettore complessivo delle azioni lagrangiane associate agli elementi di forza  $\underline{Q}_b$  potrà essere determinato tramite le matrici di connessione:

$$\underline{Q}_b = \sum_{k=1}^{NN} J_k^T \underline{Q}_{bk} = \sum_{k=1}^{NN} J_k^T \left[ -K_{Ck}(\Omega) J_k \underline{q} - C_{Ck}(\Omega) J_k \dot{\underline{q}} \right] = -K_C(\Omega) \underline{q} - C_C(\Omega) \dot{\underline{q}}. \quad (4.5.6)$$

Inserendo la (4.5.6) nella (4.5.4) si arriva alle equazioni:

$$(M_{dtot} + M_{etot}) \ddot{\underline{q}} + (\Omega G + C_C(\Omega)) \dot{\underline{q}} + (K_{etot} + K_C(\Omega)) \underline{q} = \underline{Q}_{sm} + \underline{Q}_{ext} \quad (4.5.7)$$

$$M \ddot{\underline{q}} + (\Omega G + C_C(\Omega)) \dot{\underline{q}} + K \underline{q} = \underline{Q}_{sm} + \underline{Q}_{ext}$$

dove la matrice  $M$  rimane simmetrica definita positiva mentre purtroppo a causa degli elementi di forza non simmetrici (cuscini e tenute) la matrice  $K$  perdere qualunque proprietà.

Supponendo infine di adotta un semplice modello si smorzamento del materiale lineare (vedremo nel prossimo paragrafo come fare a determinare la matrice di smorzamento  $C_{sm}$  con il Principio dei Lavori Virtuali)

$$\underline{Q}_{sm} = -C_{sm} \dot{\underline{q}} \quad (4.5.8)$$

si ottiene l'equazione generale della rotordinamica flessionale (a 4DOF) per un rotore elastico 1D:



$$M\ddot{\underline{q}} + (\Omega G + C_C(\Omega) + C_{sm})\dot{\underline{q}} + K\underline{q} = \underline{Q}_{ext} \quad (4.5.9)$$

$$M\ddot{\underline{q}} + (\Omega G + C)\dot{\underline{q}} + K\underline{q} = \underline{Q}_{ext}$$

dove chiaramente anche la matrice  $C$  perde qualunque proprietà.

## 4.6 Trattazione semplificata dello smorzamento di materiale

Mostriamo ora come calcolare le azioni lagrangiane associate allo smorzamento del materiale nell'ipotesi estremamente semplificata di smorzamento lineare (modello smorzamento linearizzato):

$$\underline{Q}_{sm} = -C_{sm}\dot{\underline{q}}. \quad (4.6.1)$$

Il calcolo di  $\underline{Q}_{sm}$  è una interessante e istruttiva applicazione del Principio dei Lavori Virtuali (PLV) al modello di trave in uso. Il PLV afferma che il lavoro virtuale scritto nello spazio della variabili lagrangiane è uguale, per qualunque spostamento virtuale compatibile con i vincoli del sistema, al lavoro virtuale scritto nello "spazio fisico". Considerando l'  $e$ -esimo elemento del nostro modello FEM, si ha:

$$\delta \underline{q}_e^T \underline{Q}_{sm}^e = -\delta L_{sm}^e. \quad (4.6.2)$$

dove  $\delta L_{sm}^e$  è il lavoro virtuale nello spazio fisico effettuato dal sistema. Ipotizzando che il materiale abbia una semplice caratteristica lineare visco-elastica del tipo

$$\sigma_{zz} = \sigma_{zzel} + \sigma_{zzsm} = E\varepsilon_{zz} + E_{sm}\dot{\varepsilon}_{zz} \quad (4.6.3)$$

$$\tau = \tau_{el} + \tau_{sm} = G\gamma + G_{sm}\dot{\gamma},$$

è possibile calcolare  $-\delta L_{sm}^e$  per la sola componente di smorzamento della (4.5.12) (ho già considerato la componente elastica nei paragrafi 4.3 e 4.4!):

$$-\delta L_{sm}^e = -\int_{V_e} \sum_{i,j} \delta \varepsilon_{ij} \sigma_{ijsm} dV = -\int_{V_e} (\delta \varepsilon_{zz} \sigma_{zzsm} + \delta \gamma \tau_{sm}) dV. \quad (4.6.4)$$

Ricordando che, per il piano di inflessione  $xz$ , valgono le seguenti relazioni costitutive per la trave di Timoshenko

$$\varepsilon_{zz} = -x \frac{\partial \psi_E}{\partial z_f}, \quad \gamma = k \left( \frac{\partial u_E}{\partial z_f} - \psi_E \right), \quad \tau = G\gamma = Gk \left( \frac{\partial u_E}{\partial z_f} - \psi_E \right),$$

si ha

$$\delta \varepsilon_{zz} = -x \delta \frac{\partial \psi_E}{\partial z_f} = -x N'_{e4} \delta \underline{q}_e, \quad \sigma_{zzsm} = -E_{sm} x \frac{\partial^2 \psi_E}{\partial z_f \partial t} = -E_{sm} x N'_{e4} \dot{\underline{q}}_e \quad (4.6.5)$$

$$\delta \gamma = k \left( \delta \frac{\partial u_E}{\partial z_f} - \delta \psi_E \right) = k \left( N'_{e1} \delta \underline{q}_e - N_{e4} \delta \underline{q}_e \right), \quad \tau_{sm} = G_{sm} k \left( \frac{\partial^2 u_E}{\partial z_f \partial t} - \frac{\partial \psi_E}{\partial t} \right) = G_{sm} k \left( N'_{e1} \dot{\underline{q}}_e - N_{e4} \dot{\underline{q}}_e \right).$$

Sostituendo nella (4.5.13) si ha infine:

$$-\delta L_{sm,u}^e = -\int_{z_{ie}}^{z_{fe}} \int_A \left[ E_{sm} x^2 \delta \underline{q}_e^T N_{e4}^T N'_{e4} \dot{\underline{q}}_e + G_{sm} k^2 \left( N'_{e1} \dot{\underline{q}}_e - N_{e4} \dot{\underline{q}}_e \right) \left( N'_{e1} \dot{\underline{q}}_e - N_{e4} \dot{\underline{q}}_e \right) \right] dA dz_f = \quad (4.6.6)$$

$$\begin{aligned}
 -\delta L_{sm,u}^e &= -\delta \underline{q}_e^T \int_{z_{ie}}^{z_{fe}} [E_{sm} I_x N_{e4}^T N_{e4}' + G_{sm} A k^2 (N_{e1}' - N_{e4})(N_{e1}' - N_{e4})] dz_f \underline{\dot{q}}_e = \\
 &= -\delta \underline{q}_e^T C_{sm,u}^e \underline{\dot{q}}_e
 \end{aligned}$$

Otterremo chiaramente un risultato analogo per il piano di inflessione yz:  $-\delta L_{sm,v}^e = -\delta \underline{q}_e^T C_{sm,v}^e \underline{\dot{q}}_e$ . Nel complesso avremo dunque:  $-\delta L_{sm}^e = -\delta L_{sm,u}^e - \delta L_{sm,v}^e = -\delta \underline{q}_e^T C_{sm}^e \underline{\dot{q}}_e$ , con  $C_{sm}^e = C_{sm,u}^e + C_{sm,v}^e$ .

Dal momento che il PLV è vero qualunque siano gli spostamenti virtuali compatibili con i vincoli  $\delta \underline{q}_e$ , si ha che

$$\underline{Q}_{sm}^e = -C_{sm}^e \underline{\dot{q}}_e. \quad (4.6.7)$$

Infine, per trovare il vettore complessivo delle azioni lagrangiane associate allo smorzamento  $\underline{Q}_{sm}$ , usiamo nuovamente le matrici di connessione:

$$\underline{Q}^{sm} = \sum_{e=1}^{NE} H_e^T \underline{Q}_{sm}^e = -\sum_{e=1}^{NE} H_e^T C_{sm}^e H_e \underline{\dot{q}} = -C_{sm} \underline{\dot{q}}. \quad (4.6.8)$$

## 4.7 Diagrammi di Campbell, whirl libero, classificazione modale e mappa modale

Analizziamo ora la soluzione dell'equazione:

$$M \underline{\ddot{q}} + (\Omega G + C) \underline{\dot{q}} + K \underline{q} = \underline{0}. \quad (4.7.1)$$

Come detto nel paragrafo 1.2, l'analisi ci dice che la soluzione libera (associata al moto libero) ha la forma:

$$\underline{q}_l(t) = \sum_{j=1}^{2N} c_j \underline{q}_j e^{s_j t} \quad N = 4 * NN \quad (4.7.2)$$

dove

$$\begin{aligned}
 s_{i,i+N} &= -\zeta_i \omega_{ni} \pm j \omega_{ni} \sqrt{1 - \zeta_i^2} = -\zeta_i \omega_{ni} \pm j \omega_{pi}, & \underline{q}_i &= \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{q}_{ik} \\ \dots \end{pmatrix} & \underline{q}_{ik} &= \begin{pmatrix} u_{ik} \\ v_{ik} \\ \theta_{ik} \\ \psi_{ik} \end{pmatrix}, & \underline{q}_{i+N} &= \overline{\underline{q}}_i, \\
 & & & & & & & i = 1 \dots N, \quad k = 1 \dots NN \quad (4.7.3)
 \end{aligned}$$

sono gli autovalori (associati alle pulsazioni proprie  $\omega_{pi}$ ) e gli autovettori del problema (associati alle deformate modali).

I modi di vibrare del sistema sono definiti invece come

$$\underline{q}_i(t) = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{q}_{ik}(t) \\ \dots \end{pmatrix} = Re(\underline{q}_i e^{s_i t}) = Re\left(\begin{pmatrix} \dots \\ \underline{q}_{ik} \\ \dots \end{pmatrix} e^{s_i t}\right) \quad \begin{pmatrix} u_{ik}(t) \\ v_{ik}(t) \\ \theta_{ik}(t) \\ \psi_{ik}(t) \end{pmatrix} = Re\left(\begin{pmatrix} u_{ik} \\ v_{ik} \\ \theta_{ik} \\ \psi_{ik} \end{pmatrix} e^{s_i t}\right) \quad (4.7.5)$$

Si noti che il sistema ha  $2N$  autovalori ( $N$  coppie complesse coniugate),  $2N$  autovettori ( $N$  coppie complesse coniugate) e  $2N$  modi di vibrare ( $N$  coppie uguali). Di conseguenza le pulsazioni naturali / proprie e gli smorzamenti modali distinti saranno solamente  $N$ .

Naturalmente sia gli autovalori che gli autovettori del problema dipendono dal parametro  $\Omega$  (la velocità di rotazione / speed della macchina):

$$s_i(\Omega), \omega_{ni}(\Omega), \omega_{pi}(\Omega), \zeta_i(\Omega), \underline{q}_i(\Omega) \quad \text{con } \Omega \in [0 \quad \Omega_{max}]. \quad (4.7.6)$$

E' dunque molto importante capire a livello qualitativo questa dipendenza sia per il autovalori (tramite il diagramma di Campbell) che per gli autovettori (tramite lo studio del moto (whirl libero) e la classificazione modale). Il tutto sarà infine riassunto dalla mappa modale.

Partendo dallo studio degli autovalori, si usa descrivere la dipendenza delle pulsazioni proprie o naturali  $\omega_{ni}(\Omega), \omega_{pi}(\Omega)$  e degli smorzamenti modali  $\zeta_i(\Omega)$  da  $\Omega$  in due diversi diagrammi Campbell (si veda la Fig. 45). In questo caso il sistema ha solamente  $N$  pulsazioni naturali / proprie e smorzamenti modali e quindi i diagrammi di Campbell sono formati da  $N$  rami. Tali pulsazioni costituiscono dei grappoli di 4 rami ( $NN$  per un rotore elastico). Per semplicità riportiamo solamente i primi due grappoli. Se infatti l'ipotesi di disaccoppiamento delle dinamiche flessionali, torsionali e assiali è verificata, gli autovalori relativi ai 4 DOF flessionali tenderanno a raggrupparsi in grappoli di 4 mentre gli autovalori relativi ai DOF torsionali non formano alcun raggruppamento (sono indipendenti tra loro o formano "grappoli di un solo elemento") così come gli autovalori relativi ai DOF assiali. Purtroppo, se l'ipotesi di disaccoppiamento delle tre dinamiche non è più verificata, gli autovalori relativi alla dinamica flessionali tendono a perdere la tendenza a raggrupparsi.

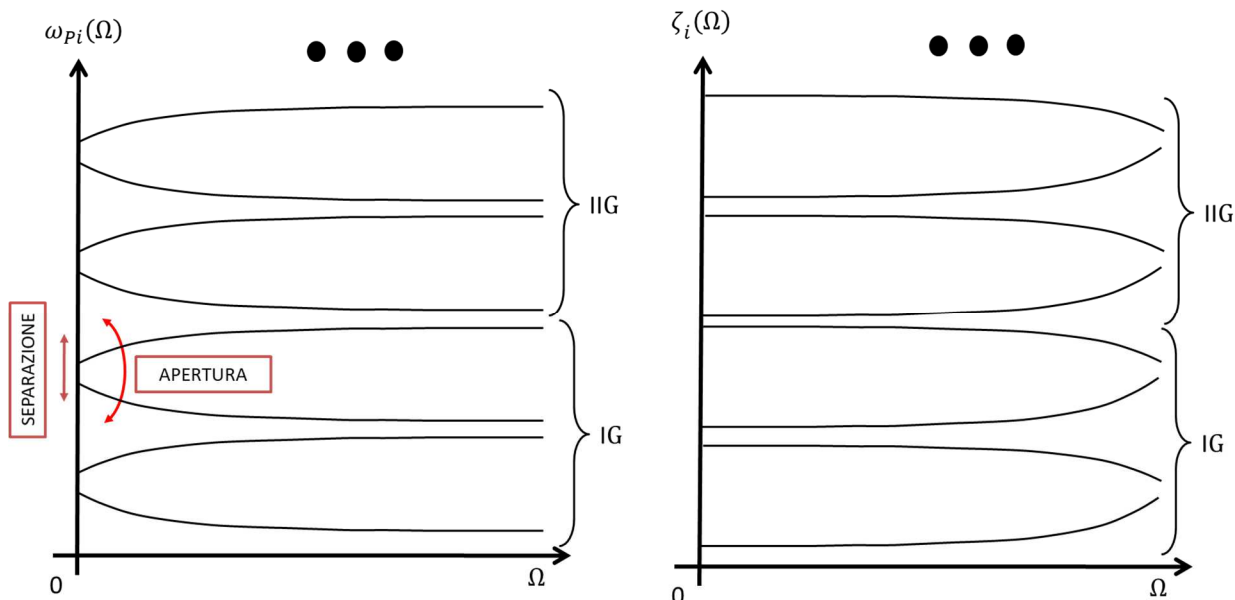


Figura 45 Diagramma di Campbell per il rotore elastico

Guardando alla Fig. 45 si nota come le pulsazioni naturali / proprie solitamente tendono a un valore asintotico per  $\Omega$  grandi mentre questo non è vero per gli smorzamenti. La separazione e l'apertura dei rami dei diagrammi di

Campbell crescono se aumentano l'asimmetria e l'anisotropia dei cuscini e se aumentano gli effetti giroscopici  $\Omega I_p$  (quindi per  $\Omega$  grande o per  $I_p$  grande).

Per quanto riguarda lo studio degli autovettori, conviene adesso determinare il moto di whirl libero, ovvero la traiettoria compiuta da ogni nodo del sistema  $\underline{G}_k$  del rotore sul generico piano  $x_{fk}y_{fk}$  ortogonale all'asse di rotazione della macchina (Fig. 46). Tale traiettoria sarà, come nei casi precedenti, un'ellisse mentre nel caso in cui gli smorzamenti modali siano nulle  $\zeta_i$  ( $\omega_{pi} = \omega_{ni}$ ). Nel caso in cui gli smorzamenti siano positivi  $\zeta_i > 0$  al posto di ellissi avrò delle spirali convergenti a zero (BW o FW). Lo studio del moto di whirl libero del generico nodo  $\underline{G}_k$  permetterà anche di conoscere se l'ellisse / spirale è percorsa in senso BW o FW.

Consideriamo dunque la componente della soluzione associata al generico modo del generico nodo:

$$\underline{q}_{ik}(t) = \begin{pmatrix} u_{ik}(t) \\ v_{ik}(t) \\ \theta_{ik}(t) \\ \psi_{ik}(t) \end{pmatrix} = Re \left( \underline{q}_{ik} e^{s_i t} \right) = Re \left( \begin{pmatrix} u_{ik} \\ v_{ik} \\ \theta_{ik} \\ \psi_{ik} \end{pmatrix} e^{s_i t} \right) \quad (4.7.7)$$

e focalizziamoci sulla sua parte spaziale (le prime due componenti):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_{ik}(t) \\ v_{ik}(t) \end{pmatrix} &= Re \left[ \begin{pmatrix} u_{ik} \\ v_{ik} \end{pmatrix} e^{s_i t} \right] = e^{-\zeta_i \omega_{ni} t} Re \left[ \begin{matrix} m_{uik} e^{j\varphi_{uik}} e^{j\omega_{pi} t} \\ m_{vik} e^{j\varphi_{vik}} e^{j\omega_{pi} t} \end{matrix} \right] = e^{-\zeta_i \omega_{ni} t} \begin{bmatrix} m_{uik} \cos(\omega_{pi} t + \varphi_{uik}) \\ m_{vik} \cos(\omega_{pi} t + \varphi_{vik}) \end{bmatrix} = \quad (4.7.8) \\ &= e^{-\zeta_i \omega_{ni} t} \begin{pmatrix} m_{uik} \cos \varphi_{uik} - m_{vik} \sin \varphi_{vik} \\ m_{vik} \cos \varphi_{vik} - m_{uik} \sin \varphi_{uik} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \omega_{pi} t \\ \sin \omega_{pi} t \end{pmatrix} = e^{-\zeta_i \omega_{ni} t} T \begin{pmatrix} \cos \omega_{pi} t \\ \sin \omega_{pi} t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{ik}(t) \\ v_{ik}(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dalla (2.2.7) si ottiene poi

$$\begin{pmatrix} \cos \omega_{pi} t \\ \sin \omega_{pi} t \end{pmatrix} = e^{-\zeta_i \omega_{ni} t} T^{-1} \begin{pmatrix} u_{ik}(t) \\ v_{ik}(t) \end{pmatrix} \quad (4.7.9)$$

da cui facendo la norma al quadrato

$$e^{-2\zeta_i \omega_{ni} t} = \begin{pmatrix} u_{ik}(t) \\ v_{ik}(t) \end{pmatrix}^T (T^{-1})^T T^{-1} \begin{pmatrix} u_{ik}(t) \\ v_{ik}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{ik}(t) \\ v_{ik}(t) \end{pmatrix}^T H \begin{pmatrix} u_{ik}(t) \\ v_{ik}(t) \end{pmatrix}. \quad (4.7.10)$$

Poiché la matrice  $H$  per costruzione è una matrice simmetrica definita positiva, nel caso in cui  $\zeta_i = 0$ , la (4.7.10) rappresenta l'equazione parametrica di un'ellisse centrata nell'origine ma ad assi ruotati. Più nel dettaglio, per il teorema spettrale, la matrice  $H$  ammette una base ortonormale di autovettori  $\underline{v}_{H1}$ ,  $\underline{v}_{H2}$  che determinano la direzione dei semiassi dell'ellisse in questione. La lunghezza dei semiassi è invece pari a  $\sqrt{\lambda_{H1}}$  e  $\sqrt{\lambda_{H2}}$  (gli autovalori sono reali e positivi perché  $H$ ). L'ellisse corrispondente al whirl libero è riportata in Fig. 46. Infine le fasi  $\varphi_{uik}$ ,  $\varphi_{vik}$  di  $u_{ik}$  e  $v_{ik}$  permettono di determinare anche se l'ellisse / spirale è percorsa in senso BW o FW. Se infatti vale la condizione

$$0 < \varphi_{vik} - \varphi_{uik} < \pi, \quad (4.7.11)$$

allora il modo è BW e l'ellisse sarà percorsa in senso BW. Se invece

$$-\pi < \varphi_{vik} - \varphi_{uik} < 0, \quad (4.7.12)$$

l'ellisse sarà percorsa in senso FW. Nel caso in cui  $\zeta_i > 0$  non abbiamo chiaramente più un'ellisse ma una spirale convergente verso lo zero (si veda il membro di sinistra della (4.7.10)). A livello di stabilità passiamo di fatto da un Prof. Enrico Meli, Dipartimento di Ingegneria Industriale, Università di Firenze

modo semplicemente stabile (associato a un polo semplicemente stabile) a un modo asintoticamente stabile (associato a un polo asintoticamente stabile).

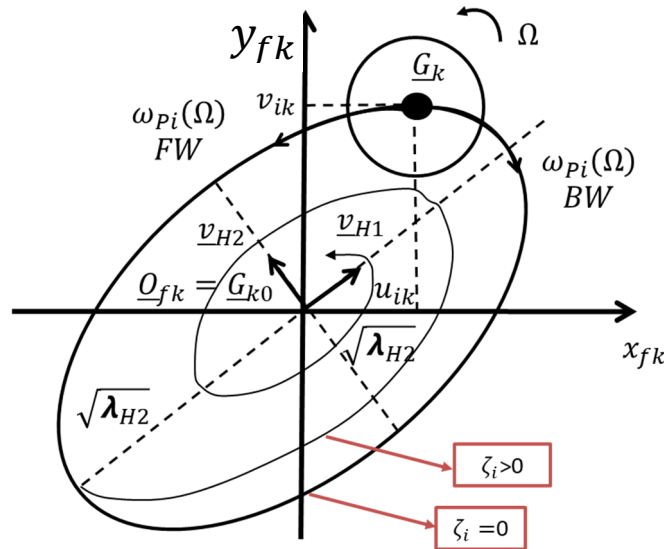


Figura 46 Ellissi associata al whirl libero per il generico nodo (le componenti angolari  $\psi_{ik}(t)$  e  $\theta_{ik}(t)$  si comportano in modo analogo)

Ovviamente la rotazione del rotore avviene chiaramente alla pulsazione  $\Omega$  (la speed della macchina) mentre il moto di rivoluzione di ogni attorno all'asse  $z_{fk}$  avviene sempre alla stessa pulsazione propria  $\omega_{Pi}(\Omega)$ .

In linea teorica ogni nodo  $G_k$  potrebbe percorrere la propria ellisse in senso BW o FW e le varie ellissi potrebbero avere le forme e le grandezze più disparate. Tuttavia, per il principio di coerenza modale, i modi di vibrare tendono ad avere solamente forme regolari come quelle riportate in Fig. 47. Questo è dovuto al fatto i rotori sono solitamente di metallo (acciaio, leghe ad alta resistenza, etc) e non di gomma o di carta. Di conseguenza, sezioni della macchina adiacenti tra loro non potranno mai avere ellissi di whirl libero "troppo diverse" tra loro (in tal caso non potremmo certo parlare di elasticità lineare e materiali lineari!).

Come si può notare dalla Fig. 47, se i nodi ruotano tutti in senso BW, il modo di vibrare è detto BW. Se invece ruotano tutti i senso FW, allora il modo è detto FW. Nel caso in cui esistano dei punti nodali PN (punti in cui la sezione è ferma), allora possono esserci dei modi dal carattere misto in cui la rotazione può invertirsi una o più volte nei punti nodali (M1PI, M2PI, etc. a seconda di quante volte la rotazione viene invertita nei punti nodali). I punti nodali PN in cui la rotazione si inverte sono detti punti di inversione PI. Naturalmente non è detto che, se ci sono dei punti nodali PN, il modo necessariamente si invertirà in essi e che, di conseguenza, il modo sia per forza misto. Possono benissimo esistere punti nodali PN in cui il modo non si inverte e che quindi non sono punti di inversione PI. I punti di inversione PI sono quindi un sottoinsieme dei punti nodali PN (il numero dei PI è minore o uguale di quello dei PN).

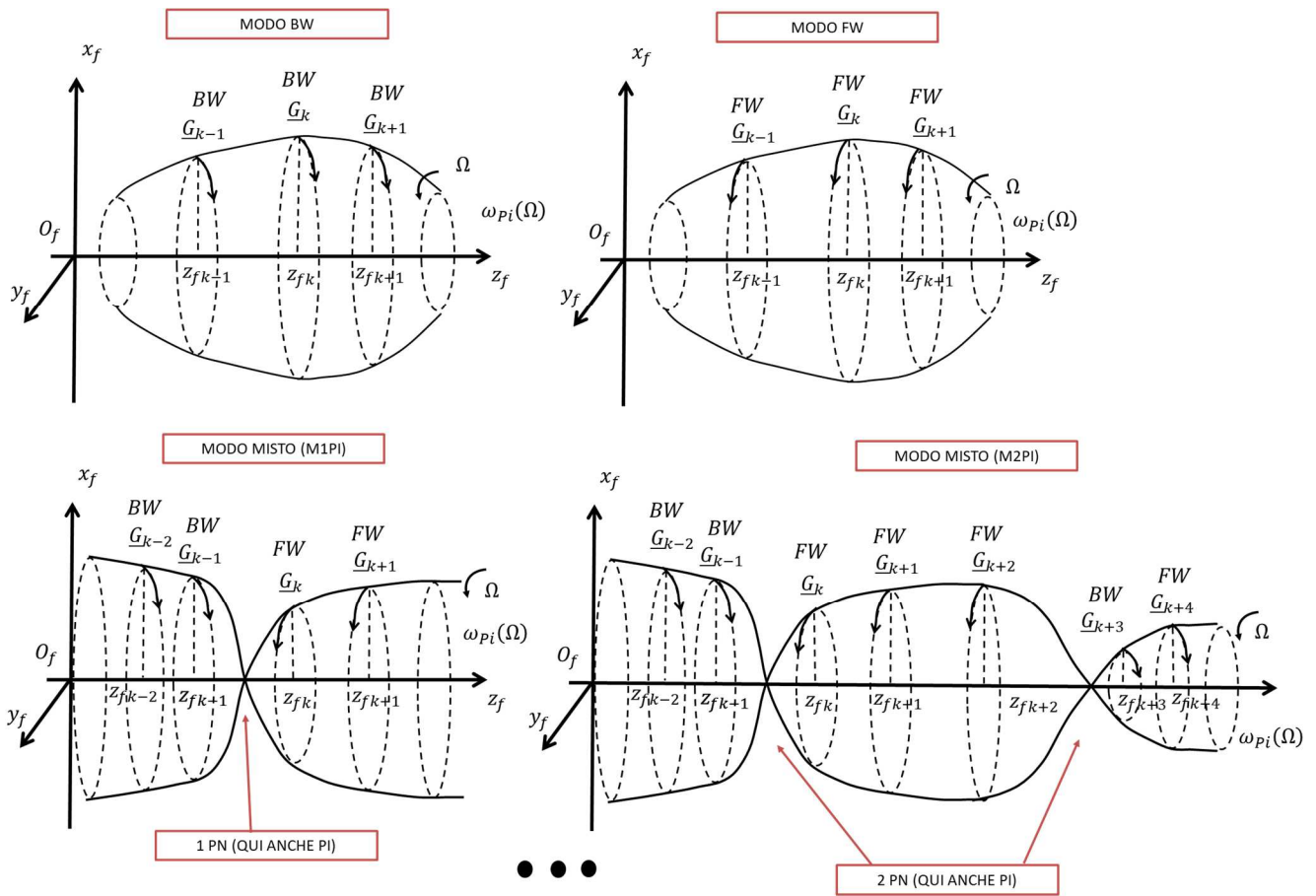


Figura 47 Il concetto di coerenza modale (le componenti angolari  $\psi_{ik}(t)$  e  $\theta_{ik}(t)$  si comportano in modo analogo)

Passando poi allo studio degli autovettori, è importante introdurre la classificazione modale, ovvero un elenco qualitativo dei principali modi che il sistema può presentare. Solitamente, per i rotori elastici, i modi vengono classificati al crescere delle pulsazioni proprie  $\omega_{pi}$  e della rigidità dei cuscinetti (indicata qui genericamente con  $K_C$ ). Come è possibile notare nella tabella riassuntiva riportata in Fig. 48, nel caso elastico potremo avere modi di tipo primo elastico IE (senza punti nodali, anche detto di bouncing (B)), secondo elastico IIE (con un punto nodale, anche detto di tilting (T)), terzo elastico IIIIE (con due punti nodali) e così via al crescere del numero dei punti nodali e quindi dei lodi della deformata. Alcuni autori cominciano a contare i modi elastici a partire dal IIIIE e chiamano semplicemente B e T la IE e la IIE ma è del tutto equivalente (basta capirsi ed essere coerenti!).

Come detto in precedenza, la rotazione del rotore avviene chiaramente alla pulsazione  $\Omega$  (la speed della macchina) mentre il moto di rivoluzione di ogni attorno all'asse  $z_{fk}$  avviene sempre alla stessa pulsazione propria  $\omega_{pi}(\Omega)$ . Ciò è coerente col fatto che la pulsazione associata al modo di vibrare in questione è sempre una e una sola, ovvero,  $\omega_{pi}(\Omega)$ .

Ogni modo di vibrare IE o B, IIE o T, IIIIE, IVE, etc. (a seconda dei punti nodali) può naturalmente assumere le varie caratteristiche introdotte poco fa, ovvero BW, FW, M1PI, M2PI e così via (a seconda dei punti di inversione).

La rappresentazione dei modi riportata in Fig. 48 (così come per la Fig. 47) è valida a rigore nel caso in cui lo smorzamento modale sia nullo  $\zeta_i = 0$  ( $\omega_{pi} = \omega_{ni}$ ). Come in precedenza, nel caso in cui lo smorzamento sia Prof. Enrico Meli, Dipartimento di Ingegneria Industriale, Università di Firenze

positivo  $\zeta_i > 0$ , al posto di ellissi avrò delle spirali convergenti a zero (BW, FW o M). A livello di stabilità passiamo di fatto da un polo semplicemente stabile (associato a un polo semplicemente stabile) a un modo asintoticamente stabile (associato a un polo asintoticamente stabile).

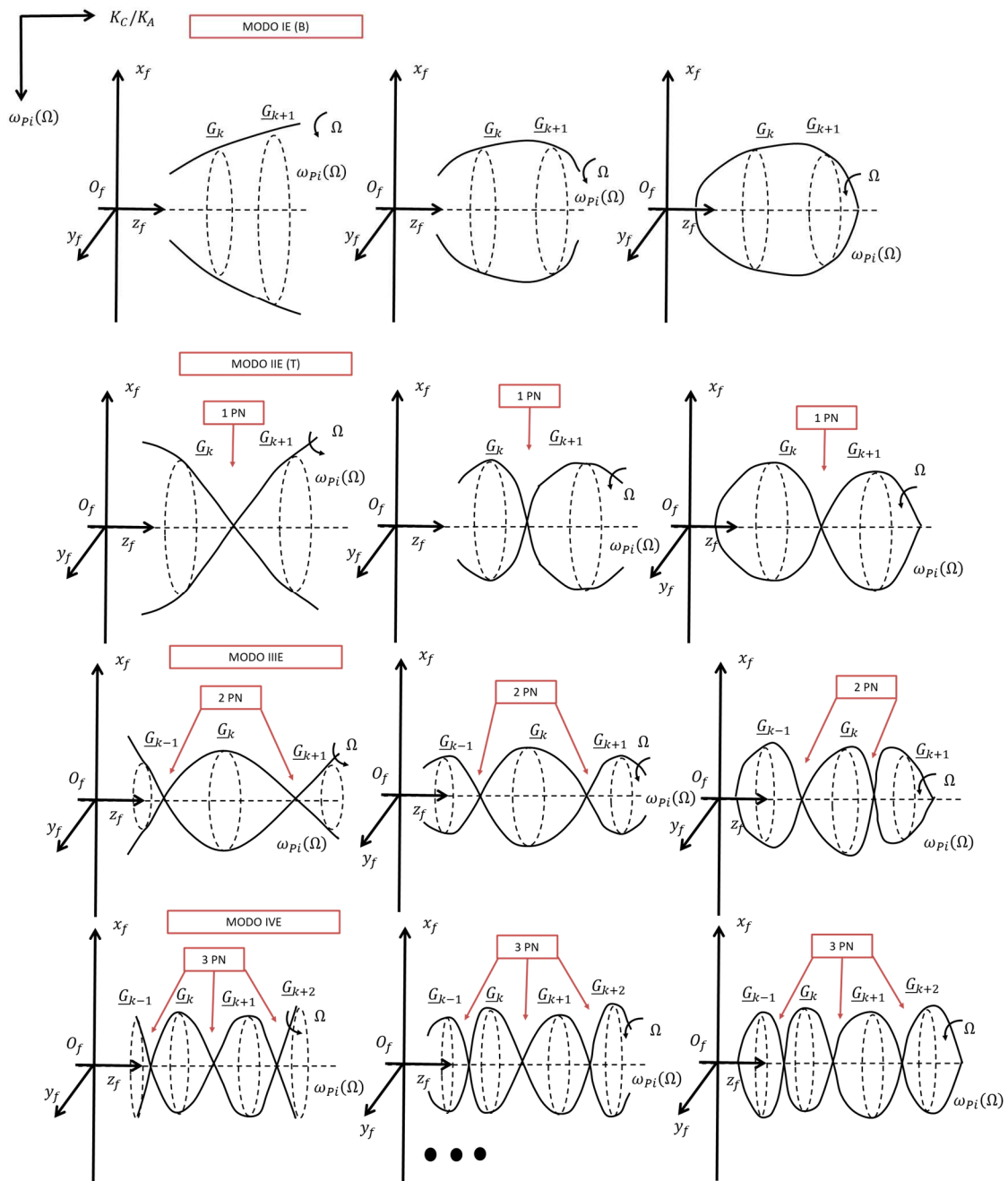


Figura 48 Classificazione modale per rotor elastici (le componenti angolari  $\psi_{ik}(t)$  e  $\theta_{ik}(t)$  si comportano in modo analogo)

Usualmente, al crescere della pulsazione, il numero dei punti nodali aumenta. Si passa quindi da modi IE, a modi IIE, a modi IIIE, a modi IVE e così via. Per quanto riguarda invece la caratteristica del modo, usualmente, al crescere della pulsazione si hanno caratteristiche BW, M1PI, M2PI, M3PI, etc. (a seconda dei punti di inversione) e FW.

Dalla Fig. 48, si nota inoltre come, per cuscini morbidi rispetto all'albero ( $K_C$  basse rispetto alle rigidità dell'albero  $K_A$ ) il rotore elastico tende a comportarsi approssimativamente come un rotore rigido soprattutto alle basse pulsazioni (si noti in questo caso la somiglianza dei modi IE e IIE con i modi B e T del rotore rigido). Al Prof. Enrico Meli, Dipartimento di Ingegneria Industriale, Università di Firenze

contrario, per cuscini rigidi rispetto all'albero ( $K_C$  alte rispetto alle rigidezza dell'albero  $K_A$ ) il rotore elastico tende a comportarsi approssimativamente come una trave incernierata agli estremi ((si noti la somiglianza la somiglianza dei modi del rotore elastico con quelli della trave incernierata).

Riportiamo per completezza in Fig. 48bis/ter un esempio di deformata modale completa includendo anche la componenti angolari  $\psi_{ik}(t)$  e  $\theta_{ik}(t)$  di basculamento della sezione (prima non considerate esplicitamente perché meno importanti a livello ingegneristico e perché il loro comportamento qualitativo è identico a quello delle componenti spaziali  $u_{ik}(t)$  e  $v_{ik}(t)$ ). Nel caso dell'esempio abbiamo un modo flessionale IIE spaziale (con 1PN e che potrà avere caratteristica BW, FW o M1PI) associato a un modo flessionale IIIE rotazionale (con 2PN e che potrà avere caratteristica BW, FW, M1PI, M2PI).

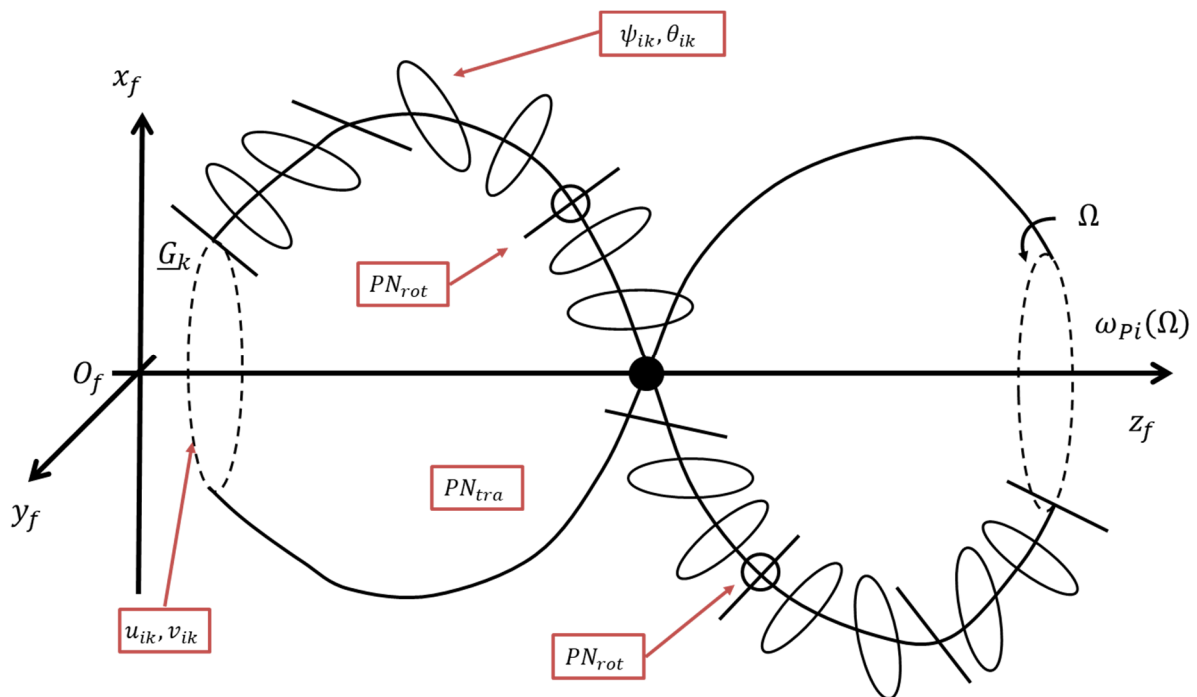


Figura 48bis Esempio di deformata modale per rotori elastici

Tutto quanto è stato detto viene solitamente riassunto sulla mappa modale (vedi Fig. 49), ovvero un versione arricchita del diagramma di Campbell della pulsazioni proprie  $\omega_{pi}(\Omega)$ . Su ognuno dei 4 rami dei vari grappoli del diagramma sono rappresentate, per ogni valore di  $\Omega$ , le forme modali che si manifestano sulla macchina considerata (IE, IIE, IIIE e così via all'aumentare dei punti nodali) insieme alla caratteristica di ciascun modo (BW, FW, M1PI, M2PI, M3PI e così via all'aumentare dei punti di inversione). Come già sottolineato, solitamente, al crescere della pulsazione  $\omega_{pi}(\Omega)$ , il numero dei punti nodali aumenta. Si passa quindi da modi IE, a modi IIE, a modi IIIE, a modi IVE e così via. Per quanto riguarda invece la caratteristica del modo, usualmente, al crescere della pulsazione  $\omega_{pi}(\Omega)$  si hanno caratteristiche BW, M1PI, M2PI, M3PI, etc. (a seconda dei punti di inversione) e FW.

Si noti inoltre che su ogni ramo, al variare di  $\Omega$ , possono esserci dei punti di transizione in cui la caratteristica del modo di vibrare cambia (come ad esempio nel primo e nel terzo ramo del primo grappolo e nel primo, terzo e quarto ramo del secondo grappolo dell'esempio riportato in Fig. 49). La transizione può riguardare anche la natura del modo stesso (come ad esempio nel secondo ramo del primo grappolo dell'esempio riportato in Fig. 49).



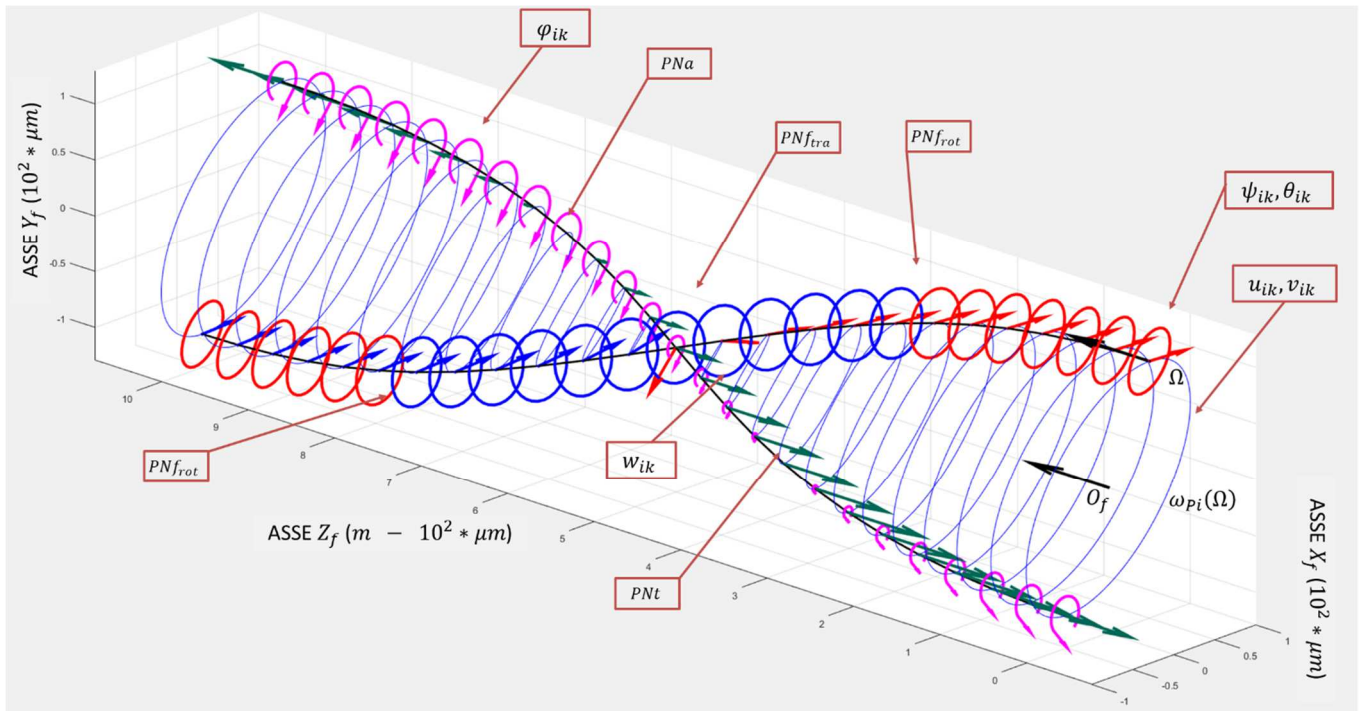


Figura 48ter Rappresentazione tipo software di deformata modale per rotori elastici (si osservi solo la parte flessionale della deformata)

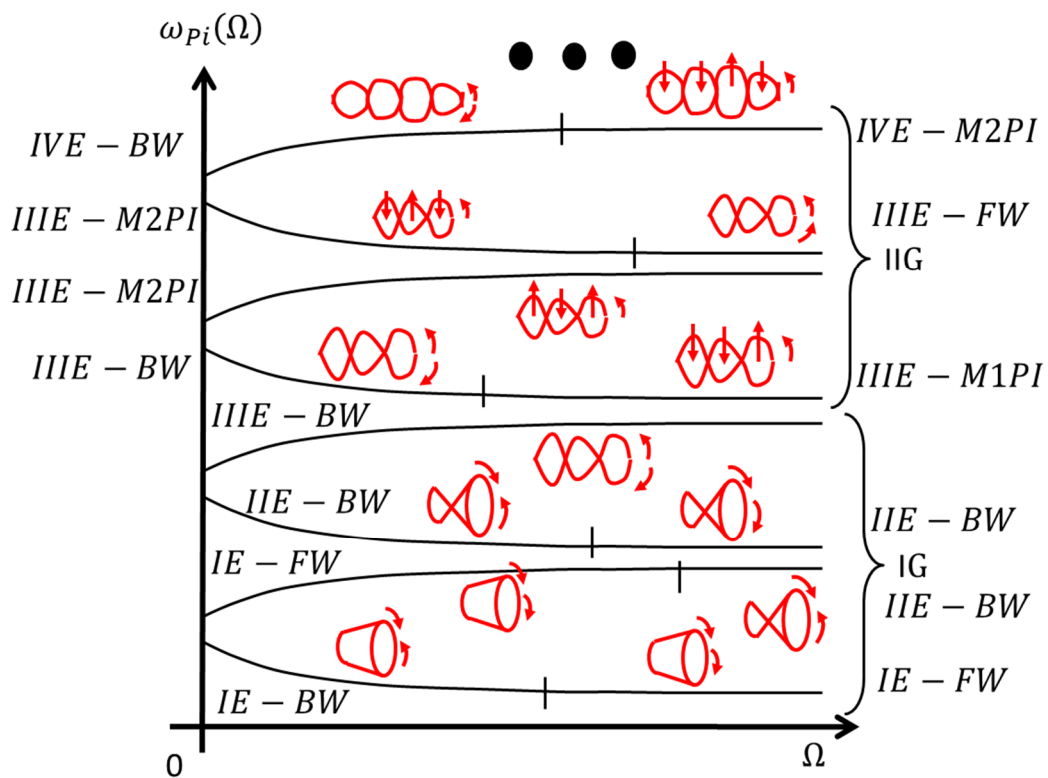
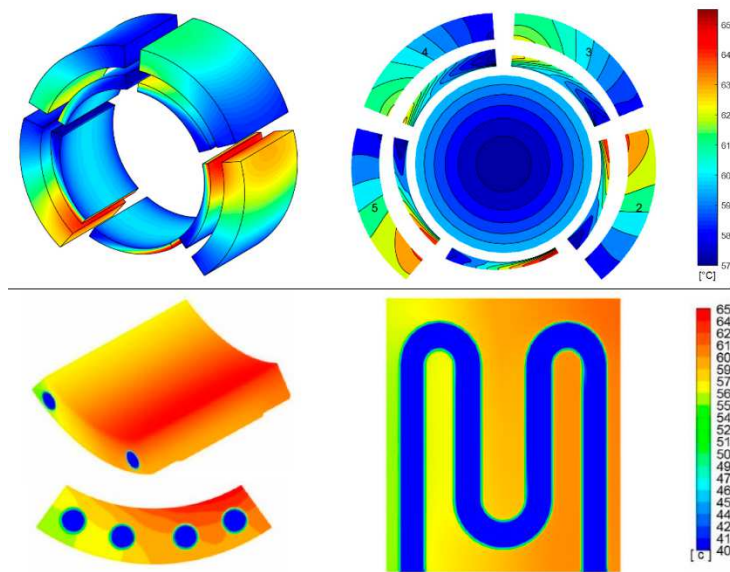


Figura 49 Mappa modale per rotori elastici

ELENCO RIASSUNTIVO DELLE VARIE DEFORMATE MODALI:

- 1) FORMA: IE  
CARATTERISTICA: BW o FW
- 2) FORMA: IIE  
CARATTERISTICA: BW, FW, 1PI
- 3) FORMA: IIIE  
CARATTERISTICA: BW, FW, 1PI, 2PI
- 4) FORMA: IVE  
CARATTERISTICA: BW, FW, 1PI, 2PI, 3PI
- ... ..

## 5. CUSCINI OLEODINAMICI



Simulazione termo-elasto-fluidodinamica di un cuscano a fluido

Tra i vari componenti della macchine modellabili come elementi di forza (funzioni in grado di produrre forze e coppie di interazione in funzione dell'atto di moto dei corpi che essi collegano) ovvero cuscini, tenute, giunti, riduttori, etc., in questo capitolo ci soffermeremo sui cuscini fluidodinamici a olio. Le principali topologie di cuscini a olio sono riportate a titolo di esempio in Fig. 50: cuscini radiali a pattini (tilting pad journal bearing, TPJB), cuscini assiali a pattini (tilting pad thrust bearing, TPTB), cuscini radiali a geometria fissa (journal bearing, JB) e cuscini assiali geometria fissa (thrust bearing, TB).

Più nel dettaglio, descriveremo i principali approcci alla modellazione dei cuscini oleodinamici: modelli 3D, modelli 2D e modelli matriciali linearizzati a parametri concentrati (modelli KC, anche detti modelli a molla). Come vedremo, questi ultimi si ottengono tramite un'opportuna linearizzazione delle prime due tipologie di modelli. Per ciascun caso determineremo il vettore delle azioni lagrangiane  $Q_{bk}$  agenti sul nodo  $k$ -esimo del rotore (si veda il capitolo 4) in funzione delle variabili nodali  $q_k$  del nodo in questione.



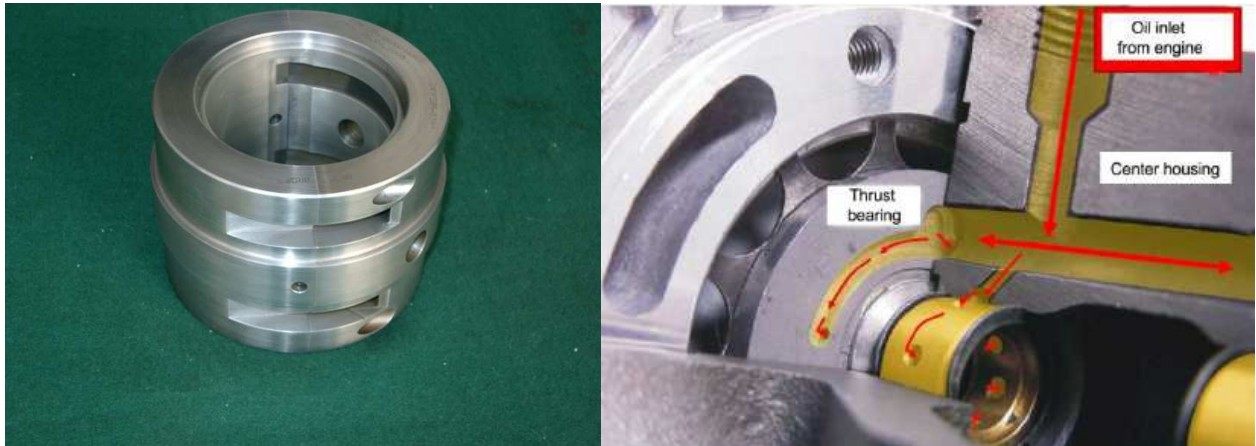


Figura 50 Principali tipologie di cuscini fluidodinamici a olio

## 5.1 Modellazione tramite le equazioni di Navier – Stokes

### CONSERVAZIONE DELLA MASSA, DELLA QUANTITA' DI MOTO E DELL'ENERGIA

In Fig. 51 è riportata una porzione del volume di controllo associata al cuscinio studiato. Nel caso di cuscini a geometria fissa tale volume può essere l'intero meato che separa albero e sede (contenente il film di fluido), nel caso invece di cuscini a pattini il volume di controllo sarà il meato che separa un singolo pattino dall'albero.

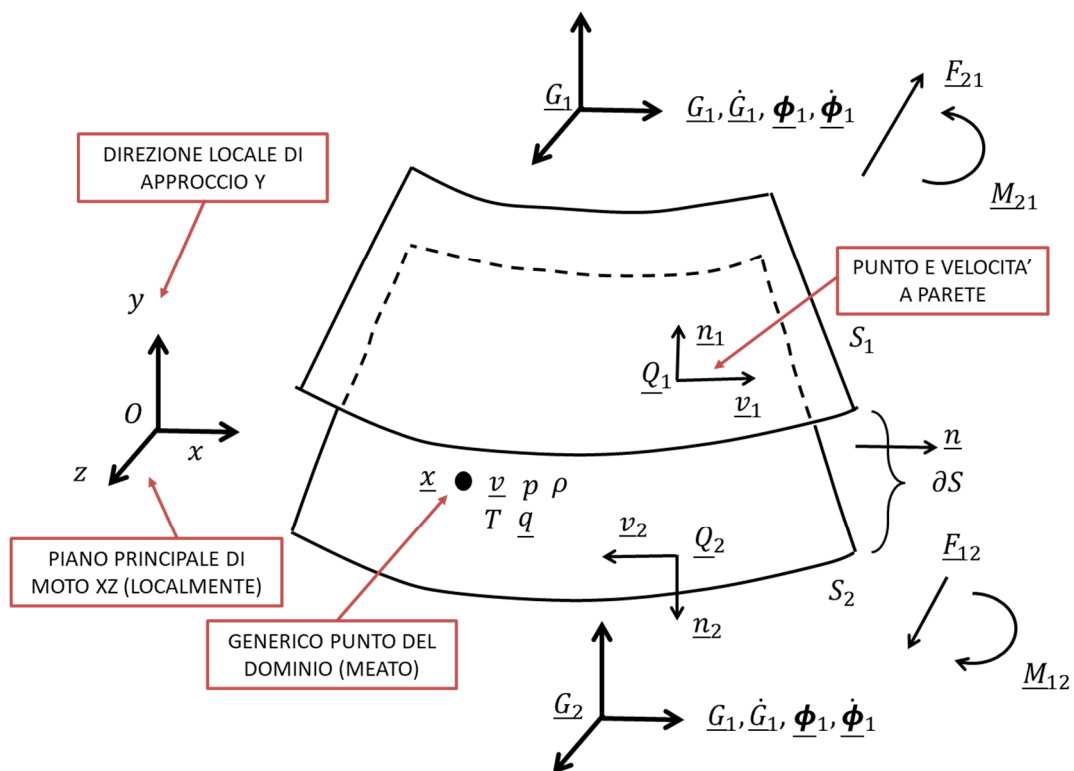


Figura 51 Volume di controllo per l'analisi 3D di un cuscinio fluidodinamico

In generale chiameremo  $S_1$  e  $S_2$  le superfici dei due membri (albero e sede / pattino) e  $\partial S$  la superficie laterale del meato  $V$  dove il fluido, a seconda della necessità, può entrare o uscire. In questa trattazione supporremo i corpi solidi rigidi (è possibile naturalmente introdurre anche l'elasticità di albero e sede / pattini; si veda il capitolo 9 sull'interazione fluido-struttura per ulteriori dettagli modellistici). Di conseguenza la posizione dei punti a parete  $Q_1, Q_2$  e delle loro velocità può essere facilmente determinata con le formule per i corpi rigidi (essendo le geometrie note!):

$$\underline{Q}_1 = \underline{G}_1 + R(\underline{\phi}_1)\underline{Q}_{1s}, \quad \underline{Q}_2 = \underline{G}_2 + R(\underline{\phi}_2)\underline{Q}_{2s} \quad \underline{Q}_{1s}, \underline{Q}_{2s} \text{ noti} \quad (5.1.1)$$

$$\underline{v}_1 = \dot{\underline{G}}_1 + \underline{\omega}_1(\underline{\phi}_1, \dot{\underline{\phi}}_1) \times (\underline{Q}_1 - \underline{G}_1), \quad \underline{v}_2 = \dot{\underline{G}}_2 + \underline{\omega}_2(\underline{\phi}_2, \dot{\underline{\phi}}_2) \times (\underline{Q}_2 - \underline{G}_2).$$

Il moto del fluido (supposto Newtoniano) è governato dalle equazioni di conservazione della massa, della quantità di moto e dell'energia che qui scriveremo per praticità in un sistema inerziale locale posizionato nel meato:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot \underline{v}) = 0 \quad (5.1.2)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + J_v \underline{v} \right) = -\underline{\nabla} p + \mu \underline{\Delta} \underline{v} + (\mu + \lambda) \underline{\nabla}(\text{div} \underline{v}) + \rho \underline{f}_e$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \text{div}(e \underline{v}) = \underline{v}^T \cdot \rho \underline{f}_e + \underline{f}_q + \text{div}(\underline{\sigma} \underline{v}) - \text{div} \underline{q}$$

in cui  $\underline{v}(\underline{x}, t)$  è velocità della generica particella fluida ( $J_v$  è la sua matrice Jacobiana spaziale),  $p(\underline{x}, t)$  la pressione,  $T(\underline{x}, t)$  la temperatura,  $\rho(\underline{x}, t)$  la densità,  $e = \rho \left( \frac{1}{2} \|\underline{v}\|^2 + u(p, T) \right)$  l'energia specifica ( $u(p, T)$  è l'energia interna specifica),  $\underline{q}$  il vettore di flusso termico,  $\underline{f}_e$  i campi di forze esterne (ad esempio la gravità),  $\underline{f}_q$  i campi termici esterne (scaldatori, etc.),  $\underline{\sigma} = -p I_{3 \times 3} + \mu (J_v + J_v^T) + \lambda \text{div} \underline{v} I_{3 \times 3}$  il tensore degli stress in un fluido Newtoniano e  $\mu, \lambda$  sono le costanti di Lamè del fluido. Torneremo più nel dettaglio sulla formulazione del problema termo-fluido dinamica nel capitolo 9 sull'interazione fluido-struttura. Il problema termo-fluidodinamico (5.1.2) può essere chiuso grazie a opportune leggi fisiche che descrivano il comportamento del fluido

$$u = u(p, T), \quad f(\rho, p, T) = 0, \quad \underline{q} = \underline{q}(p, T, \underline{\nabla} T) \quad (5.1.3)$$

e a opportune condizioni al bordo (BC) e iniziali (IC), ad esempio:

$$\underline{v} = \underline{v}_1, \quad T = T_1, \quad \underline{q} = \underline{q}_1 \quad \text{su } S_1 \quad (5.1.4)$$

$$\underline{v} = \underline{v}_2, \quad T = T_2, \quad \underline{q} = \underline{q}_1 \quad \text{su } S_2$$

$$p = p_a \text{ su } \partial S$$

$$\underline{v} = \underline{v}_0, \quad T = T_0, \quad \underline{q} = \underline{q}_0, \quad p = p_0 \quad \text{per } t = t_0 \quad \text{su } V \quad (5.1.5)$$

dove  $p_a$  è la pressione di alimentazione (la pressione esterna al cuscinio).

### MODELLI 3D DI CUSCINI FLUIDODINAMICI

Una volta risolte le (5.1.2), è semplice determinare la forze e i momenti agenti sugli elementi della coppia  $S_1, S_2$ , e la portata volumetrica che fluisce attraverso  $\partial S$ :

$$\underline{F}_{21} = \int_{S_1} \sigma \underline{n}_1 dS, \quad \underline{F}_{12} = \int_{S_2} \sigma \underline{n}_2 dS, \quad \underline{M}_{21G} = \int_{S_1} (\underline{Q}_1 - \underline{G}_1) \wedge \sigma \underline{n}_1 dS, \quad \underline{M}_{12G} = \int_{S_2} (\underline{Q}_2 - \underline{G}_2) \wedge \sigma \underline{n}_2 dS \quad (5.1.6)$$

$$Q = \int_{\partial S} \underline{v} * \underline{n} dS.$$

Naturalmente, per una data configurazione (atto di moto) di albero e sede / pattino, la forze e i momenti in questione dipenderanno da:

$$\underline{F}_{21} = \underline{F}_{21}(\underline{G}_1, \dot{\underline{G}}_1, \underline{\phi}_1, \dot{\underline{\phi}}_1, \underline{G}_2, \dot{\underline{G}}_2, \underline{\phi}_2, \dot{\underline{\phi}}_2), \quad \underline{F}_{12} = \underline{F}_{12}(\underline{G}_1, \dot{\underline{G}}_1, \underline{\phi}_1, \dot{\underline{\phi}}_1, \underline{G}_2, \dot{\underline{G}}_2, \underline{\phi}_2, \dot{\underline{\phi}}_2) \quad (5.1.7)$$

$$\underline{M}_{21} = \underline{M}_{21}(\underline{G}_1, \dot{\underline{G}}_1, \underline{\phi}_1, \dot{\underline{\phi}}_1, \underline{G}_2, \dot{\underline{G}}_2, \underline{\phi}_2, \dot{\underline{\phi}}_2), \quad \underline{M}_{12} = \underline{M}_{12}(\underline{G}_1, \dot{\underline{G}}_1, \underline{\phi}_1, \dot{\underline{\phi}}_1, \underline{G}_2, \dot{\underline{G}}_2, \underline{\phi}_2, \dot{\underline{\phi}}_2).$$

Se ora identifichiamo il corpo 1 con l'albero e con 2 la sede e supponiamo che il cuscinio sia collocato in prossimità del nodo  $k$ -esimo, si ha quindi  $\underline{G}_1 = \underline{G}_k$  e  $\underline{\phi}_1 = \underline{\phi}_k$ . Considerando quindi solo le componenti flessionali di  $\underline{F}_{21}, \underline{M}_{21}$  (vedi la (5.1.7)) e la dipendenza dalle sole variabili flessionali contenute nelle coordinate spaziali  $\underline{G}_k, \underline{\phi}_k$  (ovvero le variabili nodali riunite in  $\underline{q}_k$ ) e dalla speed della macchina  $\Omega$ , si ottengono le azioni lagrangiane agenti sull'albero:

$$\underline{Q}_{bk} = \begin{pmatrix} F_{x21} \\ F_{y21} \\ M_{x21} \\ M_{y21} \end{pmatrix} = \underline{Q}_{bk}(\underline{q}_k, \dot{\underline{q}}_k, \Omega). \quad (5.1.8)$$

Solitamente, per la maggioranza della applicazioni pratiche, dipendenza dalle altre componenti dell'atto di moto può essere ignorata in prima approssimazione.

Se invece identifichiamo con 2 l' $h$ -esimo pattino (con  $h = 2 \dots NP + 1$ ), dovremo chiaramente tener conto delle forze e dei momenti agenti sull'albero prodotti da tutti i pattini:

$$\underline{Q}_{bhk} = \begin{pmatrix} F_{xh1} \\ F_{yh1} \\ M_{xh1} \\ M_{yh1} \end{pmatrix} = \underline{Q}_{bhk}(\underline{q}_k, \dot{\underline{q}}_k, \Omega), \quad \underline{Q}_{bk} = \begin{pmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_{x1} \\ M_{y1} \end{pmatrix} = \underline{Q}_{bk}(\underline{q}_k, \dot{\underline{q}}_k, \Omega) = \sum_{h=2}^{NP+1} \underline{Q}_{bhk}(\underline{q}_k, \dot{\underline{q}}_k, \Omega). \quad (5.1.9)$$

A livello logico, la procedura appena descritta è riassunta nel diagramma a blocchi rappresentato in Fig. 52.

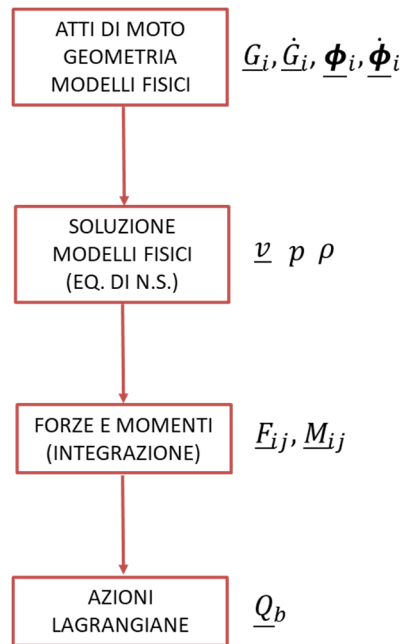


Figura 52 Schema logico per il calcolo di forze e momenti in un modello 3D di cuscano

## 5.2 Modellazione semplificata con l'equazione di Reynolds

### EQUAZIONE DI REYNOLDS

L'approccio 3D descritto nel paragrafo 5.1 può essere drasticamente semplificato e ridotto a un approccio 2D (assai usato nella teoria della lubrificazione) se vengono introdotte delle opportune ipotesi semplificative. Supponendo di aver a che fare con fluido incomprimibile, di trascurare in prima analisi gli effetti termici / energetici, e di considerare il moto del fluido in condizioni laminari e stazionarie (in letteratura è possibile trovare lo stesso approccio generalizzato rimuovendo alcune di queste ipotesi), il complicato modello termo-fluidodinamico (5.1.2) si riduce al "semplice" sistema:

$$\begin{aligned} -\nabla p + \mu \Delta \underline{v} &= \underline{0} \\ \text{div } \underline{v} &= 0 \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

al quale vanno poi associate le condizioni al contorno

$$\begin{aligned} \underline{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{pmatrix} & \text{ su } S_1 \\ \underline{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{pmatrix} & \text{ su } S_2 \\ p &= p_a \quad \text{ su } \partial S. \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

A livello di componenti possiamo scrivere:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (5.2.3)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) = 0$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$u = u_1 \quad v = v_1 \quad w = w_1 \quad \text{su } S_1$$

$$u = u_2 \quad v = v_2 \quad w = w_2 \quad \text{su } S_2$$

$$p = p_a \quad \text{su } \partial S.$$

La descrizione del problema può essere ancora semplificata per mezzo di una ulteriore ipotesi sulla geometria del problema. Tale assunzione, pur essendo di natura essenzialmente euristica, è sostanzialmente verificata in tutte le principali applicazioni di interesse pratico. Si suppone cioè che lo spessore del meato  $h(x, z)$  nella direzione di approccio ( $y$ ) sia piccolo, dove per “piccolo” intendiamo piccolo rispetto ai raggi di curvatura principali delle superfici (ad esempio i raggi di albero e sede / pattini) (si veda la Fig. 53). Esiste pertanto un piano principale del moto (ovvero  $xz$ ). Si ricordi che lo spessore del meato è noto e localmente può essere calcolato a partire dalla conoscenza della posizione dei punti di parete nel sistema inerziale locale:

$$\underline{Q}_1(x, z) = \begin{pmatrix} x_1(x, z) \\ y_1(x, z) \\ z_1(x, z) \end{pmatrix}, \quad \underline{Q}_2(x, z) = \begin{pmatrix} x_2(x, z) \\ y_2(x, z) \\ z_2(x, z) \end{pmatrix}, \quad h(x, z) = y_2(x, z) - y_1(x, z) \quad (5.2.4)$$

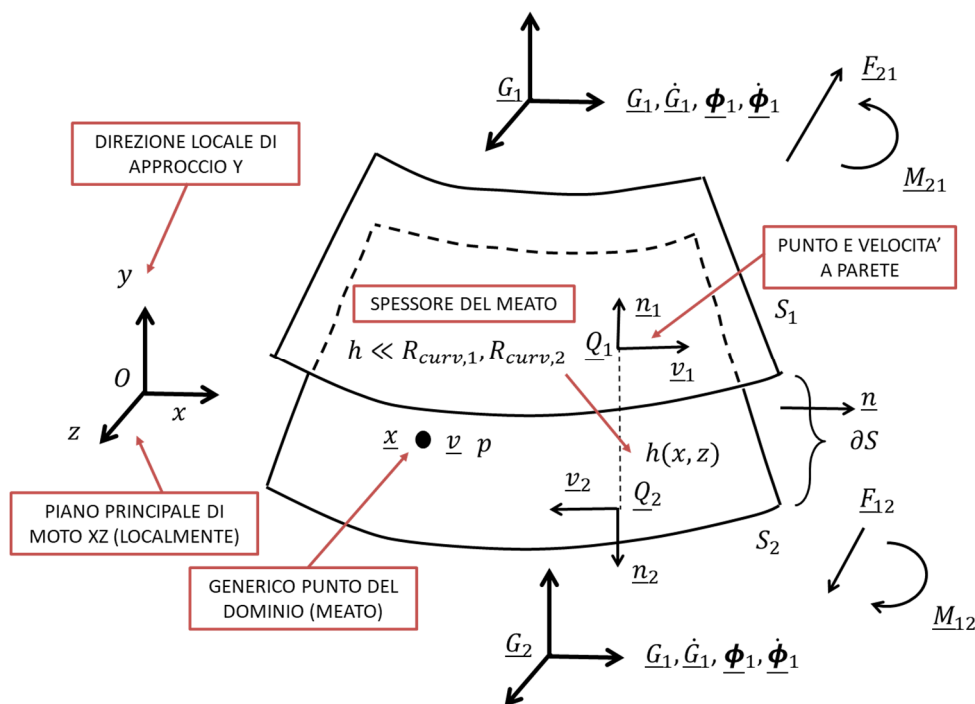


Figura 53 Volume di controllo per l'analisi 2D di un cuscinio fluidodinamico



Tale ipotesi ha le seguenti conseguenze:

- la componente  $v$  della velocità e tutte le sue derivate spaziali sono trascurabili su tutto il meato a eccezione delle zone vicine ai bordi di  $S_1$  ed  $S_2$  (ovvero  $v \cong 0$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x_i} \cong 0$  e  $\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \cong 0$  con  $i, j = 1, 2, 3$ ); da un punto di vista fisico ciò equivale a trascurare il moto del fluido nella direzione di approccio  $y$ .
- le derivate spaziali delle componenti  $u$  e  $w$  della velocità lungo  $x$  e  $z$  ( $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial w}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$  e  $\frac{\partial u}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ ,  $\frac{\partial w}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$ ) sono trascurabili rispetto alle analoghe derivate in direzione  $y$  ( $\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  e  $\frac{\partial w}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ ) e rispetto alla pressione  $p$ ; questa seconda ipotesi equivale invece, in termini fisici, a considerare trascurabili gli sforzi tangenziali generati da variazioni di velocità in direzione  $x$  e  $z$  rispetto a quelli generati da variazioni di velocità in direzione  $y$  e rispetto alla pressione  $p$ . Si ricordi a riguardo la definizione di tensore degli stress per un fluido Newtoniano  $\sigma = -pI_{3 \times 3} + \mu(J_v + J_v^T) + \lambda \operatorname{div} \underline{v} I_{3 \times 3}$ .

Alla luce di quanto detto le equazioni (5.2.3) assumono ora la forma seguente

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (5.2.5)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

dove la (5.2.5) mostra come  $p$  non dipenda da  $y$ , ovvero  $p = p(x, z)$ . Integrando le (5.2.5) si ha poi

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 + c_1(x, z)y + c_2(x, z) = 0 \quad (5.2.6)$$

$$w = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y^2 + c_3(x, z)y + c_4(x, z) = 0$$

nelle quali le funzioni  $c_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) possono essere determinate dalle condizioni al contorno (5.2.3). Imponendo le suddette condizioni, ricavando le  $c_i$  e sostituendo nelle (5.2.6) si ottiene

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (y - y_1)(y - y_2) + \frac{u_2 - u_1}{y_2 - y_1} (y - y_1) + u_1 \quad (5.2.7)$$

$$w = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} (y - y_1)(y - y_2) + \frac{w_2 - w_1}{y_2 - y_1} (y - y_1) + w_1.$$

Le equazioni (5.1.7) sono dette equazioni di campo e legano le velocità  $u$  e  $w$  alla pressione  $p$ . Per determinare le tre incognite fondamentali del problema ( $u$ ,  $w$  e  $p$ ) è necessario considerare l'equazione di continuità (la seconda delle 5.2.1). Integrando tale equazione rispetto ad  $y$  (da  $y_1$  a  $y_2$ ) si ha infatti

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial w}{\partial z} dy = - \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial v}{\partial y} dy = -(v_2 - v_1). \quad (5.2.8)$$

D'altra parte, ricordando la formula di integrazione di Leibnitz

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\alpha(x,z)}^{\beta(x,z)} f(x, y, z) dy &= \int_{\alpha(x,z)}^{\beta(x,z)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z) dy + \\ &+ f(x, \beta(x, z), z) \frac{\partial \beta(x, z)}{\partial x} - f(x, \alpha(x, z), z) \frac{\partial \alpha(x, z)}{\partial x} \end{aligned} \quad (5.2.9)$$

dove in questo caso  $f$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  sono funzioni generiche, si ha

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial u}{\partial x} dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_{y_1}^{y_2} u dy - u_2 \frac{\partial y_2}{\partial x} + u_1 \frac{\partial y_1}{\partial x} \quad (5.2.10)$$

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial w}{\partial z} dy = \frac{\partial}{\partial z} \int_{y_1}^{y_2} w dy - w_2 \frac{\partial y_2}{\partial z} + w_1 \frac{\partial y_1}{\partial z}.$$

Sostituendo le equazioni di campo (5.2.7) nella 5.2.8, usando le (5.2.10) e ricordando che  $h(x, z) = y_2(x, z) - y_1(x, z)$ , dopo aver riordinato i termini, si arriva alle seguente equazione alle derivate parziali nell'unica incognita  $p(x, z)$ :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 12\mu(v_2 - v_1) + 6\mu h \left[ \frac{\partial(u_1 + u_2)}{\partial x} + \frac{\partial(w_1 + w_2)}{\partial z} \right] +$$

$$-6\mu \left[ (u_2 - u_1) \frac{\partial h}{\partial x} + (w_2 - w_1) \frac{\partial h}{\partial z} \right]. \quad (5.2.11)$$

$$p = p_a \text{ su } \partial S$$

L'equazione (5.1.11) (una singola equazione scalare nell'incognita  $p$ ) è comunemente chiamata equazione di Reynolds e costituisce, insieme alla sua condizione al contorno, il punto di partenza per lo studio della maggioranza dei problemi di lubrificazione. Il membro di sinistra rappresenta essenzialmente l'azione della pressione  $p$  sul moto del fluido; il primo termine del membro di destra è il cosiddetto termine di schiacciamento (così chiamato perché associato allo schiacciamento del meato) mentre gli altri due termini di tale membro sono termini puramente idrodinamici (dovuti cioè all'effetto di trascinamento che le pareti del meato hanno sul fluido stesso e relativo effetto portante).

L'equazione (5.2.11) permette dunque di trovare, essendo noti  $\underline{v}_1$ ,  $\underline{v}_2$ ,  $y_1$  e  $y_2$ , la distribuzione di pressione  $p$  nel meato; a questo punto le componenti  $u$  e  $w$  della velocità (e quindi l'intero vettore  $\underline{v}$ ) potranno essere calcolate mediante le equazioni di campo (5.2.7).

## MODELLI 2D DI CUSCINI FLUIDODINAMICI

Come nel caso precedente, una volta risolte le (5.2.11), è semplice determinare la forze e i momenti agenti sugli elementi della coppia  $S_1, S_2$ , e la portata volumetrica che fluisce attraverso  $\partial S$ :

$$\underline{F}_{21} = \int_{S_1} \sigma \underline{n}_1 dS, \quad \underline{F}_{12} = \int_{S_2} \sigma \underline{n}_2 dS, \quad \underline{M}_{21G} = \int_{S_1} (\underline{Q}_1 - \underline{G}_1) \wedge \sigma \underline{n}_1 dS, \quad \underline{M}_{12G} = \int_{S_2} (\underline{Q}_2 - \underline{G}_2) \wedge \sigma \underline{n}_2 dS \quad (5.2.12)$$

$$Q = \int_{\partial S} \underline{v} * \underline{n} dS.$$

Naturalmente, per una data configurazione (atto di moto) di albero e sede / pattino, la forze e i momenti in questione dipenderanno da:

$$\underline{F}_{21} = \underline{F}_{21}(\underline{G}_1, \underline{\dot{G}}_1, \underline{\phi}_1, \underline{\dot{\phi}}_1, \underline{G}_2, \underline{\dot{G}}_2, \underline{\phi}_2, \underline{\dot{\phi}}_2), \quad \underline{F}_{12} = \underline{F}_{12}(\underline{G}_1, \underline{\dot{G}}_1, \underline{\phi}_1, \underline{\dot{\phi}}_1, \underline{G}_2, \underline{\dot{G}}_2, \underline{\phi}_2, \underline{\dot{\phi}}_2) \quad (5.2.13)$$

$$\underline{M}_{21} = \underline{M}_{21}(\underline{G}_1, \underline{\dot{G}}_1, \underline{\phi}_1, \underline{\dot{\phi}}_1, \underline{G}_2, \underline{\dot{G}}_2, \underline{\phi}_2, \underline{\dot{\phi}}_2), \quad \underline{M}_{12} = \underline{M}_{12}(\underline{G}_1, \underline{\dot{G}}_1, \underline{\phi}_1, \underline{\dot{\phi}}_1, \underline{G}_2, \underline{\dot{G}}_2, \underline{\phi}_2, \underline{\dot{\phi}}_2).$$

Se, come nel caso precedente, identifichiamo il corpo 1 con l'albero e con 2 la sede e supponiamo che il cuscano sia collocato in prossimità del nodo  $k$ -esimo, si ha quindi  $\underline{G}_1 = \underline{G}_k$  e  $\underline{\phi}_1 = \underline{\phi}_k$ . Considerando quindi solo le componenti flessionali di  $\underline{F}_{21}$ ,  $\underline{M}_{21}$  (vedi la (5.2.13)) e la dipendenza dalle sole variabili flessionali contenute nelle coordinate spaziali  $\underline{G}_k$   $\underline{\phi}_k$  (ovvero le variabili nodali riunite in  $\underline{q}_k$ ) e dalla speed della macchina  $\Omega$ , si ottengono le azioni lagrangiane agenti sull'albero:

$$\underline{Q}_{bk} = \begin{pmatrix} F_{x21} \\ F_{y21} \\ M_{x21} \\ M_{y21} \end{pmatrix} = \underline{Q}_{bk}(\underline{q}_k, \dot{\underline{q}}_k, \Omega). \quad (5.2.14)$$

Solitamente, per la maggioranza della applicazioni pratiche, dipendenza dalle altre componenti dell'atto di moto può essere ignorata in prima approssimazione.

Se invece identifichiamo con 2 l' $h$ -esimo pattino (con  $h = 2 \dots NP + 1$ ), dovremo chiaramente tener conto delle forze e dei momenti agenti sull'albero prodotti da tutti i pattini:

$$\underline{Q}_{bhk} = \begin{pmatrix} F_{xh1} \\ F_{yh1} \\ M_{xh1} \\ M_{yh1} \end{pmatrix} = \underline{Q}_{bhk}(\underline{q}_k, \dot{\underline{q}}_k, \Omega), \quad \underline{Q}_{bk} = \begin{pmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_{x1} \\ M_{y1} \end{pmatrix} = \underline{Q}_{bk}(\underline{q}_k, \dot{\underline{q}}_k, \Omega) = \sum_{h=2}^{NP+1} \underline{Q}_{bhk}(\underline{q}_k, \dot{\underline{q}}_k, \Omega). \quad (5.2.15)$$

A livello logico, la procedura appena descritta è riassunta nel diagramma a blocchi rappresentato in Fig. 54.

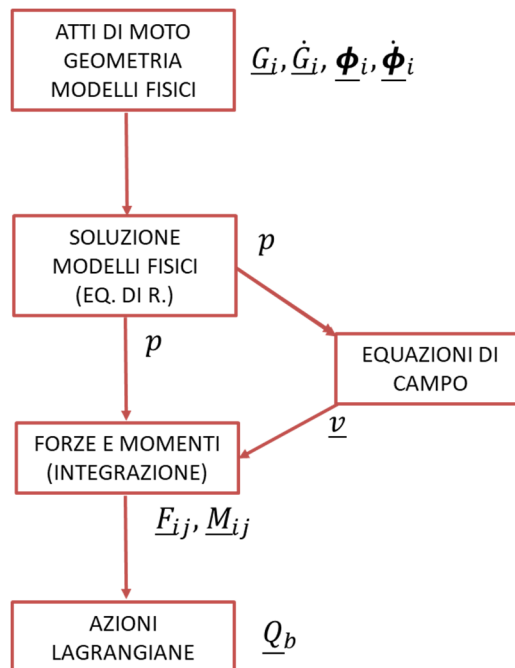


Figura 54 Schema logico per il calcolo di forze e momenti in un modello 2D di cuscano

## 5.3 Modellazione KC a parametri concentrati e coefficienti di cuscano

La modellazione a parametri concentrati dei cuscini a fluido mediante le matrici di rigidità e smorzamento equivalenti  $K_{Ck}$  e  $C_{Ck}$  richiede la linearizzazione delle azioni lagrangiane non conservative associate ai cuscini e calcolate nei paragrafi 5.1 e 5.2:

$$\underline{Q}_{bk} = \underline{Q}_{bk}(\underline{q}_k, \underline{\dot{q}}_k, \Omega). \quad (5.3.1)$$

Linearizzando la (5.3.1) nell'intorno di un punto di lavoro dell'albero  $\underline{q}_{k0}, \underline{\dot{q}}_{k0}$  si ottiene:

$$\underline{Q}_{bk}^{lin} = \underline{Q}_{bk}(\underline{q}_{k0}, \underline{q}_{k0}, \Omega) + \frac{\partial \underline{Q}_{bk}(\underline{q}_{k0}, \underline{\dot{q}}_{k0}, \Omega)}{\partial \underline{q}_k} (\underline{q}_k - \underline{q}_{k0}) + \frac{\partial \underline{Q}_{bk}(\underline{q}_{k0}, \underline{\dot{q}}_{k0}, \Omega)}{\partial \underline{\dot{q}}_k} (\underline{\dot{q}}_k - \underline{\dot{q}}_{k0}). \quad (5.3.2)$$

Data la grande complessità della funzione  $\underline{Q}_{bk}(\underline{q}_k, \underline{\dot{q}}_k, \Omega)$  le varie derivate (e quindi la linearizzazione) dovrà essere effettuata numericamente a partire da un'opportuna campagna di simulazioni la variare dell'atto di moto dell'albero  $\underline{q}_k, \underline{\dot{q}}_k$  e della speed della macchina  $\Omega$  oppure mediante un'accurata campagna sperimentale al banco prova (sempre al variare dell'atto di moto dell'albero e della speed della macchina).

Per semplicità si sceglie solitamente come configurazione di riferimento la posizione nominale dell'albero da fermo, ovvero  $\underline{q}_{k0} = \underline{0}, \underline{\dot{q}}_{k0} = \underline{0}$ . Si suppone inoltre che il cuscano non eserciti né forze né momenti sull'albero in configurazione nominale e cioè:  $\underline{Q}_{bk}(\underline{q}_{k0}, \underline{\dot{q}}_{k0}, \Omega) = \underline{0}$ .

Se definiscono dunque le matrici di rigidità e smorzamento del cuscano come:

$$K_{Ck}(\Omega) = -\frac{\partial \underline{Q}_{bk}(\underline{q}_{k0}, \underline{\dot{q}}_{k0}, \Omega)}{\partial \underline{q}_k}, \quad C_{Ck}(\Omega) = -\frac{\partial \underline{Q}_{bk}(\underline{q}_{k0}, \underline{\dot{q}}_{k0}, \Omega)}{\partial \underline{\dot{q}}_k} \quad (5.3.3)$$

da cui

$$\underline{Q}_{bk}^{lin} = -K_{Ck}(\Omega)\underline{q}_k - C_{Ck}(\Omega)\underline{\dot{q}}_k. \quad (5.3.4)$$

Si noti come le matrici di cuscano abbiano dimensione 4x4 dal momento che ogni nodo possiede 4DOF. In Fig. 55 si riportano a titolo di esempio gli andamenti tipici, in funzione della speed della macchina  $\Omega$ , dei coefficienti del primo quadrante delle matrici  $K_{Ck}(\Omega), C_{Ck}(\Omega)$  (4 coefficienti per ogni matrice), ovvero i coefficienti  $k_{uu}, k_{uv}, k_{vu}, k_{vv}$  e  $c_{uu}, c_{uv}, c_{vu}, c_{vv}$  che legano la forza esercitata dal cuscano sull'albero allo spostamento e alla velocità traslazionali del nodo.

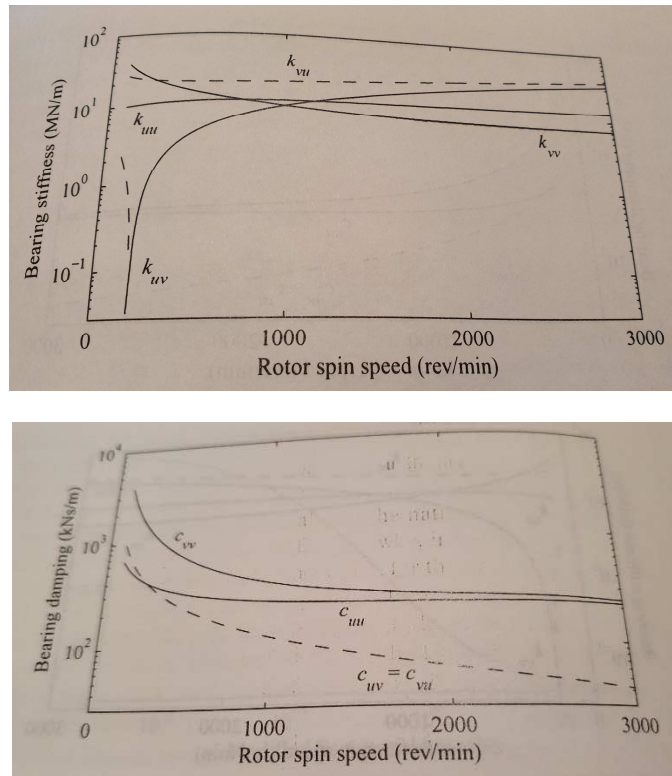
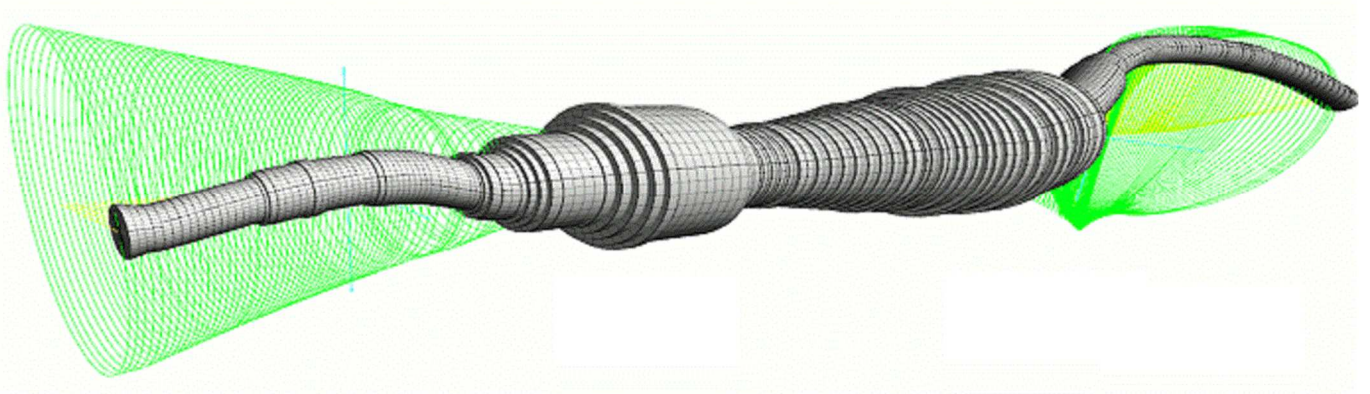


Figura 55 Parametri di cuscono in funzione della speed della macchina

E' facile osservare come matrici dei cusconi in questione asimmetriche e anisotrope, e come gli elementi extra-diagonali possano essere anche piuttosto consistenti. E' evidente inoltre la forte dipendenza dalla speed della macchina  $\Omega$ . Tutti questi aspetti sono potenzialmente piuttosto negativi sia per la stabilit  del sistema che per i livelli di vibrazione della macchina (si veda quanto detto per i diagrammi di Campbell e di Bode).

## 6. VIBRAZIONI FLESSIONALI FORZATE: ROTORI ELASTICI 1D



Tipico schema di rotore elastico 1D per analisi flessionale

### 6.1 Classificazione delle forzanti

Come nel caso dei rotor rigidi, le principali forzanti che possono agire su una macchina rotante 1D (avente una dimensione prevalente, coincidente con l'asse di rotazione principale) sono le seguenti:

1) FORZANTE ARMONICA

$$\underline{Q}(t) = \text{Re} \left[ \underline{Q}_0(\Omega) e^{j\omega_f(\Omega)t} \right], \quad \underline{Q}(t) = \begin{pmatrix} \ddots \\ \underline{Q}_h \\ \ddots \end{pmatrix}, \quad \underline{Q}_0(\Omega) = \begin{pmatrix} \ddots \\ \underline{Q}_{0h} \\ \ddots \end{pmatrix} \quad (6.1.1)$$

dove  $h = 1 \dots NN$  indica il generico nodo. Se  $\omega_f(\Omega) = \Omega$  si parla di forzanti armoniche sincrone (prodotte ad esempio dagli sbilanciamenti presenti sul rotore), se  $\omega_f(\Omega) = n\Omega$  con  $n$  intero positivo o della forma  $1/m$  si parla di forzanti armoniche super/sub-sincrone (come ad esempio quelle derivanti dall'interazione palare (le forzanti di fluido), quelle derivanti da componenti come cuscini, giunti, riduttori, etc.), se  $\omega_f(\Omega) = \omega_f = \text{cost}$  si parla di forzanti armoniche asincrone (a esempio vibrazione a pulsazione costante provenienti dal basamento). Infine, ho una dipendenza qualunque  $\omega_f(\Omega)$ , si parla di forzanti armoniche generiche (derivanti per esempio da motori elettrici, generatori o altre macchine interagenti con quella considerata).

2) FORZANTE PERIODICA

$$\underline{Q}(t) = \text{Re} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \underline{Q}_k(\Omega) e^{jk\omega_0(\Omega)t} \right], \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}. \quad (6.1.2)$$

In questo caso la forzante periodica di periodo  $T$  è caratterizzata dalla sovrapposizione di un numero infinito numerabile di forzanti armoniche elementari a pulsazione  $k\omega_0(\Omega)$  (si veda la serie di Fourier). Si noti che la pulsazione principale  $\omega_0(\Omega)$  può dipendere dalla speed della macchina  $\Omega$  in uno qualunque dei modi descritti nel punto 1). Le forzanti periodiche sono anch'esse prodotte dall'interazione palare (le forzanti di fluido) e da componenti vari come cuscini, giunti, riduttori, etc.

3) FORZANTE GENERICA

$$\underline{Q}(t, \Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{\tilde{Q}}(\omega, \Omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad \underline{\tilde{Q}}(\omega, \Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{Q}(t, \Omega) e^{-j\omega t} dt \quad (6.1.3)$$

Nel caso di forzante generica, la forzante è la sovrapposizione di un numero infinito non numerabile di forzanti armoniche elementari di pulsazione  $\omega$ . In generale non è da escludere che anche lo spettro della forzante possa dipendere dalla speed della macchina  $\Omega$ :  $\underline{\tilde{Q}}(\omega, \Omega)$ . Anche in questo caso le forzanti generiche possono essere prodotte dall'interazione palare (le forzanti di fluido) e da componenti vari come cuscini, giunti, riduttori, etc. Si riporta in Fig. 56 un esempio di spettro di forzante generica, in questo caso una forzante simil-armonica. Si ricorda che nella realtà segnali armonici e periodici perfetti non esistono perché avrebbero un'energia infinita. Quando si misura una vibrazione armonica in realtà si misura un segnale simil-armonico avente uno spettro come quello riportato in Fig. 56.

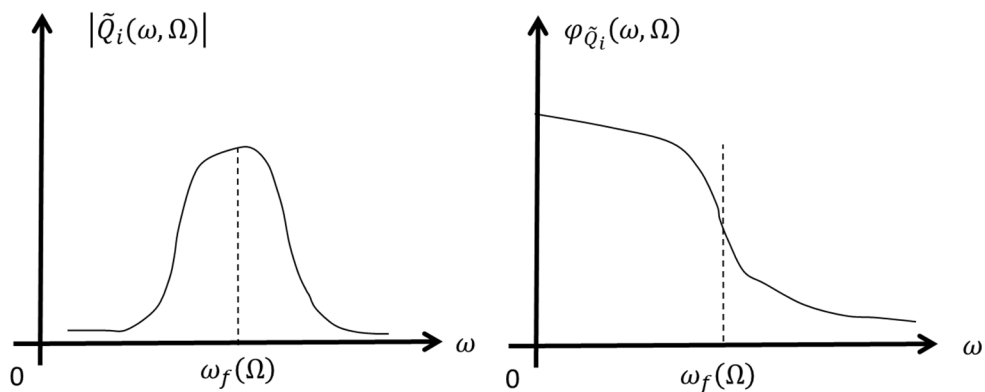


Figura 56 Esempio di spettro di forzante generica

Come già sottolineato nel capitolo 3, nella realtà tutti i rotorì sono ovviamente elastici (i corpi rigidi non esistono). Quando un rotore può dunque essere considerato approssimativamente rigido? Un rotore può essere considerato rigido se lo spettro della forzante si trova a frequenze ragionevolmente più basse delle frequenze dei primi modi elastici della macchina (quelli associati alla sua elasticità). E perché è importante studiare i rotorì rigidi, a parte l'ovvia semplificazione a livello modellistico? Come abbiamo già visto, spesso (non sempre!) le pulsazioni caratteristiche dello spettro della forzante tendono a crescere quando la speed della macchina  $\Omega$  cresce. Dunque spesso la macchina viene forzata a frequenze tanto più alte quanto più alta è la sua velocità di rotazione  $\Omega$ . Quindi, in generale, una macchina potrà essere considerata approssimativamente rigida quando va piano ( $\Omega$  bassa). Studiare i rotorì rigidi è dunque importante perché ci sono molte situazioni in cui la velocità della macchina è bassa (anche se la speed nominale e la speed massima sono molto alte!), come ad esempio quando la macchina rallenta, viene accesa o viene spenta. Bisogna dunque prestare attenzione al comportamento della macchina in tutto il range di velocità di lavoro  $\Omega \in [0 \quad \Omega_{max}]$ !

## 6.2 Diagrammi di Campbell, diagrammi di Bode e whirl forzato

1) FORZANTE ARMONICA SINCRONA:

$$M\ddot{\underline{q}} + (\Omega G + C)\dot{\underline{q}} + K\underline{q} = \underline{Q}(t) = \text{Re} \left[ \underline{Q}_0(\Omega) e^{j\Omega t} \right]. \quad (6.2.1)$$

Tra i vari tipi di forzante armonica sincrona ci occupiamo nuovamente di quella generata dallo sbilanciamento, essendo di gran lunga quello più importante a livello pratico:

$$M\ddot{\underline{q}} + (\Omega G + C)\dot{\underline{q}} + K\underline{q} = \underline{Q}_\varepsilon(t) = \text{Re} \left[ \underline{Q}_\varepsilon(\Omega) e^{j\Omega t} \right], \quad (6.2.2)$$

$$\underline{Q}_\varepsilon(t) = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{Q}_{\varepsilon h}(t) \\ \dots \end{pmatrix}, \quad \underline{Q}_\varepsilon(\Omega) = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{Q}_{\varepsilon h} \\ \dots \end{pmatrix}.$$

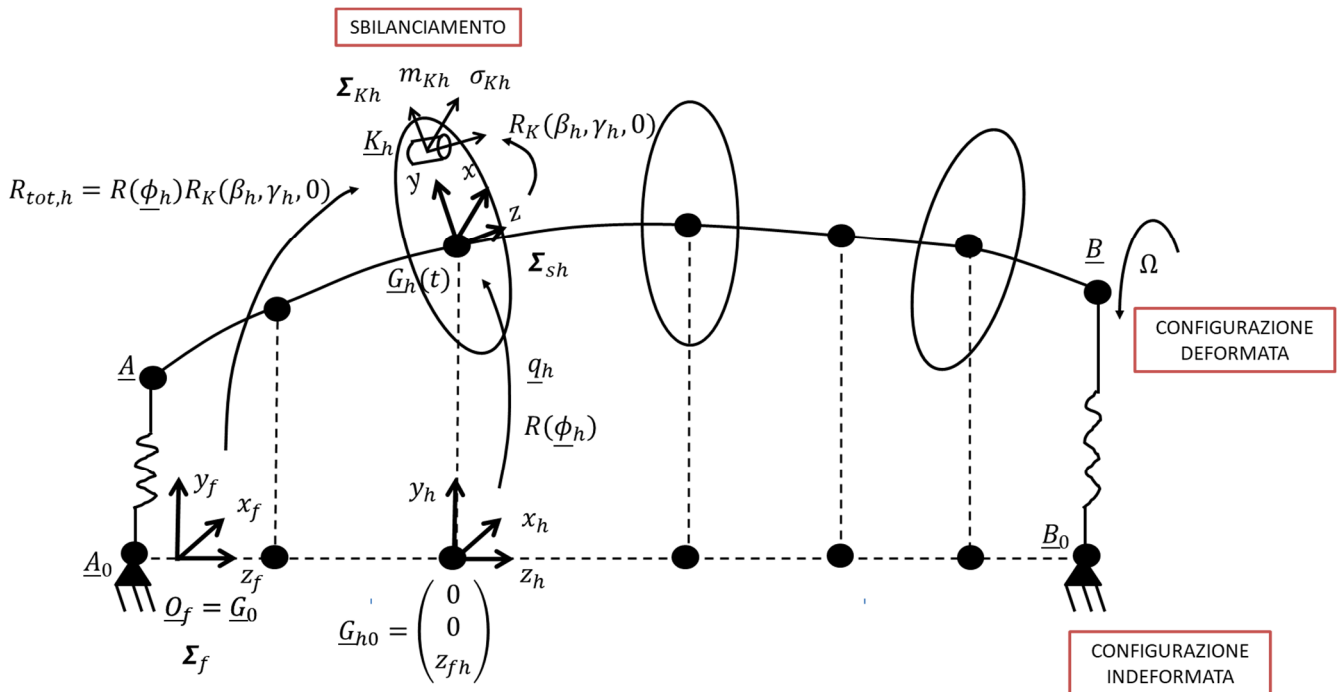


Figura 57 Rotore sbilanciato

Con riferimento alla Fig. 57, descriviamo sempre il rotore elastico attraverso i suoi gradi di libertà nodali  $\underline{G}_h$  e  $\underline{\phi}_h$

$$\underline{G}_h = \begin{pmatrix} u_h \\ v_h \\ w_h \end{pmatrix}, \quad \underline{\phi}_h = \begin{pmatrix} \theta_h \\ \psi_h \\ \varphi_h \end{pmatrix}. \quad (6.2.3)$$

Posiziono dunque lo sbilanciamento nel punto  $K_h$  sul piano  $xy$  della terna associata al nodo  $h$ -esimo e a esso solidale. La sua posizione in tale terna sarà dunque

$$(K_h - \underline{G}_h)_S = \begin{pmatrix} \varepsilon_h \cos(\delta_h) \\ \varepsilon_h \sin(\delta_h) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.2.4)$$



dove  $\varepsilon_h$  è la distanza del punto dall'asse di rotazione della terna del nodo  $h$ -esimo e  $\delta_h$  è la sua fase. Lo sbilanciamento avrà proprietà inerziali (lo si può immaginare come un cilindretto rigidamente montato sul rotore)

$$m_{Kh}, \sigma_{Kh} = \begin{bmatrix} I_{dKh} & 0 & 0 \\ 0 & I_{dKh} & 0 \\ 0 & 0 & I_{pKh} \end{bmatrix}. \quad (6.2.5)$$

Chiameremo poi  $R(\underline{\phi}_h)$  la solita matrice di rotazione che lega la terna solidale al nodo  $h$ -esimo a quella inerziale e  $R_K(\beta_h, \gamma_h, 0)$  la matrice di rotazione che lega la terna solidale al nodo  $h$ -esimo con la terna (sempre solidale al nodo  $h$ -esimo) posizionata nel punto  $K$  dove si trova lo sbilanciamento.  $\beta_h$  e  $\gamma_h$  sono gli angoli di disassamento (rispetto alla terna solidale al nodo  $h$ -esimo) con cui il cilindretto della massa sbilanciante è montato sul rotore solidalmente alla terna in questione. Chiaramente la matrice di rotazione che lega la terna inerziale alla terna dello sbilanciamento posizionata in  $K_h$  sarà

$$R_{toth} = R(\underline{\phi}_h)R_K(\beta_h, \gamma_h, 0). \quad (6.2.6)$$

A questo punto le azioni d'inerzia generate dallo sbilanciamento posto in  $K_h$  sul rotore possono essere calcolate in modo esatto come:

$$\underline{F}_{\varepsilon h}(t) = -m_{Kh}\underline{a}_{Kh} = -m_{Kh} \left[ \underline{\ddot{G}}_h + \underline{\dot{\omega}}_{fh} \times (K_h - \underline{G}_h)_f + \underline{\omega}_{fh} \times (\underline{\omega}_{fh} \times (K_h - \underline{G}_h)_f) \right] \quad (6.2.7)$$

$$\underline{M}_{\varepsilon h}(t) = -(\sigma_{Kfh}\underline{\omega}_{fh})' = -(R_{toth}\sigma_{Kh}R_{toth}^T\underline{\omega}_{fh})' + (K_h - \underline{G}_h)_f \times \underline{F}_{\varepsilon h}(t).$$

Possiamo adesso semplificare e linearizzare queste complicate espressioni facendo le solite due ipotesi di lavoro che adottiamo nello studio delle vibrazioni flessionali della macchine rotanti 1D:

- consideriamo solamente i gradi di libertà flessionali (visto che il nostro scopo è studiare la dinamica flessionale). In altre parole, delle 6 equazioni (6.2.7) considereremo solo la prima (traslazione lungo  $x_h$ ), la seconda (traslazione lungo  $y_h$ ), la quarta (rotazione attorno a  $x_h$ ) e la quinta (rotazione attorno a  $y_h$ ). Faremo inoltre le seguenti assunzioni sulle variabili del problema (soprattutto quelle relative ai DOF non di interesse):

$$\underline{G} = \begin{pmatrix} u_h \\ v_h \\ u_h = 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\dot{G}} = \begin{pmatrix} \dot{u}_h \\ \dot{v}_h \\ \dot{w}_h = 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\ddot{G}} = \begin{pmatrix} \ddot{u}_h \cong 0 \\ \ddot{v}_h \cong 0 \\ \ddot{w}_h = 0 \end{pmatrix}, \quad (6.2.8)$$

$$\underline{\phi} = \begin{pmatrix} \theta_h \\ \psi_h \\ \varphi_h = 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\dot{\phi}} = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_h \\ \dot{\psi}_h \\ \dot{\varphi}_h = \Omega = \text{cost} \end{pmatrix}, \quad \underline{\ddot{\phi}} = \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_h \cong 0 \\ \ddot{\psi}_h \cong 0 \\ \ddot{\varphi}_h = 0 \end{pmatrix}$$

dove  $\Omega$  è la speed della macchina (la velocità di rotazione della macchina attorno al suo asse di rotazione principale). Si noti in questo caso si considerino trascurabili anche le accelerazioni del nodo in questione (ovviamente nel calcolo delle azioni inerziali associate allo sbilanciamento, non certo nelle equazioni di moto).

- linearizziamo poi il problema nell'intorno della configurazione nominale. In altre parole, studiamo il problema ai "piccoli spostamenti" nell'intorno della configurazione in questione. Da un punto di vista fisico, consideriamo tutte variabili del problema (vedi la (6.2.8)) piccole (eccetto ovviamente la speed della macchina  $\Omega$ ) e consideriamo piccole anche le loro derivate. Applicare questa ipotesi alle equazioni (6.2.7)

equivale a considerare solamente i termini di ordine 0 (le costanti) e i termini di ordine 1 (la variabili stesse), ignorando qualunque altro termine di ordine superiore.

Applicando tali ipotesi alla (6.2.7) si ottiene dunque, dopo aver riordinato i termini:

$$\underline{Q}_{\varepsilon h}(t) = \begin{pmatrix} F_{x\varepsilon h} \\ F_{y\varepsilon h} \\ M_{x\varepsilon h} \\ M_{y\varepsilon h} \end{pmatrix} = -M_{Kh}\ddot{\underline{q}}_{\varepsilon h} - \Omega G_{Kh}\dot{\underline{q}}_{\varepsilon h}, \quad \underline{q}_{\varepsilon h} = \begin{pmatrix} \varepsilon_h \cos(\Omega t + \delta_h) \\ \varepsilon_h \sin(\Omega t + \delta_h) \\ \beta_h \cos(\Omega t + \gamma_h) \\ \beta_h \sin(\Omega t + \gamma_h) \end{pmatrix}. \quad (6.2.9)$$

$$M_{Kh} = \begin{pmatrix} m_{Kh} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{Kh} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{dKh} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{dKh} \end{pmatrix}, \quad G_{Kh} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{pKh} \\ 0 & 0 & -I_{pKh} & 0 \end{pmatrix}.$$

Le prime due componenti di  $\underline{Q}_{\varepsilon h}(t)$  danno la forza centrifuga prodotta dalla massa sbilanciante in  $K_h$  mentre le altre due componenti danno i momenti dovuti alle inerzie diametrali e a quelle polari (sbilanciamenti giroscopici). Introducendo il classico formalismo complesso, si ottiene infine:

$$\underline{q}_{\varepsilon h} = \text{Re} [\underline{q}_{\varepsilon_{0h}} e^{j\Omega t}] = \text{Re} \left[ \begin{pmatrix} \varepsilon_h e^{j\delta_h} \\ -j\varepsilon_h e^{j\delta_h} \\ \beta_h e^{j\gamma_h} \\ -j\beta_h e^{j\gamma_h} \end{pmatrix} e^{j\Omega t} \right], \quad \underline{q}_{\varepsilon_{0h}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_h e^{j\delta_h} \\ -j\varepsilon_h e^{j\delta_h} \\ \beta_h e^{j\gamma_h} \\ -j\beta_h e^{j\gamma_h} \end{pmatrix} \quad (6.2.10)$$

da cui chiaramente si ha, sostituendo la (6.2.10) nella (6.2.9),

$$\underline{Q}_{\varepsilon h}(t) = \text{Re} [(\Omega^2 M_{Kh} - j\Omega^2 G_{Kh}) \underline{q}_{\varepsilon_{0h}} e^{j\Omega t}] = \text{Re} [\Omega^2 \underline{b}_h e^{j\Omega t}], \quad \underline{b}_h = (M_{Kh} - jG_{Kh}) \underline{q}_{\varepsilon_{0h}}, \quad \underline{Q}_{\varepsilon h} = \Omega^2 \underline{b}_h, \quad (6.2.11)$$

$$\underline{Q}_{\varepsilon}(t) = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{Q}_{\varepsilon h}(t) \\ \dots \end{pmatrix} = \text{Re} \left[ \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{Q}_{\varepsilon h} \\ \dots \end{pmatrix} e^{j\Omega t} \right] = \text{Re} \left[ \begin{pmatrix} \dots \\ \Omega^2 \underline{b}_h \\ \dots \end{pmatrix} e^{j\Omega t} \right] = \text{Re} [\Omega^2 \underline{b} e^{j\Omega t}] = \text{Re} [\underline{Q}_{\varepsilon}(\Omega) e^{j\Omega t}].$$

Si nota infine che, non solo la forzante in questione è una forzante armonica sincrona, ma anche che, purtroppo, il suo modulo dipende  $\Omega^2$  (cosa che era lecito aspettarsi in presenza di azioni inerziali centrifughe e giroscopiche).

La soluzione del moto forzato del sistema può essere facilmente determinata grazie agli strumenti matematici introdotti nel capitolo 1 e si ha:

$$\underline{q}_f(t) = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{q}_h(t) \\ \dots \end{pmatrix} = \text{Re} [\underline{q}_0 e^{j\Omega t}], \quad \underline{q}_h(t) = \begin{pmatrix} u_h(t) \\ v_h(t) \\ \theta_h(t) \\ \psi_h(t) \end{pmatrix} \quad (6.2.11)$$

$$\underline{q}_0 = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{q}_{0h} \\ \dots \end{pmatrix} = \alpha(\Omega, \Omega) \underline{Q}_{\varepsilon}(\Omega) = \alpha(\Omega, \Omega) \Omega^2 \underline{b} = [-\Omega^2 M + j\Omega(C + \Omega G) + K]^{-1} \Omega^2 \underline{b}, \quad \underline{q}_{0h} = \begin{pmatrix} u_{0h} \\ v_{0h} \\ \theta_{0h} \\ \psi_{0h} \end{pmatrix}$$

dove in questi casi è utile distinguere nella ricettanza  $\alpha(\Omega, \Omega)$  la doppia dipendenza dalla pulsazione della forzante e dalla velocità di rotazione della macchina (in questo caso uguali essendo la forzante armonica sincrona!).

Applicando il teorema di sovrapposizione modale in questo caso abbiamo:

$$\underline{q}_o = \alpha(\Omega, \Omega) \underline{Q}_\varepsilon(\Omega) = \sum_{k=1}^{2N} \frac{(q_{Rk} q_{Lk}^H)}{j\Omega - s_k} \Omega^2 \underline{b} = \Omega^2 \sum_{k=1}^{2N} \left( \frac{q_{Lk}^H \underline{b}}{j\Omega - s_k} \right) \underline{q}_{Rk} \quad (6.2.12)$$

da cui possiamo dedurre che i modi che maggiormente contribuiscono alla soluzione sono quelli in cui  $\left( \frac{q_{Lk}^H \underline{b}}{j\Omega - s_k} \right)$  è grande, ovvero quando  $\Omega$  è vicina a una delle pulsazioni proprie del sistema  $\omega_{Pk}$  contenuta in  $s_k$  (corrispondenti alle risonanze del sistema) o quando  $\underline{q}_{Lk}^H \underline{b}$  è grande (sbilanciamenti ortogonali al corrispondente autovettore).

Il diagramma di Campbell associato a questo caso è riportato in Fig. 58. Per semplicità riportiamo solamente i primi due grappoli. Rispetto allo studio nel moto libero abbiamo aggiunto la curva del carico  $\omega_f(\Omega) = \Omega$  sul diagramma relativo alle pulsazioni proprie  $\omega_{Pi}$ . Le intersezioni della curva del carico con i rami del diagramma  $\Omega_c$  sono come sempre le pulsazioni critiche. Come vedremo quando analizzeremo il diagramma di Bode, se la velocità angolare della macchina coincide con una pulsazione critica, il sistema si troverà necessariamente in risonanza, ovvero la forzante andrà inevitabilmente a sollecitare il sistema in una pulsazione di risonanza. Il valore di smorzamento modale associato alle varie pulsazioni critiche  $\zeta_c$  può essere facilmente trovato riportando la pulsazione critica in questione  $\Omega_c$  sul diagramma dello smorzamento.

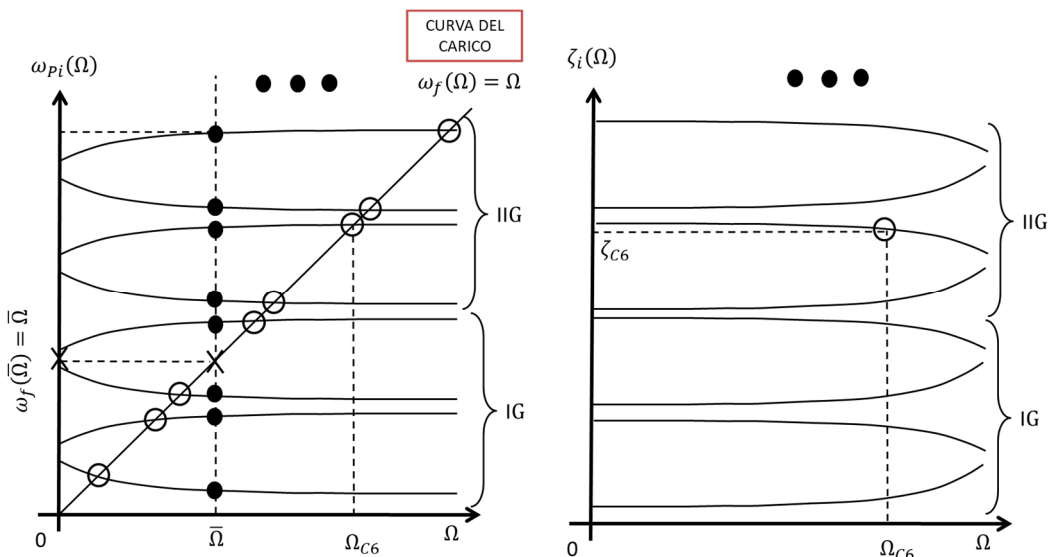


Figura 58 Diagramma di Campbell per rotore elastico con forzante armonica sincrona

Per capire quanto effettivamente vibra il sistema dobbiamo fare uso nuovamente dei diagrammi di Bode. A tale fine dobbiamo prima specificare una velocità di lavoro della macchina  $\bar{\Omega}$  alla quale studiare il sistema. Riporto quindi tale velocità  $\bar{\Omega}$  sul diagramma di Campbell; le intersezioni tra la retta verticale passante per  $\bar{\Omega}$  e i  $4 \cdot NN$  rami del diagramma delle pulsazioni proprie  $\omega_{Pi}$  rappresentano le  $4 \cdot NN$  pulsazioni proprie del sistema coincidenti, a loro volta, le pulsazioni di risonanza del sistema. A questo punto, supponendo di voler trovare quanto vale lo spostamento lungo  $x$  del nodo  $h$ -esimo  $u_{0h}$  (nel dominio della frequenza), posso tracciare i rispettivi diagrammi (Fig. 59). Per determinare il modulo e la fase dello spostamento  $u_{0h}$  devo determinare sul diagramma di Bode il punto in cui agisce la forzante. Ma questo può essere dedotto dal diagramma di Campbell intersecando la curva del carico con la sezione verticale passante per  $\bar{\Omega}$  (si vedano sempre la Fig. 58 e la Fig. 59).

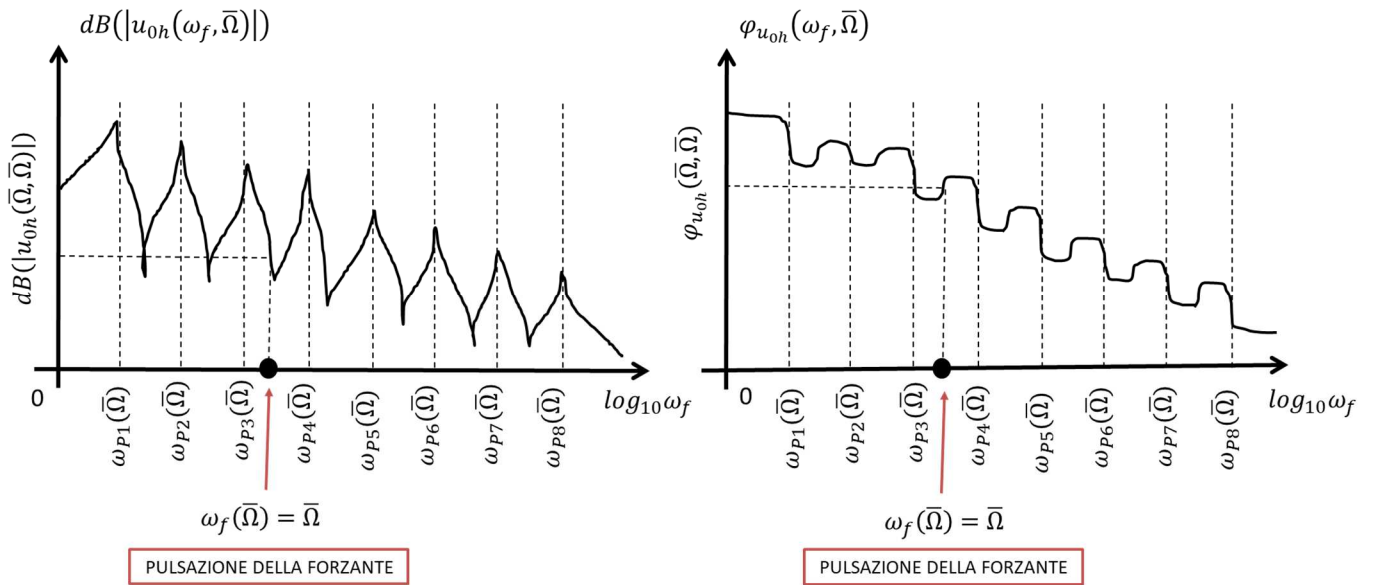


Figura 59 Diagramma di Bode per rotore elastico con forzante armonica sincrona

Guardando ai diagrammi di Campbell e di Bode, risulta ancora una volta chiaro il significato di pulsazione critica  $\Omega_c$ . Qualora infatti la pulsazione di lavoro della macchina  $\bar{\Omega}$  (la speed) si trovasse in corrispondenza di una critica  $\Omega_c$ , la pulsazione in cui la forzante agirebbe sulla macchina  $\omega_f(\bar{\Omega}) = \bar{\Omega}$  si troverebbe proprio in corrispondenza di una pulsazione propria  $\omega_{Pi}(\bar{\Omega})$  e quindi di una pulsazione di risonanza. Ci troveremmo quindi necessariamente in condizioni di massima amplificazione.

Concludiamo quindi con lo studio del whirl forzato, ovvero la traiettoria del generico nodo  $\underline{G}_h$  durante il suo moto forzato nel piano  $x_h y_h$ :

$$\underline{q}_f(t) = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{q}_h(t) \\ \dots \end{pmatrix} = Re [ \underline{q}_0 e^{j\Omega t} ], \quad \underline{q}_h(t) = \begin{pmatrix} u_h(t) \\ v_h(t) \\ \theta_h(t) \\ \psi_h(t) \end{pmatrix} = Re \left[ \begin{pmatrix} u_{0h} \\ v_{0h} \\ \theta_{0h} \\ \psi_{0h} \end{pmatrix} e^{j\Omega t} \right]. \quad (6.2.13)$$

Lo studio del moto di whirl forzato permette anche di conoscere direzione del moto di rivoluzione del nodo  $h$ -esimo attorno all'asse  $z_h$  (se il moto del nodo è BW o FW). Analogamente a quanto fatto nei capitoli precedenti, ci concentriamo sulla parte traslazionale del moto

$$\begin{pmatrix} u_h(t) \\ v_h(t) \end{pmatrix} = Re \left[ \begin{pmatrix} u_{0h} \\ v_{0h} \end{pmatrix} e^{j\Omega t} \right] \quad (6.2.14)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_h(t) \\ v_h(t) \end{pmatrix} &= Re \left[ \begin{pmatrix} u_{0h} \\ v_{0h} \end{pmatrix} e^{j\Omega t} \right] = Re \left[ \begin{pmatrix} m_{u0h} e^{j\varphi_{u0h}} e^{j\Omega t} \\ m_{v0h} e^{j\varphi_{v0h}} e^{j\Omega t} \end{pmatrix} \right] = \begin{bmatrix} m_{u0h} \cos(\Omega t + \varphi_{u0h}) \\ m_{v0h} \cos(\Omega t + \varphi_{v0h}) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} m_{u0h} \cos \varphi_{u0h} - m_{u0h} \sin \varphi_{u0h} \\ m_{v0h} \cos \varphi_{v0h} - m_{v0h} \sin \varphi_{v0h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \Omega t \\ \sin \Omega t \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \cos \Omega t \\ \sin \Omega t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_h(t) \\ v_h(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dalla (6.2.14) si ottiene poi

$$\begin{pmatrix} \cos \Omega t \\ \sin \Omega t \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} u_h(t) \\ v_h(t) \end{pmatrix} \quad (6.2.15)$$

da cui facendo la norma al quadrato

$$1 = \begin{pmatrix} u_h(t) \\ v_h(t) \end{pmatrix}^T (T^{-1})^T T^{-1} \begin{pmatrix} u_h(t) \\ v_h(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}^T H \begin{pmatrix} u_h(t) \\ v_h(t) \end{pmatrix}. \quad (6.2.16)$$

Poiché la matrice  $H$  per costruzione è una matrice simmetrica definita positiva, la (6.2.16) rappresenta l'equazione parametrica di un'ellisse centrata nell'origine ma ad assi ruotati. Più nel dettaglio, per il teorema spettrale, la matrice  $H$  ammette una base ortonormale di autovettori  $\underline{v}_{H1}, \underline{v}_{H2}$  che determinano la direzione dei semiassi dell'ellisse in questione. La lunghezza dei semiassi è invece pari a  $\sqrt{\lambda_{H1}}$  e  $\sqrt{\lambda_{H2}}$  (gli autovalori sono reali e positivi perché  $H$ ). L'ellisse corrispondente al whirl libero è riportata in Fig. 60. Infine le fasi  $\varphi_{u_{0h}}, \varphi_{v_{0h}}$  di  $u_{0h}$  e  $v_{0h}$  permettono di determinare anche la direzione (BW o FW) del moto forzato di rivoluzione del nodo attorno all'asse  $z_h$ . Se infatti vale la condizione

$$0 < \varphi_{v_{0h}} - \varphi_{u_{0h}} < \pi, \quad (6.2.17)$$

allora il moto di rivoluzione è BW e l'ellisse sarà percorsa in senso BW. Se invece

$$-\pi < \varphi_{v_{0h}} - \varphi_{u_{0h}} < 0, \quad (6.2.18)$$

il moto di rivoluzione è FW e l'ellisse sarà percorsa in senso FW. La rotazione del rotore avviene chiaramente alla pulsazione  $\Omega$  (la speed della macchina) mentre il moto di rivoluzione attorno all'asse  $z_h$  di ogni nodo avviene sempre alla pulsazione della forzante, in questo caso  $\omega_f(\bar{\Omega}) = \bar{\Omega}$ .

Si noti come, al contrario del moto libero, non essendo presente il termine esponenziale dovuto allo smorzamento, la traiettoria sarà sempre un'ellisse a prescindere dal valore dello smorzamento stesso. Se sono vicino a una risonanza e/o lo smorzamento modale è in generale piccolo, allora le dimensioni dell'ellisse saranno più grandi, altrimenti saranno più piccoli.

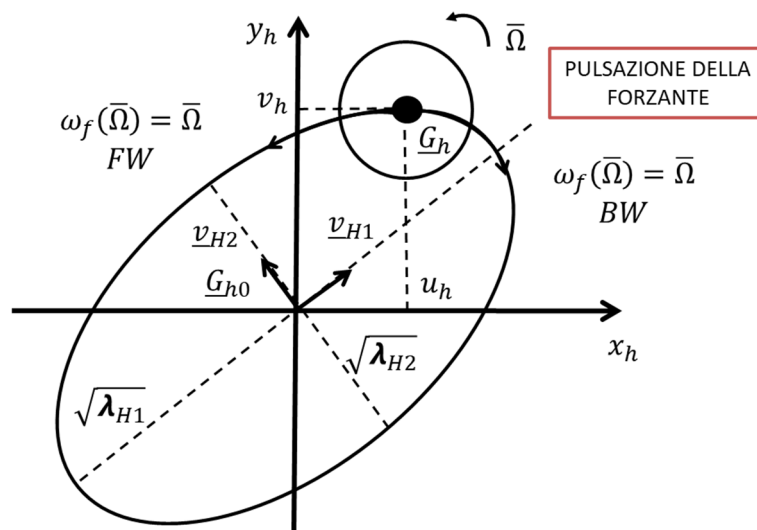


Figura 60 Whirl forzato per rotore elastico con forzante armonica sincrona (le componenti angolari  $\psi_h(t)$  e  $\theta_h(t)$  si comportano in modo analogo)

Anche nel moto forzato, in linea teorica ogni nodo  $G_h$  potrebbe percorrere la propria ellisse in senso BW o FW e le varie ellissi potrebbero avere le forme e le grandezze più disparate. Tuttavia, per il principio di coerenza modale,

le deformate forzate tendono ad avere solamente forme regolari come quelle riportate in Fig. 61. Questo è dovuto al fatto i rotori sono solitamente di metallo (acciaio, leghe ad alta resistenza, etc.) e non di gomma o di carta. Di conseguenza, sezioni della macchina adiacenti tra loro non potranno mai avere ellissi di whirl forzato “troppo diverse” tra loro (in tal caso non potremmo certo parlare di elasticità lineare e materiali lineari!).

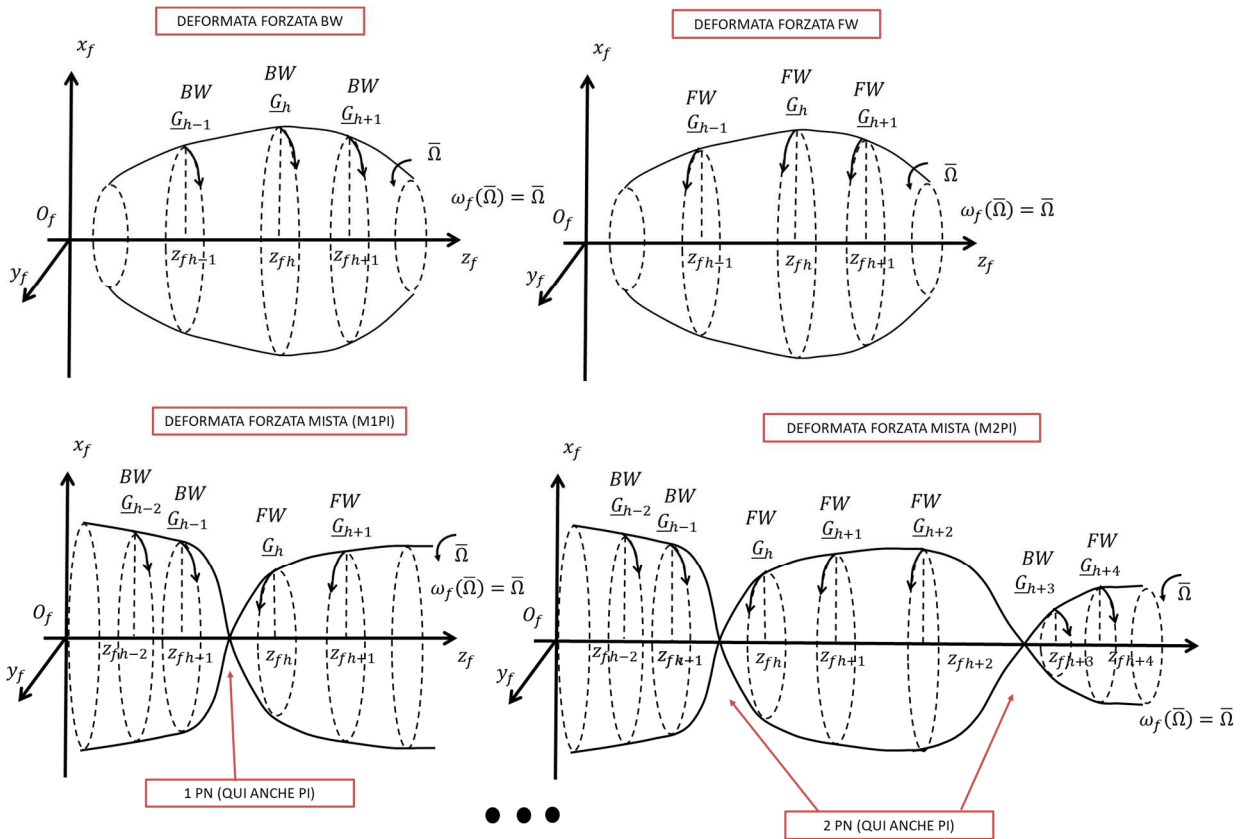


Figura 61 Il concetto di coerenza modale (le componenti angolari  $\psi_h(t)$  e  $\theta_h(t)$  si comportano in modo analogo)

Come si può notare dalla Fig. 61, se i nodi ruotano tutti in senso BW, la deformata forzata è detta BW. Se invece ruotano tutti in senso FW, allora la deformata forzata è detta FW. Nel caso in cui esistano dei punti nodali PN (punti in cui la sezione è ferma), allora possono esserci delle deformate forzate dal carattere misto in cui la rotazione può invertirsi una o più volte nei punti nodali (M1PI, M2PI, etc. a seconda di quante volte la rotazione viene invertita nei punti nodali). I punti nodali PN in cui la rotazione si inverte sono detti punti di inversione PI. Naturalmente non è detto che, se ci sono dei punti nodali PN, il modo necessariamente si invertirà in essi e che, di conseguenza, la deformata forzata sia per forza mista. Possono benissimo esistere punti nodali PN in cui la deformata forzata non si inverte e che quindi non sono punti di inversione PI. I punti di inversione PI sono quindi un sottoinsieme dei punti nodali PN (il numero dei PI è minore o uguale di quello dei PN).

Come detto in precedenza, la rotazione del rotore avviene chiaramente alla pulsazione  $\Omega$  (la speed della macchina) mentre il moto di rivoluzione di ogni nodo  $G_h$  attorno all'asse  $z_h$  avviene sempre alla pulsazione della forzante  $\omega_f(\bar{\Omega}) = \bar{\Omega}$ . Ciò è coerente col fatto che la pulsazione associata alla deformata forzata in questione è sempre una e una sola, ovvero,  $\bar{\Omega}$ .

Le principali deformate forzate sono rappresentate in Fig. 62 e, nelle caratteristiche (BW, M, FW) e nella forma (IDF, IIDF, IIIDF, etc.), ricordano i modi di vibrare IE, IIE, IIIE, IVE, etc. descritti nel paragrafo 4.7. Tuttavia le Prof. Enrico Meli, Dipartimento di Ingegneria Industriale, Università di Firenze

deformate forzate riguardano il moto forzato e non il moto libero, e non vanno dunque confuse con i modi di vibrare e le deformate modali!

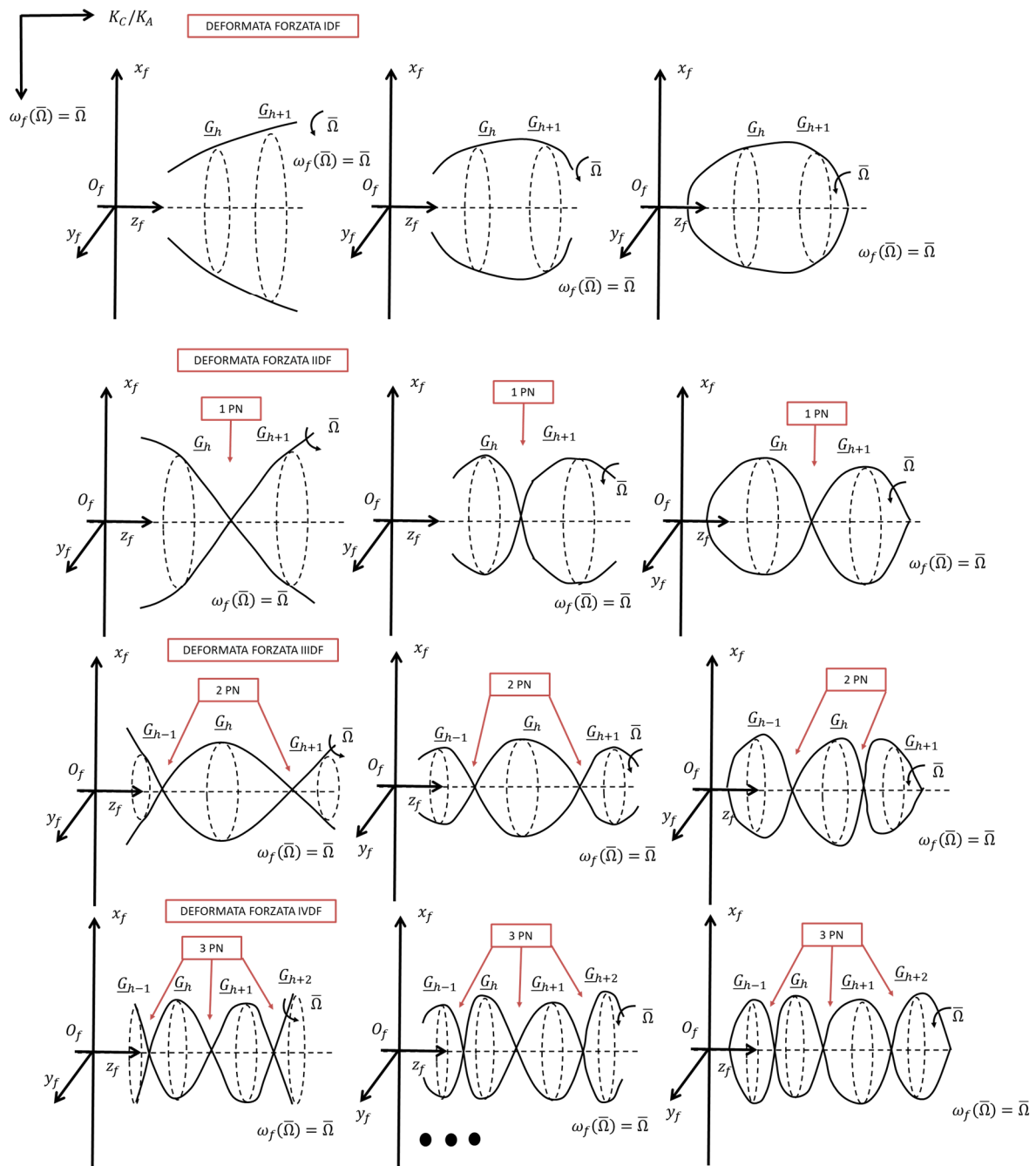


Figura 62 Deformate forzate per rotore elastico con forzante armonica sincrona (le componenti angolari  $\psi_h(t)$  e  $\theta_h(t)$  si comportano in modo analogo)

Riportiamo per completezza in Fig. 62bis/ter un esempio di deformata forzata completa includendo anche la componenti angolari  $\psi_h(t)$  e  $\theta_h(t)$  di basculamento della sezione (prima non considerate esplicitamente perché meno importanti a livello ingegneristico e perché il loro comportamento qualitativo è identico a quello delle componenti spaziali  $u_h(t)$  e  $v_h(t)$ ). Nel caso dell'esempio abbiamo una deformata forzata flessionale IIDF spaziale (con 1PN e che potrà avere caratteristica BW, FW o M1PI) associato a una deformata forzata IIIDF rotazionale (con 2PN e che potrà avere caratteristica BW, FW, M1PI, M2PI).

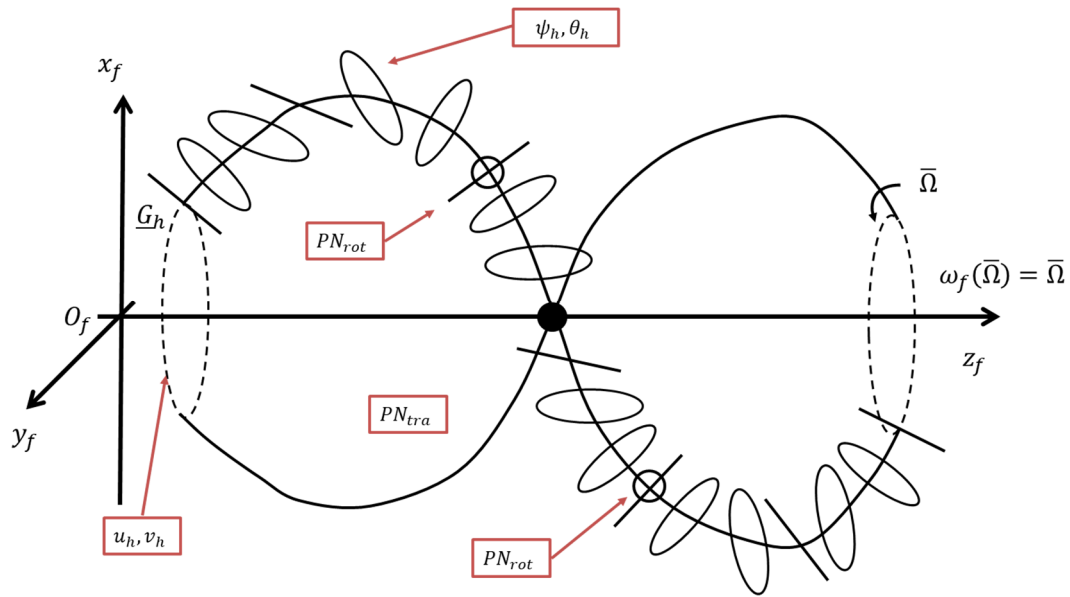


Figura 62bis Esempio di deformata forzata per rotori elastici

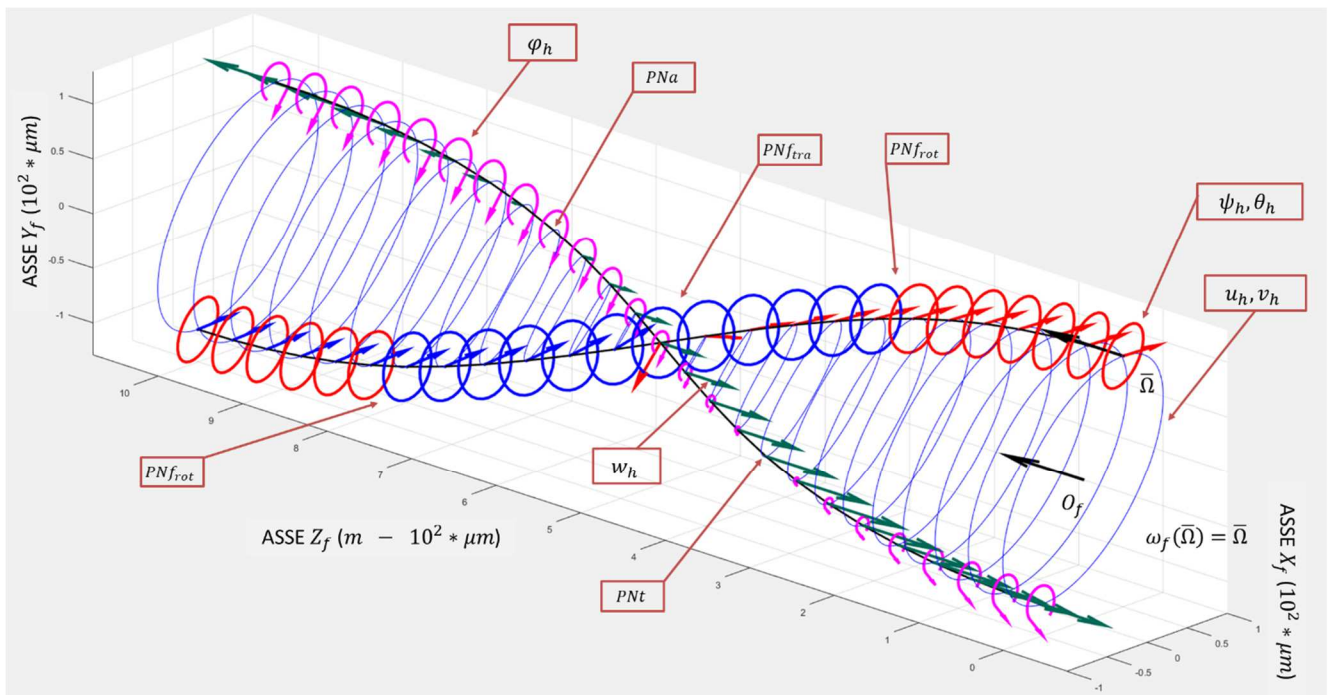


Figura 62ter Rappresentazione di deformata forzata tipo software per rotori elastici (si osservi solo la parte flessionale della deformata)

ELENCO RIASSUNTIVO DELLE VARIE DEFORMATE FORZATE:

- 1) FORMA: IDF  
CARATTERISTICA: BW o FW
- 2) FORMA: IIDF  
CARETTERISTICA: BW, FW, M1PI
- 3) FORMA: IIIDF



CARETTERISTICA: BW, FW, M1PI, M2PI

4) FORMA: IVDF

CARETTERISTICA: BW, FW, M1PI, M2PI, M3PI

... ..

2) FORZANTE ARMONICA SUPER /SUB-SINCRONA:

$$M\ddot{\underline{q}} + (\Omega G + C)\dot{\underline{q}} + K\underline{q} = \underline{Q}(t) = \text{Re} \left[ \underline{Q}_0(\Omega) e^{jn\Omega t} \right]. \quad (6.2.19)$$

$$\underline{Q}(t) = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{Q}_h(t) \\ \dots \end{pmatrix}, \quad \underline{Q}_0(\Omega) = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{Q}_{0h} \\ \dots \end{pmatrix}.$$

La soluzione del moto forzato del sistema può essere facilmente determinata grazie agli strumenti matematici introdotti nel capitolo 1 e si ha:

$$\underline{q}_f(t) = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{q}_h(t) \\ \dots \end{pmatrix} = \text{Re} \left[ \underline{q}_0 e^{jn\Omega t} \right], \quad \underline{q}_h(t) = \begin{pmatrix} u_h(t) \\ v_h(t) \\ \theta_h(t) \\ \psi_h(t) \end{pmatrix} \quad (6.2.20)$$

$$\underline{q}_0 = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{q}_{0h} \\ \dots \end{pmatrix} = \alpha(n\Omega, \Omega) \underline{Q}_0(\Omega) = [-n^2\Omega^2 M + jn\Omega(C + \Omega G) + K]^{-1} \underline{Q}_0(\Omega), \quad \underline{q}_{0h} = \begin{pmatrix} u_{0h} \\ v_{0h} \\ \theta_{0h} \\ \psi_{0h} \end{pmatrix}$$

dove in questi casi è utile distinguere nella ricettanza  $\alpha(n\Omega, \Omega)$  la doppia dipendenza dalla pulsazione della forzante e dalla velocità di rotazione della macchina.

Applicando il teorema di sovrapposizione modale in questo caso abbiamo:

$$\underline{q}_0 = \alpha(n\Omega, \Omega) \underline{Q}_0(\Omega) = \sum_{k=1}^{2N} \frac{(q_{Rk} q_{Lk}^H)}{jn\Omega - s_k} \underline{Q}_0(\Omega) = \sum_{k=1}^{2N} \left( \frac{q_{Lk}^H Q_0}{jn\Omega - s_k} \right) \underline{q}_{Rk} \quad (6.2.21)$$

da cui possiamo dedurre che i modi che maggiormente contribuiscono alla soluzione sono quelli in cui  $\left( \frac{q_{Lk}^H Q_0}{jn\Omega - s_k} \right)$  è grande, ovvero quando  $n\Omega$  è vicina a una delle pulsazioni proprie del sistema  $\omega_{Pk}$  contenuta in  $s_k$  (corrispondenti alle risonanze del sistema) o quando  $q_{Lk}^H Q_0$  è grande (forzanti ortogonali al corrispondente autovettore).

Il diagramma di Campbell associato a questo caso è riportato in Fig. 63. Rispetto allo studio nel moto libero abbiamo aggiunto la curva del carico  $\omega_f(\Omega) = n\Omega$  sul diagramma relativo alle pulsazioni proprie  $\omega_{Pi}$ . Le intersezioni della curva del carico con i rami del diagramma  $\Omega_c$  sono ancora una volta le pulsazioni critiche. E' utile osservare come il caso di forzante armonica super-sincrona sia più problematico del caso di forzante armonica sub-sincrona in quanto una retta di carico più inclinata genera un maggior numero di pulsazioni critiche all'interno del range di velocità di lavoro della macchina (ovvero di intersezioni tra la retta di carico e i rami del diagramma). Il valore di smorzamento modale associato alle varie pulsazioni critiche  $\zeta_c$  può essere facilmente trovato riportando la pulsazione critica in questione  $\Omega_c$  sul diagramma dello smorzamento.

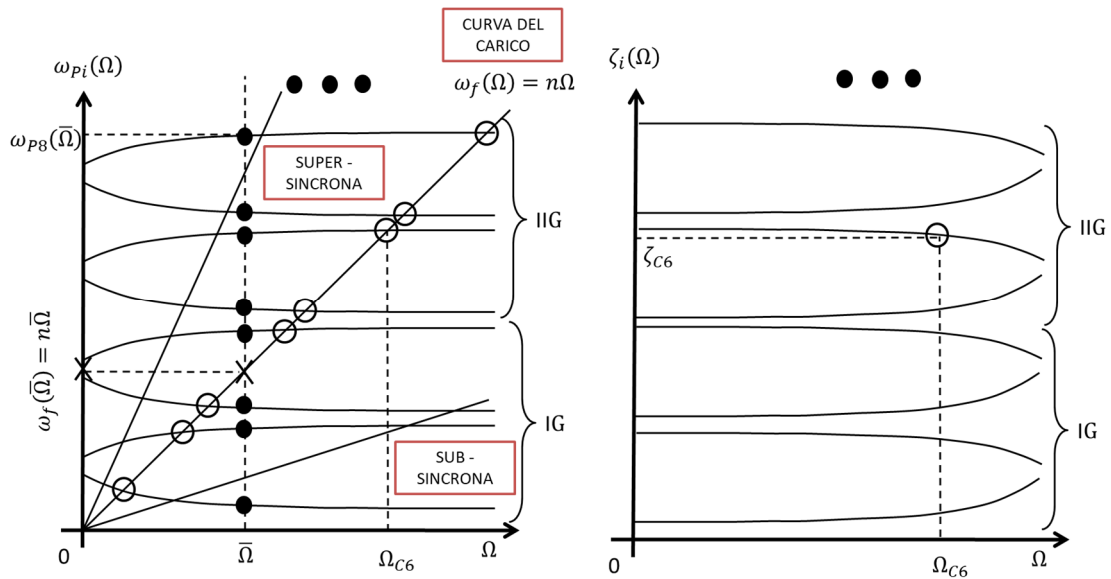


Figura 63 Diagramma di Campbell per rotore elastico con forzante armonica sub/super-sincrona

Per capire quanto effettivamente vibra il sistema dobbiamo fare uso dei diagrammi di Bode. A tale fine dobbiamo prima specificare una velocità di lavoro della macchina  $\bar{\Omega}$  alla quale studiare il sistema. Riporto quindi tale velocità  $\bar{\Omega}$  sul diagramma di Campbell; l'intersezione tra la retta verticale passante per  $\bar{\Omega}$  e i 4 \* NN rami del diagramma delle pulsazioni proprie  $\omega_{pi}$  rappresentano le 4 \* NN pulsazioni proprie del sistema coincidenti, a loro volta, con le pulsazioni di risonanza del sistema. A questo punto, supponendo di voler trovare quanto vale lo spostamento lungo  $x_h$  del nodo  $h$ -esimo  $u_{0h}$  (nel dominio della frequenza), posso tracciare i rispettivi diagrammi (Fig. 64). Per determinare il modulo e la fase dello spostamento  $u_{0h}$  devo determinare sul diagramma di Bode il punto in cui agisce la forzante. Ma questo può essere dedotto dal diagramma di Campbell intersecando la curva del carico con la sezione verticale passante per  $\bar{\Omega}$  (si vedano sempre la Fig. 63 e la Fig. 64).

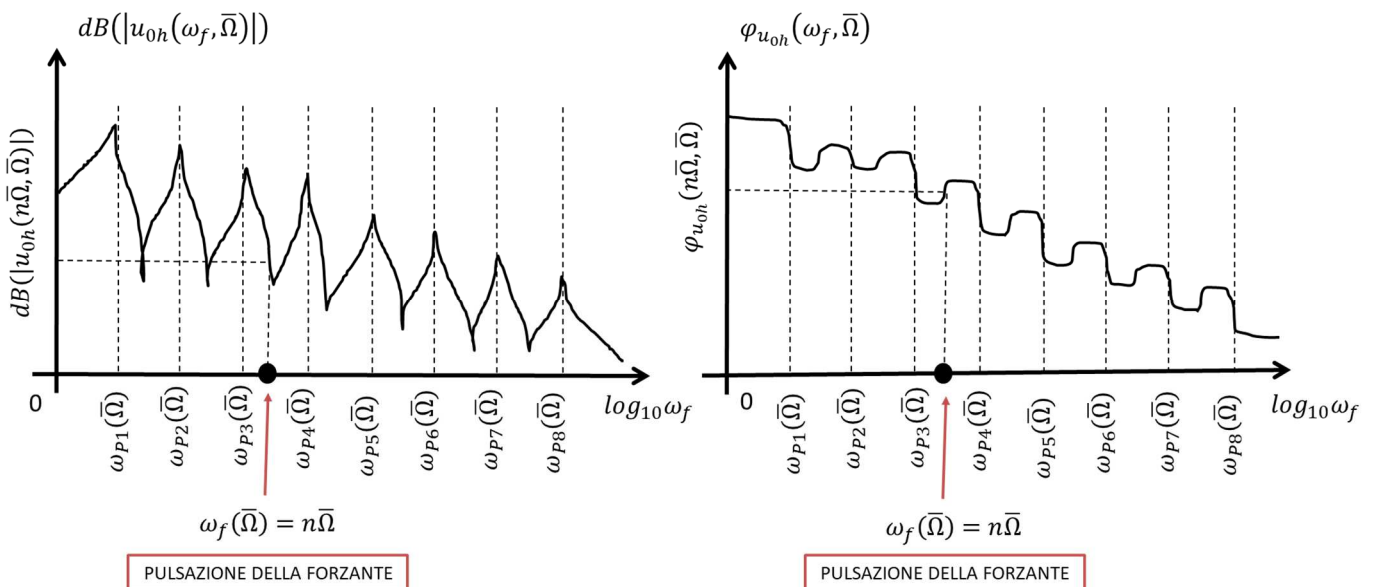


Figura 64 Diagramma di Bode per rotore elastico con forzante armonica sub/super-sincrona

Guardando ai diagrammi di Campbell e di Bode, risulta chiaro il significato di pulsazione critica  $\Omega_c$ . Qualora infatti la pulsazione di lavoro della macchina  $\bar{\Omega}$  (la speed) si trovasse in corrispondenza di una critica  $\Omega_c$ , la pulsazione in cui la forzante agirebbe sulla macchina  $\omega_f(\bar{\Omega}) = n\bar{\Omega}$  si troverebbe proprio in corrispondenza di una pulsazione propria  $\omega_{pi}(\bar{\Omega})$  e quindi di una pulsazione di risonanza. Ci troveremmo quindi necessariamente in condizioni di massima amplificazione.

Concludiamo quindi con lo studio del whirl forzato, ovvero la traiettoria del nodo  $h$ -esimo  $\underline{G}_h$  durante il suo moto forzato nel piano  $x_h y_h$ :

$$\underline{q}_f(t) = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{q}_h(t) \\ \dots \end{pmatrix} = Re \left[ \underline{q}_0 e^{jn\Omega t} \right], \quad \underline{q}_h(t) = \begin{pmatrix} u_h(t) \\ v_h(t) \\ \theta_h(t) \\ \psi_h(t) \end{pmatrix} = Re \left[ \begin{pmatrix} u_{0h} \\ v_{0h} \\ \theta_{0h} \\ \psi_{0h} \end{pmatrix} e^{jn\Omega t} \right]. \quad (6.2.22)$$

Lo studio del moto di whirl forzato permette anche di conoscere direzione del moto di rivoluzione del generico nodo  $\underline{G}_h$  attorno all'asse  $z_h$  (se il moto del nodo  $\underline{G}_h$  è BW o FW). Analogamente a quanto fatto nel capitolo 4.7, ci concentriamo sulla parte traslazionale del moto

$$\begin{pmatrix} u_h(t) \\ v_h(t) \end{pmatrix} = Re \left[ \begin{pmatrix} u_{0h} \\ v_{0h} \end{pmatrix} e^{jn\Omega t} \right] \quad (6.2.23)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_h(t) \\ v_h(t) \end{pmatrix} &= Re \left[ \begin{pmatrix} u_{0h} \\ v_{0h} \end{pmatrix} e^{jn\Omega t} \right] = Re \left[ \begin{matrix} m_{u0h} e^{j\varphi_{u0h}} e^{jn\Omega t} \\ m_{v0h} e^{j\varphi_{v0h}} e^{jn\Omega t} \end{matrix} \right] = \begin{bmatrix} m_{u0h} \cos(n\Omega t + \varphi_{u0h}) \\ m_{v0h} \cos(n\Omega t + \varphi_{v0h}) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} m_{u0h} \cos \varphi_{u0h} - m_{u0h} \sin \varphi_{u0h} \\ m_{v0h} \cos \varphi_{v0h} - m_{v0h} \sin \varphi_{v0h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos n\Omega t \\ \sin n\Omega t \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \cos n\Omega t \\ \sin n\Omega t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_h(t) \\ v_h(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dalla (6.2.23) si ottiene poi

$$\begin{pmatrix} \cos n\Omega t \\ \sin n\Omega t \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} u_h(t) \\ v_h(t) \end{pmatrix} \quad (6.2.24)$$

da cui facendo la norma al quadrato

$$1 = \begin{pmatrix} u_h(t) \\ v_h(t) \end{pmatrix}^T (T^{-1})^T T^{-1} \begin{pmatrix} u_h(t) \\ v_h(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_h(t) \\ v_h(t) \end{pmatrix}^T H \begin{pmatrix} u_h(t) \\ v_h(t) \end{pmatrix}. \quad (6.2.25)$$

Poiché la matrice  $H$  per costruzione è una matrice simmetrica definita positiva, la (6.2.25) rappresenta l'equazione parametrica di un'ellisse centrata nell'origine ma ad assi ruotati. Più nel dettaglio, per il teorema spettrale, la matrice  $H$  ammette una base ortonormale di autovettori  $\underline{v}_{H1}, \underline{v}_{H2}$  che determinano la direzione dei semiassi dell'ellisse in questione. La lunghezza dei semiassi è invece pari a  $\sqrt{\lambda_{H1}}$  e  $\sqrt{\lambda_{H2}}$  (gli autovalori sono reali e positivi perché  $H$ ). L'ellisse corrispondente al whirl libero è riportata in Fig. 65. Infine le fasi  $\varphi_{u0h}, \varphi_{v0h}$  di  $u_{0h}$  e  $v_{0h}$  permettono di determinare anche la direzione (BW o FW) del moto forzato di rivoluzione del nodo  $\underline{G}_h$  attorno all'asse  $z_h$ . Se infatti vale la condizione

$$0 < \varphi_{v0h} - \varphi_{u0h} < \pi, \quad (6.2.26)$$

allora il moto di rivoluzione è BW e l'ellisse sarà percorsa in senso BW. Se invece

$$-\pi < \varphi_{v0h} - \varphi_{u0h} < 0, \quad (6.2.27)$$

il moto di rivoluzione è FW e l'ellisse sarà percorsa in senso FW. La rotazione del rotore avviene chiaramente alla pulsazione  $\Omega$  (la speed della macchina) mentre il moto di rivoluzione attorno all'asse  $z_h$  di ogni nodo  $\underline{G}_h$  avviene sempre alla pulsazione della forzante, in questo caso  $\omega_f(\bar{\Omega}) = n\bar{\Omega}$ .

Si noti come, al contrario del moto libero, non essendo presente il termine esponenziale dovuto allo smorzamento, la traiettoria sarà sempre un'ellisse a prescindere dal valore dello smorzamento stesso. Se sono vicino a una risonanza e/o lo smorzamento modale è in generale piccolo, allora le dimensioni dell'ellisse saranno più grandi, altrimenti saranno più piccoli.

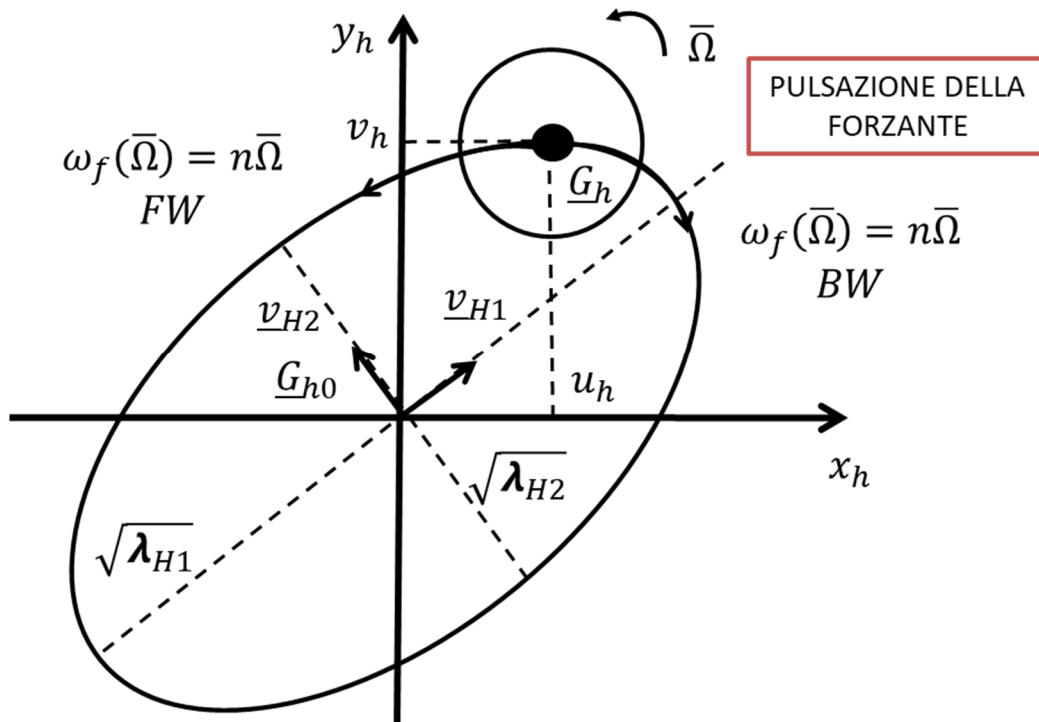


Figura 65 Whirl forzato per rotore elastico con forzante armonica sub/super-sincrona (le componenti angolari  $\psi_h(t)$  e  $\theta_h(t)$  si comportano in modo analogo)

Anche nel moto forzato, in linea teorica ogni nodo  $\underline{G}_h$  potrebbe percorrere la propria ellisse in senso BW o FW e le varie ellissi potrebbero avere le forme e le grandezze più disparate. Tuttavia, per il principio di coerenza modale, le deformate forzate tendono ad avere solamente forme regolari come quelle riportate in Fig. 66. Questo è dovuto al fatto i rotor sono solitamente di metallo (acciaio, leghe ad alta resistenza, etc.) e non di gomma o di carta. Di

conseguenza, sezioni della macchina adiacenti tra loro non potranno mai avere ellissi di whirl forzato “troppo diverse” tra loro (in tal caso non potremmo certo parlare di elasticità lineare e materiali lineari!).

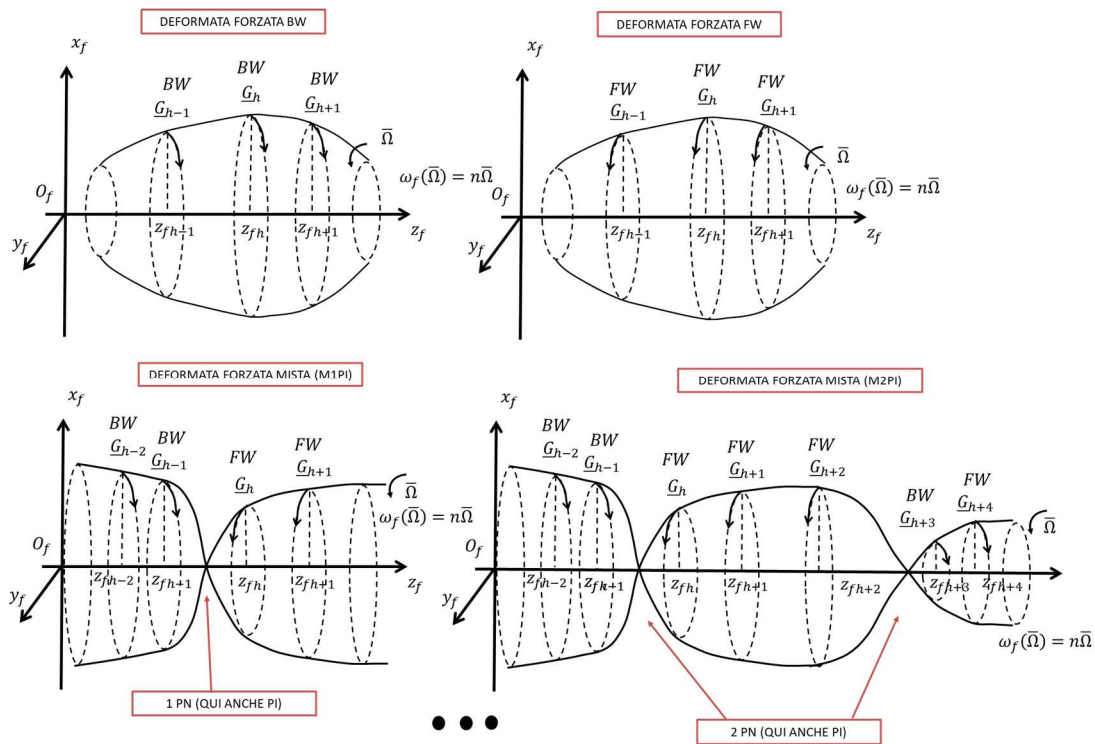


Figura 66 Il concetto di coerenza modale (le componenti angolari  $\psi_h(t)$  e  $\theta_h(t)$  si comportano in modo analogo)

Come si può notare dalla Fig. 66, se i nodi ruotano tutti in senso BW, la deformata forzata è detta BW. Se invece ruotano tutti i senso FW, allora la deformata forzata è detta FW. Nel caso in cui esistano dei punti nodali PN (punti in cui la sezione è ferma), allora possono esserci delle deformate forzate dal carattere misto in cui la rotazione può invertirsi una o più volte nei punti nodali (M1PI, M2PI, etc. a seconda di quante volte la rotazione viene invertita nei punti nodali). I punti nodali PN in cui la rotazione si inverte sono detti punti di inversione PI. Naturalmente non è detto che, se ci sono dei punti nodali PN, il modo necessariamente si invertirà in essi e che, di conseguenza, la deformata forzata sia per forza mista. Possono benissimo esistere punti nodali PN in cui la deformata forzata non si inverte e che quindi non sono punti di inversione PI. I punti di inversione PI sono quindi un sottoinsieme dei punti nodali PN (il numero dei PI è minore o uguale di quello dei PN).

Come detto in precedenza, la rotazione del rotore avviene chiaramente alla pulsazione  $\Omega$  (la speed della macchina) mentre il moto di rivoluzione di ogni nodo  $G_h$  attorno all'asse  $z_f$  avviene sempre alla pulsazione della forzante

$\omega_f(\bar{\Omega}) = n\bar{\Omega}$ . Ciò è coerente col fatto che la pulsazione associata alla deformata forzata in questione è sempre una e una sola, ovvero,  $n\bar{\Omega}$ .

Le principali deformate forzate sono rappresentate in Fig. 67 e, nelle caratteristiche (BW, M, FW) e nella forma (IDF, IIDF, IIIDF, etc.), ricordano i modi di vibrare IE, IIE, IIIE, IVE, etc. descritti nel paragrafo 4.7. Tuttavia le deformate forzate riguardano il moto forzato e non il moto libero, e non vanno dunque confuse con i modi di vibrare e le deformate modali!

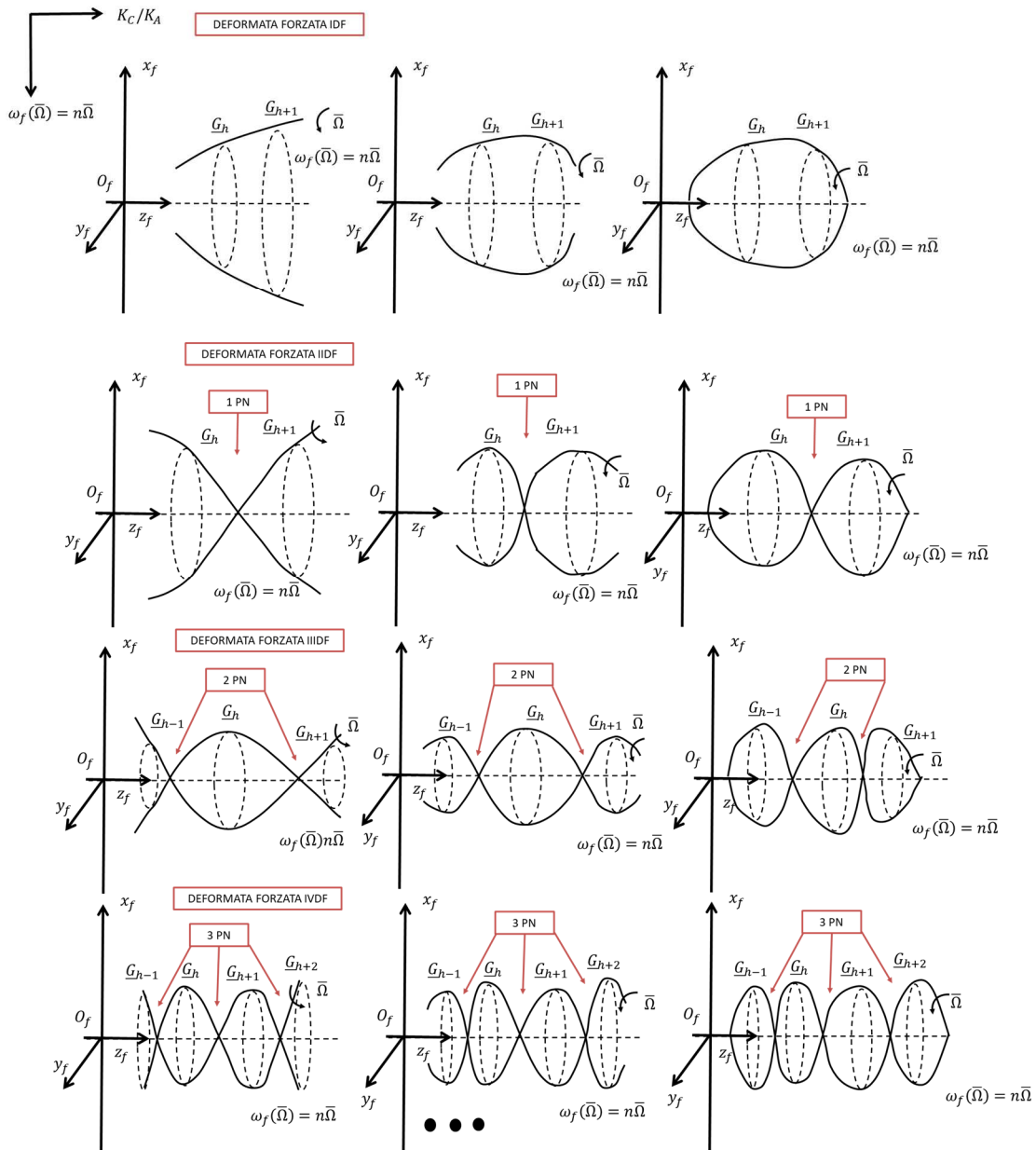


Figura 67 Deformate forzate per rotore elastico con forzante armonica sub/super-sincrona (le componenti angolari  $\psi_h(t)$  e  $\theta_h(t)$  si comportano in modo analogo)

Riportiamo per completezza in Fig. 67bis/ter un esempio di deformata forzata completa includendo anche la componenti angolari  $\psi_h(t)$  e  $\theta_h(t)$  di basculamento della sezione (prima non considerate esplicitamente perché meno importanti a livello ingegneristico e perché il loro comportamento qualitativo è identico a quello delle componenti spaziali  $u_h(t)$  e  $v_h(t)$ ). Nel caso dell'esempio abbiamo una deformata forzata flessionale IIDF spaziale Prof. Enrico Meli, Dipartimento di Ingegneria Industriale, Università di Firenze

(con 1PN e che potrà avere caratteristica BW, FW o M1PI) associato a una deformata forzata IIIDF rotazionale (con 2PN e che potrà avere caratteristica BW, FW, M1PI, M2PI).

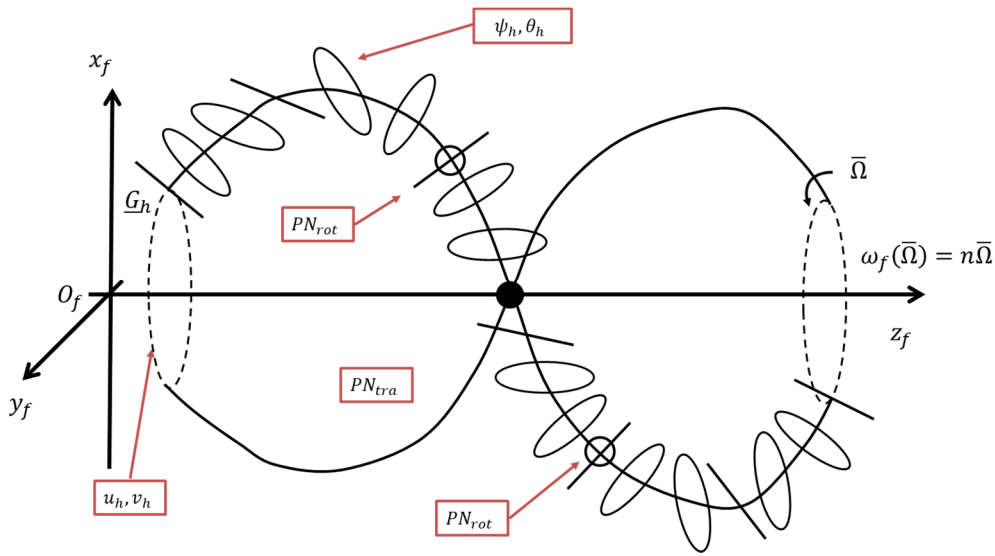


Figura 67bis Esempio di deformata forzata per rotori elastici

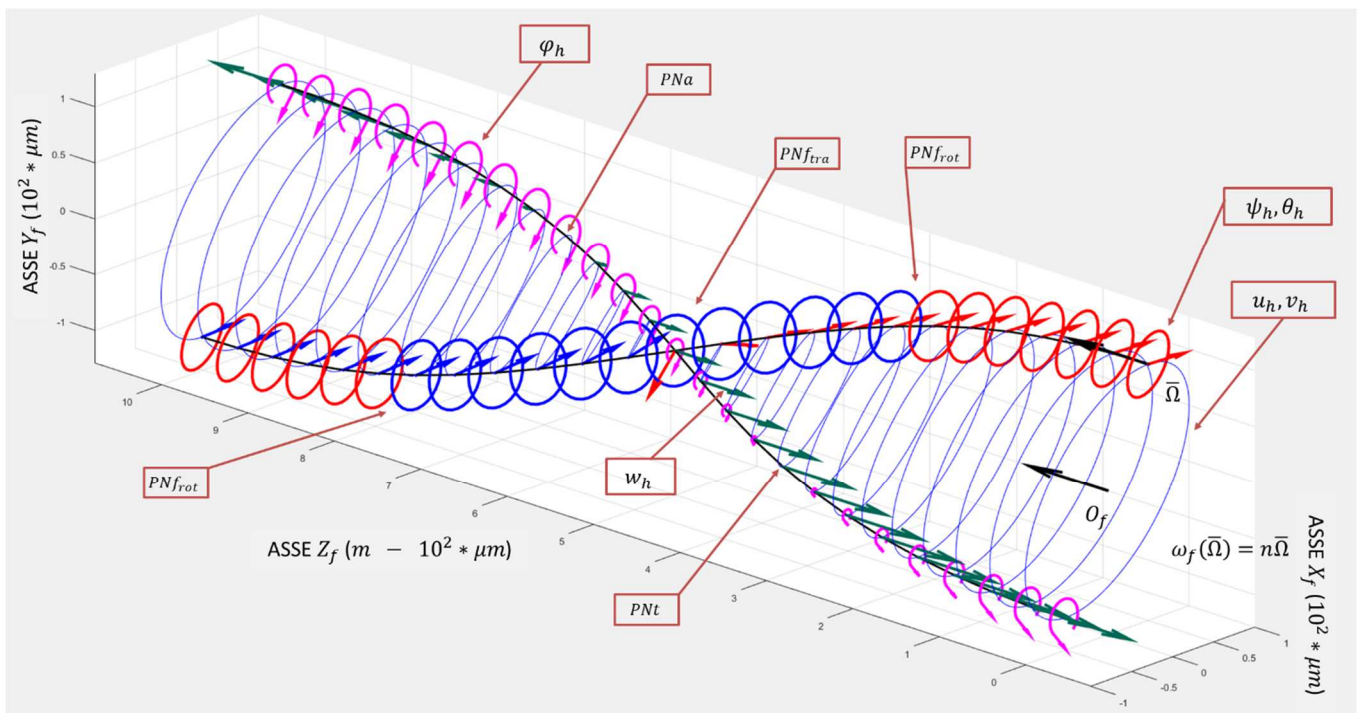


Figura 67ter Rappresentazione tipo software di deformata forzata per rotori elastici (si osservi solo la parte flessionale della deformata)

ELENCO RIASSUNTIVO DELLE VARIE DEFORMATE FORZATE:

- 1) FORMA: IDF  
CARATTERISTICA: BW o FW
- 2) FORMA: IIDF  
CARETTERISTICA: BW, FW, M1PI
- 3) FORMA: IIIDF  
CARETTERISTICA: BW, FW, M1PI, M2PI
- 4) FORMA: IVDF  
CARETTERISTICA: BW, FW, M1PI, M2PI, M3PI
- ... ..

3) FORZANTE ARMONICA ASINCRONA:

$$M\ddot{\underline{q}} + (\Omega G + C)\dot{\underline{q}} + K\underline{q} = \underline{Q}(t) = \text{Re} \left[ \underline{Q}_0(\Omega) e^{j\omega_f t} \right]. \quad (6.2.28)$$

$$\underline{Q}(t) = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{Q}_h(t) \\ \dots \end{pmatrix}, \quad \underline{Q}_0(\Omega) = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{Q}_{0h} \\ \dots \end{pmatrix}.$$

La soluzione del moto forzato del sistema può essere facilmente determinata grazie agli strumenti matematici introdotti nel capitolo 1 e si ha:

$$\underline{q}_f(t) = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{q}_h(t) \\ \dots \end{pmatrix} = \text{Re} \left[ \underline{q}_0 e^{j\omega_f t} \right], \quad \underline{q}_h(t) = \begin{pmatrix} u_h(t) \\ v_h(t) \\ \theta_h(t) \\ \psi_h(t) \end{pmatrix} \quad (6.2.29)$$

$$\underline{q}_0 = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{q}_{0h} \\ \dots \end{pmatrix} = \alpha(\omega_f, \Omega) \underline{Q}_0(\Omega) = [-\omega_f^2 M + j\omega_f(C + \Omega G) + K]^{-1} \underline{Q}_0(\Omega), \quad \underline{q}_{0h} = \begin{pmatrix} u_{0h} \\ v_{0h} \\ \theta_{0h} \\ \psi_{0h} \end{pmatrix}$$

dove in questi casi è utile distinguere nella ricettanza  $\alpha(\omega_f, \Omega)$  la doppia dipendenza dalla pulsazione della forzante e della velocità di rotazione della macchina.

Applicando il teorema di sovrapposizione modale in questo caso abbiamo:

$$\underline{q}_0 = \alpha(\omega_f, \Omega) \underline{Q}_0(\Omega) = \sum_{k=1}^{2N} \frac{(q_{Rk} q_{Lk}^H)}{j\omega_f - s_k} \underline{Q}_0(\Omega) = \sum_{k=1}^{2N} \left( \frac{q_{Lk}^H Q_0}{j\omega_f - s_k} \right) \underline{q}_{Rk} \quad (6.2.30)$$

da cui possiamo dedurre che i modi che maggiormente contribuiscono alla soluzione sono quelli in cui  $\left( \frac{q_{Lk}^H Q_0}{j\omega_f - s_k} \right)$  è grande, ovvero quando  $\omega_f$  è vicina a una delle pulsazioni proprie del sistema  $\omega_{Pk}$  contenuta in  $s_k$  (corrispondenti alle risonanze del sistema) o quando  $q_{Lk}^H Q_0$  è grande (forzanti ortogonali al corrispondente autovettore).



Il diagramma di Campbell associato a questo caso è riportato in Fig. 68. Rispetto allo studio nel moto libero abbiamo aggiunto la curva del carico  $\omega_f(\Omega) = \omega_f = cost$  sul diagramma relativo alle pulsazioni proprie  $\omega_{pi}$ . Le intersezioni della curva del carico con i rami del diagramma  $\Omega_c$  sono ancora una volta le pulsazioni critiche. E' utile osservare come il caso di forzante armonica asincrona sia particolarmente favorevole in quanto una retta di carico orizzontale genera al massimo una pulsazione critica all'interno del range di velocità di lavoro della macchina (ovvero al massimo una intersezione tra la retta di carico e i rami del diagramma). Il valore di smorzamento modale associato alle varie pulsazioni critiche  $\zeta_c$  può essere facilmente trovato riportando la pulsazione critica in questione  $\Omega_c$  sul diagramma dello smorzamento.

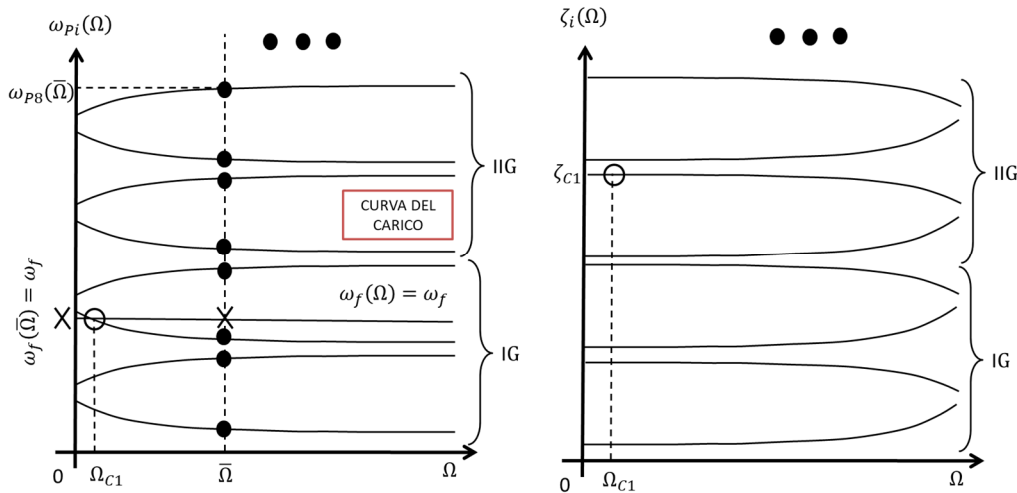


Figura 68 Diagramma di Campbell per rotore elastico con forzante armonica asincrona

Per capire quanto effettivamente vibra il sistema dobbiamo fare uso dei diagrammi di Bode. A tale fine dobbiamo prima specificare una velocità di lavoro della macchina  $\bar{\Omega}$  alla quale studiare il sistema. Riporto quindi tale velocità  $\bar{\Omega}$  sul diagramma di Campbell; l'intersezione tra la retta verticale passante per  $\bar{\Omega}$  e i  $4 * NN$  rami del diagramma delle pulsazioni proprie  $\omega_{pi}$  rappresentano le  $4 * NN$  pulsazioni proprie del sistema coincidenti, a loro volta, con le pulsazioni di risonanza del sistema. A questo punto, supponendo di voler trovare quanto vale lo spostamento lungo  $x_h$  dell'  $h$ -esimo nodo  $u_{0h}$  (nel dominio della frequenza), posso tracciare i rispettivi diagrammi (Fig. 69). Per determinare il modulo e la fase dello spostamento  $u_h$  del nodo  $\underline{G}_h$  devo determinare sul diagramma di Bode il punto in cui agisce la forzante. Ma questo può essere dedotto dal diagramma di Campbell intersecando la curva del carico con la sezione verticale passante per  $\bar{\Omega}$  (si vedano sempre la Fig. 68 e la Fig. 69).

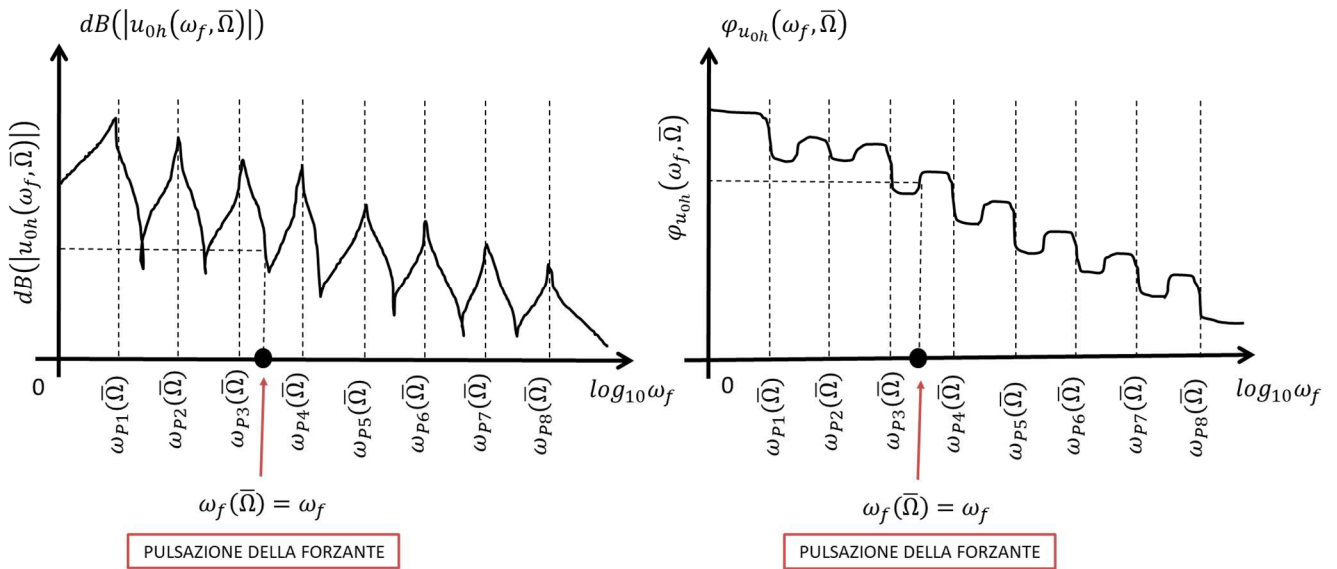


Figura 69 Diagramma di Bode per rotore elastico con forzante armonica asincrona

Guardando ai diagrammi di Campbell e di Bode, risulta chiaro il significato di pulsazione critica  $\Omega_c$ . Qualora infatti la pulsazione di lavoro della macchina  $\bar{\Omega}$  (la speed) si trovasse in corrispondenza di una critica  $\Omega_c$ , la pulsazione in cui la forzante agirebbe sulla macchina  $\omega_f(\bar{\Omega}) = \omega_f$  si troverebbe proprio in corrispondenza di una pulsazione propria  $\omega_{Pi}(\bar{\Omega})$  e quindi di una pulsazione di risonanza. Ci troveremmo quindi necessariamente in condizioni di massima amplificazione.

Concludiamo quindi con lo studio del whirl forzato, ovvero la traiettoria del generico nodo  $\underline{G}_h$  durante il suo moto forzato nel piano  $x_h y_h$ :

$$\underline{q}_h(t) = \begin{pmatrix} u_h(t) \\ v_h(t) \\ \theta_h(t) \\ \psi_h(t) \end{pmatrix} = \text{Re} \left[ \underline{q}_{0h} e^{j\omega_f t} \right] = \text{Re} \left[ \begin{pmatrix} u_{0h} \\ v_{0h} \\ \theta_{0h} \\ \psi_{0h} \end{pmatrix} e^{j\omega_f t} \right]. \quad (6.2.31)$$

Lo studio del moto di whirl forzato permette anche di conoscere la direzione del moto di rivoluzione del nodo  $\underline{G}_h$  attorno all'asse  $z_h$  (se il modo del nodo  $\underline{G}_h$  è BW o FW). Analogamente a quanto fatto nel capitolo 4.7, ci concentriamo sulla parte traslazionale del moto

$$\begin{pmatrix} u_h(t) \\ v_h(t) \end{pmatrix} = \text{Re} \left[ \begin{pmatrix} u_{0h} \\ v_{0h} \end{pmatrix} e^{j\omega_f t} \right] \quad (6.2.32)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_h(t) \\ v_h(t) \end{pmatrix} &= \text{Re} \left[ \begin{pmatrix} u_{0h} \\ v_{0h} \end{pmatrix} e^{j\omega_f t} \right] = \text{Re} \left[ \begin{matrix} m_{u0h} e^{j\varphi_{u0h}} e^{j\omega_f t} \\ m_{v0h} e^{j\varphi_{v0h}} e^{j\omega_f t} \end{matrix} \right] = \begin{bmatrix} m_{u0h} \cos(\omega_f t + \varphi_{u0h}) \\ m_{v0h} \cos(\omega_f t + \varphi_{v0h}) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} m_{u0h} \cos \varphi_{uh} - m_{uh} \sin \varphi_{u0h} \\ m_{v0h} \cos \varphi_{vh} - m_{vh} \sin \varphi_{v0h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \omega_f t \\ \sin \omega_f t \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \cos \omega_f t \\ \sin \omega_f t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_h(t) \\ v_h(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dalla (6.2.32) si ottiene poi

$$\begin{pmatrix} \cos \omega_f t \\ \sin \omega_f t \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} u_h(t) \\ v_h(t) \end{pmatrix} \quad (6.2.33)$$

da cui facendo la norma al quadrato

$$1 = \begin{pmatrix} u_h(t) \\ v_h(t) \end{pmatrix}^T (T^{-1})^T T^{-1} \begin{pmatrix} u_h(t) \\ v_h(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_h(t) \\ v_h(t) \end{pmatrix}^T H \begin{pmatrix} u_h(t) \\ v_h(t) \end{pmatrix}. \quad (6.2.34)$$

Poiché la matrice  $H$  per costruzione è una matrice simmetrica definita positiva, la (6.2.34) rappresenta l'equazione parametrica di un'ellisse centrata nell'origine ma ad assi ruotati. Più nel dettaglio, per il teorema spettrale, la matrice  $H$  ammette una base ortonormale di autovettori  $\underline{v}_{H1}, \underline{v}_{H2}$  che determinano la direzione dei semiassi dell'ellisse in questione. La lunghezza dei semiassi è invece pari a  $\sqrt{\lambda_{H1}}$  e  $\sqrt{\lambda_{H2}}$  (gli autovalori sono reali e positivi perché  $H$ ). L'ellisse corrispondente al whirl libero è riportata in Fig. 70. Infine le fasi  $\varphi_{u_{0h}}, \varphi_{v_{0h}}$  di  $u_{0h}$  e  $v_{0h}$  permettono di determinare anche la direzione (BW o FW) del moto forzato di rivoluzione del nodo  $\underline{G}_h$  attorno all'asse  $z_h$ . Se infatti vale la condizione

$$0 < \varphi_{v_{0h}} - \varphi_{u_{0h}} < \pi, \quad (6.2.35)$$

allora il moto di rivoluzione è BW e l'ellisse sarà percorsa in senso BW. Se invece

$$-\pi < \varphi_{v_{0h}} - \varphi_{u_{0h}} < 0, \quad (6.2.36)$$

il moto di rivoluzione è FW e l'ellisse sarà percorsa in senso FW. La rotazione del rotore avviene chiaramente alla pulsazione  $\Omega$  (la speed della macchina) mentre il moto di rivoluzione del nodo  $\underline{G}_h$  attorno all'asse  $z_h$  avviene alla pulsazione della forzante, in questo caso  $\omega_f(\bar{\Omega}) = \omega_f$ .

Si noti come, al contrario del moto libero, non essendo presente il termine esponenziale dovuto allo smorzamento, la traiettoria sarà sempre un'ellisse a prescindere dal valore dello smorzamento stesso. Se sono vicino a una risonanza e/o lo smorzamento modale è in generale piccolo, allora le dimensioni dell'ellisse saranno più grandi, altrimenti saranno più piccoli.

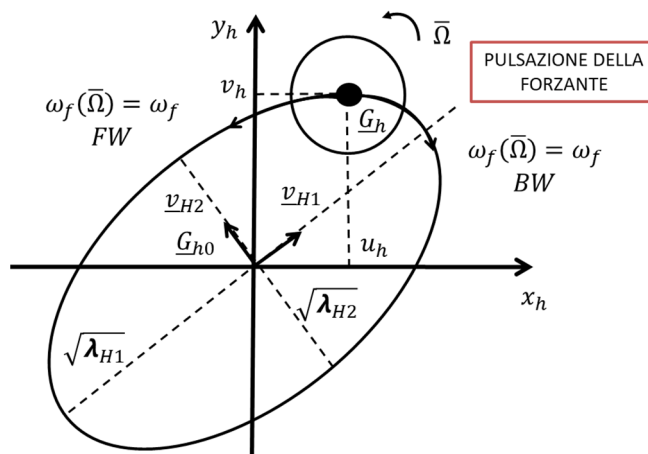


Figura 70 Whirl forzato per rotore elastico con forzante armonica asincrona (le componenti angolari  $\psi_h(t)$  e  $\theta_h(t)$  si comportano in modo analogo)

Anche nel moto forzato, in linea teorica ogni nodo  $\underline{G}_h$  potrebbe percorrere la propria ellisse in senso BW o FW e le varie ellissi potrebbero avere le forme e le grandezze più disparate. Tuttavia, per il principio di coerenza modale, le deformate forzate tendono ad avere solamente forme regolari come quelle riportate in Fig. 71. Questo è dovuto al fatto i rotor sono solitamente di metallo (acciaio, leghe ad alta resistenza, etc.) e non di gomma o di carta. Di

conseguenza, sezioni della macchina adiacenti tra loro non potranno mai avere ellissi di whirl forzato “troppo diverse” tra loro (in tal caso non potremmo certo parlare di elasticità lineare e materiali lineari!).

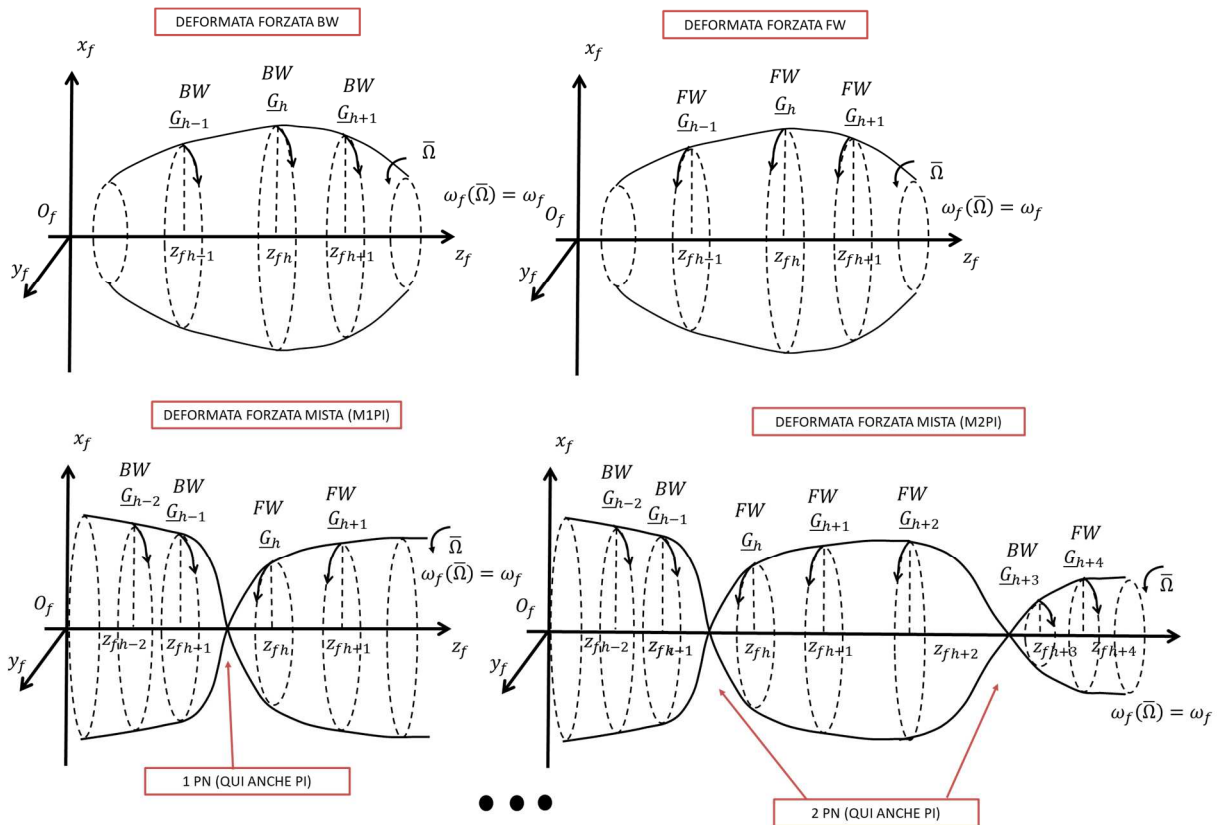


Figura 71 Il concetto di coerenza modale (le componenti angolari  $\psi_h(t)$  e  $\theta_h(t)$  si comportano in modo analogo)

Come si può notare dalla Fig. 71, se i nodi ruotano tutti in senso BW, la deformata forzata è detta BW. Se invece ruotano tutti i senso FW, allora la deformata forzata è detta FW. Nel caso in cui esistano dei punti nodali PN (punti in cui la sezione è ferma), allora possono esserci delle deformate forzate dal carattere misto in cui la rotazione può invertirsi una o più volte nei punti nodali (M1PI, M2PI, etc. a seconda di quante volte la rotazione viene invertita nei punti nodali). I punti nodali PN in cui la rotazione si inverte sono detti punti di inversione PI. Naturalmente non è detto che, se ci sono dei punti nodali PN, il modo necessariamente si invertirà in essi e che, di conseguenza, la deformata forzata sia per forza mista. Possono benissimo esistere punti nodali PN in cui la deformata forzata non si inverte e che quindi non sono punti di inversione PI. I punti di inversione PI sono quindi un sottoinsieme dei punti nodali PN (il numero dei PI è minore o uguale di quello dei PN).

Come detto in precedenza, la rotazione del rotore avviene chiaramente alla pulsazione  $\Omega$  (la speed della macchina) mentre il moto di rivoluzione di ogni nodo  $G_h$  attorno all'asse  $z_f$  avviene sempre alla pulsazione della forzante

$\omega_f(\bar{\Omega}) = \omega_f$ . Ciò è coerente col fatto che la pulsazione associata alla deformata forzata in questione è sempre una e una sola, ovvero,  $\omega_f$ .

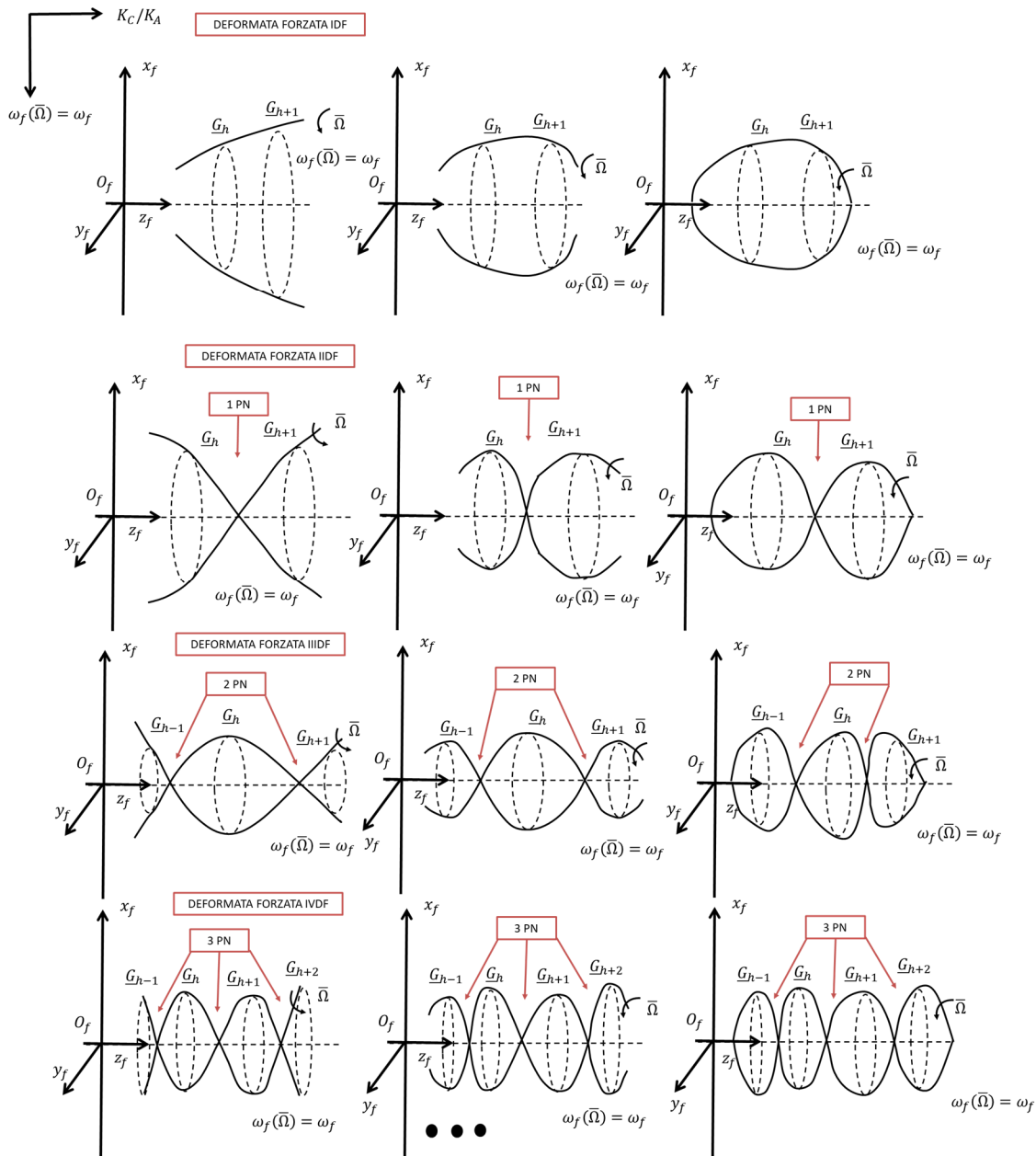


Figura 72 Deformate forzate per rotore elastico con forzante asincrona (le componenti angolari  $\psi_h(t)$  e  $\theta_h(t)$  si comportano in modo analogo)

Le principali deformate forzate sono rappresentate in Fig. 72 e, nelle caratteristiche (BW, M, FW) e nella forma (IDF, IIDF, IIIDF, etc.), ricordano i modi di vibrare IE, IIE, IIIIE, IVE, etc. descritti nel paragrafo 4.7. Tuttavia le deformate forzate riguardano il moto forzato e non il moto libero, e non vanno dunque confuse con i modi di vibrare e le deformate modali!

Riportiamo per completezza in Fig. 72bis/ter un esempio di deformata forzata completa includendo anche la componenti angolari  $\psi_h(t)$  e  $\theta_h(t)$  di basculamento della sezione (prima non considerate esplicitamente perché meno importanti a livello ingegneristico e perché il loro comportamento qualitativo è identico a quello delle

componenti spaziali  $u_h(t)$  e  $v_h(t)$ ). Nel caso dell'esempio abbiamo una deformata forzata flessionale IIDF spaziale (con 1PN e che potrà avere caratteristica BW, FW o M1PI) associato a una deformata forzata IIDF rotazionale (con 2PN e che potrà avere caratteristica BW, FW, M1PI, M2PI).

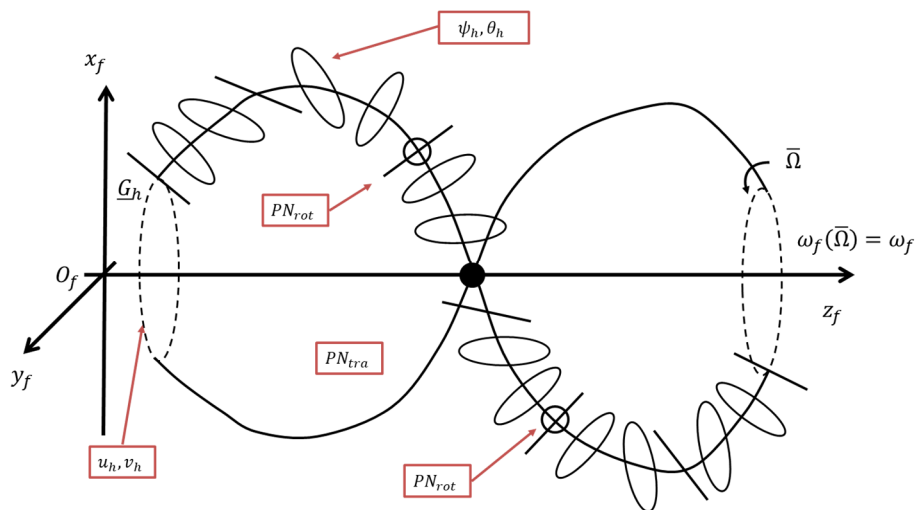


Figura 72bis Esempio di deformata forzata per rotori elastici

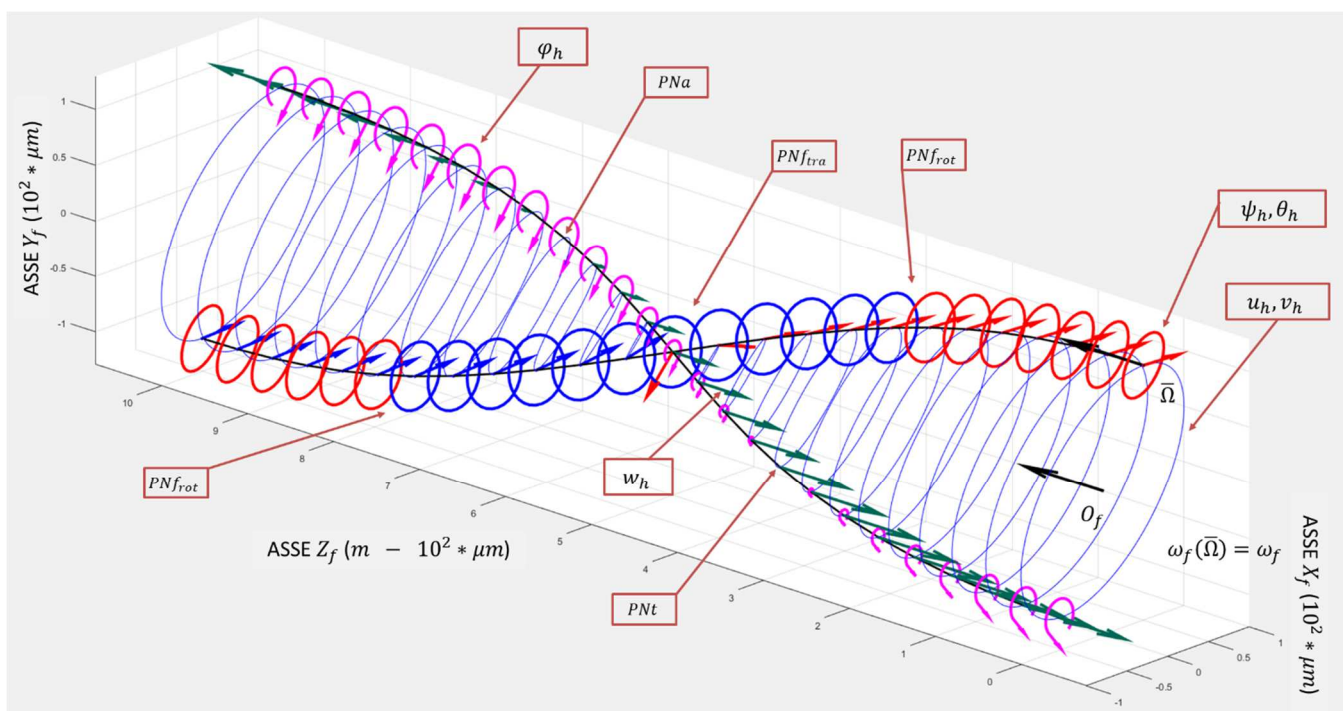


Figura 72ter Rappresentazione tipo software di deformata forzata per rotori elastici (si osservi solo la parte flessionale della deformata)

ELENCO RIASSUNTIVO DELLE VARIE DEFORMATE FORZATE:

- 1) FORMA: IDF  
CARATTERISTICA: BW o FW
- 2) FORMA: IIDF

CARETTERISTICA: BW, FW, M1PI

3) FORMA: IIIDF

CARETTERISTICA: BW, FW, M1PI, M2PI

4) FORMA: IVDF

CARETTERISTICA: BW, FW, M1PI, M2PI, M3PI

... ..

4) FORZANTE ARMONICA GENERICA:

$$M\ddot{\underline{q}} + (\Omega G + C)\dot{\underline{q}} + K\underline{q} = \underline{Q}(t) = \text{Re} \left[ \underline{Q}_0(\Omega) e^{j\omega_f(\Omega)t} \right]. \quad (6.2.37)$$

$$\underline{Q}(t) = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{Q}_h(t) \\ \dots \end{pmatrix}, \quad \underline{Q}_0(\Omega) = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{Q}_{0h} \\ \dots \end{pmatrix}.$$

La soluzione del moto forzato del sistema può essere facilmente determinata grazie agli strumenti matematici introdotti nel capitolo 1 e si ha:

$$\underline{q}_f(t) = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{q}_h(t) \\ \dots \end{pmatrix} = \text{Re} \left[ \underline{q}_0 e^{j\omega_f(\Omega)t} \right], \quad \underline{q}_h(t) = \begin{pmatrix} u_h(t) \\ v_h(t) \\ \theta_h(t) \\ \psi_h(t) \end{pmatrix} \quad (6.2.38)$$

$$\underline{q}_0 = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{q}_{0h} \\ \dots \end{pmatrix} = \alpha(\omega_f(\Omega), \Omega) \underline{Q}_0(\Omega) = [-\omega_f(\Omega)^2 M + j\omega_f(\Omega)(C + \Omega G) + K]^{-1} \underline{Q}_0(\Omega), \quad \underline{q}_{0h} = \begin{pmatrix} u_{0h} \\ v_{0h} \\ \theta_{0h} \\ \psi_{0h} \end{pmatrix}$$

dove in questi casi è utile distinguere nella ricettanza  $\alpha(\omega_f(\Omega), \Omega)$  la doppia dipendenza dalla pulsazione della forzante e della velocità di rotazione della macchina.

Applicando il teorema di sovrapposizione modale in questo caso abbiamo:

$$\underline{q}_0 = \alpha(\omega_f(\Omega), \Omega) \underline{Q}_0(\Omega) = \sum_{k=1}^{2N} \frac{(q_{Rk} q_{Lk}^H)}{j\omega_f(\Omega) - s_k} \underline{Q}_0(\Omega) = \sum_{k=1}^{2N} \left( \frac{q_{Lk}^H \underline{Q}_0}{j\omega_f(\Omega) - s_k} \right) \underline{q}_{Rk} \quad (6.2.39)$$

da cui possiamo dedurre che i modi che maggiormente contribuiscono alla soluzione sono quelli in cui  $\left( \frac{q_{Lk}^H \underline{Q}_0}{j\omega_f(\Omega) - s_k} \right)$  è grande, ovvero quando  $\omega_f(\Omega)$  è vicina a una delle pulsazioni proprie del sistema  $\omega_{Pk}$  contenuta in  $s_k$  (corrispondenti alle risonanze del sistema) o quando  $\underline{q}_{Lk}^H \underline{Q}_0$  è grande (forzanti ortogonali al corrispondente autovettore).

Il diagramma di Campbell associato a questo caso è riportato in Fig. 73. Rispetto allo studio nel moto libero abbiamo aggiunto la curva del carico  $\omega_f(\Omega)$  sul diagramma relativo alle pulsazioni proprie  $\omega_{Pi}$ . Le intersezioni della curva del carico con i rami del diagramma  $\Omega_c$  sono ancora una volta le pulsazioni critiche. Il valore di smorzamento modale associato alle varie pulsazioni critiche  $\zeta_c$  può essere facilmente trovato riportando la pulsazione critica in questione  $\Omega_c$  sul diagramma dello smorzamento.

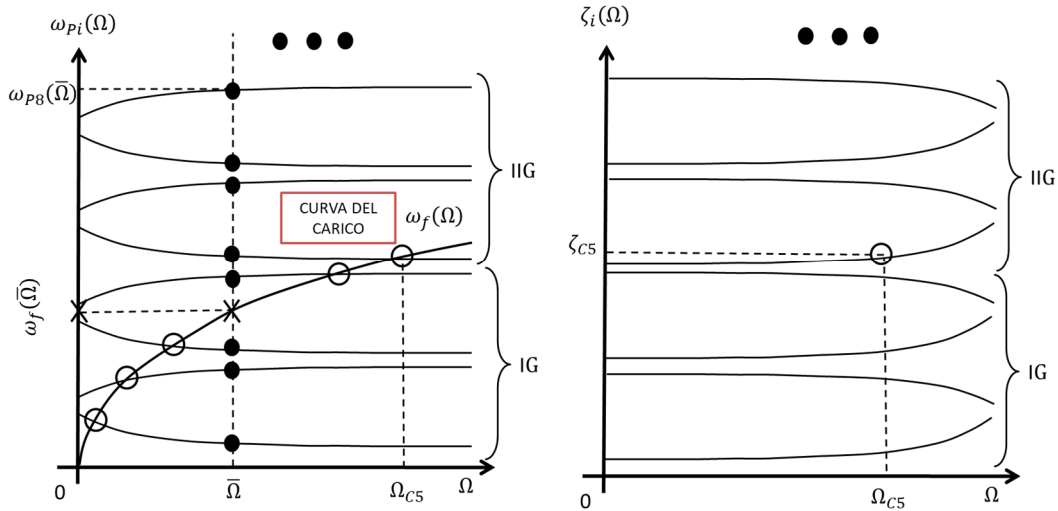


Figura 73 Diagramma di Campbell per rotore elastico con forzante armonica generica

Per capire quanto effettivamente vibra il sistema dobbiamo fare uso dei diagrammi di Bode. A tale fine dobbiamo prima specificare una velocità di lavoro della macchina  $\bar{\Omega}$  alla quale studiare il sistema. Riporto quindi tale velocità  $\bar{\Omega}$  sul diagramma di Campbell; l'intersezione tra la retta verticale passante per  $\bar{\Omega}$  e i  $4 * NN$  rami del diagramma delle pulsazioni proprie  $\omega_{pi}$  rappresentano le  $4 * NN$  pulsazioni proprie del sistema coincidenti, a loro volta, le pulsazioni di risonanza del sistema. A questo punto, supponendo di voler trovare quanto vale lo spostamento lungo  $x_h$  del centro di massa  $u_{0h}$  (nel dominio della frequenza), posso tracciare i rispettivi diagrammi (Fig. 74). Per determinare il modulo e la fase dello spostamento  $u_{0h}$  devo determinare sul diagramma di Bode il punto in cui agisce la forzante. Ma questo può essere dedotto dal diagramma di Campbell intersecando la curva del carico con la sezione verticale passante per  $\bar{\Omega}$  (si vedano sempre la Fig. 73 e la Fig. 74).

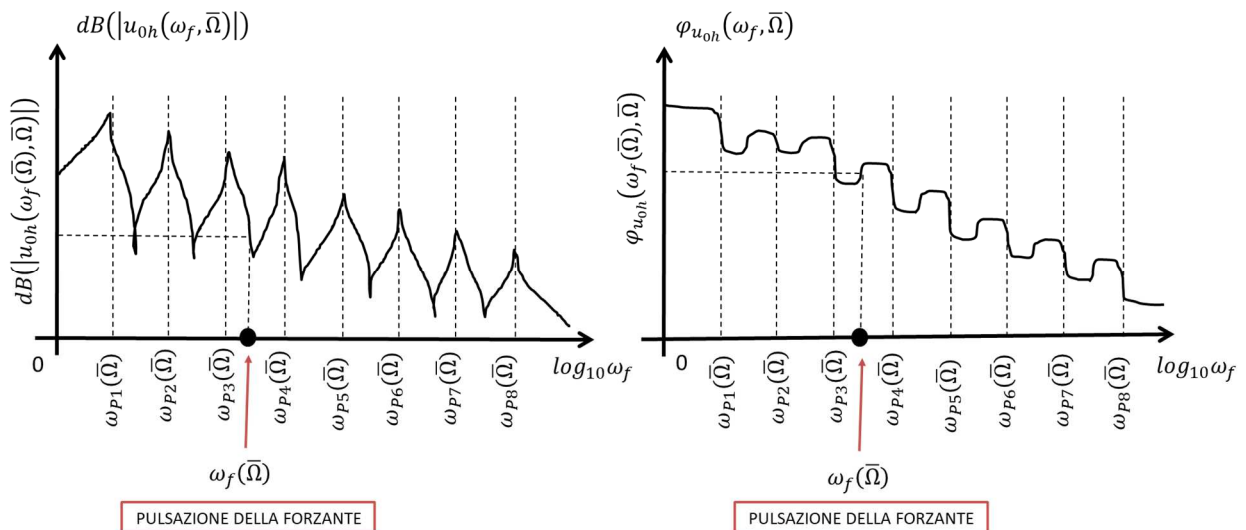


Figura 74 Diagramma di Bode per rotore elastico con forzante armonica generica

Guardando ai diagrammi di Campbell e di Bode, risulta chiaro il significato di pulsazione critica  $\Omega_c$ . Qualora infatti la pulsazione di lavoro della macchina  $\bar{\Omega}$  (la speed) si trovasse in corrispondenza di una critica  $\Omega_c$ , la pulsazione in cui la forzante agirebbe sulla macchina  $\omega_f(\bar{\Omega})$  si troverebbe proprio in corrispondenza di una pulsazione propria Prof. Enrico Meli, Dipartimento di Ingegneria Industriale, Università di Firenze



$\omega_{pi}(\bar{\Omega})$  e quindi di una pulsazione di risonanza. Ci troveremmo quindi necessariamente in condizioni di massima amplificazione.

Concludiamo quindi con lo studio del whirl forzato, ovvero la traiettoria del generico nodo  $\underline{G}_h$  durante il suo moto forzato nel piano  $x_h y_h$ :

$$\underline{q}_h(t) = \begin{pmatrix} u_h(t) \\ v_h(t) \\ \theta_h(t) \\ \psi_h(t) \end{pmatrix} = Re \left[ \underline{q}_{0h} e^{j\omega_f t} \right] = Re \left[ \begin{pmatrix} u_{0h} \\ v_{0h} \\ \theta_{0h} \\ \psi_{0h} \end{pmatrix} e^{j\omega_f(\Omega)t} \right]. \quad (6.2.40)$$

Lo studio del moto di whirl forzato permette anche di conoscere la direzione del moto di rivoluzione del nodo  $\underline{G}_h$  attorno all'asse  $z_h$  (se il modo del nodo  $\underline{G}_h$  è BW o FW). Analogamente a quanto fatto nel capitolo 4.7, ci concentriamo sulla parte traslazionale del moto

$$\begin{pmatrix} u_h(t) \\ v_h(t) \end{pmatrix} = Re \left[ \begin{pmatrix} u_{0h} \\ v_{0h} \end{pmatrix} e^{j\omega_f(\Omega)t} \right] \quad (6.2.41)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_h(t) \\ v_h(t) \end{pmatrix} &= Re \left[ \begin{pmatrix} u_{0h} \\ v_{0h} \end{pmatrix} e^{j\omega_f(\Omega)t} \right] = Re \left[ \begin{matrix} m_{u0h} e^{j\varphi_{u0h}} e^{j\omega_f(\Omega)t} \\ m_{v0h} e^{j\varphi_{v0h}} e^{j\omega_f(\Omega)t} \end{matrix} \right] = \begin{bmatrix} m_{u0h} \cos(\omega_f(\Omega)t + \varphi_{u0h}) \\ m_{v0h} \cos(\omega_f(\Omega)t + \varphi_{v0h}) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} m_{u0h} \cos \varphi_{u0h} - m_{u0h} \sin \varphi_{u0h} \\ m_{v0h} \cos \varphi_{v0h} - m_{v0h} \sin \varphi_{v0h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \omega_f(\Omega)t \\ \sin \omega_f(\Omega)t \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \cos \omega_f(\Omega)t \\ \sin \omega_f(\Omega)t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_h(t) \\ v_h(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dalla (6.2.41) si ottiene poi

$$\begin{pmatrix} \cos \omega_f t \\ \sin \omega_f t \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} u_h(t) \\ v_h(t) \end{pmatrix} \quad (6.2.42)$$

da cui facendo la norma al quadrato

$$1 = \begin{pmatrix} u_h(t) \\ v_h(t) \end{pmatrix}^T (T^{-1})^T T^{-1} \begin{pmatrix} u_h(t) \\ v_h(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_h(t) \\ v_h(t) \end{pmatrix}^T H \begin{pmatrix} u_h(t) \\ v_h(t) \end{pmatrix}. \quad (6.2.43)$$

Poiché la matrice  $H$  per costruzione è una matrice simmetrica definita positiva, la (6.2.43) rappresenta l'equazione parametrica di un'ellisse centrata nell'origine ma ad assi ruotati. Più nel dettaglio, per il teorema spettrale, la matrice  $H$  ammette una base ortonormale di autovettori  $\underline{v}_{H1}$ ,  $\underline{v}_{H2}$  che determinano la direzione dei semiassi dell'ellisse in questione. La lunghezza dei semiassi è invece pari a  $\sqrt{\lambda_{H1}}$  e  $\sqrt{\lambda_{H2}}$  (gli autovalori sono reali e positivi perché  $H$ ). L'ellisse corrispondente al whirl libero è riportata in Fig. 75. Infine le fasi  $\varphi_{u0h}$ ,  $\varphi_{v0h}$  di  $u_{0h}$  e  $v_{0h}$  permettono di determinare anche la direzione (BW o FW) del moto forzato di rivoluzione del nodo  $\underline{G}_h$  attorno all'asse  $z_h$ . Se infatti vale la condizione

$$0 < \varphi_{v0h} - \varphi_{u0h} < \pi, \quad (6.2.44)$$

allora il moto di rivoluzione è BW e l'ellisse sarà percorsa in senso BW. Se invece

$$-\pi < \varphi_{v0h} - \varphi_{u0h} < 0, \quad (6.2.45)$$

il moto di rivoluzione è FW e l'ellisse sarà percorsa in senso FW. La rotazione del rotore avviene chiaramente alla pulsazione  $\Omega$  (la speed della macchina) mentre il moto di rivoluzione attorno all'asse  $z_h$  del nodo  $\underline{G}_h$  avviene alla pulsazione della forzante, in questo caso  $\omega_f(\bar{\Omega})$ .

Si noti come, al contrario del moto libero, non essendo presente il termine esponenziale dovuto allo smorzamento, la traiettoria sarà sempre un'ellisse a prescindere dal valore dello smorzamento stesso. Se sono vicino a una risonanza e/o lo smorzamento modale è in generale piccolo, allora le dimensioni dell'ellisse saranno più grandi, altrimenti saranno più piccoli.

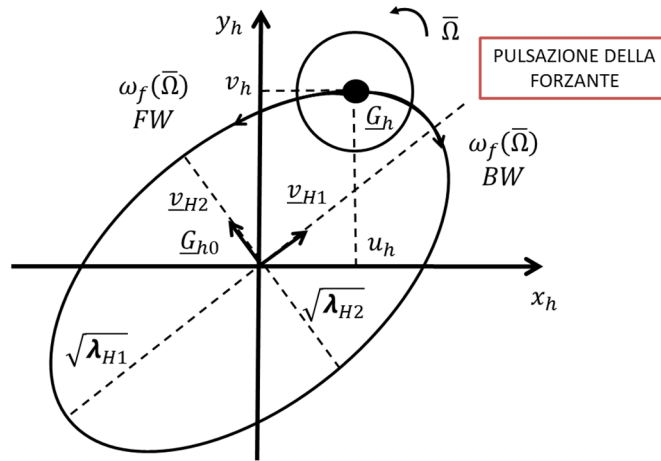


Figura 75 Whirl forzato per rotore elastico con forzante armonica generica (le componenti angolari  $\psi_h(t)$  e  $\theta_h(t)$  si comportano in modo analogo)

Anche nel moto forzato, in linea teorica ogni nodo  $G_h$  potrebbe percorrere la propria ellisse in senso BW o FW e le varie ellissi potrebbero avere le forme e le grandezze più disparate. Tuttavia, per il principio di coerenza modale, le deformate forzate tendono ad avere solamente forme regolari come quelle riportate in Fig. 76. Questo è dovuto al fatto i rotori sono solitamente di metallo (acciaio, leghe ad alta resistenza, etc.) e non di gomma o di carta. Di conseguenza, sezioni della macchina adiacenti tra loro non potranno mai avere ellissi di whirl forzato "troppo diverse" tra loro (in tal caso non potremmo certo parlare di elasticità lineare e materiali lineari!).

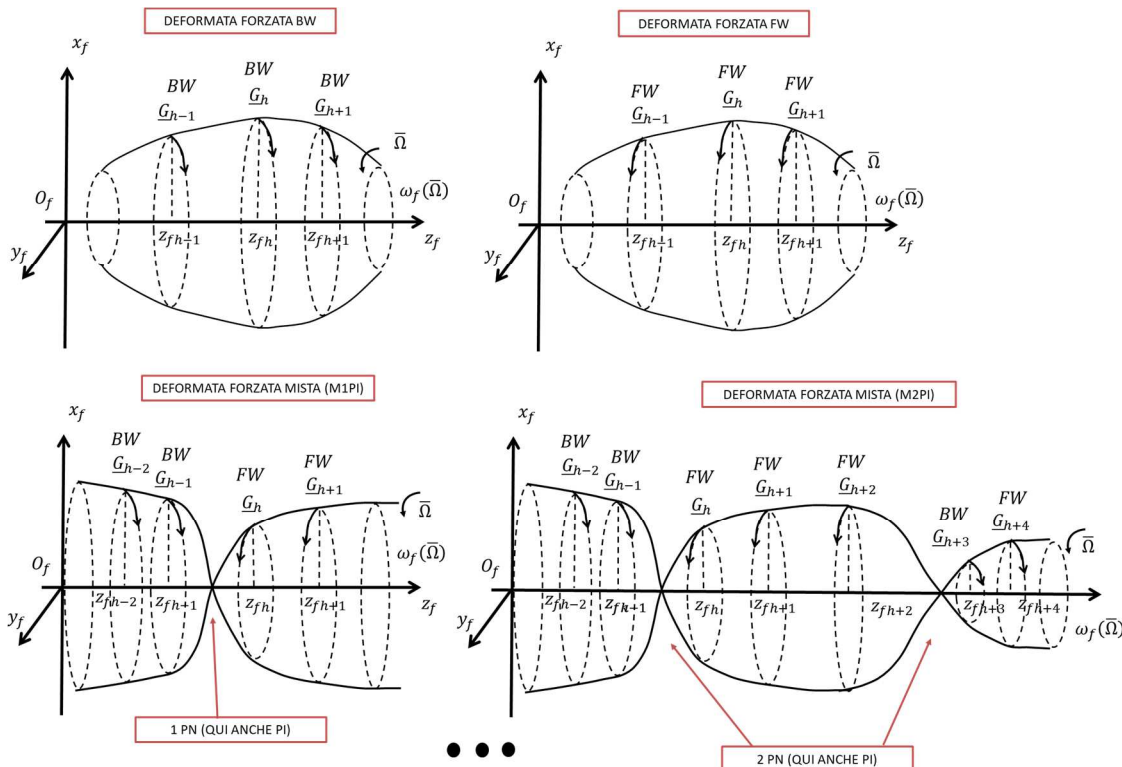


Figura 76 Il concetto di coerenza modale (le componenti angolari  $\psi_h(t)$  e  $\theta_h(t)$  si comportano in modo analogo)

Come si può notare dalla Fig. 76, se i nodi ruotano tutti in senso BW, la deformata forzata è detta BW. Se invece ruotano tutti i senso FW, allora la deformata forzata è detta FW. Nel caso in cui esistano dei punti nodali PN (punti in cui la sezione è ferma), allora possono esserci delle deformate forzate dal carattere misto in cui la rotazione può invertirsi una o più volte nei punti nodali (M1PI, M2PI, etc. a seconda di quante volte la rotazione viene invertita nei punti nodali). I punti nodali PN in cui la rotazione si inverte sono detti punti di inversione PI. Naturalmente non è detto che, se ci sono dei punti nodali PN, il modo necessariamente si invertirà in essi e che, di conseguenza, la deformata forzata sia per forza mista. Possono benissimo esistere punti nodali PN in cui la deformata forzata non si inverte e che quindi non sono punti di inversione PI. I punti di inversione PI sono quindi un sottoinsieme dei punti nodali PN (il numero dei PI è minore o uguale di quello dei PN).

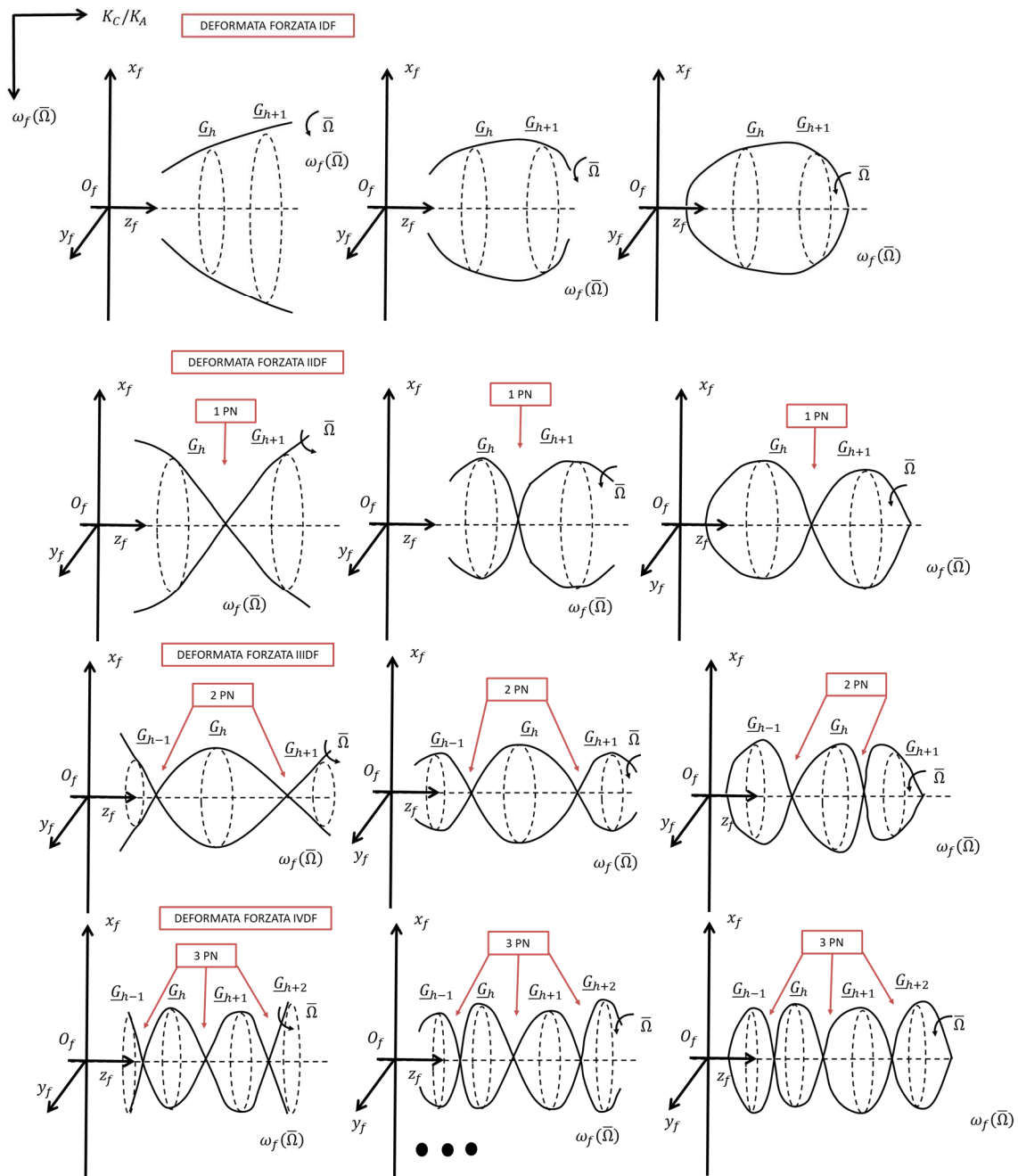


Figura 77 Deformate forzate per rotore elastico con forzante armonica generica (le componenti angolari  $\psi_h(t)$  e  $\theta_h(t)$  si comportano in modo analogo)

Come detto in precedenza, la rotazione del rotore avviene chiaramente alla pulsazione  $\Omega$  (la speed della macchina) mentre il moto di rivoluzione di ogni nodo  $\underline{G}_h$  attorno all'asse  $z_f$  avviene sempre alla pulsazione della forzante  $\omega_f(\bar{\Omega})$ . Ciò è coerente col fatto che la pulsazione associata alla deformata forzata in questione è sempre una e una sola, ovvero,  $\omega_f(\bar{\Omega})$ .

Le principali deformate forzate sono rappresentate in Fig. 77 e, nelle caratteristiche (BW, M, FW) e nella forma (IDF, IIDF, IIIDF, etc.), ricordano i modi di vibrare IE, IIE, IIIE, IVE, etc. descritti nel paragrafo 4.7. Tuttavia le deformate forzate riguardano il moto forzato e non il moto libero, e non vanno dunque confuse con i modi di vibrare e le deformate modali!

Riportiamo per completezza in Fig. 77bis/ter un esempio di deformata forzata completa includendo anche la componenti angolari  $\psi_h(t)$  e  $\theta_h(t)$  di basculamento della sezione (prima non considerate esplicitamente perché meno importanti a livello ingegneristico e perché il loro comportamento qualitativo è identico a quello delle componenti spaziali  $u_h(t)$  e  $v_h(t)$ ). Nel caso dell'esempio abbiamo una deformata forzata flessionale IIDF spaziale (con 1PN e che potrà avere caratteristica BW, FW o M1PI) associato a una deformata forzata IIIDF rotazionale (con 2PN e che potrà avere caratteristica BW, FW, M1PI, M2PI).

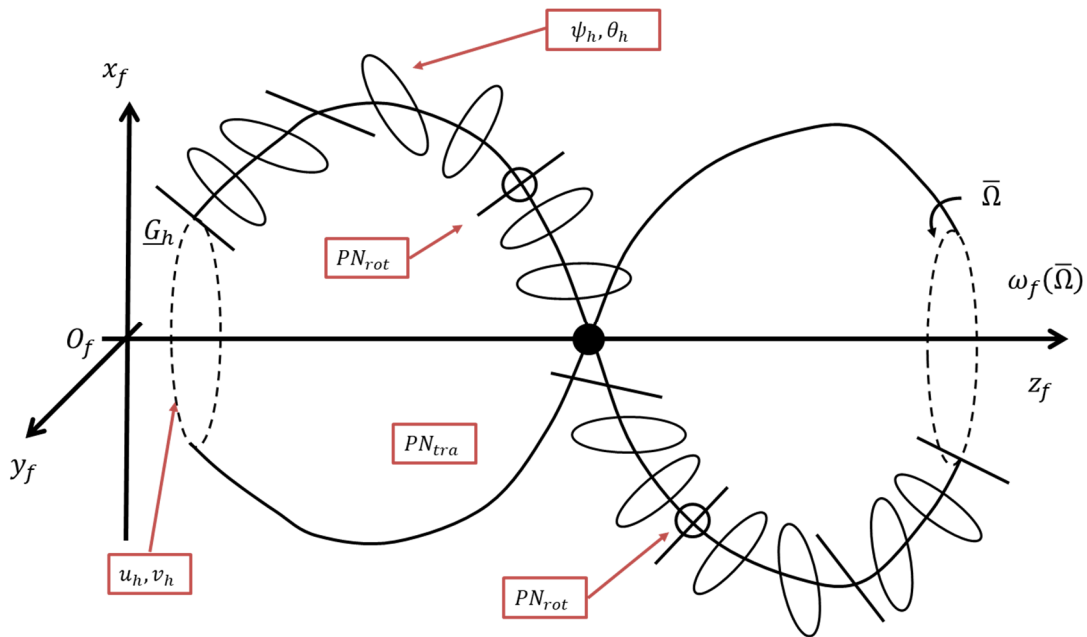


Figura 77bis Esempio di deformata forzata per rotori elastici

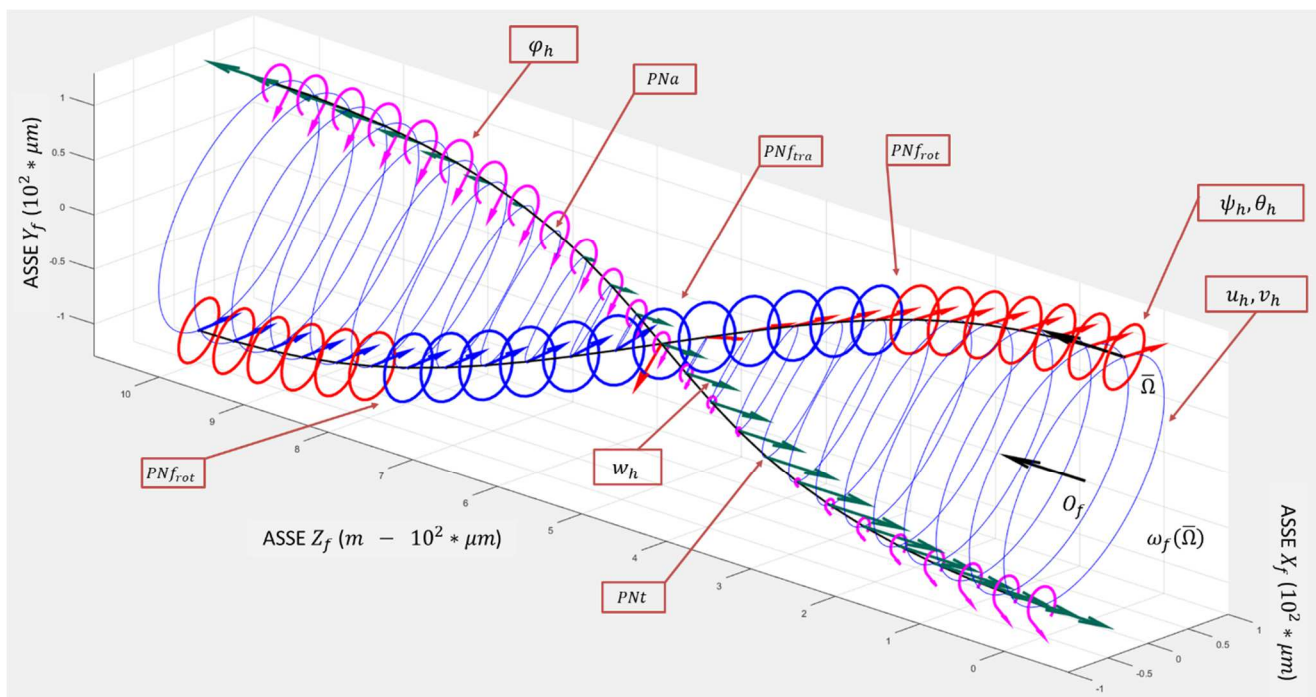


Figura 77ter Rappresentazione tipo software di deformata forzata per rotori elastici (si osservi solo la parte flessionale della deformata)

ELENCO RIASSUNTIVO DELLE VARIE DEFORMATE FORZATE:

- 1) FORMA: IDF  
CARATTERISTICA: BW o FW
- 2) FORMA: IIDF  
CARATTERISTICA: BW, FW, M1PI
- 3) FORMA: IIIDF  
CARATTERISTICA: BW, FW, M1PI, M2PI
- 4) FORMA: IVDF  
CARATTERISTICA: BW, FW, M1PI, M2PI, M3PI
- ... ..

5) FORZANTE PERIODICA:

$$M\ddot{\underline{q}} + (\Omega G + C)\dot{\underline{q}} + K\underline{q} = \underline{Q}(t) = \text{Re}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \underline{c}_k(\Omega)e^{j\omega_0(\Omega)kt}\right]. \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}. \quad (6.2.46)$$

$$\underline{Q}(t) = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{Q}_h(t) \\ \dots \end{pmatrix}, \quad \underline{c}_k(\Omega) = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{c}_{kh} \\ \dots \end{pmatrix}.$$

La soluzione del moto forzato del sistema può essere facilmente determinata grazie agli strumenti matematici introdotti nel capitolo 1 e si ha:

$$\underline{q}_f(t) = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{q}_h(t) \\ \dots \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} \underline{q}_k(t) = \text{Re}(\sum_{k=0}^{\infty} [\alpha(k\omega_0, \Omega) \underline{c}_k(\Omega) e^{j\omega_0(\Omega)kt}]) \quad (6.2.47)$$

$$\underline{q}_k(t) = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{q}_{kh}(t) \\ \dots \end{pmatrix} = \text{Re}[\alpha(k\omega_0, \Omega) \underline{c}_k(\Omega) e^{j\omega_0(\Omega)kt}], \quad \underline{q}_{kh}(t) = \begin{pmatrix} u_{kh}(t) \\ v_{kh}(t) \\ \theta_{kh}(t) \\ \psi_{kh}(t) \end{pmatrix}$$

$$\underline{q}_{k0} = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{q}_{kh0} \\ \dots \end{pmatrix} = \alpha(k\omega_0(\Omega), \Omega) \underline{c}_k(\Omega) = [-k^2\omega_0(\Omega)^2 M + jk\omega_0(\Omega)(C + \Omega G) + K]^{-1} \underline{c}_k(\Omega)$$

$$\underline{q}_{kh0} = \begin{pmatrix} u_{kh0} \\ v_{kh0} \\ \theta_{kh0} \\ \psi_{kh0} \end{pmatrix}$$

dove in questi casi è utile distinguere nella ricettanza  $\alpha(k\omega_0(\Omega), \Omega)$  la doppia dipendenza dalla pulsazione della forzante e della velocità di rotazione della macchina.

Applicando il teorema di sovrapposizione modale in questo caso abbiamo:

$$\underline{q}_k(t) = \text{Re}[\alpha(k\omega_0(\Omega), \Omega) \underline{c}_k(\Omega) e^{j\omega_0(\Omega)kt}] = \text{Re} \left[ \sum_{m=1}^{2N} \frac{(q_{Rm} q_{Lm}^H)}{j\omega_0(\Omega)k - s_m} \underline{c}_k(\Omega) e^{j\omega_0(\Omega)kt} \right] =$$

$$\text{Re} \left[ \sum_{m=1}^{2N} \left( \frac{q_{Lm}^H \underline{c}_k}{j\omega_0(\Omega)k - s_m} \right) q_{Rm} e^{j\omega_0(\Omega)kt} \right], \quad (6.2.48)$$

da cui possiamo dedurre che i modi che maggiormente contribuiscono alle singole armoniche della soluzione sono quelli in cui  $\left( \frac{q_{Lm}^H \underline{c}_k}{j\omega_0(\Omega)k - s_m} \right)$  è grande, ovvero quando  $\omega_0(\Omega)k$  è vicina a una delle pulsazioni proprie del sistema  $\omega_{pk}$  contenuta in  $s_k$  (corrispondenti alle risonanze del sistema) o quando  $q_{Lk}^H \underline{c}_k$  è grande (forzanti ortogonali al corrispondente autovettore).

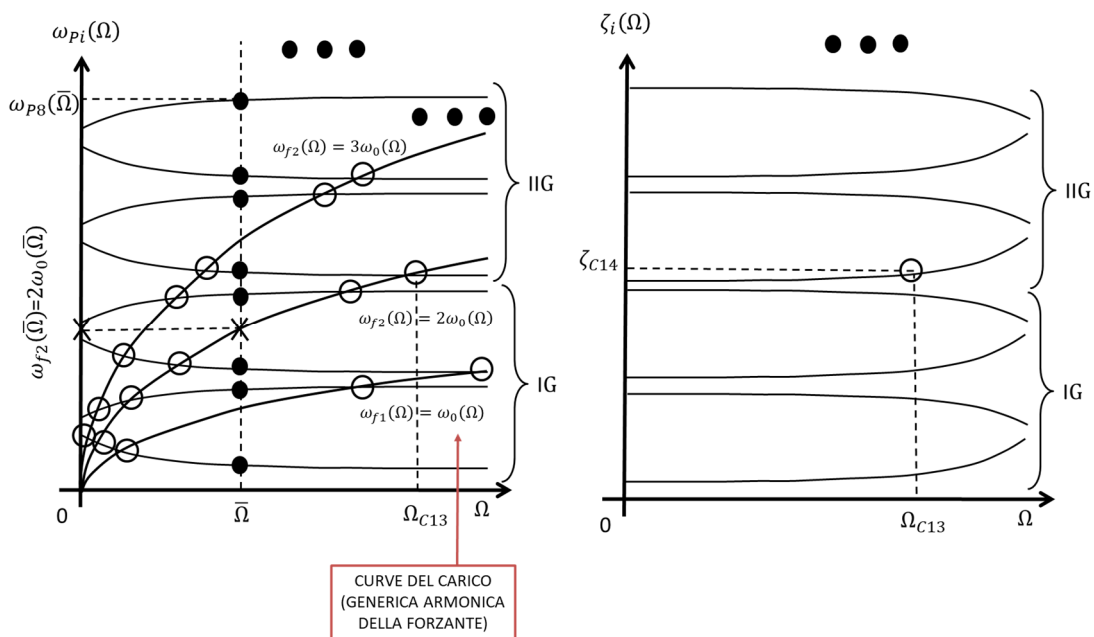


Figura 78 Diagramma di Campbell per rotore elastico con forzante periodica

Il diagramma di Campbell associato a questo caso è riportato in Fig. 78. Rispetto allo studio nel moto libero abbiamo aggiunto la curva del carico  $\omega_0(\Omega)k$  sul diagramma relativo alle pulsazioni proprie  $\omega_{p_i}$ . Le intersezioni della curva del carico con i rami del diagramma  $\Omega_c$  sono ancora una volta le pulsazioni critiche. Il valore di smorzamento modale associato alle varie pulsazioni critiche  $\zeta_c$  può essere facilmente trovato riportando la pulsazione critica in questione  $\Omega_c$  sul diagramma dello smorzamento.

Per capire quanto effettivamente vibra il sistema dobbiamo fare uso dei diagrammi di Bode. A tale fine dobbiamo prima specificare una velocità di lavoro della macchina  $\bar{\Omega}$  alla quale studiare il sistema. Riporto quindi tale velocità  $\bar{\Omega}$  sul diagramma di Campbell; l'intersezione tra la retta verticale passante per  $\bar{\Omega}$  e i  $4 * NN$  rami del diagramma delle pulsazioni proprie  $\omega_{p_i}$  rappresentano le  $4 * NN$  pulsazioni proprie del sistema coincidenti, a loro volta, le pulsazioni di risonanza del sistema. A questo punto, supponendo di voler trovare quanto vale lo spostamento lungo  $x_h$  del generico nodo  $h$ -esimo  $u_{kh0}$  (nel dominio della frequenza), posso tracciare i rispettivi diagrammi (Fig. 79) (per ogni singola componente armonica!). Per determinare il modulo e la fase dello spostamento  $u_{kh0}$  devo determinare sul diagramma di Bode il punto in cui agisce la forzante. Ma questo può essere dedotto dal diagramma di Campbell intersecando la curva del carico con la sezione verticale passante per  $\bar{\Omega}$  (si vedano sempre la Fig. 78 e la Fig. 79).

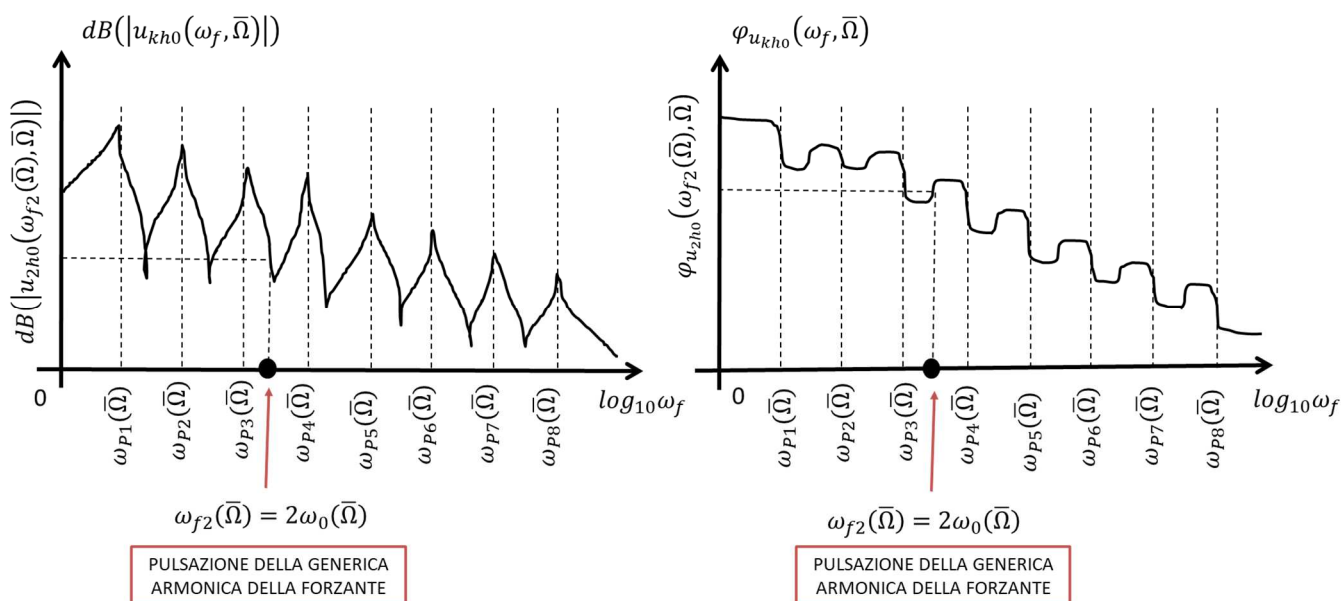


Figura 79 Diagramma di Bode per rotore elastico con forzante periodica

Guardando ai diagrammi di Campbell e di Bode, risulta chiaro il significato di pulsazione critica  $\Omega_c$ . Qualora infatti la pulsazione di lavoro della macchina  $\bar{\Omega}$  (la speed) si trovasse in corrispondenza di una critica  $\Omega_c$ , la pulsazione in cui la forzante agirebbe sulla macchina  $k\omega_0(\bar{\Omega})$  si troverebbe proprio in corrispondenza di una pulsazione propria  $\omega_{p_i}(\bar{\Omega})$  e quindi di una pulsazione di risonanza. Ci troveremmo quindi necessariamente in condizioni di massima amplificazione.

Concludiamo quindi con lo studio del whirl forzato, ovvero la traiettoria del generico nodo  $\underline{G}_h$  durante il suo moto forzato nel piano  $x_h y_h$  (per ogni singola componente armonica!):

$$\underline{q}_{kh}(t) = \begin{pmatrix} u_{kh}(t) \\ v_{kh}(t) \\ \theta_{kh}(t) \\ \psi_{kh}(t) \end{pmatrix} = Re \left[ \underline{q}_{k h 0} e^{j\omega_0(\Omega)kt} \right] = Re \left[ \begin{pmatrix} u_{k h 0} \\ v_{k h 0} \\ \theta_{k h 0} \\ \psi_{k h 0} \end{pmatrix} e^{j\omega_0(\Omega)kt} \right]. \quad (6.2.49)$$

Lo studio del moto di whirl forzato permette anche di conoscere direzione del moto di rivoluzione del nodo  $\underline{G}_h$  attorno all'asse  $z_h$  (se il moto del nodo  $\underline{G}_h$  è BW o FW). Analogamente a quanto fatto nel capitolo 4.7, ci concentriamo sulla parte traslazionale del moto

$$\begin{pmatrix} u_{kh}(t) \\ v_{kh}(t) \end{pmatrix} = Re \left[ \begin{pmatrix} u_{k h 0} \\ v_{k h 0} \end{pmatrix} e^{j\omega_0(\Omega)kt} \right] \quad (6.2.50)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_{kh}(t) \\ v_{kh}(t) \end{pmatrix} &= Re \left[ \begin{pmatrix} u_{k h 0} \\ v_{k h 0} \end{pmatrix} e^{j\omega_0(\Omega)kt} \right] = Re \left[ \begin{matrix} m_{u_{k h 0}} e^{j\varphi_{u_{k h 0}}} e^{j\omega_0(\Omega)kt} \\ m_{v_{k h 0}} e^{j\varphi_{v_{k h 0}}} e^{j\omega_0(\Omega)kt} \end{matrix} \right] = \begin{bmatrix} m_{u_{k h 0}} \cos(\omega_0(\Omega)kt + \varphi_{u_{k h 0}}) \\ m_{v_{k h 0}} \cos(\omega_0(\Omega)kt + \varphi_{v_{k h 0}}) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} m_{u_{k h 0}} \cos \varphi_{u_{k h 0}} - m_{u_{k h 0}} \sin \varphi_{u_{k h 0}} \\ m_{v_{k h 0}} \cos \varphi_{v_{k h 0}} - m_{v_{k h 0}} \sin \varphi_{v_{k h 0}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \omega_0(\Omega)kt \\ \sin \omega_0(\Omega)kt \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \cos \omega_0(\Omega)kt \\ \sin \omega_0(\Omega)kt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{kh}(t) \\ v_{kh}(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dalla (6.2.50) si ottiene poi

$$\begin{pmatrix} \cos \omega_0 kt \\ \sin \omega_0 kt \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} u_{kh}(t) \\ v_{kh}(t) \end{pmatrix} \quad (6.2.51)$$

da cui facendo la norma al quadrato

$$1 = \begin{pmatrix} u_{kh}(t) \\ v_{kh}(t) \end{pmatrix}^T (T^{-1})^T T^{-1} \begin{pmatrix} u_{kh}(t) \\ v_{kh}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{kh}(t) \\ v_{kh}(t) \end{pmatrix}^T H \begin{pmatrix} u_{kh}(t) \\ v_{kh}(t) \end{pmatrix}. \quad (6.2.52)$$

Poiché la matrice  $H$  per costruzione è una matrice simmetrica definita positiva, la (6.2.52) rappresenta l'equazione parametrica di un'ellisse centrata nell'origine ma ad assi ruotati. Più nel dettaglio, per il teorema spettrale, la matrice  $H$  ammette una base ortonormale di autovettori  $\underline{v}_{H1}, \underline{v}_{H2}$  che determinano la direzione dei semiassi dell'ellisse in questione. La lunghezza dei semiassi è invece pari a  $\sqrt{\lambda_{H1}}$  e  $\sqrt{\lambda_{H2}}$  (gli autovalori sono reali e positivi perché  $H$ ). L'ellisse corrispondente al whirl libero è riportata in Fig. 80. Infine le fasi  $\varphi_{u_{k h 0}}, \varphi_{v_{k h 0}}$  di  $u_{k h 0}$  e  $v_{k h 0}$  permettono di determinare anche la direzione (BW o FW) del moto forzato di rivoluzione del nodo  $\underline{G}_h$  attorno all'asse  $z_h$ . Se infatti vale la condizione

$$0 < \varphi_{v_{k h 0}} - \varphi_{u_{k h 0}} < \pi, \quad (6.2.53)$$

allora il moto di rivoluzione è BW e l'ellisse sarà percorsa in senso BW. Se invece

$$-\pi < \varphi_{v_{k h 0}} - \varphi_{u_{k h 0}} < 0, \quad (6.2.54)$$

il moto di rivoluzione è FW e l'ellisse sarà percorsa in senso FW. La rotazione del rotore avviene chiaramente alla pulsazione  $\Omega$  (la speed della macchina) mentre il moto di rivoluzione attorno all'asse  $z_h$  del nodo  $\underline{G}_h$  avviene alla pulsazione della forzante, in questo caso  $\omega_0(\bar{\Omega})k$ .

Si noti come, al contrario del moto libero, non essendo presente il termine esponenziale dovuto allo smorzamento, la traiettoria sarà sempre un'ellisse a prescindere dal valore dello smorzamento stesso. Se sono vicino a una risonanza e/o lo smorzamento modale è in generale piccolo, allora le dimensioni dell'ellisse saranno più grandi, altrimenti saranno più piccoli.



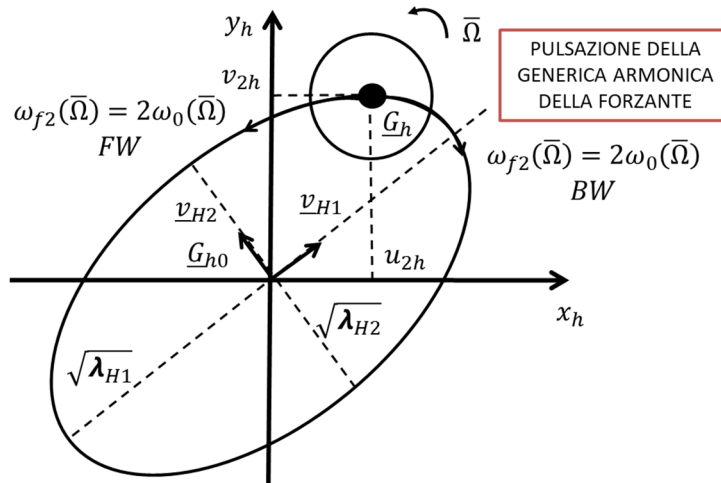


Figura 80 Whirl forzato per rotore elastico con forzante periodica (le componenti angolari  $\psi_{4h}(t)$  e  $\theta_{4h}(t)$  si comportano in modo analogo)

Anche nel moto forzato, in linea teorica ogni nodo  $\underline{G}_h$  potrebbe percorrere la propria ellisse in senso BW o FW e le varie ellissi potrebbero avere le forme e le grandezze più disparate (naturalmente per quanto concerne la generica armonica!). Tuttavia, per il principio di coerenza modale, le deformate forzate tendono ad avere solamente forme regolari come quelle riportate in Fig. 81. Questo è dovuto al fatto i rotori sono solitamente di metallo (acciaio, leghe ad alta resistenza, etc.) e non di gomma o di carta. Di conseguenza, sezioni della macchina adiacenti tra loro non potranno mai avere ellissi di whirl forzato “troppo diverse” tra loro (in tal caso non potremmo certo parlare di elasticità lineare e materiali lineari!).

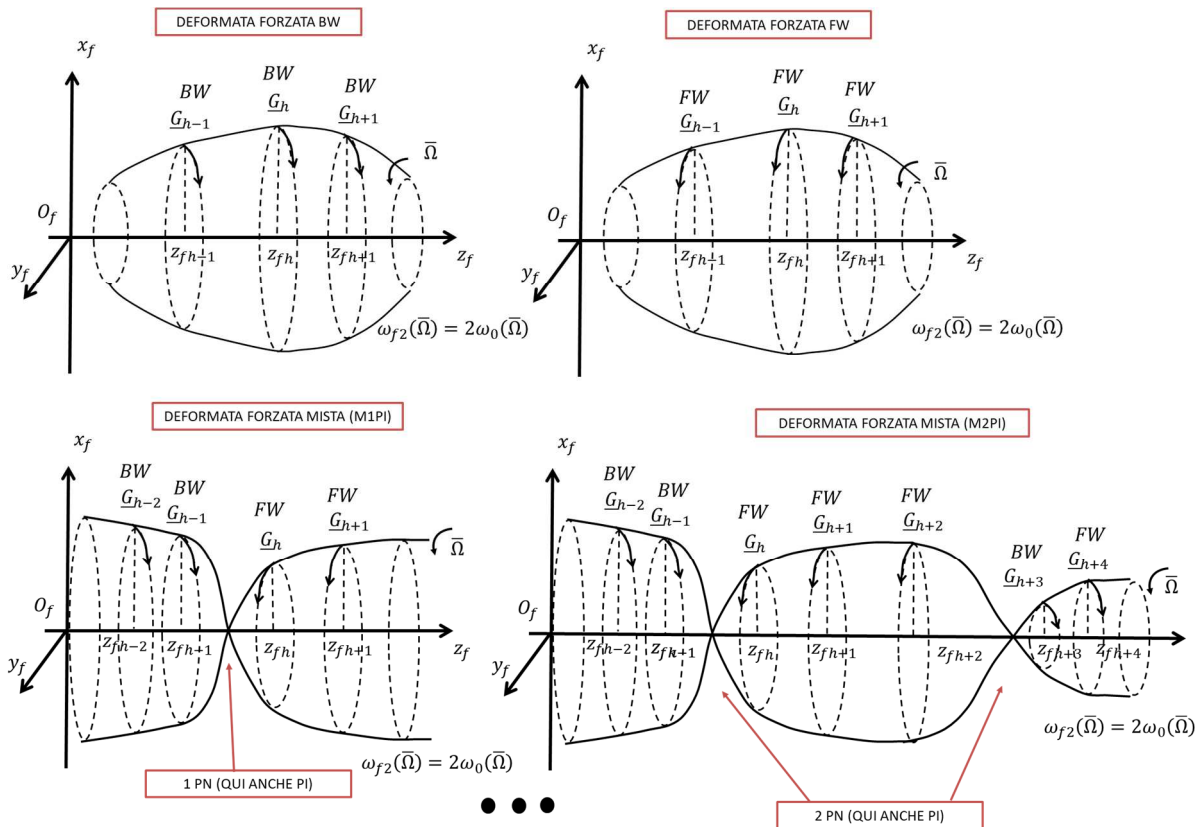


Figura 81 Il concetto di coerenza modale (le componenti angolari  $\psi_{4h}(t)$  e  $\theta_{4h}(t)$  si comportano in modo analogo)

Come si può notare dalla Fig. 81, se i nodi ruotano tutti in senso BW, la deformata forzata è detta BW. Se invece ruotano tutti i senso FW, allora la deformata forzata è detta FW. Nel caso in cui esistano dei punti nodali PN (punti in cui la sezione è ferma), allora possono esserci delle deformate forzate dal carattere misto in cui la rotazione può invertirsi una o più volte nei punti nodali (M1PI, M2PI, etc. a seconda di quante volte la rotazione viene invertita nei punti nodali). I punti nodali PN in cui la rotazione si inverte sono detti punti di inversione PI. Naturalmente non è detto che, se ci sono dei punti nodali PN, il modo necessariamente si invertirà in essi e che, di conseguenza, la deformata forzata sia per forza mista. Possono benissimo esistere punti nodali PN in cui la deformata forzata non si inverte e che quindi non sono punti di inversione PI. I punti di inversione PI sono quindi un sottoinsieme dei punti nodali PN (il numero dei PI è minore o uguale di quello dei PN).

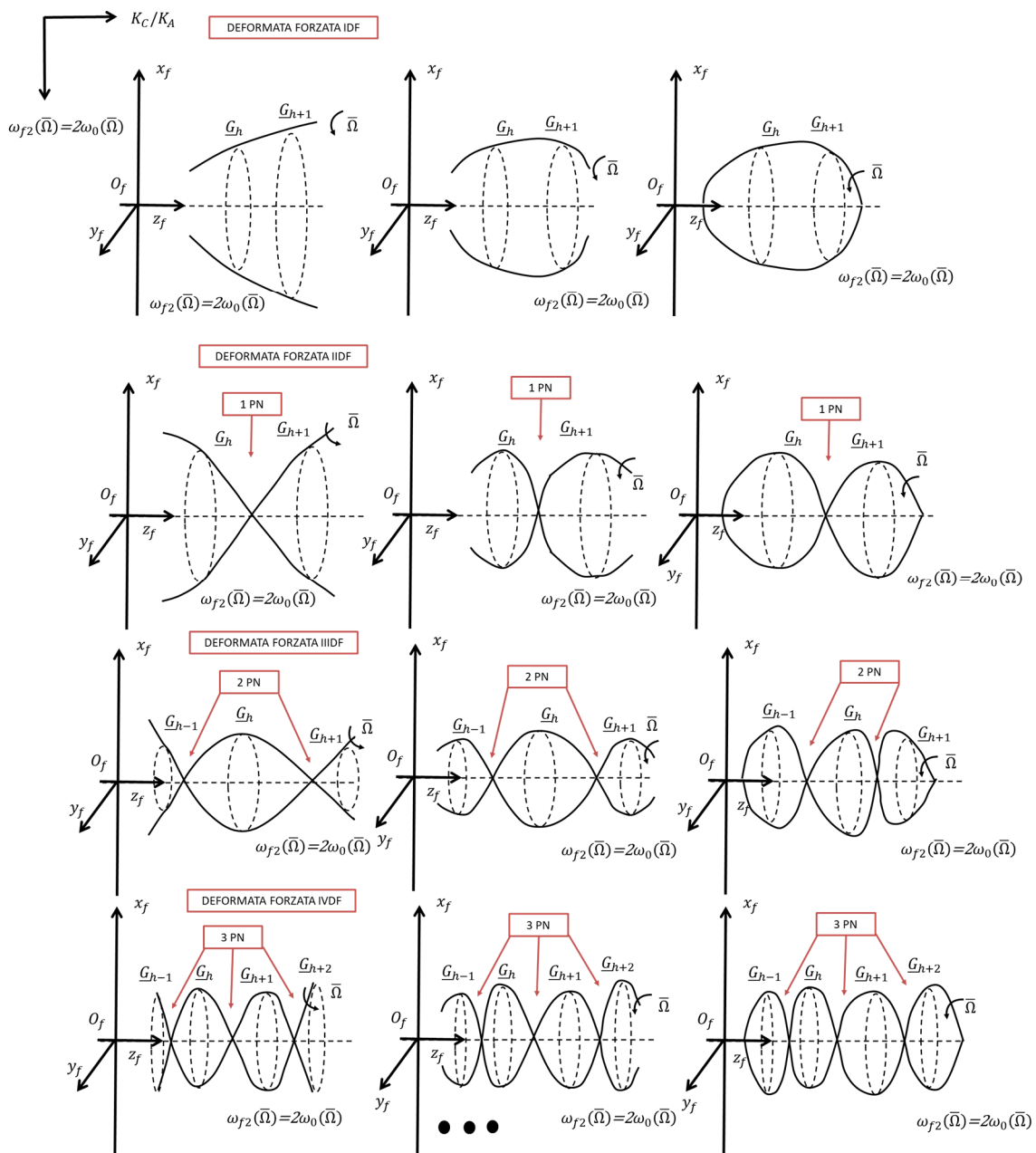


Figura 82 Deformate forzate per rotore elastico con forzante periodica (le componenti angolari  $\psi_{4h}(t)$  e  $\theta_{4h}(t)$  si comportano in modo analogo)

Come detto in precedenza, la rotazione del rotore avviene chiaramente alla pulsazione  $\Omega$  (la speed della macchina) mentre il moto di rivoluzione di ogni nodo  $G_h$  attorno all'asse  $z_f$  avviene sempre alla pulsazione della forzante  $k\omega_0(\bar{\Omega})$ . Ciò è coerente col fatto che la pulsazione associata alla deformata forzata in questione è sempre una e una sola, ovvero,  $k\omega_0(\bar{\Omega})$ .

Le principali deformate forzate sono rappresentate in Fig. 82 e, nelle caratteristiche (BW, M, FW) e nella forma (IDF, IIDF, IIIDF, etc.), ricordano i modi di vibrare IE, IIE, IIIE, IVE, etc. descritti nel paragrafo 4.7. Tuttavia le deformate forzate riguardano il moto forzato e non il moto libero, e non vanno dunque confuse con i modi di vibrare e le deformate modali!

Riportiamo per completezza in Fig. 82bis/ter un esempio di deformata forzata completa includendo anche la componenti angolari  $\psi_{2h}(t)$  e  $\theta_{2h}(t)$  di basculamento della sezione (prima non considerate esplicitamente perché meno importanti a livello ingegneristico e perché il loro comportamento qualitativo è identico a quello delle componenti spaziali  $u_{2h}(t)$  e  $v_{2h}(t)$ ). Nel caso dell'esempio abbiamo una deformata forzata flessionale IIDF spaziale (con 1PN e che potrà avere caratteristica BW, FW o M1PI) associato a una deformata forzata IIIDF rotazionale (con 2PN e che potrà avere caratteristica BW, FW, M1PI, M2PI).

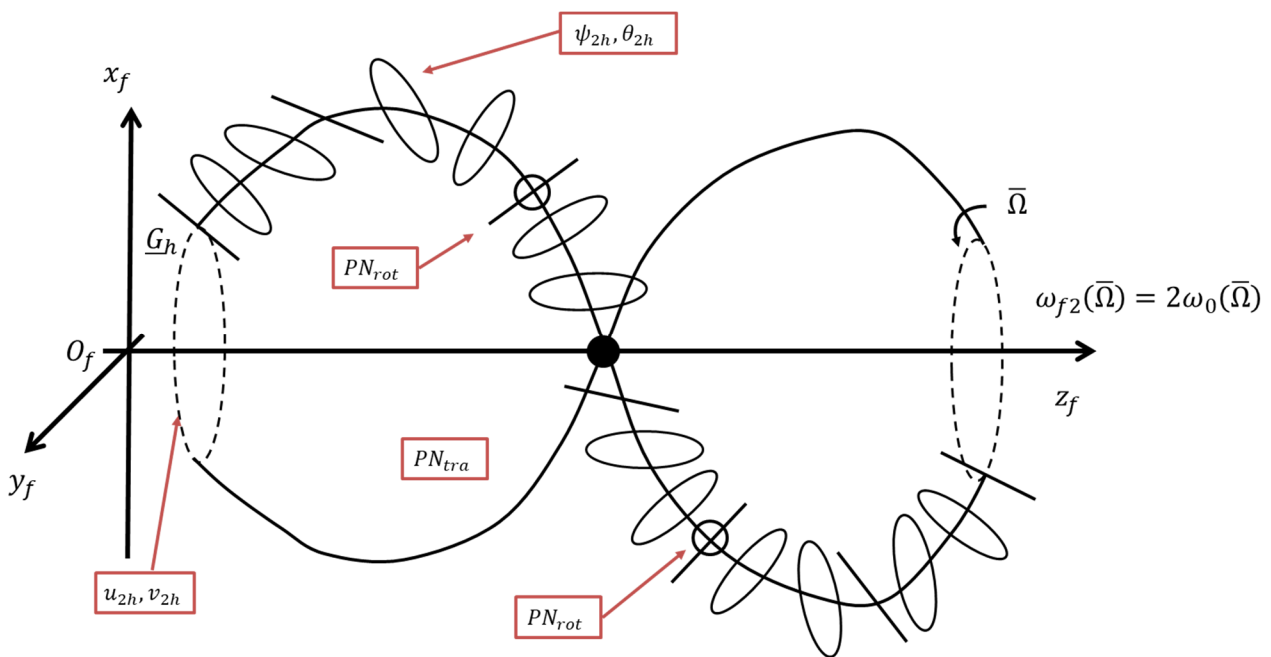


Figura 82bis Esempio di deformata forzata per rotori elastici

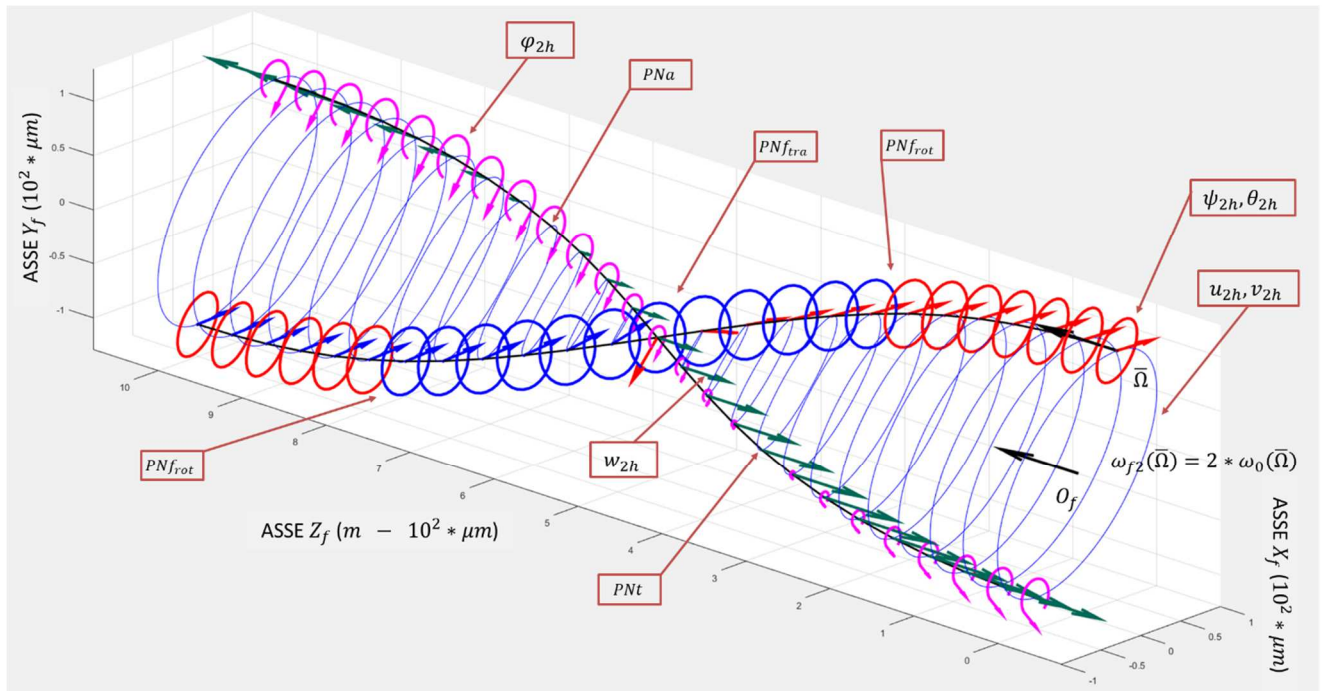


Figura 82ter Rappresentazione tipo software di deformata forzata per rotori elastici (si osservi solo la parte flessionale della deformata)

ELENCO RIASSUNTIVO DELLE VARIE DEFORMATE FORZATE:

- 1) FORMA: IDF  
CARATTERISTICA: BW o FW
- 2) FORMA: IIDF  
CARETTERISTICA: BW, FW, M1PI
- 3) FORMA: IIIDF  
CARETTERISTICA: BW, FW, M1PI, M2PI
- 4) FORMA: IVDF  
CARETTERISTICA: BW, FW, M1PI, M2PI, M3PI
- ... ..

6) FORZANTE GENERICAMENTE:

$$M \underline{\ddot{q}} + (\Omega G + C) \underline{\dot{q}} + K \underline{q} = \underline{Q}(t, \Omega) \tag{6.2.55}$$

$$\underline{Q}(t, \Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{\tilde{Q}}(\omega, \Omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad \underline{\tilde{Q}}(\omega, \Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{Q}(t, \Omega) e^{-j\omega t} dt. \tag{6.2.56}$$

$$\underline{Q}(t, \Omega) = \begin{pmatrix} \underline{Q}_h(t, \Omega) \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}, \quad \underline{\tilde{Q}}(\omega, \Omega) = \begin{pmatrix} \underline{\tilde{Q}}_h(\omega, \Omega) \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

La soluzione del moto forzato del sistema può essere facilmente determinata grazie agli strumenti matematici introdotti nel capitolo 1 e si ha:

$$\underline{q}_f(t, \Omega) = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{q}_h(t, \Omega) \\ \dots \end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{\tilde{q}}(\omega, \Omega) e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(\omega, \Omega) \underline{\tilde{Q}}(\omega, \Omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (6.2.57)$$

$$\underline{\tilde{q}}(\omega, \Omega) = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{\tilde{q}}_h(\omega, \Omega) \\ \dots \end{pmatrix} = \alpha(\omega, \Omega) \underline{\tilde{Q}}(\omega, \Omega) = [-\omega^2 M + j\omega(C + \Omega G) + K]^{-1} \underline{\tilde{Q}}(\omega, \Omega)$$

$$\underline{\tilde{q}}_h(\omega, \Omega) = \begin{pmatrix} u_{\omega h} \\ v_{\omega h} \\ \theta_{\omega h} \\ \psi_{\omega h} \end{pmatrix}$$

dove in questi casi è utile distinguere nella ricettanza  $\alpha(\omega, \Omega)$  la doppia dipendenza dalla pulsazione della forzante e della velocità di rotazione della macchina.

Applicando il teorema di sovrapposizione modale in questo caso abbiamo:

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{q}}(\omega, \Omega) &= \alpha(\omega, \Omega) \underline{\tilde{Q}}(\omega, \Omega) = \sum_{k=1}^{2N} \left( \frac{q_{Rk} q_{Lk}^H}{j\omega - s_k} \right) \underline{\tilde{Q}}(\omega, \Omega) = \\ &= \sum_{k=1}^{2N} \left( \frac{q_{Lk}^H \underline{\tilde{Q}}(\omega, \Omega)}{j\omega - s_k} \right) \underline{q}_{Rk}, \end{aligned} \quad (6.2.58)$$

da cui possiamo dedurre che i modi che maggiormente contribuiscono alle singole armoniche della soluzione sono quelli in cui  $\left( \frac{q_{Lk}^H \underline{\tilde{Q}}(\omega, \Omega)}{j\omega - s_k} \right)$  è grande, ovvero quando  $\omega$  è vicina a una delle pulsazioni proprie del sistema  $\omega_{pk}$  contenuta in  $s_k$  (corrispondenti alle risonanze del sistema) o quando  $q_{Lk}^H \underline{\tilde{Q}}(\omega, \Omega)$  è grande (forzanti ortogonali al corrispondente autovettore).

Consideriamo a titolo di pure esempio una forzante generica come quella in Fig. 83 (un tipico segnale passabanda con frequenza portante  $\omega_f(\Omega)$ , ovvero come nella realtà appare un segnale puramente armonico). In questo caso  $\delta(\Omega)$  e  $\Delta(\Omega)$  sono le soglie di sensibilità del segnale, utili per determinare in quale range dello spettro il contributo in frequenza del segnale sia realmente apprezzabile. Per semplicità supporremo che, come spesso accade in questo caso,  $\delta(\Omega)$ ,  $\Delta(\Omega)$  e la frequenza portante del segnale  $\omega_f(\Omega)$  siano le stesse per ogni componente della forzante  $\underline{\tilde{Q}}(\omega, \Omega)$ .

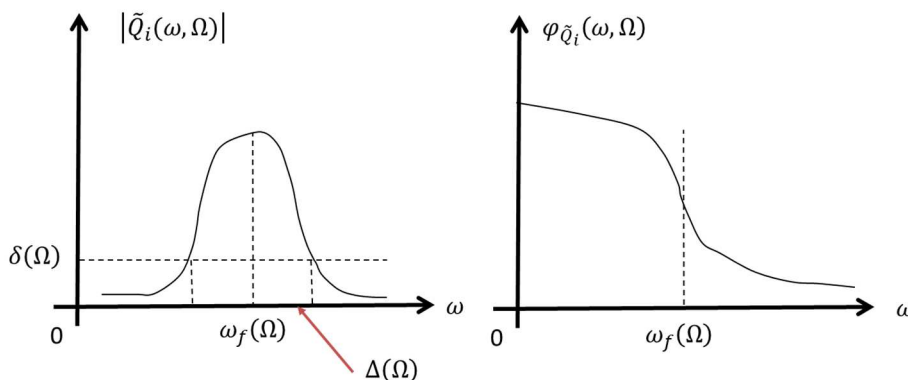


Figura 83 Forzante generica del sistema

Il diagramma di Campbell associato a questo caso è riportato in Fig. 84. Rispetto allo studio nel moto libero abbiamo aggiunto la banda del carico ( $\omega_f(\Omega), \Delta(\Omega)$ ) sul diagramma relativo alle pulsazioni proprie  $\omega_{pi}$ . Le intersezioni della banda del carico con i rami del diagramma  $I\Omega_c$  rappresentano le bande critiche. Il valore di smorzamento modale (banda di smorzamento) associato alle bande critiche  $I\zeta_c$  può essere facilmente trovato riportando la banda critica in questione  $I\Omega_c$  sul diagramma dello smorzamento.

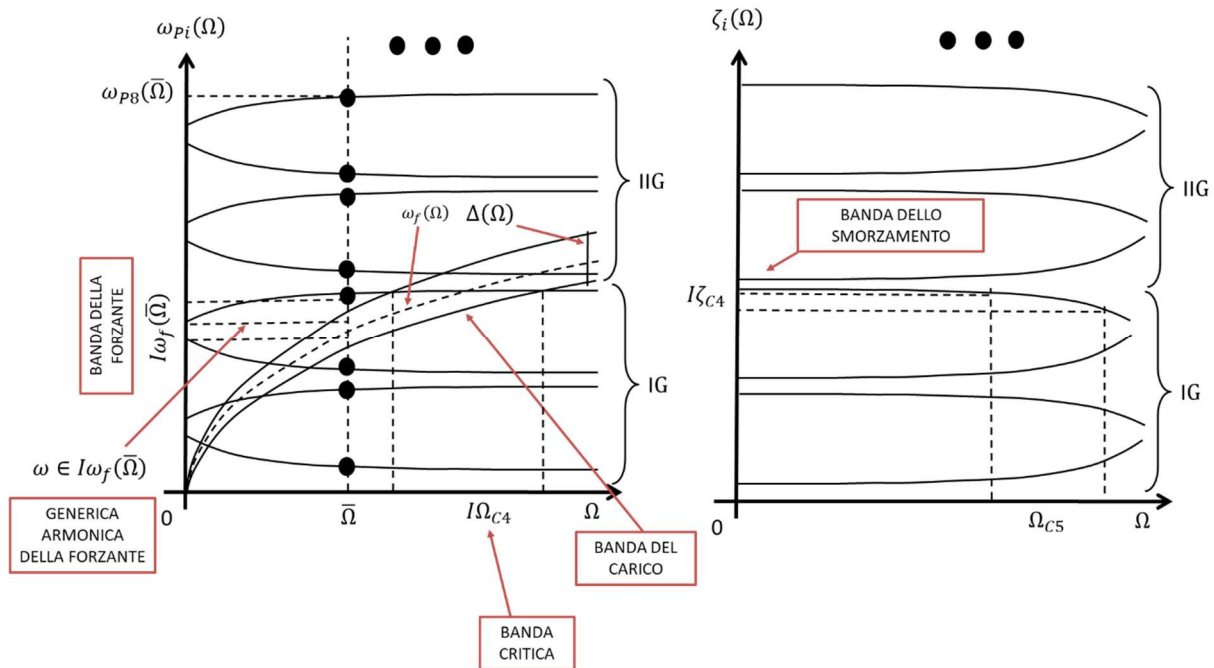


Figura 84 Diagramma di Campbell per rotore elastico con forzante generica

Per capire quanto effettivamente vibra il sistema dobbiamo fare uso dei diagrammi di Bode. A tale fine dobbiamo prima specificare una velocità di lavoro della macchina  $\bar{\Omega}$  alla quale studiare il sistema. Riporto quindi tale velocità  $\bar{\Omega}$  sul diagramma di Campbell; le intersezioni tra la retta verticale passante per  $\bar{\Omega}$  e i  $4 * NN$  rami del diagramma delle pulsazioni proprie  $\omega_{pi}$  rappresentano le  $4 * NN$  pulsazioni proprie del sistema coincidenti, a loro volta, le pulsazioni di risonanza del sistema. A questo punto, supponendo di voler trovare quanto vale lo spostamento lungo  $x_h$  del nodo  $h$ -esimo  $u_{\omega h}$  (nel dominio della frequenza), posso tracciare i rispettivi diagrammi (Fig. 85). Per determinare le bande del modulo e della fase dello spostamento  $u_{\omega h}$  devo determinare sul diagramma di Bode la banda in cui agisce la forzante. Ma questa può essere dedotto dal diagramma di Campbell intersecando la banda del carico con la sezione verticale passante per  $\bar{\Omega}$  (si vedano sempre la Fig. 84 e la Fig. 85). Lo stesso ragionamento può essere effettuato per la generica componente armonica a pulsazione  $\omega \in I\omega_f(\bar{\Omega})$  appartenente alla banda  $I\omega_f(\bar{\Omega})$  in cui agisce la forzante (Fig. 84 e la Fig. 85).

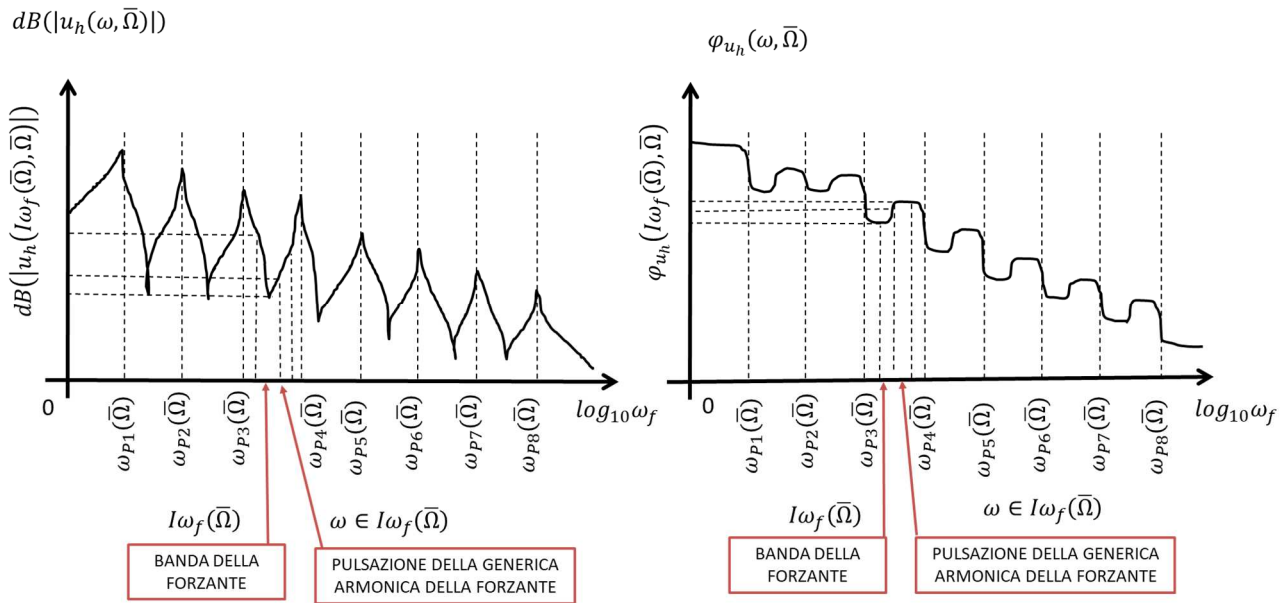


Figura 85 Diagramma di Bode per rotore elastico con forzante generica

Guardando ai diagrammi di Campbell e di Bode, risulta chiaro il significato di banda critica  $I\Omega_c$ . Qualora infatti la pulsazione di lavoro della macchina  $\bar{\Omega}$  (la speed) si trovasse in corrispondenza di una banda critica  $I\Omega_c$ , la banda in cui la forzante agirebbe sulla macchina  $I\omega_f(\bar{\Omega})$  includerebbe proprio una pulsazione propria  $\omega_{Pi}(\bar{\Omega})$  e quindi una pulsazione di risonanza. Ci troveremmo quindi necessariamente in condizioni di massima amplificazione.

Concentriamoci ora sulla generica componente armonica a pulsazione  $\omega \in I\omega_f(\bar{\Omega})$  appartenente alla banda  $I\omega_f(\bar{\Omega})$  in cui agisce la forzante e concludiamo quindi con lo studio del whirl forzato, ovvero la traiettoria del nodo  $\underline{G}_h$  durante il suo moto forzato nel paio  $x_h y_h$  (associata a quella componente armonica  $\omega$ ):

$$\underline{q}_{\omega h}(t, \Omega) = \begin{pmatrix} u_{\omega h}(t) \\ v_{\omega h}(t) \\ \theta_{\omega h}(t) \\ \psi_{\omega h}(t) \end{pmatrix} = \text{Re} \left[ \underline{\tilde{q}}_h(\omega, \Omega) e^{j\omega t} \right] = \text{Re} \left[ \begin{pmatrix} u_{\omega h} \\ v_{\omega h} \\ \theta_{\omega h} \\ \psi_{\omega h} \end{pmatrix} e^{j\omega t} \right]. \quad (6.2.59)$$

Lo studio del moto di whirl forzato permette anche di conoscere direzione del moto di rivoluzione del nodo  $\underline{G}_h$  attorno all'asse  $z_h$  (se il moto del nodo  $\underline{G}_h$  è BW o FW). Analogamente a quanto fatto nel capitolo 4.7, ci concentriamo sulla parte traslazionale del moto

$$\begin{pmatrix} u_{\omega h}(t) \\ v_{\omega h}(t) \end{pmatrix} = \text{Re} \left[ \begin{pmatrix} u_{\omega h} \\ v_{\omega h} \end{pmatrix} e^{j\omega t} \right] \quad (6.2.60)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_{\omega h}(t) \\ v_{\omega h}(t) \end{pmatrix} &= \text{Re} \left[ \begin{pmatrix} u_{\omega h} \\ v_{\omega h} \end{pmatrix} e^{j\omega t} \right] = \text{Re} \left[ m_{u\omega h} e^{j\varphi_{u\omega h}} e^{j\omega t} \right] = \begin{bmatrix} m_{u\omega h} \cos(\omega t + \varphi_{u\omega h}) \\ m_{v\omega h} \cos(\omega t + \varphi_{v\omega h}) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} m_{u\omega h} \cos \varphi_{u\omega h} - m_{u\omega h} \sin \varphi_{u\omega h} \\ m_{v\omega h} \cos \varphi_{v\omega h} - m_{v\omega h} \sin \varphi_{v\omega h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{\omega h}(t) \\ v_{\omega h}(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dalla (6.2.60) si ottiene poi

$$\begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} u_{\omega h}(t) \\ v_{\omega h}(t) \end{pmatrix} \quad (6.2.61)$$

da cui facendo la norma al quadrato

$$1 = \begin{pmatrix} u_{\omega h}(t) \\ v_{\omega h}(t) \end{pmatrix}^T (T^{-1})^T T^{-1} \begin{pmatrix} u_{\omega h}(t) \\ v_{\omega h}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{\omega h}(t) \\ v_{\omega h}(t) \end{pmatrix}^T H \begin{pmatrix} u_{\omega h}(t) \\ v_{\omega h}(t) \end{pmatrix}. \quad (6.2.62)$$

Poiché la matrice  $H$  per costruzione è una matrice simmetrica definita positiva, la (6.2.62) rappresenta l'equazione parametrica di un'ellisse centrata nell'origine ma ad assi ruotati. Più nel dettaglio, per il teorema spettrale, la matrice  $H$  ammette una base ortonormale di autovettori  $\underline{v}_{H1}, \underline{v}_{H2}$  che determinano la direzione dei semiassi dell'ellisse in questione. La lunghezza dei semiassi è invece pari a  $\sqrt{\lambda_{H1}}$  e  $\sqrt{\lambda_{H2}}$  (gli autovalori sono reali e positivi perché  $H$ ). L'ellisse corrispondente al whirl libero è riportata in Fig. 86. Infine le fasi  $\varphi_{u_{\omega h}}, \varphi_{v_{\omega h}}$  di  $u_{\omega h}$  e  $v_{\omega h}$  permettono di determinare anche la direzione (BW o FW) del moto forzato di rivoluzione del nodo  $\underline{G}_h$  attorno all'asse  $x_h$ . Se infatti vale la condizione

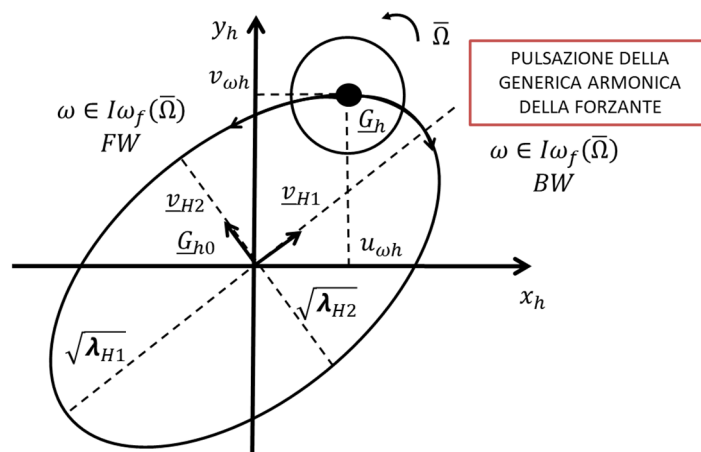
$$0 < \varphi_{v_{\omega h}} - \varphi_{u_{\omega h}} < \pi, \quad (6.2.63)$$

allora il moto di rivoluzione è BW e l'ellisse sarà percorsa in senso BW. Se invece

$$-\pi < \varphi_{v_{\omega h}} - \varphi_{u_{\omega h}} < 0, \quad (6.2.64)$$

il moto di rivoluzione è FW e l'ellisse sarà percorsa in senso FW. La rotazione del rotore avviene chiaramente alla pulsazione  $\Omega$  (la speed della macchina) mentre il moto di rivoluzione attorno all'asse  $z_h$  avviene alla pulsazione della forzante, in questo caso  $\omega \in I\omega_f(\bar{\Omega})$ .

Si noti come, al contrario del moto libero, non essendo presente il termine esponenziale dovuto allo smorzamento, la traiettoria sarà sempre un'ellisse a prescindere dal valore dello smorzamento stesso. Se sono vicino a una risonanza e/o lo smorzamento modale è in generale piccolo, allora le dimensioni dell'ellisse saranno più grandi, altrimenti saranno più piccoli.



**Figura 86 Whirl forzato per rotore elastico con forzante generica (le componenti angolari  $\psi_{\omega h}(t)$  e  $\theta_{\omega h}(t)$  si comportano in modo analogo)**

Anche nel moto forzato, in linea teorica ogni nodo  $\underline{G}_h$  potrebbe percorrere la propria ellisse in senso BW o FW e le varie ellissi potrebbero avere le forme e le grandezze più disparate (naturalmente per quanto concerne la generica armonica!). Tuttavia, per il principio di coerenza modale, le deformate forzate tendono ad avere solamente forme regolari come quelle riportate in Fig. 87. Questo è dovuto al fatto i rotori sono solitamente di metallo (acciaio, leghe ad alta resistenza, etc.) e non di gomma o di carta. Di conseguenza, sezioni della macchina



adiacenti tra loro non potranno mai avere ellissi di whirl forzato “troppo diverse” tra loro (in tal caso non potremmo certo parlare di elasticità lineare e materiali lineari!).

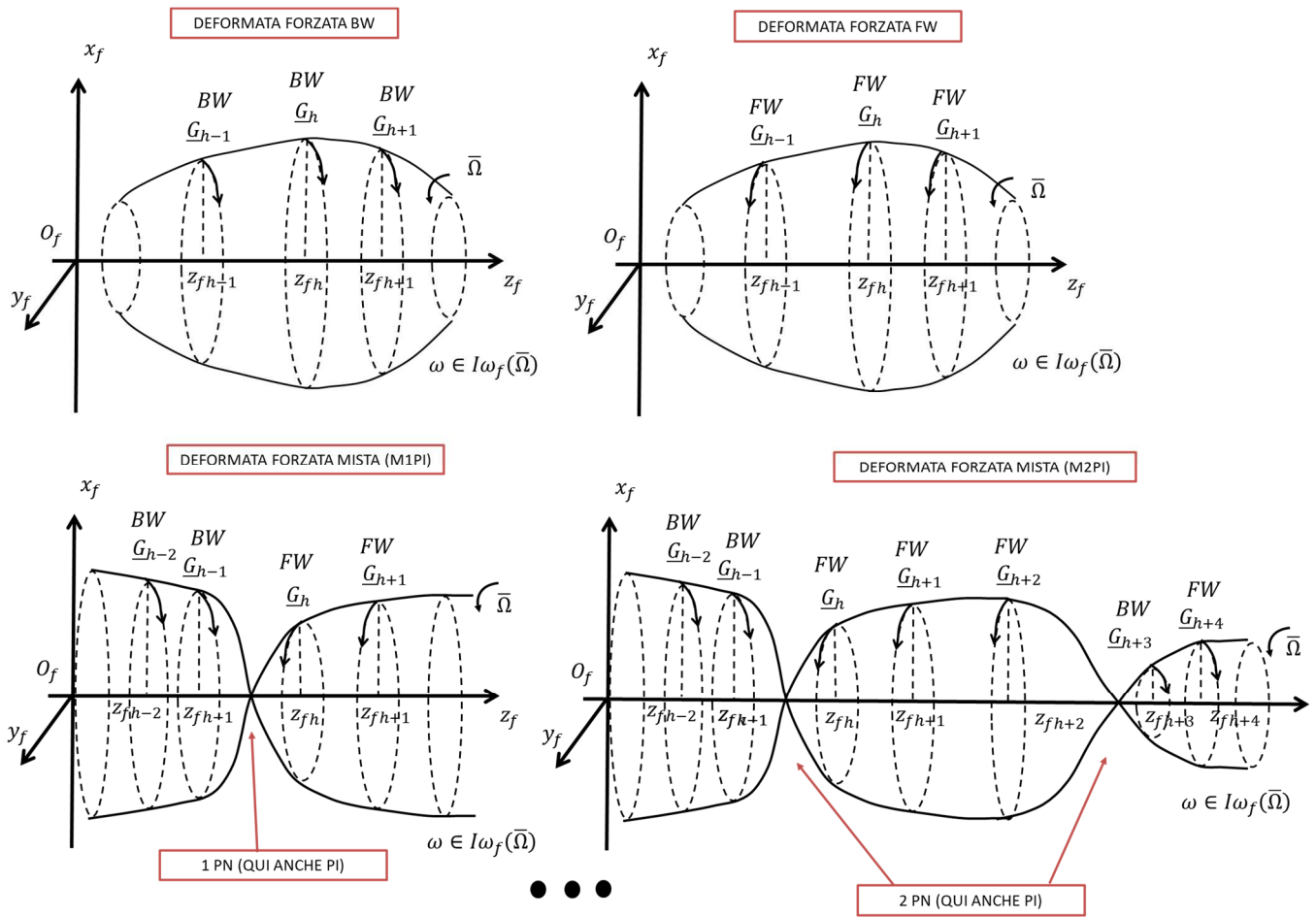


Figura 87 Il concetto di coerenza modale (le componenti angolari  $\psi_{\omega h}(t)$  e  $\theta_{\omega h}(t)$  si comportano in modo analogo)

Come si può notare dalla Fig. 87, se i nodi ruotano tutti in senso BW, la deformata forzata è detta BW. Se invece ruotano tutti i senso FW, allora la deformata forzata è detta FW. Nel caso in cui esistano dei punti nodali PN (punti in cui la sezione è ferma), allora possono esserci delle deformate forzate dal carattere misto in cui la rotazione può invertirsi una o più volte nei punti nodali (M1PI, M2PI, etc. a seconda di quante volte la rotazione viene invertita nei punti nodali). I punti nodali PN in cui la rotazione si inverte sono detti punti di inversione PI. Naturalmente non è detto che, se ci sono dei punti nodali PN, il modo necessariamente si invertirà in essi e che, di conseguenza, la deformata forzata sia per forza mista. Possono benissimo esistere punti nodali PN in cui la deformata forzata non si inverte e che quindi non sono punti di inversione PI. I punti di inversione PI sono quindi un sottoinsieme dei punti nodali PN (il numero dei PI e minore o uguale di quello dei PN).

Come detto in precedenza, la rotazione del rotore avviene chiaramente alla pulsazione  $\Omega$  (la speed della macchina) mentre il moto di rivoluzione di ogni nodo  $G_h$  attorno all'asse  $z_f$  avviene sempre alla pulsazione della forzante

$\omega \in I\omega_f(\bar{\Omega})$ . Ciò è coerente col fatto che la pulsazione associata alla deformata forzata in questione è sempre una e una sola, ovvero,  $\omega \in I\omega_f(\bar{\Omega})$ .

Le principali deformate forzate sono rappresentate in Fig. 88 e, nelle caratteristiche (BW, M, FW) e nella forma (IDF, IIDF, IIIDF, etc.), ricordano i modi di vibrare IE, IIE, IIIE, IVE, etc. descritti nel paragrafo 4.7. Tuttavia le deformate forzate riguardano il moto forzato e non il moto libero, e non vanno dunque confuse con i modi di vibrare e le deformate modali!

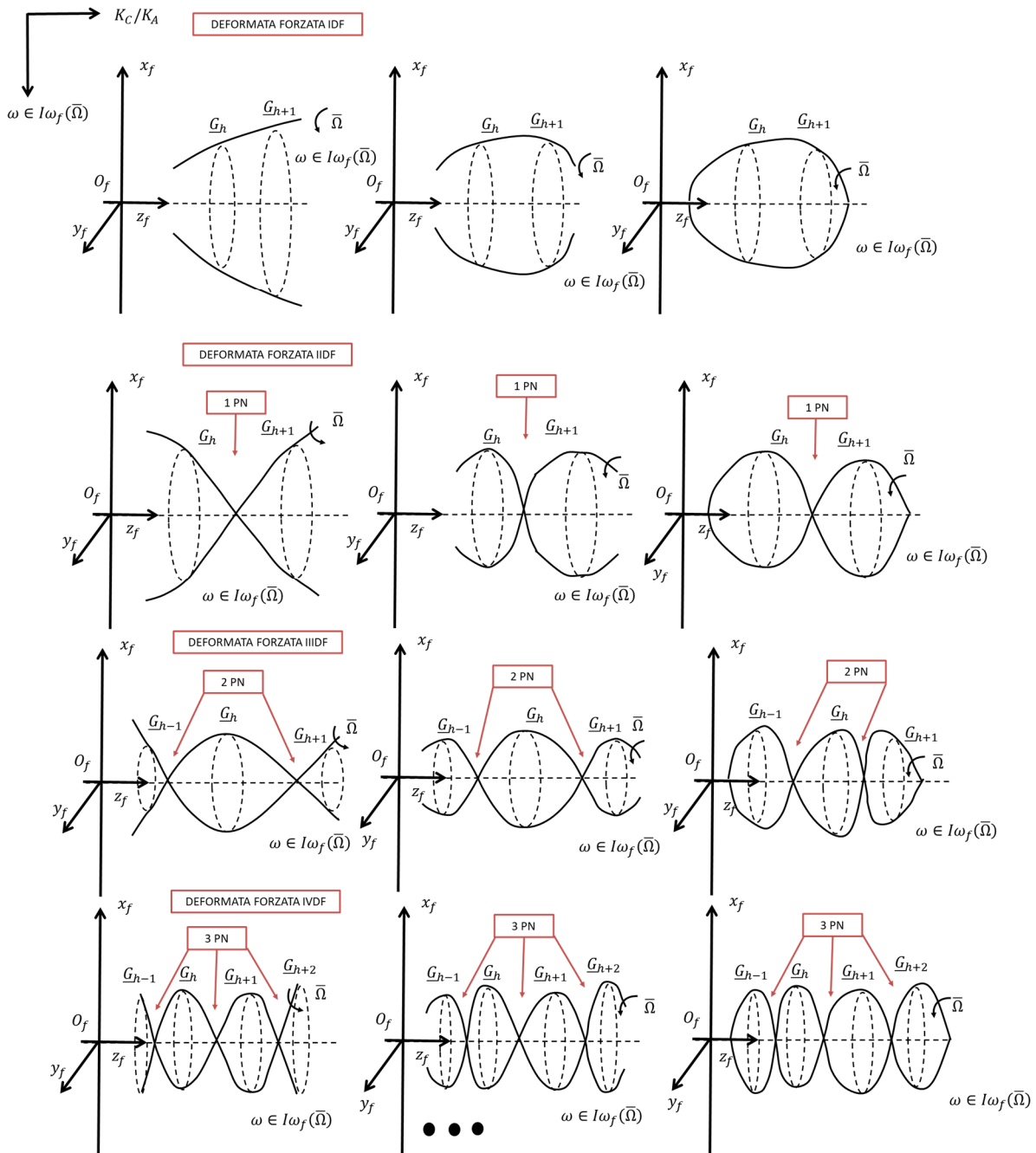


Figura 88 Deformate forzate per rotore elastico con forzante generica (le componenti angolari  $\psi_{\omega h}(t)$  e  $\theta_{\omega h}(t)$  si comportano in modo analogo)



ELENCO RIASSUNTIVO DELLE VARIE DEFORMATE FORZATE:

- 1) FORMA: IDF  
CARATTERISTICA: BW o FW
- 2) FORMA: IIDF  
CARATTERISTICA: BW, FW, M1PI
- 3) FORMA: IIIDF  
CARATTERISTICA: BW, FW, M1PI, M2PI
- 4) FORMA: IVDF  
CARATTERISTICA: BW, FW, M1PI, M2PI, M3PI
- ... ..

### 6.3 Effetto della gravità

E' abbastanza utile discutere brevemente quali sia l'effetto di azioni esterne costanti su sistemi meccanici lineari e, nello specifico, della gravità. Partiamo cercando di capire come un'azione esterna possa essere applicata nei nodi di un modello FEM come quello considerato finora (nel caso in cui siano presenti elementi concentrati!):

$$\underline{Q}_{gk} = \begin{pmatrix} 0 \\ -m_{dk}g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.3.1)$$

dove  $g$  è l'accelerazione di gravità. Il contributo complessivo dell'azione di gravità sarà di conseguenza:

$$\underline{Q}_{dg} = \sum_{k=1}^{NN} J_k^T \underline{Q}_{gk}. \quad (6.3.2)$$

In cui  $J_k$  è la matrice di connessione. Nel caso in cui invece l'azione costanza (in questo caso la gravità) sia applicata a un elemento del nostro modello FEM, sfruttando il Principio dei Lavori virtuali avremo

$$\delta \underline{q}_e^T \underline{Q}_g^e = \delta L_g^e. \quad (6.3.3)$$

dove  $\delta L_g^e$  è il lavoro virtuale effettuato sul sistema e scritto nello spazio fisico. Si ha perciò

$$\delta L_g^e = \int_{V_e} \delta \underline{P}_f^T \rho \underline{g} dV, \quad \underline{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.3.4)$$

in cui  $\underline{P}_f$  come sempre è il generico punto del volumetto  $V_e$  associato all'elemento (vedi Fig. 41). Naturalmente in generale avremo che (usando le formule della cinematica dei corpi rigidi!):

$$\delta \underline{P}_f = \delta \underline{G}_E + \delta \varphi_f \times (\underline{P}_f - \underline{G}_E). \quad (6.3.5)$$

Se tuttavia facciamo le solite ipotesi di lavori utili per studiare le vibrazioni flessionali a 4DOF di travi 1D (consideriamo solo i 4DOF flessionali azzerando i rimanenti e consideriamo "piccole" tutte le variabili e le loro derivate), la complicata espressione (6.3.5) si ridurrà a

$$\delta \underline{P}_f = \begin{pmatrix} \delta v_E \\ \delta v_E \\ \delta v_{EY} - \delta \psi_{EX} \end{pmatrix}. \quad (6.3.6)$$

La (6.3.4) si riduce quindi a

$$\delta L_g^e = - \int_{V_e} \rho g \delta v_E dV \quad (6.3.7)$$

e, introducendo le funzioni di forma,

$$\delta L_g^e = - \int_{V_e} \rho \delta \underline{q}_e^T N_{e2}^T g dV = - \delta \underline{q}_e^T \int_{V_e} \rho N_{e2}^T g dV = \delta \underline{q}_e^T \underline{G}_e. \quad (6.3.8)$$

Essendo infine gli spostamenti virtuali arbitrari, purché ammissibili con i vincoli, si ottiene

$$\begin{aligned} \underline{Q}_g^e &= \underline{G}_e \\ \underline{Q}_g &= \sum_{e=1}^{NE} H_e^T \underline{Q}_g^e. \end{aligned} \quad (6.3.9)$$

Analizziamo quindi l'equazione:

$$M \ddot{\underline{q}} + (\Omega G + C) \dot{\underline{q}} + K \underline{q} = \underline{Q}_{cost} + \underline{Q}(t), \quad \underline{q} = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{q}_h \\ \dots \end{pmatrix}, \quad \underline{Q}_{cost} = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{Q}_{cost,h} \\ \dots \end{pmatrix}, \quad \underline{Q}(t) = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{Q}_h(t) \\ \dots \end{pmatrix} \quad (6.3.10)$$

dove  $\underline{Q}_{cost}$  è una qualunque azione costante (in questo caso  $\underline{Q}_{cost} = \underline{Q}_{dg} + \underline{Q}_g$ ) e  $\underline{Q}(t)$  è una forzante generica (per semplicità possiamo supporre che  $\underline{Q}(t)$  non abbia un componente costante oppure, se essa è presente, possiamo inglobarla dentro  $\underline{Q}_{cost}$ ). Il punto di equilibrio del sistema sarà chiaramente

$$\underline{q}^{eq} = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{q}_h^{eq} \\ \dots \end{pmatrix} = K^{-1} \underline{Q}_{cost}. \quad (6.3.10)$$

Descrivendo ora la dinamica del problema rispetto alla posizione di equilibrio  $\underline{q}^{eq}$

$$\underline{q} = \underline{q}^{eq} + \tilde{\underline{q}}, \quad \tilde{\underline{q}} = \begin{pmatrix} \dots \\ \tilde{\underline{q}}_h \\ \dots \end{pmatrix} \quad (6.3.11)$$

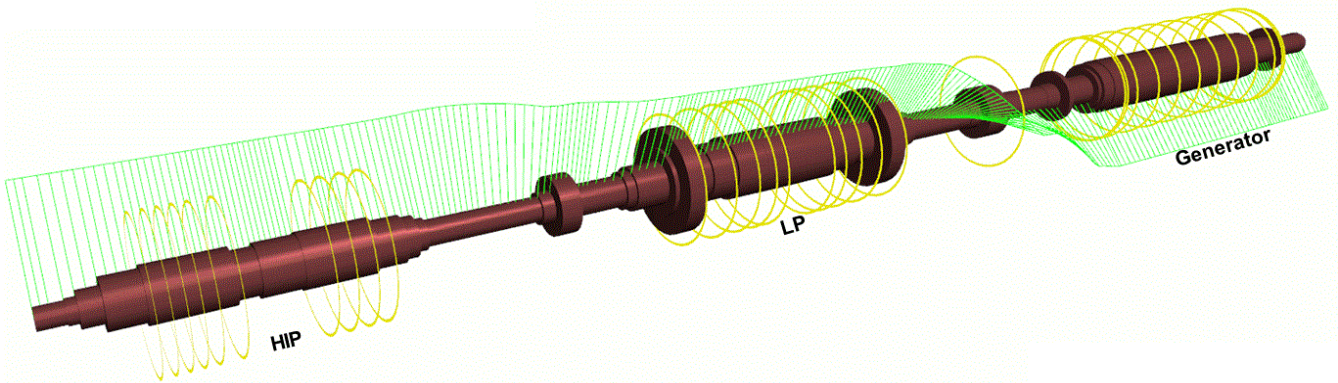
e sostituendo la (6.3.11) nella (6.3.10), si ha

$$M \ddot{\tilde{\underline{q}}} + (\Omega G + C) \dot{\tilde{\underline{q}}} + K \tilde{\underline{q}} = \underline{Q}(t). \quad (6.3.12)$$

Si nota dunque come, con questo semplice cambio di variabili, la dinamica del sistema sia stata ricondotta a quella sempre studiata fino ad ora. L'effetto di una qualunque forzante costante su un sistema meccanico lineare è semplicemente quello di spostare il punto di equilibrio (si veda la Fig. 89).



## 7. VIBRAZIONI TORSIONALI: ROTORI ELASTICI 1D



Tipico schema di rotore elastico 1D per analisi torsionale

Sotto le ipotesi di lavoro fatte nel capitolo 4 e coerentemente con la notazione introdotta in tale capitolo, cominciamo ora lo studio delle vibrazioni torsionali dei rotori elastici 1D (ovvero rotori aventi una dimensione prevalente e l'asse di rotazione principale coincidente con essa). Faremo di conseguenza uso della teoria torsionale della trave 1D, teoria caratterizzata localmente da un solo DOF (ovvero la rotazione delle sezioni della trave attorno all'asse  $z_f$ ) (vedi Fig. 90).

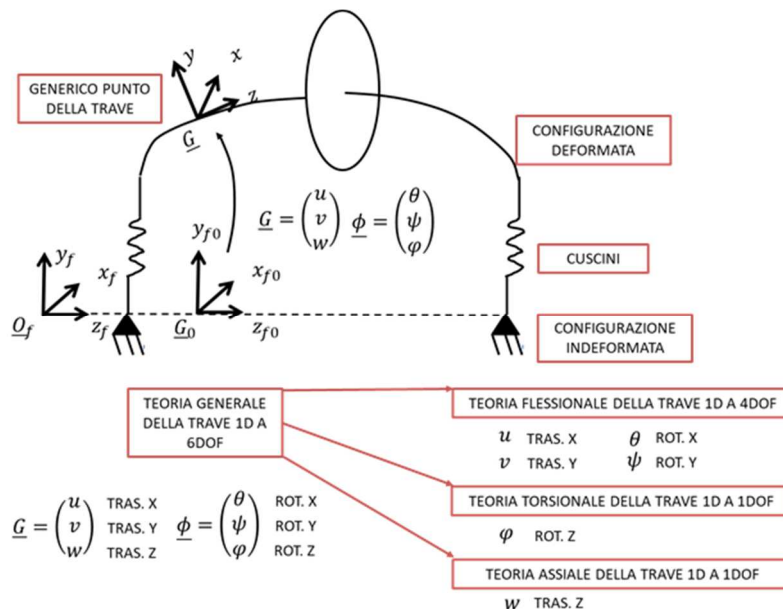


Figura 90 Teoria 1D della trave nello spazio

## 7.1 Equazioni di moto (approccio Lagrangiano)

In accordo con la nomenclatura e le ipotesi del capitolo 4 svilupperemo un modello FEM di macchina rotante 1D (a 1 DOF per nodo e a 2 nodi per elemento) per studiare la dinamica torsionale del rotore a 1DOF. Supponiamo intanto che la mesh sia nota (posizione dei nodi, caratteristiche degli elementi e funzioni di forma note). Non entreremo in seguito in questi argomenti che supporremo noti. Riassumiamo per praticità le principali ipotesi di lavoro:

- trave snella (presenza di una dimensione prevalente, tipica della strutture 1D, e coincidente in questo caso con l'asse di rotazione principale) ad asse rettilineo.
- trave a sezione piana: la generica sezione della trave associata al nodo  $\underline{G}_k$  rimane sempre contenuta nel piano  $xy$  della terna solidale al nodo stesso e non si deforma; la sezione della trave può quindi rototraslare nello spazio con 6DOF disponibili  $\underline{G}_k, \underline{\phi}_k$  (la generica trave a sezione piana nello spazio è quindi a 6DOF).
- elasticità lineare (caratteristiche elastiche dei materiali lineari).
- linearizziamo poi il problema nell'intorno della configurazione nominale. In altre parole, studiamo il problema ai "piccoli spostamenti" nell'intorno della configurazione in questione. Da un punto di vista fisico, consideriamo tutte variabili del problema piccole (eccetto ovviamente la speed della macchina  $\Omega$ ) e consideriamo piccole anche le loro derivate. Applicare questa ipotesi a una quantità fisica equivale a considerare solamente i termini di ordine 0 (le costanti) e i termini di ordine 1 (la variabili stesse), ignorando qualunque altro termine di ordine superiore.
- consideriamo solamente il grado di libertà torsionale (visto che il nostro scopo è studiare la dinamica torsionale). In altre parole nelle equazioni spaziali, delle 6 equazioni normalmente presenti, considereremo solo l'ultima (rotazione attorno a  $z_f$ ).

Le ipotesi sopraelencate, tra le altre cose, garantiscono nel caso di rotore elastico anche il disaccoppiamento fondamentale tra dinamica flessionale (a 4DOF), dinamica torsionale (a 1DOF) e dinamica assiale (1DOF). Quando tali ipotesi non saranno verificate, allora sarà necessario l'impiego una teoria della trave 1D a 6DOF.

L'unica variabile nodale associata al  $k$ -esimo nodo sarà in questo caso la rotazione della sezione  $\varphi_k$  attorno all'asse di rotazione della macchina  $z_f$  (si veda la Fig. 91). Occorre sottolineare come normalmente non si considerano le rotazioni assolute delle sezione  $\Phi_k$ , bensì le loro rotazioni rispetto alla velocità angolare media della albero  $\Omega$  (la speed della macchine) o a una qualche altra velocità angolare di riferimento:  $\Phi_k = \varphi_k + \Omega t$ . Siamo in altre parole interessati solamente alla rotazione elastica della varie sezioni della trave  $\varphi_k$  e scorporiamo dunque la rotazione rigida complessiva dell'albero  $\Omega t$ .



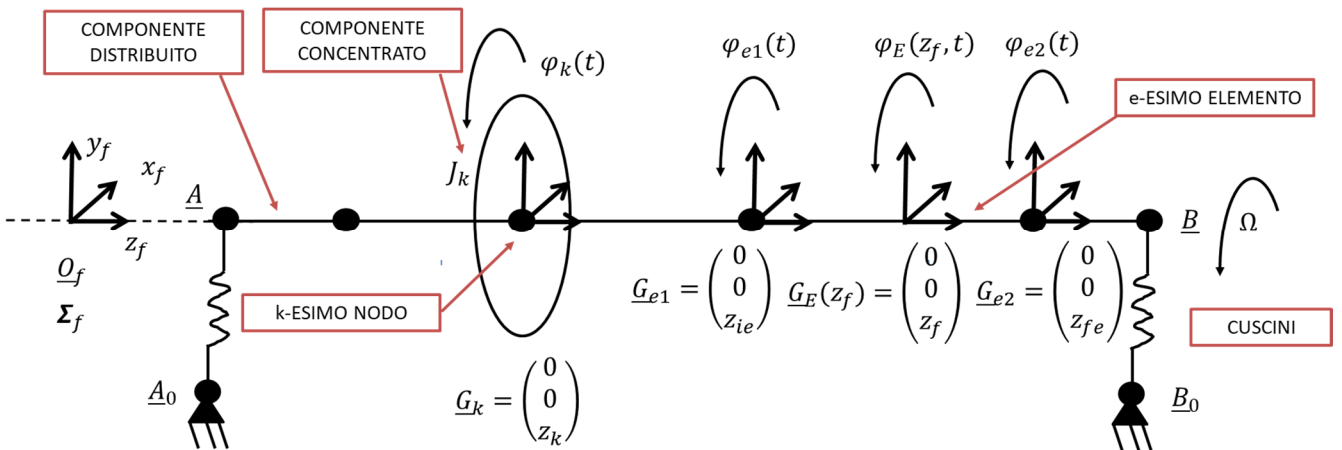


Figura 91 Modello FEM di rotore elastico 1D con 2 nodi per elemento e 1DOF per nodo

In linea con quanto detto, avremo ora un'unica variabile nodale per ogni nodo e, a partire da esse, potremo definire il vettore contenente tutte le variabili Lagrangiane del sistema:

$$q_k(t) = \varphi_k \in R^{\text{DOFN}=1}, \quad k = 1 \dots NN, \quad \underline{q}(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \dots \\ \varphi_{NN} \end{pmatrix} \in R^{\text{DOFN} \cdot NN = NN}. \quad (7.1.1)$$

Le equivalenti grandezze per il generico elemento sono di conseguenza:

$$q_{e1}(t) = \varphi_{e1} \in R^{\text{DOFN}=1}, \quad q_{e2}(t) = \varphi_{e2} \in R^{\text{DOFN}=1}, \quad q_E(z_f, t) = \varphi_E \in R^{\text{DOFN}=1} \quad (7.1.2)$$

$$\underline{q}_e(t) = \begin{pmatrix} \varphi_{e1} \\ \varphi_{e2} \end{pmatrix} \in R^{\text{DOFN} \cdot N_e = 1 \cdot 2 = 2}, \quad e = 1 \dots NE \quad (7.1.3)$$

dove  $\underline{q}_e(t)$  è il vettore che contiene le variabili nodali dei nodi appartenenti all'elemento considerato. Come sempre, un utile strumento per estrarre  $\underline{q}_k$  e  $\underline{q}_e$  dal vettore contenente tutte le variabili lagrangiane  $\underline{q}$  sono le matrici di connessione (matrici binarie formate da 0 e 1):

$$q_k = \varphi_k = J_k \underline{q}, \quad \underline{q}_e = H_e \underline{q}. \quad (7.1.4)$$

Usando un approccio Lagrangiano, dovremo arrivare a scrivere le equazioni di Lagrange per il nostro sistema

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{q}}} \right)^T - \left( \frac{\partial L}{\partial \underline{q}} \right)^T = \underline{Q}_{NC}, \quad L = T - V. \quad (7.1.5)$$

Dovremo quindi essere in grado di scrivere l'energia cinetica  $T$ , l'energia potenziale  $V$  e le azioni Lagrangiane non conservative  $\underline{Q}_{NC}$  del nostro sistema.

Alla fine (si veda sempre la Fig. 41) dovremo considerare i seguenti componenti della macchina rotante 1D:

- 1) COMPONENTI CONCENTRATI: entità concentrate dotate di massa e inerzia ma non di proprietà elastiche (stadi, giranti, etc.); i componenti concentrati dovranno essere posizionati sull'albero, solidalmente collegati a un nodo di riferimento del modello FEM (naturalmente non tutti i nodi sono associati a un componente concentrato!). Tali componenti avranno un'energia cinetica  $T_{dk}$  (d sta per disk) e un'energia potenziale  $V_{dk}$  solitamente trascurabile ( $V_{dk} = \text{cost}$ ).

- 2) COMPONENTI DISTRIBUITI / ELASTICI: entità distribuite dotate di massa, inerzia e di proprietà elastiche (solitamente sono i tratti di albero); i componenti elastici sono quasi sempre associati agli elementi del modello FEM. Tali componenti avranno un'energia cinetica  $T_e$  e un'energia potenziale  $V_e$ .
- 3) COMPONENTI ESTERNI / NON CONSERVATIVI: comprendono tutto quello che agisce sulla macchina dall'esterno come forzanti esterne (carichi parali / forzanti di fluido, azioni dovute a motori/generatori, azione della gravità o di altri campi di forza esterni, etc.), componenti modellabili come elementi di forza (cuscini, tenute, giunti, riduttori, etc.), smorzamento del materiale e altri effetti strutturali non conservativi modellati come azioni esterne usando il Principio dei Lavori Virtuali. I componenti esterni / non conservativi sono chiaramente associati alle azioni Lagrangiane non conservative  $Q_{NC}$ . In questo capitolo parleremo delle forzanti esterne più comuni e in modo assai semplificato dello smorzamento. Analizzeremo inoltre gli elementi di forza e soprattutto i cuscini fluidodinamici mentre nel capitolo 9 torneremo a parlare di forzanti esterne soffermandoci sulla modellazione delle forzanti di fluido (interazione fluido-struttura).

Nel complesso avremo dunque

$$L = T - V = \sum_{k=1}^{NN} T_{dk} + \sum_{e=1}^{NE} T_e - \sum_{e=1}^{NE} V_e. \quad (7.1.6)$$

## 7.2 Elementi concentrati

Per quanto riguarda gli elementi concentrati, modellabili come corpi rigidi concentrati solidalmente collegati alla terna associata al generico nodo  $k$ -esimo, calcoleremo l'energia cinetica  $T_{dk}$  e trascureremo l'energia potenziale  $V_{dk} = cost$ . L'energia cinetica  $T_{dk}$  può essere calcolata facilmente poiché il moto dell'elemento concentrato è una pura rotazione attorno a  $z_k$ :

$$T_{dk} = \frac{1}{2} J_k \dot{\varphi}_k^2 \quad (7.2.1)$$

dove  $J_k$  è il momento polare dell'elemento concentrato associato al  $k$ -esimo elemento. Si noti come, se avessimo usato la rotazione assoluta  $\Phi_k$  per il calcolo di  $T_{dk}$  invece delle rotazioni relative  $\varphi_k$ , avremmo ottenuto dei termini in più nella (7.2.1). Tuttavia tali termini non darebbero contributi a livello di equazioni di Lagrange perché sparirebbero durante le derivazioni!

## 7.3 Elementi elastici

Per calcolare l'energia cinetica  $T_e$  e l'energia potenziale elastica  $V_e$  degli elementi elastici faremo uso della più semplice teoria torsionale della trave 1D a 1 DOF. In questo caso per la nomenclatura si faccia riferimento alla Fig. 92.

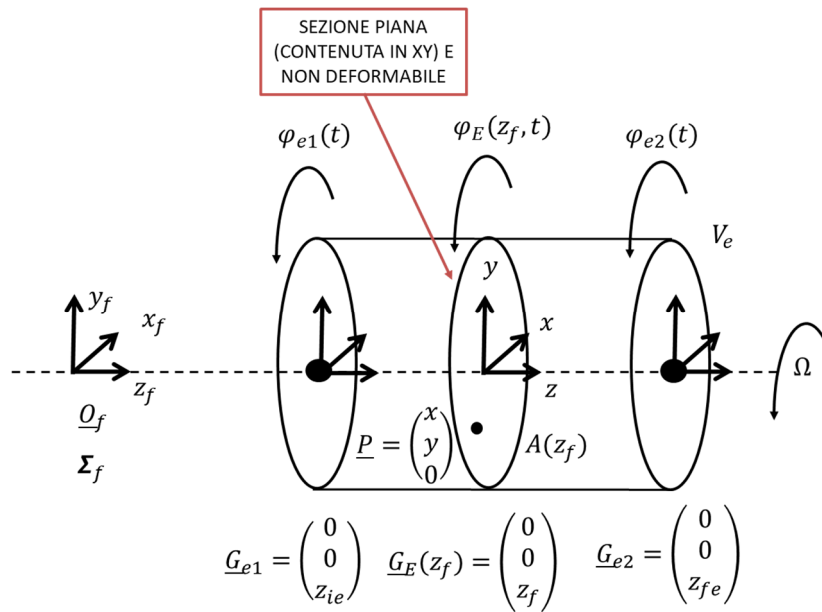


Figura 92 Elemento FEM 1D con 2 nodi per elemento e 4DOF per nodo

Una volta richiamata la nomenclatura, è il momento di introdurre l'approssimazione FEM per questo specifico problema:

$$q_E(z_f, t) = \varphi_E(z_f, t) \cong N_e(z_f) \underline{q}_e(t). \quad (7.3.1)$$

In questo caso  $N_e(z_f)$  è semplicemente un vettore riga  $1 \times 2$  (coerentemente con la (7.3.1)) e ognuno dei suoi 2 elementi è fatto da polinomi interpolanti. La teoria della trave 1D in questione è governata dall'equazione

$$\begin{cases} \rho J \frac{\partial^2 \varphi_E}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial z_f} \left( JG \frac{\partial \varphi_E}{\partial z_f} \right) = q(z_f, t) \\ \gamma = r \frac{\partial \varphi_E}{\partial z_f}, \quad \tau = G\gamma = Gr \frac{\partial \varphi_E}{\partial z_f} \end{cases} \quad (7.3.2)$$

dove  $\rho$  è la densità del materiale,  $J$  è il momento polare geometrico della sezione,  $G$  il modulo di rigidezza a taglio,  $r$  è la distanza del generico punto della sezione della trave dall'asse di rotazione e  $q(z_f, t)$  è l'eventuale carico distribuito sulla trave.

Troviamo ora l'energia potenziale elastica del generico elemento  $V_e$  :

$$\begin{aligned} V_e &= \frac{1}{2} \int_{V_e} \sum_{i,j} \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} dV = \frac{1}{2} \int_{V_e} \tau \gamma dV = \frac{1}{2} \int_{l_i}^{l_e} \int_{A(z_f)} Gr^2 \left( \frac{\partial \varphi_E}{\partial z_f} \right)^2 dA dz_f = \\ &= \int_{l_i}^{l_e} \int_{A(z_f)} Gr^2 \underline{q}_e^T N_e'^T N_e' \underline{q}_e dA dz_f = \frac{1}{2} \underline{q}_e^T \left[ \int_{z_{ie}}^{z_{fe}} JGN_e'^T N_e' dz_f \right] \underline{q}_e = \\ &= \frac{1}{2} \underline{q}_e^T K_e \underline{q}_e \end{aligned} \quad (7.3.3)$$

dove  $J$  è il momento polare geometrico della sezione. Il calcolo dell'energia potenziale elastica del generico elemento  $T_e$

$$T_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} \rho \|\underline{v}_P\|^2 dV \quad (7.3.4)$$

è questa volta più semplice di quanto accadeva per le vibrazioni flessionali perché il generico punto della sezione della trave ha un moto di pura rotazione attorno all'asse della trave stessa, ovvero:  $\|\underline{v}_P\| = \left| r \frac{\partial \varphi_E}{\partial t} \right|$ . Si ha dunque:

$$T_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} \rho r^2 \left( \frac{\partial \varphi_E}{\partial t} \right)^2 dV_e = \quad (7.3.5)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{l_i}^{l_e} \int_A \rho r^2 \underline{\dot{q}}_e^T N_e^T N_e \underline{\dot{q}}_e dA dz_f = \frac{1}{2} \underline{\dot{q}}_e^T \left[ \int_{z_{ie}}^{z_{fe}} \rho J N_e^T N_e dz_f \right] \underline{\dot{q}}_e = \frac{1}{2} \underline{\dot{q}}_e^T M_e \underline{\dot{q}}_e.$$

Si noti come, se avessimo usato la rotazione assoluta  $\Phi_E$  per il calcolo di  $V_e$  e  $T_e$  invece delle rotazioni relative  $\varphi_E$ , avremmo ottenuto dei termini in più nelle (7.1.7) e (7.1.9). Tuttavia tali termini non darebbero contributi a livello di equazioni di Lagrange perché sparirebbero durante le derivazioni!

## 7.4 Assemblaggio delle equazioni

L'assemblaggio delle equazioni di moto anche in questo caso è abbastanza facile una volta determinati i vari contributi. Ricordando che

$$L = T - V = \sum_{k=1}^{NN} T_{dk} + \sum_{e=1}^{NE} T_e - \sum_{e=1}^{NE} V_e, \quad (7.4.1)$$

alla luce dei risultati per paragrafo 7.3, possiamo scrivere per gli elementi concentrati e per gli elementi distribuiti:

$$T_{dk} = \frac{1}{2} \dot{\varphi}_k J_k \dot{\varphi}_k \quad (7.4.2)$$

$$V_e = \frac{1}{2} \underline{q}_e^T K_e \underline{q}_e$$

$$T_e = \frac{1}{2} \underline{\dot{q}}_e^T M_e \underline{\dot{q}}_e.$$

Introducendo le (7.4.2) nella (7.4.1) e usando le matrici di connessione  $\varphi_k = J_k \underline{q}$  e  $\underline{q}_e = H_e \underline{q}$ , si ottiene

$$V_{tot} = \sum_{e=1}^{NE} V_e = \sum_{e=1}^{NE} \frac{1}{2} \underline{q}_e^T K_e \underline{q}_e = \frac{1}{2} \underline{q}^T \left( \sum_{e=1}^{NE} H_e^T K_e H_e \right) \underline{q} = \frac{1}{2} \underline{q}^T K_{tot} \underline{q} \quad (7.4.3)$$

$$\begin{aligned} T_{tot} &= \sum_{e=1}^{NE} T_e = \sum_{e=1}^{NE} \frac{1}{2} \underline{\dot{q}}_e^T M_e \underline{\dot{q}}_e = \frac{1}{2} \underline{\dot{q}}^T \left( \sum_{e=1}^{NE} H_e^T M_e H_e \right) \underline{\dot{q}} = \\ &= \frac{1}{2} \underline{\dot{q}}^T M_{tot} \underline{\dot{q}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{dtot} &= \sum_{k=1}^{NN} T_{dk} = \sum_{k=1}^{NN} \frac{1}{2} \dot{\varphi}_k J_k \dot{\varphi}_k = \\ &= \frac{1}{2} \underline{\dot{q}}^T M_{dtot} \underline{\dot{q}}, \quad M_{dtot} = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & J_k & \\ & & \ddots \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Sostituendo infine le (7.4.3) nelle equazioni di Lagrange (7.1.5) si arriva alla seguente equazione:

$$(M_{dtot} + M_{etot})\ddot{\underline{q}} + K_{etot}\underline{q} = \underline{Q}_{NC} = \underline{Q}_b + \underline{Q}_{sm} + \underline{Q}_{ext} \quad (7.4.4)$$

dove, dentro le azioni lagrangiane non conservative  $\underline{Q}_{NC}$ , abbiamo considerato le generiche forzanti esterne  $\underline{Q}_{ext}$  agenti sulla macchina (carichi palari / forzanti di fluido, azioni dovute a motori/generatori, azione della gravità o di altri campi di forza esterni, etc.), lo smorzamento del materiale  $\underline{Q}_{sm}$  (modellato come azione esterna usando il Principio dei Lavori Virtuali) e le azioni  $\underline{Q}_b$  dei componenti modellabili come elementi di forza (cuscini, tenute, giunti, riduttori, etc.). Solitamente le matrici  $M_{dtot}, M_{etot}$  sono simmetriche definite positive mentre la matrice  $K_{etot}$  è simmetrica semidefinita positiva.

In questo capitolo parleremo delle forzanti esterne più comuni e, in modo assai semplificato, dello smorzamento. Parleremo inoltre degli elementi di forza e soprattutto dei cuscini fluidodinamici e nel capitolo 9 torneremo a parlare di forzanti esterne soffermandoci sulla modellazione delle forzanti di fluido (interazione fluido-struttura).

Supponiamo per ora di adottare per gli elementi di forza (e soprattutto per cuscini e tenute) agenti sul generico nodo  $k$ -esimo una classica formulazione linearizzata tipo molla tridimensionale:

$$Q_{bk} = -k_{Ck}(\Omega)\varphi_k - c_{Ck}(\Omega)\dot{\varphi}_k = -c_{Ck}(\Omega)\dot{\varphi}_k \quad (7.4.5)$$

in cui ovviamente  $k_{Ck}(\Omega) = 0$  (altrimenti il cuscinio sarebbe bloccato!) e i coefficienti di smorzamento  $c_{Ck}(\Omega)$  possono dipendere dalla speed  $\Omega$  e da altri parametri del sistema. Il vettore complessivo delle azioni lagrangiane associate agli elementi di forza  $\underline{Q}_b$  potrà essere determinato semplicemente impilando le (7.4.5):

$$\underline{Q}_b = \underline{Q}_{b0} - C_C(\Omega)\dot{\underline{q}}, \quad C_C(\Omega) = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & c_{Ck}(\Omega) & \\ & & \ddots \end{bmatrix}, \quad \underline{Q}_{b0} = \begin{pmatrix} \dots \\ Q_{b0k}(\Omega) \\ \dots \end{pmatrix}. \quad (7.4.6)$$

Inserendo la (7.4.6) nella (7.4.4) si arriva alle equazioni:

$$(M_{dtot} + M_{etot})\ddot{\underline{q}} + C_C(\Omega)\dot{\underline{q}} + K_{etot}\underline{q} = \underline{Q}_{sm} + \underline{Q}_{b0}(\Omega) + \underline{Q}_{ext} \quad (7.4.7)$$

$$M\ddot{\underline{q}} + C_C(\Omega)\dot{\underline{q}} + K_{etot}\underline{q} = \underline{Q}_{sm} + \underline{Q}_{b0}(\Omega) + \underline{Q}_{ext}$$

dove la matrice  $M$  rimane simmetrica definita positiva.

Supponendo infine di adottare un semplice modello di smorzamento del materiale lineare (vedremo nel prossimo paragrafo come fare a determinare la matrice di smorzamento  $C_{sm}$  con il Principio dei Lavori Virtuali)

$$\underline{Q}_{sm} = -C_{sm}\dot{\underline{q}} \quad (7.4.8)$$

si ottiene l'equazione generale della rotordinamica torsionale (a 1DOF) per un rotore elastico 1D:

$$M\ddot{\underline{q}} + (C_C(\Omega) + C_{sm})\dot{\underline{q}} + K_{etot}\underline{q} = \underline{Q}_{b0}(\Omega) + \underline{Q}_{ext} \quad (7.4.9)$$

$$M\ddot{\underline{q}} + C\dot{\underline{q}} + K\underline{q} = \underline{Q}_{b0}(\Omega) + \underline{Q}_{ext}.$$

Si noti infine come il termine  $\underline{Q}_{b0}(\Omega)$  legato alle perdite di cuscinio è costante. Dal momento che l'effetto di una forzante costante su un sistema lineare è solamente quello di traslare la risposta del sistema di una costante (si vedano i capitoli precedenti), è possibile non considerarlo nei calcoli (basta considerarlo alla fine!).

## 7.5 Trattazione semplificata dello smorzamento di materiale

Mostriamo ora come calcolare le azioni lagrangiane associate allo smorzamento del materiale nell'ipotesi estremamente semplificata di smorzamento lineare (modello di smorzamento linearizzato):

$$\underline{Q}_{sm} = -C_{sm}\underline{\dot{q}}. \quad (7.5.1)$$

Il calcolo di  $\underline{Q}_{sm}$  è una interessante e istruttiva applicazione del Principio dei Lavori Virtuali (PLV) al modello di trave in uso. Il PLV afferma che il lavoro virtuale scritto nello spazio delle variabili lagrangiane è uguale, per qualunque spostamento virtuale compatibile con i vincoli del sistema, al lavoro virtuale scritto nello "spazio fisico". Considerando l'  $e$ -esimo elemento del nostro modello FEM, si ha:

$$\delta \underline{q}_e^T \underline{Q}_{sm}^e = -\delta L_{sm}^e. \quad (7.5.2)$$

dove  $\delta L_{sm}^e$  è il lavoro virtuale nello spazio fisico effettuato dal sistema. Ipotizzando che il materiale abbia una semplice caratteristica lineare visco-elastica del tipo

$$\tau = \tau_{el} + \tau_{sm} = G\gamma + G_{sm}\dot{\gamma}, \quad (7.5.3)$$

è possibile calcolare  $-\delta L_{sm}^e$  per la sola componente di smorzamento della (7.5.3) (ho già considerato la componente elastica nel paragrafo 7.3!):

$$-\delta L_{sm}^e = -\int_{V_e} \sum_{i,j} \delta \varepsilon_{ij} \sigma_{ijsm} dV = -\int_{V_e} \delta \gamma \tau_{sm} dV. \quad (7.5.4)$$

Ricordando che valgono le seguenti relazioni costitutive

$$\gamma = r \frac{\partial \varphi_E}{\partial z_f}, \quad \tau = G\gamma = Gr \frac{\partial \varphi_E}{\partial z_f}, \quad (7.5.5)$$

si ha

$$\delta \gamma = r \delta \frac{\partial \varphi_E}{\partial z_f} = r N_e' \delta \underline{q}_e, \quad \tau_{sm} = G_{sm} \dot{\gamma} = G_{sm} r \frac{\partial^2 \varphi_E}{\partial z_f \partial t} = G_{sm} r N_e' \underline{\dot{q}}_e \quad (7.5.6)$$

Sostituendo nella (7.5.4) si ha infine:

$$-\delta L_{sm}^e = -\int_{z_{ie}}^{z_{fe}} \int_A \left[ G_{sm} r^2 \delta \underline{q}_e^T N_e'^T N_e' \underline{\dot{q}}_e \right] dA dz_f = \quad (7.5.7)$$

$$\begin{aligned} -\delta L_{sm,u}^e &= -\delta \underline{q}_e^T \int_{z_{ie}}^{z_{fe}} G_{sm} J N_e'^T N_e' dz_f \underline{\dot{q}}_e = \\ &= -\delta \underline{q}_e^T C_{sm,u}^e \underline{\dot{q}}_e \end{aligned}$$

in cui  $J$  è come sempre il momento polare geometrico della sezione. Dal momento che il PLV è vero qualunque siano gli spostamenti virtuali compatibili con i vincoli  $\delta \underline{q}_e$ , si ha che

$$\underline{Q}_{sm}^e = -C_{sm,u}^e \underline{\dot{q}}_e. \quad (7.5.8)$$

Infine, per trovare il vettore complessivo delle azioni lagrangiane associate allo smorzamento  $Q_{sm}$ , usiamo nuovamente le matrici di connessione:

$$\underline{Q}^{sm} = \sum_{e=1}^{NE} H_e^T Q_{sm}^e = - \sum_{e=1}^{NE} H_e^T C_{sm}^e H_e \dot{q} = -C_{sm} \dot{q}. \quad (7.5.9)$$

## 7.6 Cuscini oleodinamici

Come già detto nel caso delle vibrazioni flessionali, per una data configurazione (atto di moto) di albero (corpo 1) e sede / pattino (corpo 2), la forze e i momenti agenti sui corpi in questione a seguito nella presenza del cuscinio dipenderanno dagli atti di moto stessi:

$$\underline{F}_{21} = \underline{F}_{21}(\underline{G}_1, \underline{\dot{G}}_1, \underline{\phi}_1, \underline{\dot{\phi}}_1, \underline{G}_2, \underline{\dot{G}}_2, \underline{\phi}_2, \underline{\dot{\phi}}_2), \quad \underline{F}_{12} = \underline{F}_{12}(\underline{G}_1, \underline{\dot{G}}_1, \underline{\phi}_1, \underline{\dot{\phi}}_1, \underline{G}_2, \underline{\dot{G}}_2, \underline{\phi}_2, \underline{\dot{\phi}}_2) \quad (7.6.1)$$

$$\underline{M}_{21} = \underline{F}_{21}(\underline{G}_1, \underline{\dot{G}}_1, \underline{\phi}_1, \underline{\dot{\phi}}_1, \underline{G}_2, \underline{\dot{G}}_2, \underline{\phi}_2, \underline{\dot{\phi}}_2), \quad \underline{M}_{12} = \underline{F}_{12}(\underline{G}_1, \underline{\dot{G}}_1, \underline{\phi}_1, \underline{\dot{\phi}}_1, \underline{G}_2, \underline{\dot{G}}_2, \underline{\phi}_2, \underline{\dot{\phi}}_2).$$

Se ora identifichiamo il corpo 1 con l'albero e con 2 la sede e supponiamo che il cuscinio sia collocato in prossimità del nodo  $k$ -esimo, si ha quindi  $\underline{G}_1 = \underline{G}_k$  e  $\underline{\phi}_1 = \underline{\phi}_k$ . Considerando quindi solo le componenti torsionali di  $\underline{F}_{21}$ ,  $\underline{M}_{21}$  (vedi la (7.6.1)) e la dipendenza dalle sole variabili torsionali contenute nelle coordinate spaziali  $\underline{G}_k$ ,  $\underline{\phi}_k$  (ovvero la rotazione assoluta della sezione  $\Phi_k = \varphi_k + \Omega t$ ), si ottengono le azioni lagrangiane agenti sull'albero:

$$Q_{bk} = M_{z21} = Q_{bk}(\Phi_k, \dot{\Phi}_k). \quad (7.6.2)$$

Solitamente, per la maggioranza della applicazioni pratiche, la dipendenza dalle altre componenti dell'atto di moto può essere ignorata in prima approssimazione.

Se invece identifichiamo con 2 l' $h$ -esimo pattino (con  $h = 2 \dots NP + 1$ ), dovremo chiaramente tener conto delle forze e dei momenti agenti sull'albero prodotti da tutti i pattini:

$$Q_{bhk} = M_{z21} = Q_{bhk}(\Phi_k, \dot{\Phi}_k), \quad Q_{bk} = M_{z1} = Q_{bk}(\Phi_k, \dot{\Phi}_k) = \sum_{h=2}^{NP+1} Q_{bhk}(\Phi_k, \dot{\Phi}_k). \quad (7.6.3)$$

La modellazione a parametri concentrati dei cuscini a fluido mediante i coefficienti di rigidità e smorzamento equivalenti  $k_{Ck}$  e  $c_{Ck}$  richiede, anche nel caso delle vibrazioni torsionali, la linearizzazione delle azioni lagrangiane non conservative associate ai cuscini:

$$Q_{bk} = M_{z21} = Q_{bk}(\Phi_k, \dot{\Phi}_k). \quad (7.6.4)$$

Linearizzando la (7.6.4) nell'intorno di un punto di lavoro dell'albero  $\Phi_{k0}$ ,  $\dot{\Phi}_{k0}$  si ottiene:

$$Q_{bk}^{lin} = Q_{bk}(\Phi_{k0}, \dot{\Phi}_{k0}) + \frac{\partial Q_{bk}(\Phi_{k0}, \dot{\Phi}_{k0})}{\partial \Phi_k} (\Phi_k - \Phi_{k0}) + \frac{\partial Q_{bk}(\Phi_{k0}, \dot{\Phi}_{k0})}{\partial \dot{\Phi}_k} (\dot{\Phi}_k - \dot{\Phi}_{k0}). \quad (7.6.5)$$

Data la grande complessità della funzione  $Q_{bk}(\Phi_k, \dot{\Phi}_k, \Omega)$  le varie derivate (e quindi la linearizzazione) dovrà essere effettuata numericamente a partire da un'opportuna campagna di simulazioni al variare dell'atto di moto dell'albero  $\Phi_k$ ,  $\dot{\Phi}_k$  oppure mediante un accurata campagna sperimentale al banco prova (sempre al variare dell'atto di moto dell'albero e della speed della macchina).

Per semplicità si sceglie solitamente come configurazione di riferimento la posizione nominale dell'albero all'rotazione  $\Omega$ , ovvero  $\Phi_{k0} = 0$ ,  $\dot{\Phi}_{k0} = \Omega$ . Si suppone inoltre che il cuscinio non eserciti né forze né momenti sull'albero in configurazione nominale e cioè:  $Q_{bk}(\varphi_{k0}, \dot{\varphi}_{k0}, \Omega) = 0$ .

Se definiscono dunque i coefficienti di smorzamento del cuscinio come (coefficienti scalari in quanto la dinamica torsionale della trave è a 1DOF):

$$k_{Ck}(\Omega) = -\frac{\partial Q_{bk}(\Phi_{k0}, \dot{\Phi}_{k0})}{\partial \Phi_k}, \quad c_{Ck}(\Omega) = -\frac{\partial Q_{bk}(\Phi_{k0}, \dot{\Phi}_{k0})}{\partial \dot{\Phi}_k} \quad (7.6.6)$$

da cui

$$Q_{bk}^{lin} = Q_{b0k}(\Omega) - k_{Ck}(\Omega)\varphi_k - c_{Ck}(\Omega)(\dot{\varphi}_k - \Omega) = Q_{b0k}(\Omega) - c_{Ck}(\Omega)\dot{\varphi}_k. \quad (7.6.7)$$

in cui ovviamente  $k_{Ck}(\Omega) = 0$  (altrimenti il cuscinio sarebbe bloccato!) e il coefficiente di smorzamento  $c_{Ck}(\Omega)$  può dipendere dalla speed  $\Omega$  e da altri parametri del sistema.

In Fig. 93 si riportano a titolo di esempio l'andamenti tipico, in funzione della speed della macchina  $\Omega$ , delle perdite del cuscinio. Per essere più precisi, nei data sheet dei cuscini fluidodinamici vengono spesso riportare le potenze dissipate (Fig. 93), dipendenti ovviamente da  $Q_{b0k}(\Omega)$  e da  $c_{Ck}(\Omega)$ :  $P_{bk} = \dot{\varphi}_k Q_{bk}^{lin} = (\dot{\varphi}_k + \Omega)Q_{bk}^{lin}$ .

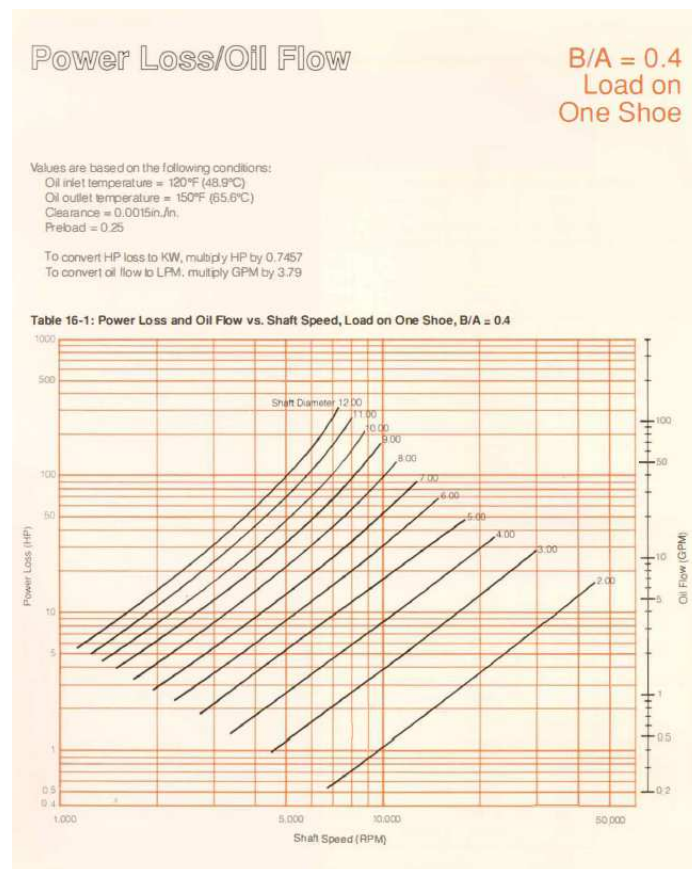


Figura 93 Parametro di smorzamento del cuscinio in funzione della speed della macchina

E' evidente la forte dipendenza dei coefficienti di smorzamento dalla speed della macchina  $\Omega$ , aspetto potenzialmente piuttosto negativi sia per la stabilità del sistema che per i livelli di vibrazione della macchina (si veda quanto detto per i diagrammi di Campbell e di Bode).



## 7.7 Vibrazioni libere: diagrammi di Campbell, classificazione modale e mappa modale

In questo paragrafo non considereremo il termine costante  $\underline{Q}_{b0}(\Omega)$  legato alle perdite di cuscinio. Dal momento che l'effetto di una forzante costante su un sistema lineare è solamente quello di traslare la risposta del sistema di una costante (si vedano i capitoli precedenti), è possibile non considerarlo nei calcoli (basta considerarlo alla fine!). Analizziamo dunque la soluzione dell'equazione:

$$M\ddot{\underline{q}} + (C_C(\Omega) + C_{sm})\dot{\underline{q}} + K_{tot}\underline{q} = \underline{Q}_{b0}(\Omega) + \underline{Q}_{ext} = \underline{0} \quad (7.7.1)$$

Come detto nel paragrafo 1.2, l'analisi ci dice che la soluzione libera (associata al moto libero) ha la forma:

$$\underline{q}_l(t) = \sum_{j=1}^{2N} c_j \underline{q}_j e^{s_j t} \quad (7.7.2)$$

dove

$$s_{i,i+N} = -\zeta_i \omega_{ni} \pm j \omega_{ni} \sqrt{1 - \zeta_i^2} = -\zeta_i \omega_{ni} \pm j \omega_{pi}, \quad \underline{q}_i = \begin{pmatrix} \dots \\ \varphi_{ik} \\ \dots \end{pmatrix}, \quad \underline{q}_{i+N} = \bar{\underline{q}}_i, \quad i = 1 \dots N, \quad (7.7.3)$$

sono gli autovalori (associati alle pulsazioni proprie  $\omega_{pi}$ ) e gli autovettori del problema (associati alle deformate modali).

I modi di vibrare del sistema sono definiti invece come

$$\underline{q}_i(t) = \begin{pmatrix} \dots \\ \varphi_{ik}(t) \\ \dots \end{pmatrix} = Re(\underline{q}_i e^{s_i t}) = Re\left(\begin{pmatrix} \dots \\ \varphi_{ik} \\ \dots \end{pmatrix} e^{s_i t}\right), \quad \varphi_{ik}(t) = Re(\varphi_{ik} e^{s_i t}) \quad (7.7.4)$$

Si noti che il sistema ha  $2N$  autovalori ( $N$  coppie complesse coniugate),  $2N$  autovettori ( $N$  coppie complesse coniugate) e  $2N$  modi di vibrare ( $N$  coppie uguali). Di conseguenza le pulsazioni naturali / proprie e gli smorzamenti modali distinti saranno solamente  $N$ .

Si noti come, nel caso delle vibrazioni torsionali, l'albero è libero di ruotare globalmente attorno all'asse  $z_f$ . Esiste quindi un modo rigido per il nostro sistema FEM a pulsazione  $\omega_{p1} = 0$  (chiaramente è il primo in ordine di frequenza). Tale modo corrisponde al moto rigido complessivo dell'albero indeformato attorno all'asse  $z_f$  ed è caratterizzato dall'autovettore (a parte la normalizzazione dello stesso):  $\underline{q}_1 = [1 \dots 1]^T$ . Si osservi a riguardo che i cuscinetti agiscono sull'albero tramite un'azione smorzante, non tramite un'azione elastica. Di conseguenza essi non bloccano il moto complessivo di rotazione rigida dell'albero attorno al suo asse di rotazione.

Naturalmente, sempre per effetto dei cuscinetti a fluido, sia gli autovalori che gli autovettori del problema dipendono dal parametro  $\Omega$  (la velocità di rotazione / speed della macchina):

$$s_i(\Omega), \omega_{ni}(\Omega), \omega_{pi}(\Omega), \zeta_i(\Omega), \underline{q}_i(\Omega) \quad \text{con } \Omega \in [0 \quad \Omega_{max}]. \quad (7.7.5)$$

E' dunque molto importante capire a livello qualitativo questa dipendenza sia per il autovalori (tramite il diagramma di Campbell) che per gli autovettori (tramite lo studio del moto (whirl libero) e la classificazione modale). Il tutto sarà infine riassunto dalla mappa modale.

Partendo dallo studio degli autovalori, anche per le vibrazioni torsionali, si usa descrivere la dipendenza delle pulsazioni proprie o naturali  $\omega_{ni}(\Omega)$ ,  $\omega_{pi}(\Omega)$  e degli smorzamenti modali  $\zeta_i(\Omega)$  da  $\Omega$  in due diversi diagrammi Campbell (si veda la Fig. 94). In questo caso il sistema ha solamente  $N$  pulsazioni naturali / proprie e smorzamenti modali e quindi i diagrammi di Campbell sono formati da  $N$  rami. A prescindere dal fatto che l'ipotesi di disaccoppiamento delle dinamiche flessionali, torsionali e assiali sia verificata o meno, gli autovalori relativi ai DOF torsionali (corrispondente a un dinamica 1D localmente a 1DOF) non tendono a raggrupparsi in grappoli ma sono indipendenti tra loro (o, meglio, formano "grappoli di un solo elemento").

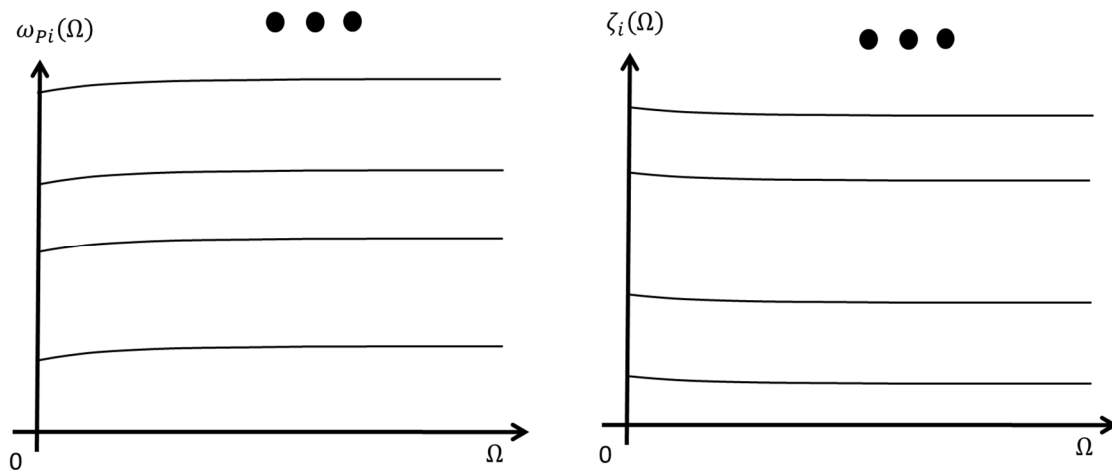


Figura 94 Diagramma di Campbell per il rotore elastico

Guardando alla Fig. 94 si nota come le pulsazioni naturali / proprie hanno un andamento quasi orizzontale tendendo a un valore asintotico per  $\Omega$  crescente così come gli smorzamenti (dipende dall'andamento di  $c_{ck}(\Omega)$ ). Analogamente la tendenza ad andare velocemente ad asintoto dipende anch'essa dal comportamento di  $c_{ck}(\Omega)$ .

Si noti infine come, solitamente, i modi torsionali sono caratterizzati da pulsazioni proprie più basse di quelli flessionali e assiali.

Per quanto riguarda lo studio degli autovettori, al contrario delle vibrazioni flessionali, non ha più senso parlare di "whirl libero" in quanto non stiamo più studiando la traiettoria del nodo  $\underline{G}_k$  ma solamente la rotazione della sezione a esso solidale  $\varphi_{ik}(t)$  attorno all'asse  $z_f$  (si veda la Fig. 95):

$$\varphi_{ik}(t) = Re(\varphi_{ik}e^{s_i t}). \quad (7.7.6)$$

Tale rotazione oscilla semplicemente alla pulsazione  $\omega_{pi}(\Omega)$  (uguale per tutti i nodi!) con modulo e fase (contenuti in  $\varphi_{ik}$ ) dipendenti dal nodo in questione. Tale oscillazione sarà come quella disegnata in Fig. 95 nel caso in cui gli smorzamenti modali siano nulli  $\zeta_i$  ( $\omega_{pi} = \omega_{ni}$ ). Nel caso in cui gli smorzamenti siano positivi  $\zeta_i > 0$  l'oscillazione dei vari nodi tenderà a zero.

In linea teorica ogni rotazione  $\varphi_{ik}(t)$  della sezione associata al nodo  $\underline{G}_k$  può oscillare con qualunque ampiezza e qualunque fase (contenuti in  $\varphi_{ik}$ !). Tuttavia, per il principio di coerenza modale, anche nelle vibrazioni torsionali Prof. Enrico Meli, Dipartimento di Ingegneria Industriale, Università di Firenze

i modi di vibrare tendono ad avere solamente forme regolari come quelle riportate in Fig. 95. Questo è dovuto al fatto i rotori sono solitamente di metallo (acciaio, leghe ad alta resistenza, etc) e non di gomma o di carta. Di conseguenza, sezioni della macchina adiacenti tra loro non potranno mai avere rotazioni “troppo diverse” tra loro (in tal caso non potremmo certo parlare di elasticità lineare e materiali lineari!).

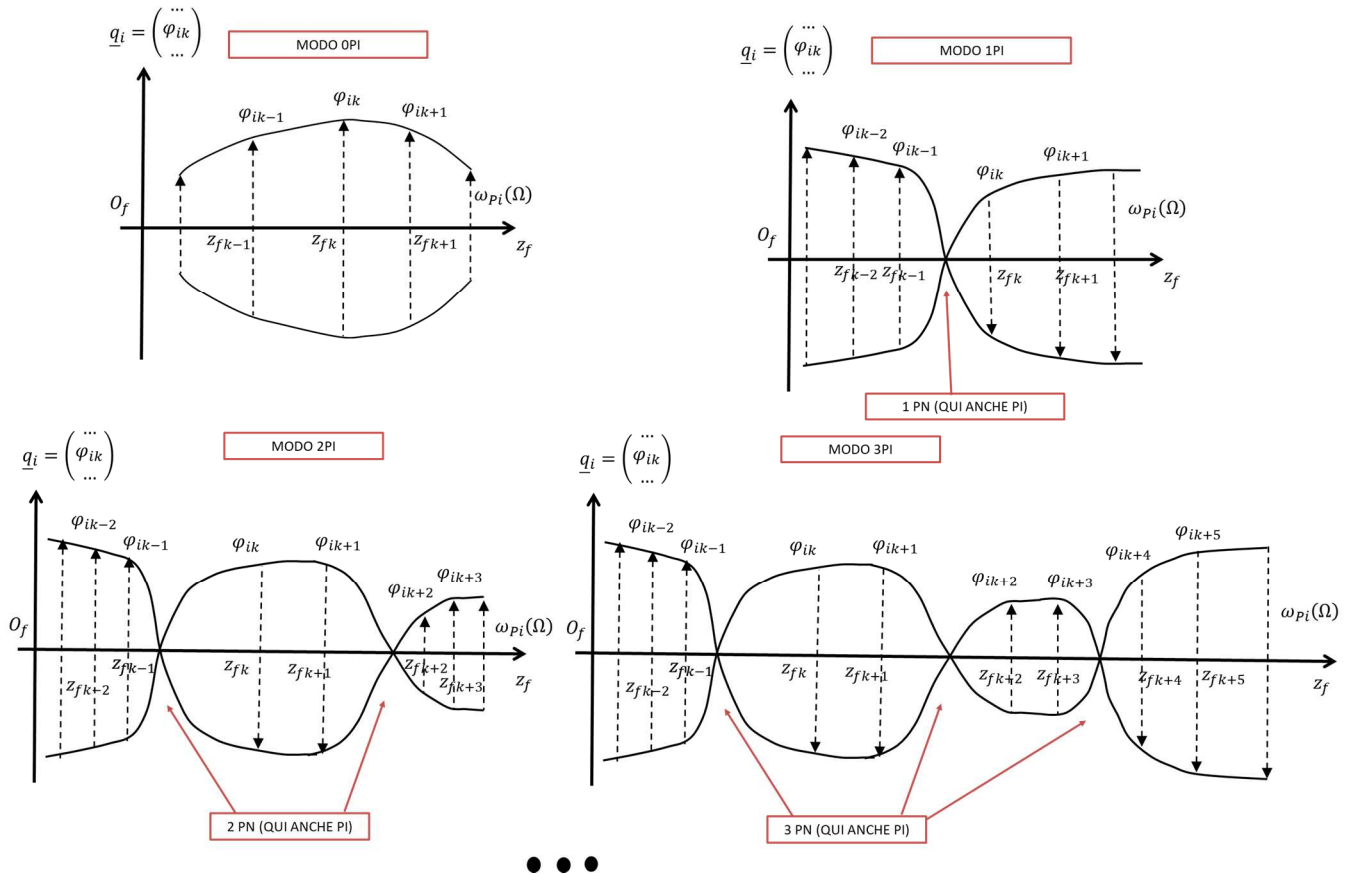


Figura 95 Il concetto di coerenza modale (si vedano anche le figure analoghe dei capitoli 4 e 10)

Come si può notare dalla Fig. 95, il modo di vibrare è detto 0PI quando non ha né punti nodali PN né ovviamente punti di inversione PI (le rotazioni  $\varphi_{ik}(t)$  tendono a essere tutte in fase). Se invece esistono dei punti nodali PN, il modo può avere dei punti di inversione PI e di conseguenza potremo avere modi 1PI, 2PI, 3PI a seconda di quante inversioni del moto avvengono.

Naturalmente non è detto che, se ci sono dei punti nodali PN, il modo necessariamente si invertirà in essi e che, di conseguenza, il punto in questione sia per forza un punto di inversione PI. Possono benissimo esistere punti nodali PN in cui il modo non si inverte e che quindi non sono punti di inversione PI. I punti di inversione PI sono quindi un sottoinsieme dei punti nodali PN (il numero dei PI è minore o uguale di quello dei PN).

Continuando quindi lo studio degli autovettori, è importante introdurre nuovamente la classificazione modale, ovvero un elenco qualitativo dei principali modi che il sistema può presentare. Come è possibile notare nella tabella riassuntiva riportata in Fig. 96, potremo avere modi di tipo primo elastico IE (senza punti nodali), secondo elastico IIE (con un punto nodale), terzo elastico IIIE (con due punti nodali) e così via al crescere del numero dei punti nodali e quindi dei lodi della deformata.

Ogni modo di vibrare IE, IIE, IIIIE, IVE, etc. (a seconda dei punti nodali) può naturalmente assumere le varie caratteristiche introdotte poco fa, ovvero 0PI, 1PI, 2PI 3PI e così via (a seconda dei punti di inversione).

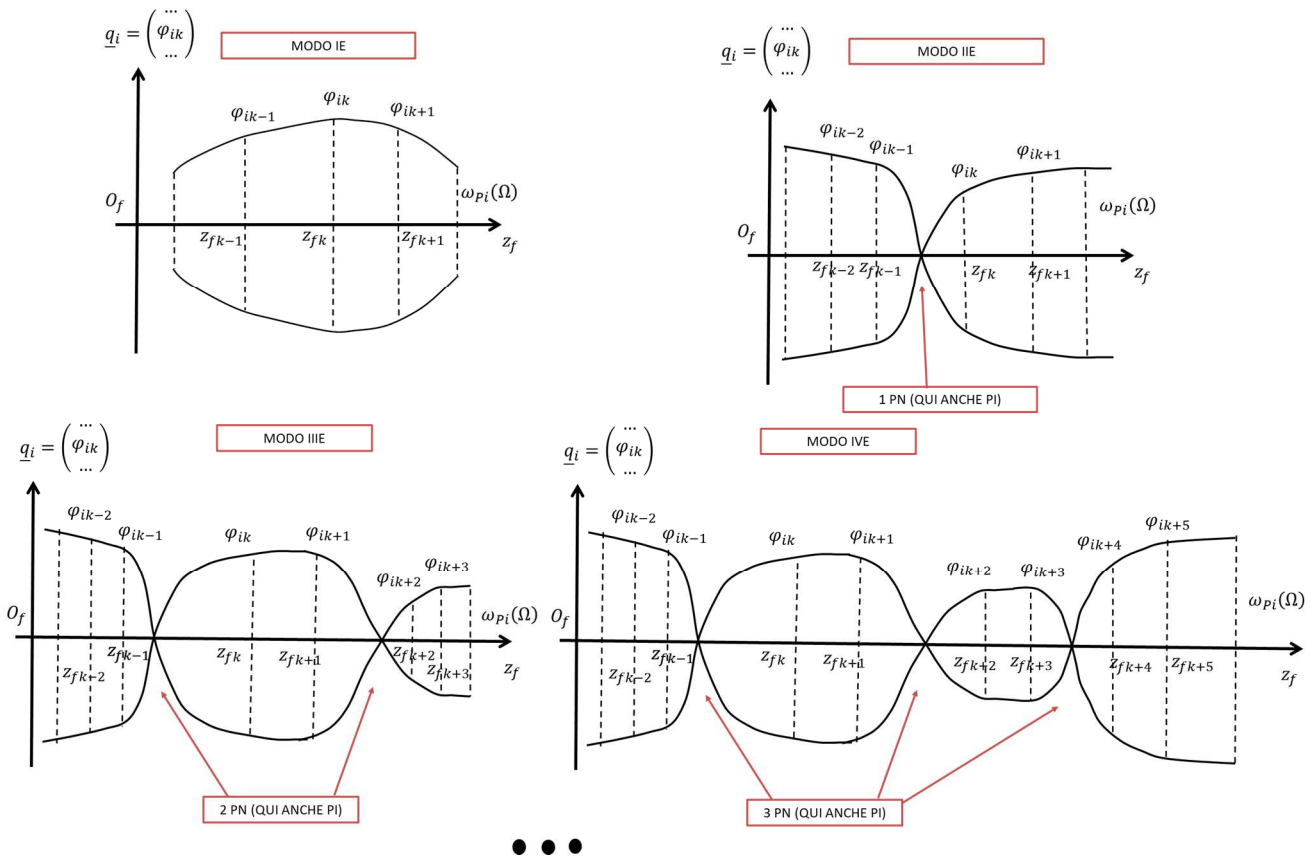


Figura 96 Classificazione modale per rotori elastici (si vedano anche le figure analoghe dei capitoli 4 e 10)

La rappresentazione dei modi riportata in Fig. 96 (così come per la Fig. 95) è valida a rigore nel caso in cui lo smorzamento modale sia nullo  $\zeta_i = 0$  ( $\omega_{p_i} = \omega_{n_i}$ ). Nel caso in cui gli smorzamenti siano positivi  $\zeta_i > 0$  l'oscillazione dei vari nodi tenderà a zero. A livello di stabilità passiamo di fatto da un modo semplicemente stabile (associato a un polo semplicemente stabile) a un modo asintoticamente stabile (associato a un polo asintoticamente stabile).

Usualmente, al crescere della pulsazione, il numero dei punti nodali aumenta. Si passa quindi da modi IE, a modi IIE, a modi IIIIE, a modi IVE e così via. Per quanto riguarda invece la caratteristica del modo, usualmente, al crescere della pulsazione si hanno caratteristiche 0PI, 1PI, 2PI, 3PI, etc. (a seconda dei punti di inversione).

Coerentemente con quanto detto prima, il primo modo di vibrare torsionale della macchina (modo rigido di rotazione attorno all'asse  $z_f$  avente pulsazione  $\omega_{p_1} = 0$  e deformata modale  $\underline{q}_1 = [1 \dots 1]^T$ ) è chiaramente un caso particolare del modo IE.

Tutto quanto è stato detto viene solitamente riassunto sulla mappa modale (vedi Fig. 97), ovvero un versione arricchita del diagramma di Campbell della pulsazioni proprie  $\omega_{p_i}(\Omega)$ . Su ognuno dei rami del diagramma sono rappresentate, per ogni valore di  $\Omega$ , le forme modali che si manifestano sulla macchina considerata (IE, IIE, IIIIE e così via all'aumentare dei punti nodali) insieme alla caratteristica di ciascun modo (0PI, 1PI, 2PI, 3PI e così via all'aumentare dei punti di inversione). Come già sottolineato, solitamente, al crescere della pulsazione  $\omega_{p_i}(\Omega)$ , il

numero dei punti nodali aumenta. Si passa quindi da modi IE, a modi IIE, a modi IIIE, a modi IVE e così via. Per quanto riguarda invece la caratteristica del modo, usualmente, al crescere della pulsazione  $\omega_{Pi}(\Omega)$  si hanno caratteristiche 0PI, 1PI, 2PI, 3PI, etc. (a seconda dei punti di inversione) .

Si noti inoltre che su ogni ramo, al variare di  $\Omega$ , possono esserci dei punti di transizione in cui la caratteristica del modo di vibrare cambia (come ad esempio nel secondo ramo dell'esempio riportato in Fig. 97). La transizione può riguardare anche la natura del modo stesso (come ad esempio nel quarto ramo dell'esempio riportato in Fig. 97).

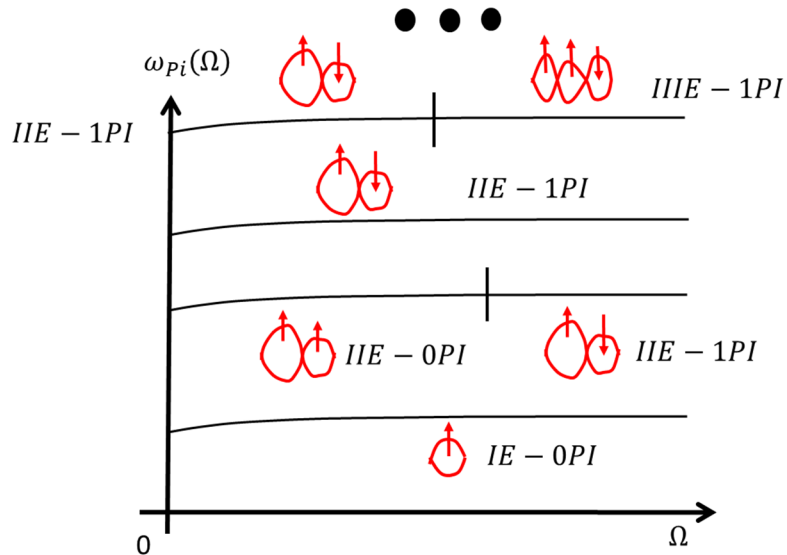


Figura 97 Mappa modale per rotori elastici

ELENCO RIASSUNTIVO DELLE VARIE DEFORMATE MODALI:

- 1) FORMA: IE  
CARATTERISTICA: 0PI
- 2) FORMA: IIE  
CARETTERISTICA: 0PI, 1PI
- 3) FORMA: IIIE  
CARETTERISTICA: 0PI, 1PI, 2PI
- 4) FORMA: IVE  
CARETTERISTICA: 0PI, 1PI, 2PI, 3PI
- ... ..

## 7.8 Vibrazioni forzate: classificazione delle forzanti, diagrammi di Campbell e diagrammi di Bode

### CLASSIFICAZIONE DELLE FORZANTI

In questo paragrafo non considereremo il termine costante  $\underline{Q}_{b0}(\Omega)$  legato alle perdite di cuscano. Dal momento che l'effetto di una forzante costante su un sistema lineare è solamente quello di traslare la risposta del sistema di una costante (si vedano i capitoli precedenti), è possibile non considerarlo nei calcoli (basta considerarlo alla fine!). Come nel caso delle vibrazioni flessionali, le principali forzanti che possono agire su una macchina rotante 1D (avente una dimensione prevalente, coincidente con l'asse di rotazione principale) sono le seguenti:

#### 1) FORZANTE ARMONICA

$$\underline{Q}(t) = Re \left[ \underline{Q}_0(\Omega) e^{j\omega_f(\Omega)t} \right], \quad \underline{Q}(t) = \begin{pmatrix} \dots \\ Q_h(t) \\ \dots \end{pmatrix}, \quad \underline{Q}_0(\Omega) = \begin{pmatrix} \dots \\ Q_{0h} \\ \dots \end{pmatrix} \quad (7.8.1)$$

dove  $h = 1 \dots NN$  indica il generico nodo e  $Q_h(t)$  la generica coppia su di esso agente. Se  $\omega_f(\Omega) = \Omega$  si parla di forzanti armoniche sincrone (prodotte ad esempio dagli sbilanciamenti presenti sul rotore), se  $\omega_f(\Omega) = n\Omega$  con  $n$  intero positivo o della forma  $1/m$  si parla di forzanti armoniche super/sub-sincrone (come ad esempio quelle derivanti dall'interazione palare (le forzanti di fluido), quelle derivanti da componenti come cuscini, giunti, riduttori, etc.), se  $\omega_f(\Omega) = \omega_f = cost$  si parla di forzanti armoniche asincrone (a esempio vibrazione a pulsazione costante provenienti dal basamento). Infine, quando ho una dipendenza qualunque  $\omega_f(\Omega)$ , si parla di forzanti armoniche generiche (derivanti per esempio da motori elettrici, generatori o altre macchine interagenti con quella considerata).

#### 2) FORZANTE PERIODICA

$$\underline{Q}(t) = Re \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \underline{Q}_k(\Omega) e^{jk\omega_0(\Omega)t} \right], \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}. \quad (7.8.2)$$

In questo caso la forzante periodica di periodo  $T$  è caratterizzata dalla sovrapposizione di un numero infinito numerabile di forzanti armoniche elementari a pulsazione  $k\omega_0(\Omega)$  (si veda la serie di Fourier). Si noti che la pulsazione principale  $\omega_0(\Omega)$  può dipendere dalla speed della macchina  $\Omega$  in uno qualunque dei modi descritti nel punto 1). Le forzanti periodiche sono anch'esse prodotte dall'interazione palare (le forzanti di fluido) e da componenti vari come cuscini, giunti, riduttori, etc.

#### 3) FORZANTE GENERICA

$$\underline{Q}(t, \Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{\tilde{Q}}(\omega, \Omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad \underline{\tilde{Q}}(\omega, \Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{Q}(t, \Omega) e^{-j\omega t} dt \quad (7.8.3)$$

Nel caso di forzante generica, la forzante è la sovrapposizione di un numero infinito non numerabile di forzanti armoniche elementari di pulsazione  $\omega$ . In generale non è da escludere che anche lo spettro della forzante possa dipendere dalla speed della macchina  $\Omega$ :  $\underline{\tilde{Q}}(\omega, \Omega)$ . Anche in questo caso le forzanti generiche possono essere prodotte dall'interazione palare (le forzanti di fluido) e da componenti vari come cuscini, giunti, riduttori, etc. Si riporta in Fig. 98 un esempio di spettro di forzante generica, in questo caso una forzante simil-armonica. Si ricorda che nella realtà segnali armonici e periodici perfetti non

esistono perché avrebbero un'energia infinita. Quando si misura una vibrazione armonica in realtà si misura un segnale simil-armonico avente uno spettro come quello riportato in Fig. 98.

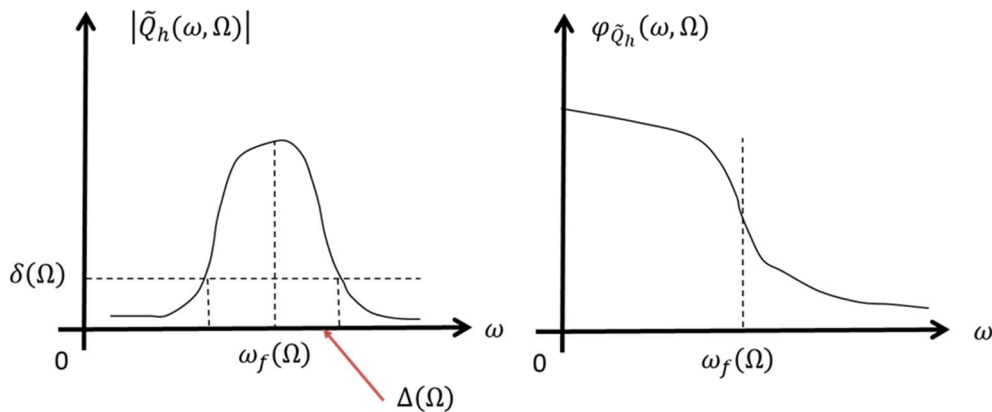


Figura 98 Esempio di spettro di forzante generica

## DIAGRAMMI DI CAMPBELL E DIAGRAMMI DI BODE

### 1) FORZANTE ARMONICA SINCRONA:

$$M\ddot{\underline{q}} + (C_c(\Omega) + C_{sm})\dot{\underline{q}} + K_{tot}q = \underline{Q}(t) = \text{Re} [\underline{Q}_0(\Omega) e^{j\Omega t}]. \quad (7.8.4)$$

$$\underline{Q}(t) = \begin{pmatrix} \dots \\ Q_h(t) \\ \dots \end{pmatrix}, \quad \underline{Q}_0(\Omega) = \begin{pmatrix} \dots \\ Q_{0h} \\ \dots \end{pmatrix}.$$

La soluzione del moto forzato del sistema può essere facilmente determinata grazie agli strumenti matematici introdotti nel capitolo 1 e si ha:

$$\underline{q}_f(t) = \begin{pmatrix} \dots \\ \varphi_h(t) \\ \dots \end{pmatrix} = \text{Re} [\underline{q}_0 e^{j\Omega t}], \quad (7.8.5)$$

$$\underline{q}_0 = \begin{pmatrix} \dots \\ \varphi_{0h} \\ \dots \end{pmatrix} = \alpha(\Omega, \Omega) \underline{Q}_0(\Omega) = [-\Omega^2 M + j\Omega(C_c(\Omega) + C_{sm}) + K_{tot}]^{-1} \underline{Q}_0(\Omega),$$

dove in questi casi è utile distinguere nella ricettanza  $\alpha(\Omega, \Omega)$  la doppia dipendenza dalla pulsazione della forzante e dalla velocità di rotazione della macchina.

Applicando il teorema di sovrapposizione modale in questo caso abbiamo:

$$\underline{q}_0 = \alpha(\Omega, \Omega) \underline{Q}_0(\Omega) = \sum_{k=1}^{2N} \frac{(q_{Rk} q_{Lk}^H)}{j\Omega - s_k} \underline{Q}_0(\Omega) = \sum_{k=1}^{2N} \left( \frac{q_{Lk}^H Q_0}{j\Omega - s_k} \right) \underline{q}_{Rk} \quad (7.8.6)$$

da cui possiamo dedurre che i modi che maggiormente contribuiscono alla soluzione sono quelli in cui  $\left( \frac{q_{Lk}^H Q_0}{j\Omega - s_k} \right)$  è grande, ovvero quando  $\Omega$  è vicina a una delle pulsazioni proprie del sistema  $\omega_{pk}$  contenuta in  $s_k$  (corrispondenti alle risonanze del sistema) o quando  $q_{Lk}^H Q_0$  è grande (forzanti ortogonale al corrispondente autovettore).

Il diagramma di Campbell associato a questo caso è riportato in Fig. 99. Rispetto allo studio nel moto libero abbiamo aggiunto la curva del carico  $\omega_f(\Omega) = \Omega$  sul diagramma relativo alle pulsazioni proprie  $\omega_{pi}$ . Le intersezioni della curva del carico con i rami del diagramma  $\Omega_c$  sono ancora una volta le pulsazioni critiche. Il valore di smorzamento modale associato alle varie pulsazioni critiche  $\zeta_c$  può essere facilmente trovato riportando la pulsazione critica in questione  $\Omega_c$  sul diagramma dello smorzamento.

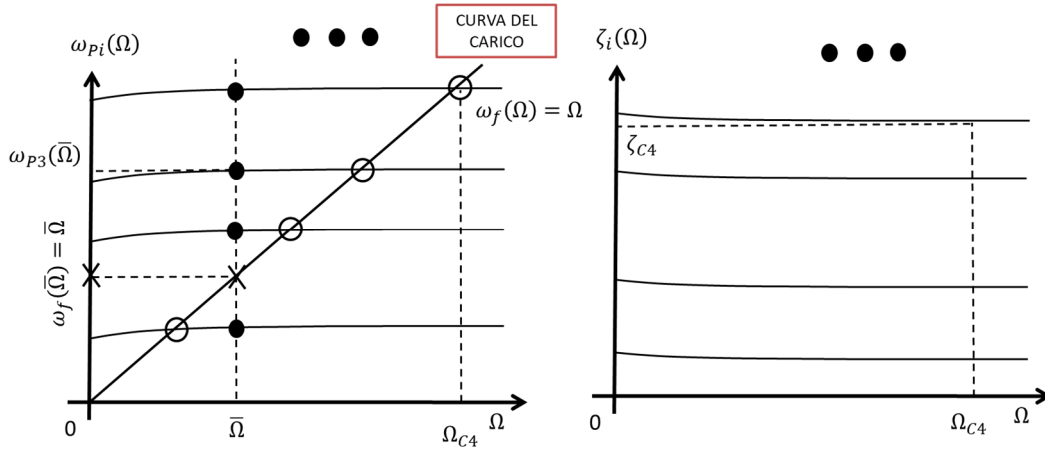


Figura 99 Diagramma di Campbell per rotore elastico con forzante armonica sincrona

Per capire quanto effettivamente vibra il sistema dobbiamo fare uso dei diagrammi di Bode. A tale fine dobbiamo prima specificare una velocità di lavoro della macchina  $\bar{\Omega}$  alla quale studiare il sistema. Riporto quindi tale velocità  $\bar{\Omega}$  sul diagramma di Campbell; l'intersezione tra la retta verticale passante per  $\bar{\Omega}$  e gli  $N$  rami del diagramma delle pulsazioni proprie  $\omega_{pi}$  rappresentano le  $N$  pulsazioni proprie del sistema coincidenti, a loro volta, con le pulsazioni di risonanza del sistema. A questo punto, supponendo di voler trovare quanto vale la rotazione della  $h$ -esima sezione  $\varphi_{oh}$  attorno all'asse  $z_h$  (nel dominio della frequenza), posso tracciare i rispettivi diagrammi (Fig. 100). Per determinare il modulo e la fase della rotazione  $\varphi_{oh}$  devo determinare sul diagramma di Bode il punto in cui agisce la forzante. Ma questo può essere dedotto dal diagramma di Campbell intersecando la curva del carico con la sezione verticale passante per  $\bar{\Omega}$  (si vedano sempre la Fig. 99 e la Fig. 100).

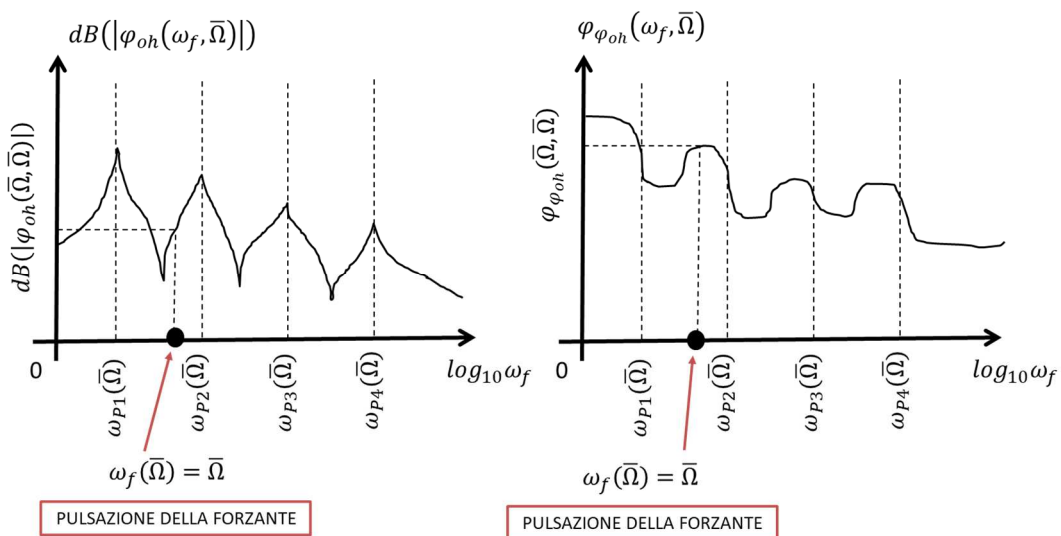


Figura 100 Diagramma di Bode per rotore elastico con forzante armonica sincrona



Guardando ai diagrammi di Campbell e di Bode, risulta chiaro il significato di pulsazione critica  $\Omega_c$ . Qualora infatti la pulsazione di lavoro della macchina  $\bar{\Omega}$  (la speed) si trovasse in corrispondenza di una critica  $\Omega_c$ , la pulsazione in cui la forzante agirebbe sulla macchina  $\omega_f(\bar{\Omega}) = \bar{\Omega}$  si troverebbe proprio in corrispondenza di una pulsazione propria  $\omega_{pi}(\bar{\Omega})$  e quindi di una pulsazione di risonanza. Ci troveremmo quindi necessariamente in condizioni di massima amplificazione.

Per quanto riguarda lo studio degli autovettori, al contrario delle vibrazioni flessionali, non ha più senso parlare di "whirl forzato" in quanto non stiamo più studiando la traiettoria del nodo  $\underline{G}_h$  ma solamente la rotazione della sezione a esso solidale  $\varphi_h(t)$  (si veda la Fig. 101):

$$\varphi_h(t) = \text{Re}(\varphi_{0h} e^{\bar{\Omega}t}). \quad (7.8.7)$$

Tale rotazione oscilla semplicemente alla pulsazione  $\omega_f(\bar{\Omega}) = \bar{\Omega}$  (uguale per tutti i nodi!) con modulo e fase (contenuti in  $\varphi_{0h}$ ) dipendenti dal nodo in questione. Si noti come, al contrario del moto libero, non essendo presente il termine esponenziale dovuto allo smorzamento, l'oscillazione della rotazione  $\varphi_h(t)$  permarrà come in Fig. 101 senza mai smorzarsi. Se siamo vicino a una risonanza e/o lo smorzamento modale è in generale piccolo, allora le dimensioni dell'oscillazione saranno più grandi, altrimenti saranno più piccole.

In linea teorica ogni rotazione  $\varphi_h(t)$  della sezione associata al nodo  $\underline{G}_h$  può oscillare con qualunque ampiezza e qualunque fase (contenuti in  $\varphi_{0h}$ !). Tuttavia, per il principio di coerenza modale, anche nelle vibrazioni torsionali i modi di vibrare tendono ad avere solamente forme regolari come quelle riportate in Fig. 101. Questo è dovuto al fatto i rotori sono solitamente di metallo (acciaio, leghe ad alta resistenza, etc) e non di gomma o di carta. Di conseguenza, sezioni della macchina adiacenti tra loro non potranno mai avere rotazioni "troppo diverse" tra loro (in tal caso non potremmo certo parlare di elasticità lineare e materiali lineari!).

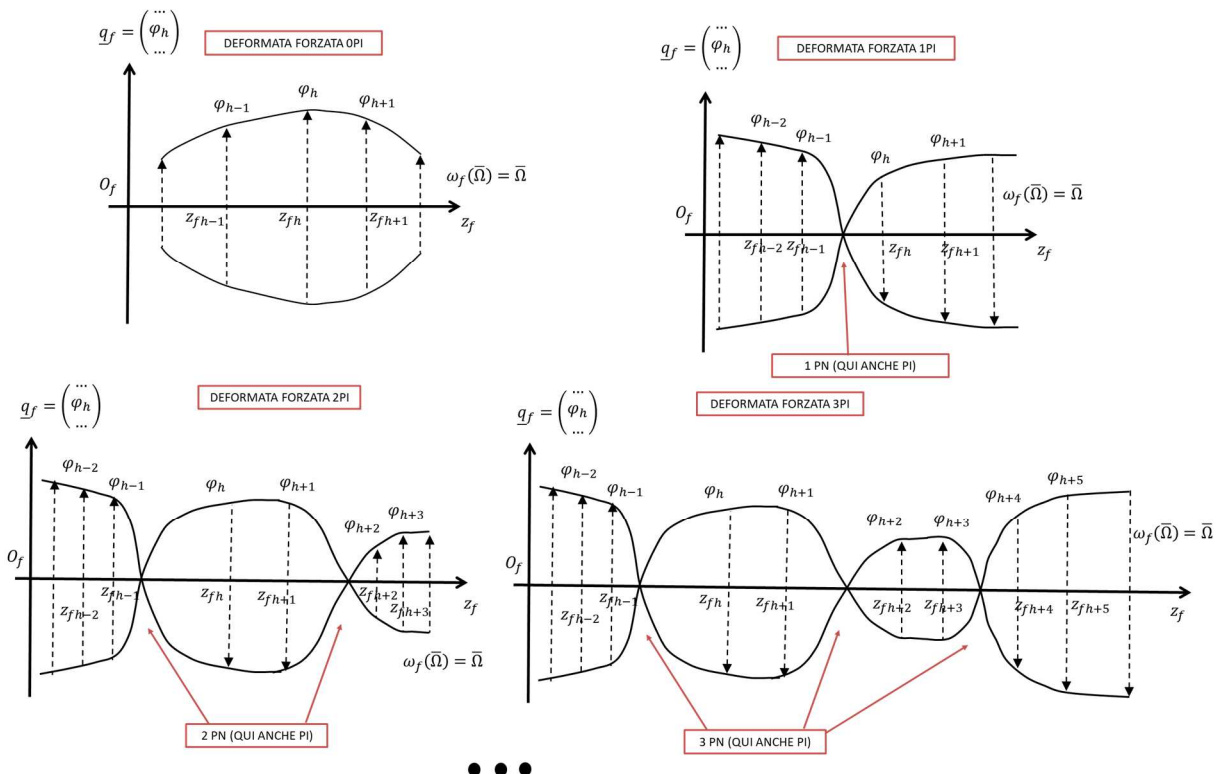


Figura 101 Il concetto di coerenza modale (si vedano anche le figure analoghe dei capitoli 4 e 10)

Come si può notare dalla Fig. 101, la deformata forzata è di tipo OPI quando non ha né punti nodali PN né ovviamente punti di inversione PI (le rotazioni  $\varphi_h(t)$  tendono a essere tutte in fase). Se invece esistono dei punti nodali PN, la deformata forzata può avere dei punti di inversione PI e di conseguenza potremo avere deformate forzate 1PI, 2PI, 3PI a seconda di quante inversioni del moto avvengono.

Naturalmente non è detto che, se ci sono dei punti nodali PN, il moto necessariamente si invertirà in essi e che, di conseguenza, il punto in questione sia per forza un punto di inversione PI. Possono benissimo esistere punti nodali PN in cui il moto non si inverte e che quindi non sono punti di inversione PI. I punti di inversione PI sono quindi un sottoinsieme dei punti nodali PN (il numero dei PI è minore o uguale di quello dei PN).

Come detto in precedenza, la rotazione della  $h$ -esima sezione  $\varphi_h(t)$  avviene chiaramente alla pulsazione della forzante  $\omega_f(\bar{\Omega}) = \bar{\Omega}$  (la stessa per ogni nodo  $\underline{G}_h$ !). Ciò è coerente col fatto che la pulsazione associata alla deformata forzata in questione è sempre una e una sola, ovvero  $n\bar{\Omega}$ .

Le principali deformate forzate sono rappresentate in Fig. 102 e, nelle caratteristiche (OPI, 1PI, 2PI, 3PI) e nella forma (IDF, IIDF, IIIDF, etc.), ricordano i modi di vibrare IE, IIE, IIIE, IVE, etc. descritti nel paragrafo 7.7. Tuttavia le deformate forzate riguardano il moto forzato e non il moto libero, e non vanno dunque confuse con i modi di vibrare e le deformate modali!

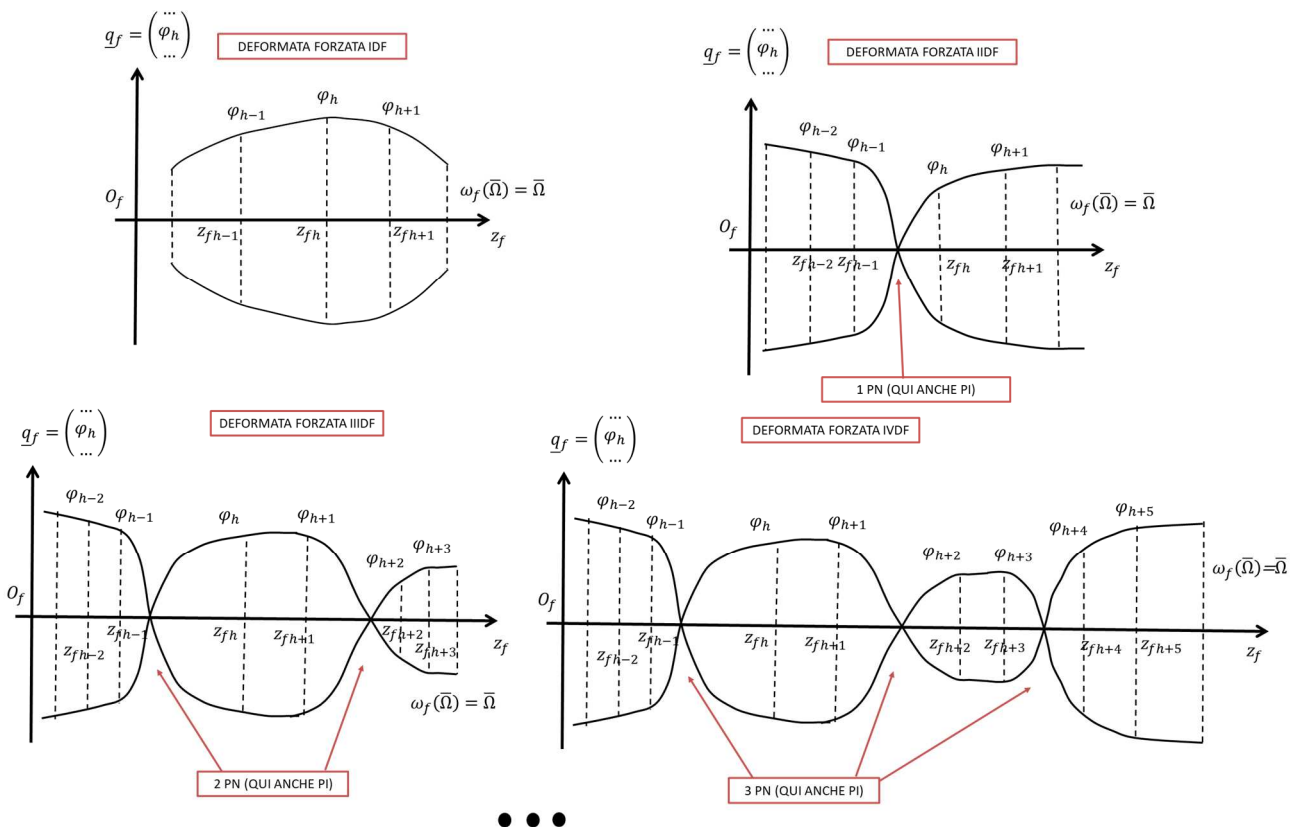


Figura 102 Deformate forzate per rotore elastico con forzante armonica sincrona (si vedano anche le figure analoghe dei capitoli 4 e 10)

ELENCO RIASSUNTIVO DELLE VARIE DEFORMATE FORZATE:

- 1) FORMA: IDF  
CARATTERISTICA: OPI
- 2) FORMA: IIDF  
CARATTERISTICA: OPI, 1PI
- 3) FORMA: IIIDF  
CARATTERISTICA: OPI, 1PI, 2PI
- 4) FORMA: IVDF  
CARATTERISTICA: OPI, 1PI, 2PI, 3PI
- ... ..

2) FORZANTE ARMONICA SUPER /SUB-SINCRONA:

$$M\ddot{\underline{q}} + (C_c(\Omega) + C_{sm})\dot{\underline{q}} + K_{tot}\underline{q} = \underline{Q}(t) = Re \left[ \underline{Q}_0(\Omega) e^{jn\Omega t} \right]. \quad (7.8.8)$$

$$\underline{Q}(t) = \begin{pmatrix} \dots \\ Q_h(t) \\ \dots \end{pmatrix}, \quad \underline{Q}_0(\Omega) = \begin{pmatrix} \dots \\ Q_{0h} \\ \dots \end{pmatrix}.$$

La soluzione del moto forzato del sistema può essere facilmente determinata grazie agli strumenti matematici introdotti nel capitolo 1 e si ha:

$$\underline{q}_f(t) = \begin{pmatrix} \dots \\ \varphi_h(t) \\ \dots \end{pmatrix} = Re \left[ \underline{q}_0 e^{jn\Omega t} \right], \quad (7.8.9)$$

$$\underline{q}_0 = \begin{pmatrix} \dots \\ \varphi_{0h} \\ \dots \end{pmatrix} = \alpha(n\Omega, \Omega) \underline{Q}_0(\Omega) = [-n^2\Omega^2 M + jn\Omega(C_c(\Omega) + C_{sm}) + K_{tot}]^{-1} \underline{Q}_0(\Omega),$$

dove in questi casi è utile distinguere nella ricettanza  $\alpha(n\Omega, \Omega)$  la doppia dipendenza dalla pulsazione della forzante e dalla velocità di rotazione della macchina.

Applicando il teorema di sovrapposizione modale in questo caso abbiamo:

$$\underline{q}_0 = \alpha(n\Omega, \Omega) \underline{Q}_0(\Omega) = \sum_{k=1}^{2N} \frac{(q_{Rk} q_{Lk}^H)}{jn\Omega - s_k} \underline{Q}_0(\Omega) = \sum_{k=1}^{2N} \left( \frac{q_{Lk}^H Q_0}{jn\Omega - s_k} \right) \underline{q}_{Rk} \quad (7.8.10)$$

da cui possiamo dedurre che i modi che maggiormente contribuiscono alla soluzione sono quelli in cui  $\left( \frac{q_{Lk}^H Q_0}{jn\Omega - s_k} \right)$  è grande, ovvero quando  $n\Omega$  è vicina a una delle pulsazioni proprie del sistema  $\omega_{pk}$  contenuta in  $s_k$  (corrispondenti alle risonanze del sistema) o quando  $\underline{q}_{Lk}^H \underline{Q}_0$  è grande (forzanti ortogonali al corrispondente autovettore).

Il diagramma di Campbell associato a questo caso è riportato in Fig. 103. Rispetto allo studio nel moto libero abbiamo aggiunto la curva del carico  $\omega_f(\Omega) = n\Omega$  sul diagramma relativo alle pulsazioni proprie  $\omega_{pi}$ . Le intersezioni della curva del carico con i rami del diagramma  $\Omega_c$  sono ancora una volta le pulsazioni critiche. È utile osservare come il caso di forzante armonica super-sincrona sia più problematico del caso di forzante armonica sub-sincrona in quanto una retta di carico più inclinata genera un maggior numero di pulsazioni critiche all'interno

del range di velocità di lavoro della macchina (ovvero di intersezioni tra la retta di carico e i rami del diagramma). Il valore di smorzamento modale associato alle varie pulsazioni critiche  $\zeta_c$  può essere facilmente trovato riportando la pulsazione critica in questione  $\Omega_c$  sul diagramma dello smorzamento.

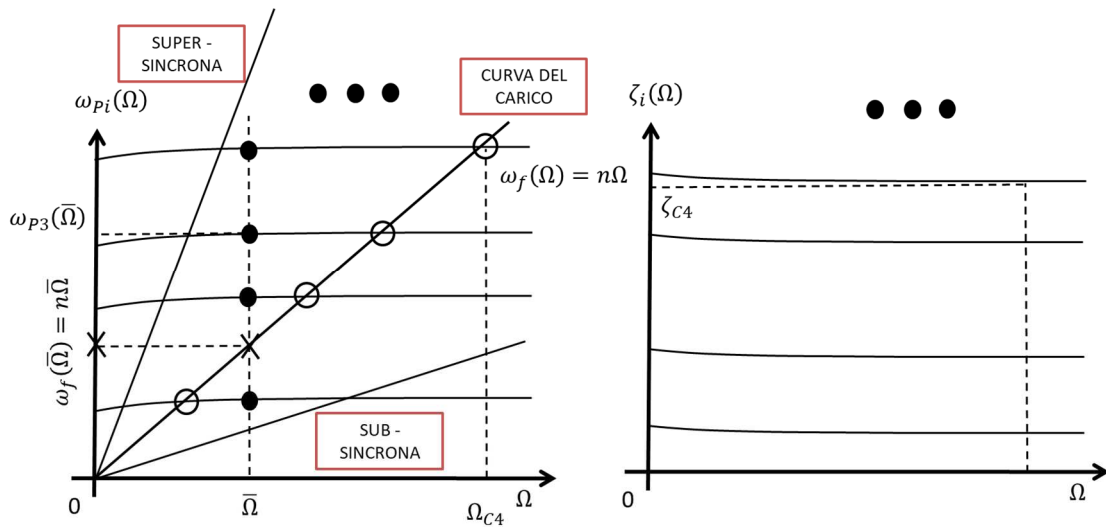


Figura 103 Diagramma di Campbell per rotore elastico con forzante armonica sub/super-sincrona

Per capire quanto effettivamente vibra il sistema dobbiamo fare uso dei diagrammi di Bode. A tale fine dobbiamo prima specificare una velocità di lavoro della macchina  $\bar{\Omega}$  alla quale studiare il sistema. Riporto quindi tale velocità  $\bar{\Omega}$  sul diagramma di Campbell; l'intersezione tra la retta verticale passante per  $\bar{\Omega}$  e gli  $N$  rami del diagramma delle pulsazioni proprie  $\omega_{pi}$  rappresentano le  $N$  pulsazioni proprie del sistema coincidenti, a loro volta, con le pulsazioni di risonanza del sistema. A questo punto, supponendo di voler trovare quanto vale la rotazione della  $h$ -esima sezione  $\varphi_{oh}$  attorno all'asse  $z_h$  (nel dominio della frequenza), posso tracciare i rispettivi diagrammi (Fig. 104). Per determinare il modulo e la fase della rotazione  $\varphi_{oh}$  devo determinare sul diagramma di Bode il punto in cui agisce la forzante. Ma questo può essere dedotto dal diagramma di Campbell intersecando la curva del carico con la sezione verticale passante per  $\bar{\Omega}$  (si vedano sempre la Fig. 103 e la Fig. 104).

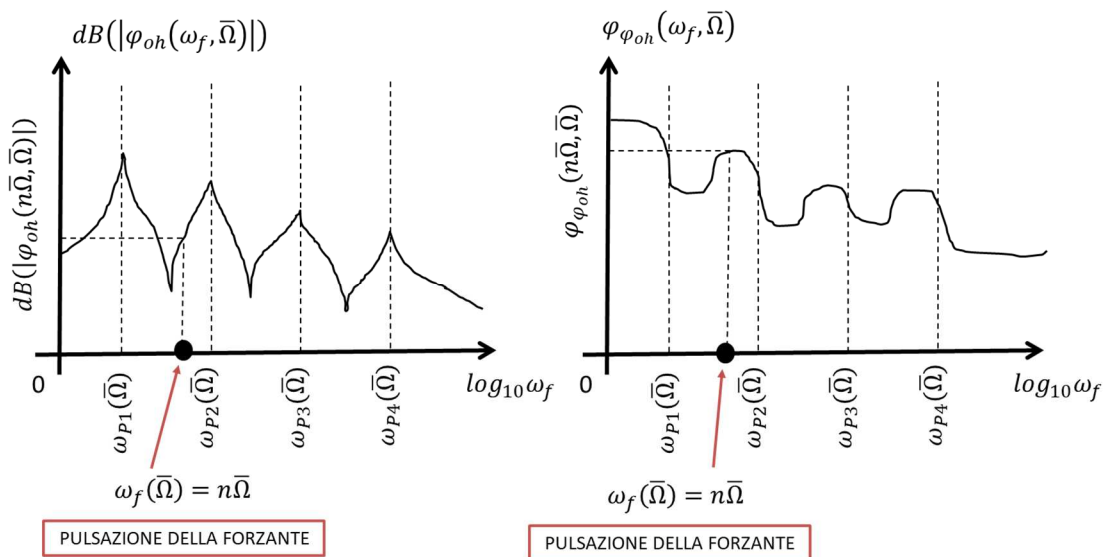


Figura 104 Diagramma di Bode per rotore elastico con forzante armonica sub/super-sincrona

Guardando ai diagrammi di Campbell e di Bode, risulta chiaro il significato di pulsazione critica  $\Omega_c$ . Qualora infatti la pulsazione di lavoro della macchina  $\bar{\Omega}$  (la speed) si trovasse in corrispondenza di una critica  $\Omega_c$ , la pulsazione in cui la forzante agirebbe sulla macchina  $\omega_f(\bar{\Omega}) = n\bar{\Omega}$  si troverebbe proprio in corrispondenza di una pulsazione propria  $\omega_{pi}(\bar{\Omega})$  e quindi di una pulsazione di risonanza. Ci troveremmo quindi necessariamente in condizioni di massima amplificazione.

Per quanto riguarda lo studio degli autovettori, al contrario delle vibrazioni flessionali, non ha più senso parlare di "whirl forzato" in quanto non stiamo più studiando la traiettoria del nodo  $\underline{G}_h$  ma solamente la rotazione della sezione a esso solidale  $\varphi_h(t)$  (si veda la Fig. 105):

$$\varphi_h(t) = Re(\varphi_{0h}e^{n\bar{\Omega}t}). \quad (7.8.11)$$

Tale rotazione oscilla semplicemente alla pulsazione  $\omega_f(\bar{\Omega}) = n\bar{\Omega}$  (uguale per tutti i nodi!) con modulo e fase (contenuti in  $\varphi_{0h}$ ) dipendenti dal nodo in questione. Si noti come, al contrario del moto libero, non essendo presente il termine esponenziale dovuto allo smorzamento, l'oscillazione della rotazione  $\varphi_h(t)$  permarrà come in Fig. 105 senza mai smorzarsi. Se siamo vicino a una risonanza e/o lo smorzamento modale è in generale piccolo, allora le dimensioni dell'oscillazione saranno più grandi, altrimenti saranno più piccole.

In linea teorica ogni rotazione  $\varphi_h(t)$  della sezione associata al nodo  $\underline{G}_h$  può oscillare con qualunque ampiezza e qualunque fase (contenuti in  $\varphi_{0h}$ !). Tuttavia, per il principio di coerenza modale, anche nelle vibrazioni torsionali i modi di vibrare tendono ad avere solamente forme regolari come quelle riportate in Fig. 105. Questo è dovuto al fatto i rotori sono solitamente di metallo (acciaio, leghe ad alta resistenza, etc) e non di gomma o di carta. Di conseguenza, sezioni della macchina adiacenti tra loro non potranno mai avere rotazioni "troppo diverse" tra loro (in tal caso non potremmo certo parlare di elasticità lineare e materiali lineari!).

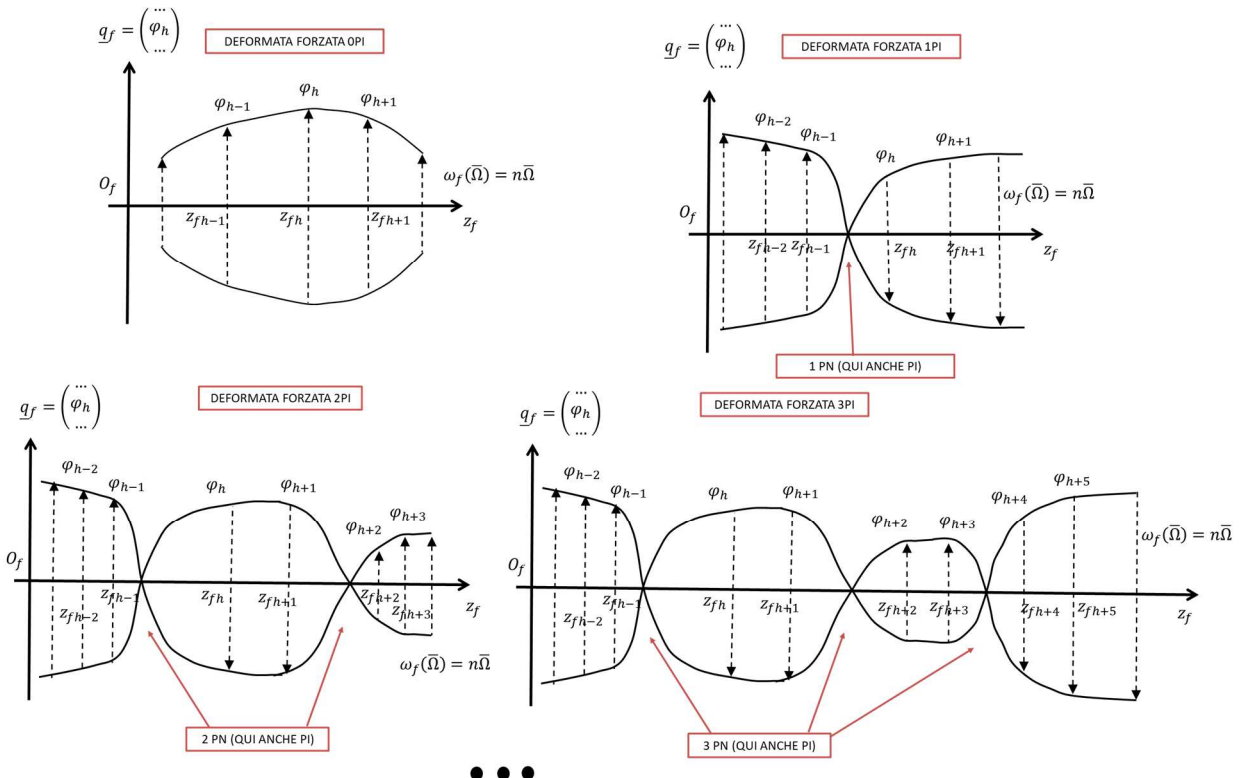


Figura 105 Il concetto di coerenza modale (si vedano anche le figure analoghe dei capitoli 4 e 10)

Come si può notare dalla Fig. 105, la deformata forzata è di tipo OPI quando non ha né punti nodali PN né ovviamente punti di inversione PI (le rotazioni  $\varphi_h(t)$  tendono a essere tutte in fase). Se invece esistono dei punti nodali PN, la deformata forzata può avere dei punti di inversione PI e di conseguenza potremo avere deformate forzate 1PI, 2PI, 3PI a seconda di quante inversioni del moto avvengono.

Naturalmente non è detto che, se ci sono dei punti nodali PN, il moto necessariamente si invertirà in essi e che, di conseguenza, il punto in questione sia per forza un punto di inversione PI. Possono benissimo esistere punti nodali PN in cui il moto non si inverte e che quindi non sono punti di inversione PI. I punti di inversione PI sono quindi un sottoinsieme dei punti nodali PN (il numero dei PI è minore o uguale di quello dei PN).

Come detto in precedenza, la rotazione della  $h$ -esima sezione  $\varphi_h(t)$  avviene chiaramente alla pulsazione della forzante  $\omega_f(\bar{\Omega}) = n\bar{\Omega}$  (la stessa per ogni nodo  $\underline{G}_h$ !). Ciò è coerente col fatto che la pulsazione associata alla deformata forzata in questione è sempre una e una sola, ovvero  $n\bar{\Omega}$ .

Le principali deformate forzate sono rappresentate in Fig. 106 e, nelle caratteristiche (OPI, 1PI, 2PI, 3PI) e nella forma (IDF, IIDF, IIIDF, etc.), ricordano i modi di vibrare IE, IIE, IIIE, IVE, etc. descritti nel paragrafo 7.7. Tuttavia le deformate forzate riguardano il moto forzato e non il moto libero, e non vanno dunque confuse con i modi di vibrare e le deformate modali!

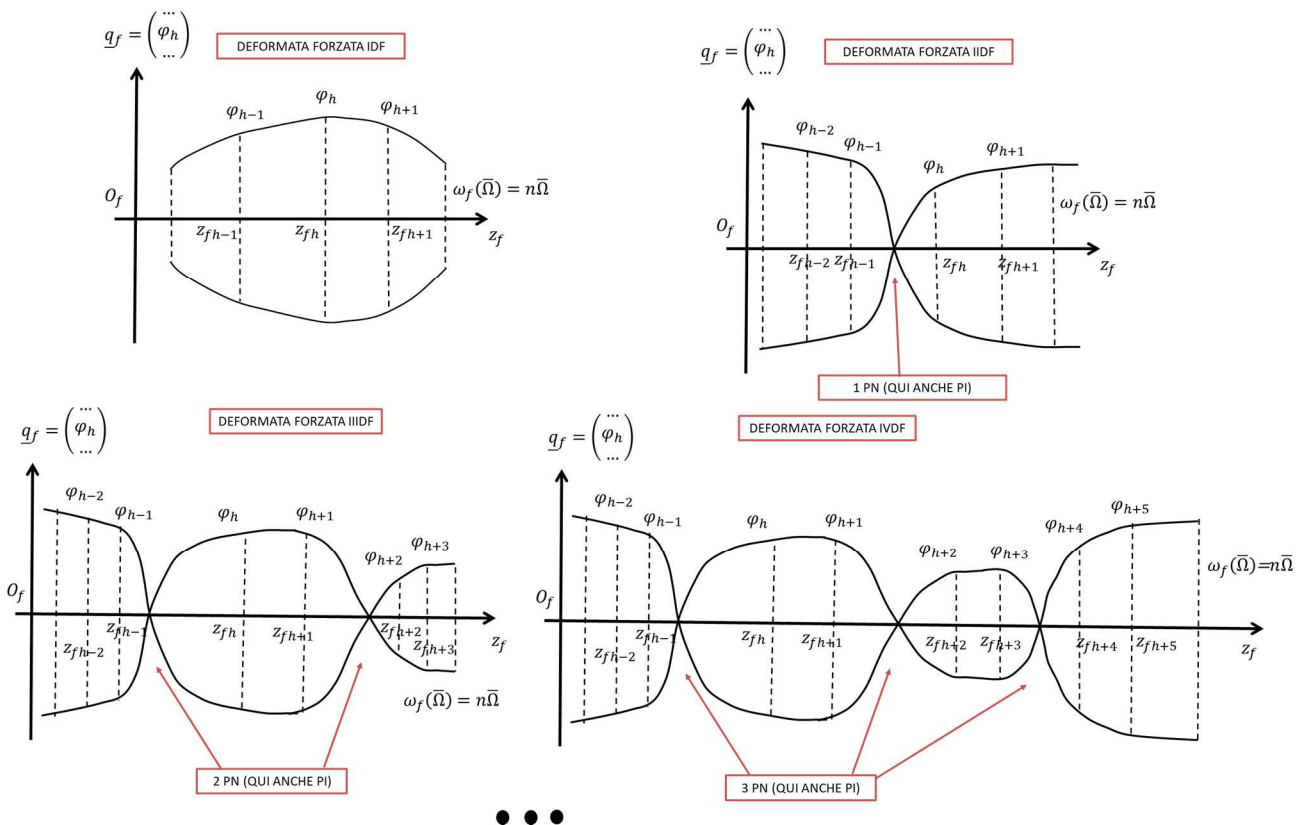


Figura 106 Deformate forzate per rotore elastico con forzante armonica sub/super-sincrona (si vedano anche le figure analoghe dei capitoli 4 e 10)

ELENCO RIASSUNTIVO DELLE VARIE DEFORMATE FORZATE:

- 1) FORMA: IDF  
CARATTERISTICA: OPI
- 2) FORMA: IIDF  
CARETTERISTICA: OPI, 1PI
- 3) FORMA: IIIDF  
CARETTERISTICA: OPI, 1PI, 2PI
- 4) FORMA: IVDF  
CARETTERISTICA: OPI, 1PI, 2PI, 3PI
- ... ..

3) FORZANTE ARMONICA ASINCRONA:

$$M\ddot{\underline{q}} + (C_c(\Omega) + C_{sm})\dot{\underline{q}} + K_{tot}\underline{q} = \underline{Q}(t) = Re \left[ \underline{Q}_0(\Omega) e^{j\omega_f t} \right]. \quad (7.8.12)$$

$$\underline{Q}(t) = \begin{pmatrix} \dots \\ Q_h(t) \\ \dots \end{pmatrix}, \quad \underline{Q}_0(\Omega) = \begin{pmatrix} \dots \\ Q_{0h} \\ \dots \end{pmatrix}.$$

La soluzione del moto forzato del sistema può essere facilmente determinata grazie agli strumenti matematici introdotti nel capitolo 1 e si ha:

$$\underline{q}_f(t) = \begin{pmatrix} \dots \\ \varphi_h(t) \\ \dots \end{pmatrix} = Re \left[ \underline{q}_0 e^{j\omega_f t} \right], \quad (7.8.13)$$

$$\underline{q}_0 = \begin{pmatrix} \dots \\ \varphi_{0h} \\ \dots \end{pmatrix} = \alpha(\omega_f, \Omega) \underline{Q}_0(\Omega) = [-\omega_f^2 M + j\omega_f (C_c(\Omega) + C_{sm}) + K_{tot}]^{-1} \underline{Q}_0(\Omega),$$

dove in questi casi è utile distinguere nella ricettanza  $\alpha(\omega_f, \Omega)$  la doppia dipendenza dalla pulsazione della forzante e della velocità di rotazione della macchina.

Applicando il teorema di sovrapposizione modale in questo caso abbiamo:

$$\underline{q}_0 = \alpha(\omega_f, \Omega) \underline{Q}_0(\Omega) = \sum_{k=1}^{2N} \frac{(q_{Rk} q_{Lk}^H)}{j\omega_f - s_k} \underline{Q}_0(\Omega) = \sum_{k=1}^{2N} \left( \frac{q_{Lk}^H Q_0}{j\omega_f - s_k} \right) \underline{q}_{Rk} \quad (7.8.14)$$

da cui possiamo dedurre che i modi che maggiormente contribuiscono alla soluzione sono quelli in cui  $\left( \frac{q_{Lk}^H Q_0}{j\omega_f - s_k} \right)$  è grande, ovvero quando  $\omega_f$  è vicina a una delle pulsazioni proprie del sistema  $\omega_{Pk}$  contenuta in  $s_k$  (corrispondenti alle risonanze del sistema) o quando  $q_{Lk}^H Q_0$  è grande (forzanti ortogonali al corrispondente autovettore).

Il diagramma di Campbell associato a questo caso è riportato in Fig. 107. Rispetto allo studio nel moto libero abbiamo aggiunto la curva del carico  $\omega_f(\Omega) = \omega_f = cost$  sul diagramma relativo alle pulsazioni proprie  $\omega_{Pi}$ . Le intersezioni della curva del carico con i rami del diagramma  $\Omega_c$  sono ancora una volta le pulsazioni critiche. E' utile osservare come il caso di forzante armonica asincrona sia particolarmente favorevole in quanto una retta di carico orizzontale genera al massimo una pulsazione critica all'interno del range di velocità di lavoro della macchina (ovvero al massimo una intersezione tra la retta di carico e i rami del diagramma). Il valore di smorzamento modale

associato alle varie pulsazioni critiche  $\zeta_c$  può essere facilmente trovato riportando la pulsazione critica in questione  $\Omega_c$  sul diagramma dello smorzamento. A tal riguardo si noti come, in questo fortunato caso, non sono presenti pulsazioni critiche!

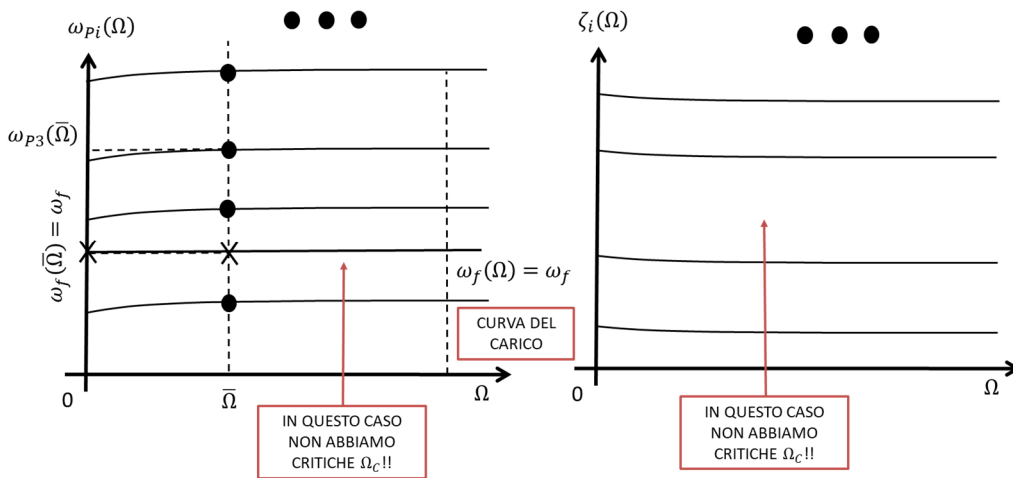


Figura 107 Diagramma di Campbell per rotore elastico con forzante armonica asincrona

Per capire quanto effettivamente vibra il sistema dobbiamo fare uso dei diagrammi di Bode. A tale fine dobbiamo prima specificare una velocità di lavoro della macchina  $\bar{\Omega}$  alla quale studiare il sistema. Riporto quindi tale velocità  $\bar{\Omega}$  sul diagramma di Campbell; l'intersezione tra la retta verticale passante per  $\bar{\Omega}$  e gli  $N$  rami del diagramma delle pulsazioni proprie  $\omega_{p_i}$  rappresentano le  $N$  pulsazioni proprie del sistema coincidenti, a loro volta, con le pulsazioni di risonanza del sistema. A questo punto, supponendo di voler trovare quanto vale la rotazione della  $h$ -esima sezione  $\varphi_{0h}$  attorno all'asse  $z_h$  (nel dominio della frequenza), posso tracciare i rispettivi diagrammi (Fig. 108). Per determinare il modulo e la fase della rotazione  $\varphi_{0h}$  devo determinare sul diagramma di Bode il punto in cui agisce la forzante. Ma questo può essere dedotto dal diagramma di Campbell intersecando la curva del carico con la sezione verticale passante per  $\bar{\Omega}$  (si vedano sempre la Fig. 107 e la Fig. 108).

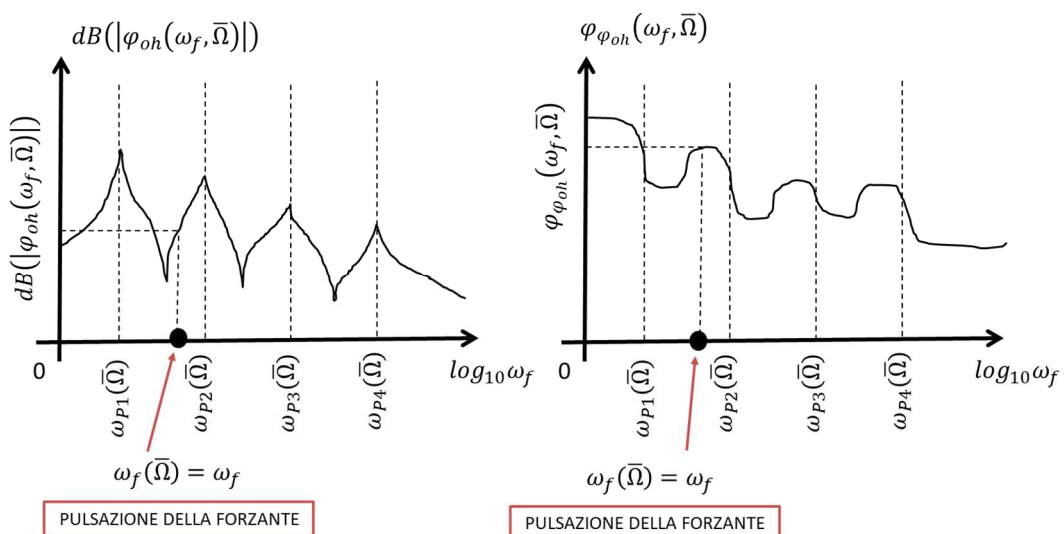


Figura 108 Diagramma di Bode per rotore elastico con forzante armonica asincrona



Guardando ai diagrammi di Campbell e di Bode, risulta chiaro il significato di pulsazione critica  $\Omega_c$  (in questo caso fortunatamente non presenti!). Qualora infatti la pulsazione di lavoro della macchina  $\bar{\Omega}$  (la speed) si trovasse in corrispondenza di una critica  $\Omega_c$ , la pulsazione in cui la forzante agirebbe sulla macchina  $\omega_f(\bar{\Omega}) = \omega_f$  si troverebbe proprio in corrispondenza di una pulsazione propria  $\omega_{pi}(\bar{\Omega})$  e quindi di una pulsazione di risonanza. Ci troveremmo quindi necessariamente in condizioni di massima amplificazione.

Per quanto riguarda lo studio degli autovettori, al contrario delle vibrazioni flessionali, non ha più senso parlare di “whirl forzato” in quanto non stiamo più studiando la traiettoria del nodo  $\underline{G}_h$  ma solamente la rotazione della sezione a esso solidale  $\varphi_h(t)$  (si veda la Fig. 109):

$$\varphi_h(t) = Re(\varphi_{0h}e^{n\omega_f t}). \tag{7.8.15}$$

Tale rotazione oscilla semplicemente alla pulsazione  $\omega_f(\bar{\Omega}) = \omega_f$  (uguale per tutti i nodi!) con modulo e fase (contenuti in  $\varphi_{0h}$ ) dipendenti dal nodo in questione. Si noti come, al contrario del moto libero, non essendo presente il termine esponenziale dovuto allo smorzamento, l’oscillazione della rotazione  $\varphi_h(t)$  permarrà come in Fig. 109 senza mai smorzarsi. Se siamo vicino a una risonanza e/o lo smorzamento modale è in generale piccolo, allora le dimensioni dell’oscillazione saranno più grandi, altrimenti saranno più piccole.

In linea teorica ogni rotazione  $\varphi_h(t)$  della sezione associata al nodo  $\underline{G}_h$  può oscillare con qualunque ampiezza e qualunque fase (contenuti in  $\varphi_{0h}$ !). Tuttavia, per il principio di coerenza modale, anche nelle vibrazioni torsionali i modi di vibrare tendono ad avere solamente forme regolari come quelle riportate in Fig. 109. Questo è dovuto al fatto i rotori sono solitamente di metallo (acciaio, leghe ad alta resistenza, etc) e non di gomma o di carta. Di conseguenza, sezioni della macchina adiacenti tra loro non potranno mai avere rotazioni “troppo diverse” tra loro (in tal caso non potremmo certo parlare di elasticità lineare e materiali lineari!).

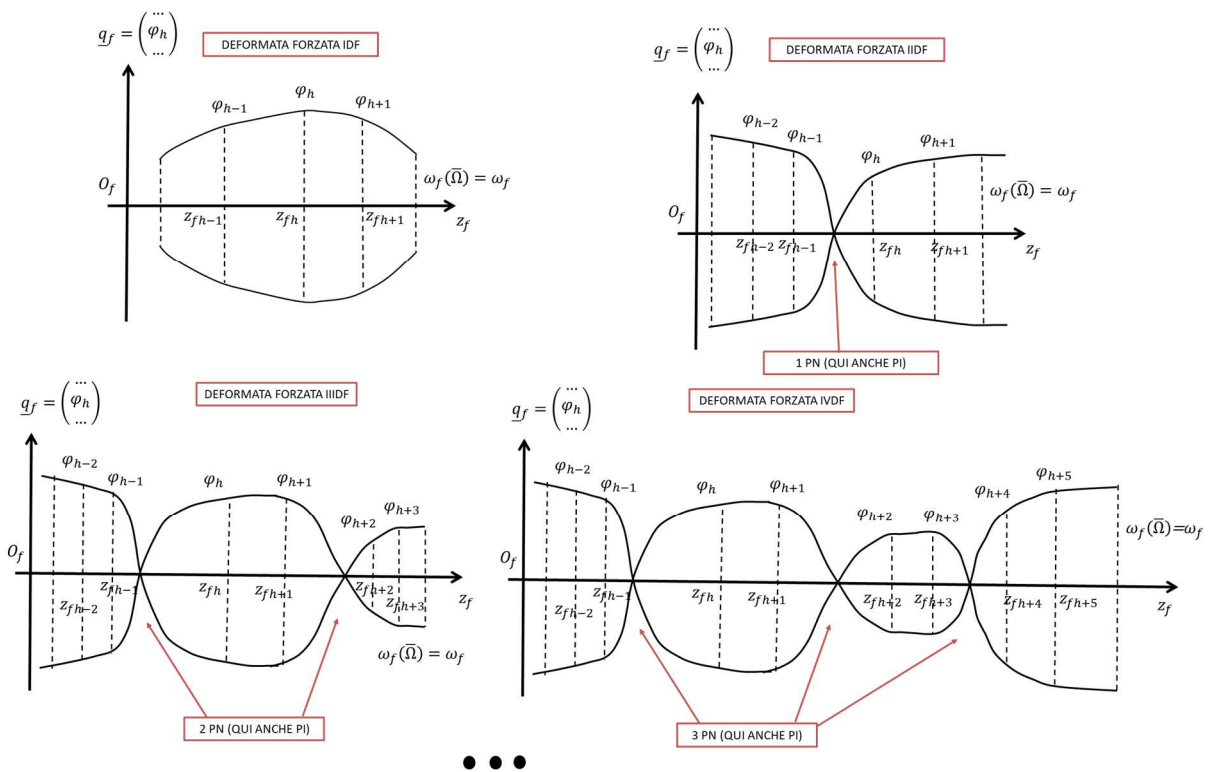


Figura 109 Il concetto di coerenza modale (si vedano anche le figure analoghe dei capitoli 4 e 10)

Come si può notare dalla Fig. 109, la deformata forzata è di tipo OPI quando non ha né punti nodali PN né ovviamente punti di inversione PI (le rotazioni  $\varphi_h(t)$  tendono a essere tutte in fase). Se invece esistono dei punti nodali PN, la deformata forzata può avere dei punti di inversione PI e di conseguenza potremo avere deformate forzate 1PI, 2PI, 3PI a seconda di quante inversioni del moto avvengono.

Naturalmente non è detto che, se ci sono dei punti nodali PN, il moto necessariamente si invertirà in essi e che, di conseguenza, il punto in questione sia per forza un punto di inversione PI. Possono benissimo esistere punti nodali PN in cui il moto non si inverte e che quindi non sono punti di inversione PI. I punti di inversione PI sono quindi un sottoinsieme dei punti nodali PN (il numero dei PI è minore o uguale di quello dei PN).

Come detto in precedenza, la rotazione della  $h$ -esima sezione  $\varphi_h(t)$  avviene chiaramente alla pulsazione della forzante  $\omega_f(\bar{\Omega}) = \omega_f$  (la stessa per ogni nodo  $\underline{G}_h$ !). Ciò è coerente col fatto che la pulsazione associata alla deformata forzata in questione è sempre una e una sola, ovvero  $\omega_f$ .

Le principali deformate forzate sono rappresentate in Fig. 110 e, nelle caratteristiche (OPI, 1PI, 2PI, 3PI) e nella forma (IDF, IIDF, IIIDF, etc.), ricordano i modi di vibrare IE, IIE, IIIE, IVE, etc. descritti nel paragrafo 7.7. Tuttavia le deformate forzate riguardano il moto forzato e non il moto libero, e non vanno dunque confuse con i modi di vibrare e le deformate modali!

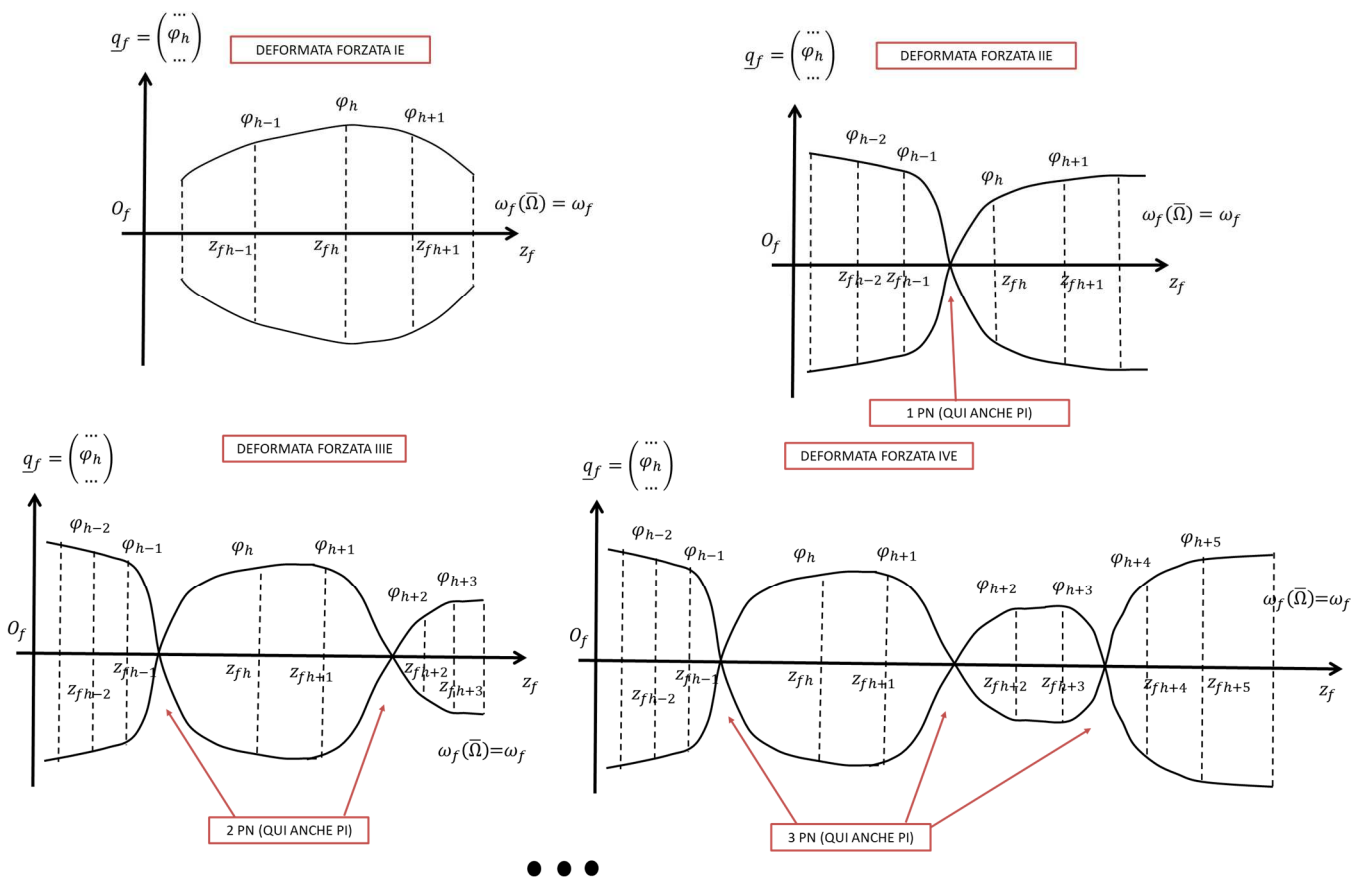


Figura 110 Deformate forzate per rotore elastico con forzante armonica asincrona (si vedano anche le figure analoghe dei capitoli 4 e 10)

ELENCO RIASSUNTIVO DELLE VARIE DEFORMATE FORZATE:

- 1) FORMA: IDF  
CARATTERISTICA: OPI
- 2) FORMA: IIDF  
CARETTERISTICA: OPI, 1PI
- 3) FORMA: IIIDF  
CARETTERISTICA: OPI, 1PI, 2PI
- 4) FORMA: IVDF  
CARETTERISTICA: OPI, 1PI, 2PI, 3PI
- ... ..

4) FORZANTE ARMONICA GENERICA:

$$M\ddot{\underline{q}} + (C_c(\Omega) + C_{sm})\dot{\underline{q}} + K_{etot}\underline{q} = \underline{Q}(t) = Re \left[ \underline{Q}_0(\Omega) e^{j\omega_f(\Omega)t} \right]. \quad (7.8.16)$$

$$\underline{Q}(t) = \begin{pmatrix} \dots \\ Q_h(t) \\ \dots \end{pmatrix}, \quad \underline{Q}_0(\Omega) = \begin{pmatrix} \dots \\ Q_{0h} \\ \dots \end{pmatrix}.$$

La soluzione del moto forzato del sistema può essere facilmente determinata grazie agli strumenti matematici introdotti nel capitolo 1 e si ha:

$$\underline{q}_f(t) = \begin{pmatrix} \dots \\ \varphi_h(t) \\ \dots \end{pmatrix} = Re \left[ \underline{q}_0 e^{j\omega_f(\Omega)t} \right] \quad (7.8.17)$$

$$\underline{q}_0 = \begin{pmatrix} \dots \\ \varphi_{0h} \\ \dots \end{pmatrix} = \alpha(\omega_f(\Omega), \Omega) \underline{Q}_0(\Omega) = [-\omega_f(\Omega)^2 M + j\omega_f(\Omega)(C_c(\Omega) + C_{sm}) + K_{etot}]^{-1} \underline{Q}_0(\Omega),$$

dove in questi casi è utile distinguere nella ricettanza  $\alpha(\omega_f(\Omega), \Omega)$  la doppia dipendenza dalla pulsazione della forzante e della velocità di rotazione della macchina.

Applicando il teorema di sovrapposizione modale in questo caso abbiamo:

$$\underline{q}_0 = \alpha(\omega_f(\Omega), \Omega) \underline{Q}_0(\Omega) = \sum_{k=1}^{2N} \frac{(q_{Rk} q_{Lk}^H)}{j\omega_f(\Omega) - s_k} \underline{Q}_0(\Omega) = \sum_{k=1}^{2N} \left( \frac{q_{Lk}^H Q_0}{j\omega_f(\Omega) - s_k} \right) \underline{q}_{Rk} \quad (7.8.18)$$

da cui possiamo dedurre che i modi che maggiormente contribuiscono alla soluzione sono quelli in cui  $\left( \frac{q_{Lk}^H Q_0}{j\omega_f(\Omega) - s_k} \right)$  è grande, ovvero quando  $\omega_f(\Omega)$  è vicina a una delle pulsazioni proprie del sistema  $\omega_{pk}$  contenuta in  $s_k$  (corrispondenti alle risonanze del sistema) o quando  $q_{Lk}^H Q_0$  è grande (forzanti ortogonali al corrispondente autovettore).

Il diagramma di Campbell associato a questo caso è riportato in Fig. 111. Rispetto allo studio nel moto libero abbiamo aggiunto la curva del carico  $\omega_f(\Omega)$  sul diagramma relativo alle pulsazioni proprie  $\omega_{pi}$ . Le intersezioni della curva del carico con i rami del diagramma  $\Omega_c$  sono ancora una volta le pulsazioni critiche. Il valore di smorzamento modale associato alle varie pulsazioni critiche  $\zeta_c$  può essere facilmente trovato riportando la pulsazione critica in questione  $\Omega_c$  sul diagramma dello smorzamento.

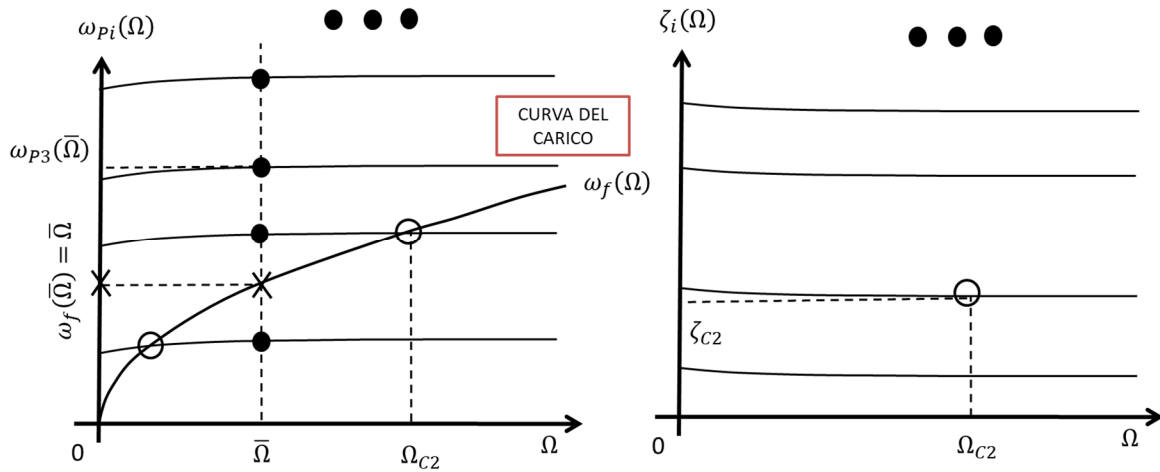


Figura 111 Diagramma di Campbell per rotore elastico con forzante armonica generica

Per capire quanto effettivamente vibra il sistema dobbiamo fare uso dei diagrammi di Bode. A tale fine dobbiamo prima specificare una velocità di lavoro della macchina  $\bar{\Omega}$  alla quale studiare il sistema. Riporto quindi tale velocità  $\bar{\Omega}$  sul diagramma di Campbell; l'intersezione tra la retta verticale passante per  $\bar{\Omega}$  e gli  $N$  rami del diagramma delle pulsazioni proprie  $\omega_{pi}$  rappresentano le  $N$  pulsazioni proprie del sistema coincidenti, a loro volta, con le pulsazioni di risonanza del sistema. A questo punto, supponendo di voler trovare quanto vale la rotazione della  $h$ -esima sezione  $\varphi_{oh}$  attorno all'asse  $z_h$  (nel dominio della frequenza), posso tracciare i rispettivi diagrammi (Fig. 112). Per determinare il modulo e la fase della rotazione  $\varphi_{oh}$  devo determinare sul diagramma di Bode il punto in cui agisce la forzante. Ma questo può essere dedotto dal diagramma di Campbell intersecando la curva del carico con la sezione verticale passante per  $\bar{\Omega}$  (si vedano sempre la Fig. 111 e la Fig. 112).

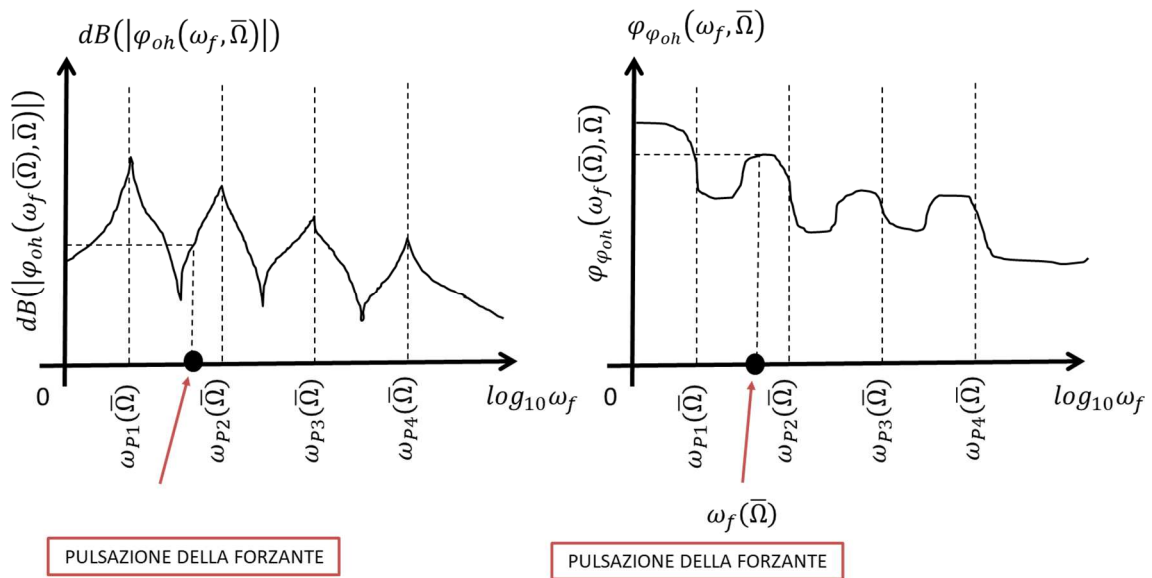


Figura 112 Diagramma di Bode per rotore elastico con forzante armonica generica

Guardando ai diagrammi di Campbell e di Bode, risulta chiaro il significato di pulsazione critica  $\Omega_c$ . Qualora infatti la pulsazione di lavoro della macchina  $\bar{\Omega}$  (la speed) si trovasse in corrispondenza di una critica  $\Omega_c$ , la pulsazione in cui la forzante agirebbe sulla macchina  $\omega_f(\bar{\Omega})$  si troverebbe proprio in corrispondenza di una pulsazione propria Prof. Enrico Meli, Dipartimento di Ingegneria Industriale, Università di Firenze

$\omega_{pi}(\bar{\Omega})$  e quindi di una pulsazione di risonanza. Ci troveremmo quindi necessariamente in condizioni di massima amplificazione.

Per quanto riguarda lo studio degli autovettori, al contrario delle vibrazioni flessionali, non ha più senso parlare di "whirl forzato" in quanto non stiamo più studiando la traiettoria del nodo  $\underline{G}_h$  ma solamente la rotazione della sezione a esso solidale  $\varphi_h(t)$  (si veda la Fig. 109):

$$\varphi_h(t) = \text{Re}(\varphi_{0h} e^{n\omega_f(\bar{\Omega})t}). \quad (7.8.19)$$

Tale rotazione oscilla semplicemente alla pulsazione  $\omega_f(\bar{\Omega})$  (uguale per tutti i nodi!) con modulo e fase (contenuti in  $\varphi_{0h}$ ) dipendenti dal nodo in questione. Si noti come, al contrario del moto libero, non essendo presente il termine esponenziale dovuto allo smorzamento, l'oscillazione della rotazione  $\varphi_h(t)$  permarrà come in Fig. 113 senza mai smorzarsi. Se siamo vicino a una risonanza e/o lo smorzamento modale è in generale piccolo, allora le dimensioni dell'oscillazione saranno più grandi, altrimenti saranno più piccole.

In linea teorica ogni rotazione  $\varphi_h(t)$  della sezione associata al nodo  $\underline{G}_h$  può oscillare con qualunque ampiezza e qualunque fase (contenuti in  $\varphi_{0h}$ !). Tuttavia, per il principio di coerenza modale, anche nelle vibrazioni torsionali i modi di vibrare tendono ad avere solamente forme regolari come quelle riportate in Fig. 113. Questo è dovuto al fatto i rotori sono solitamente di metallo (acciaio, leghe ad alta resistenza, etc) e non di gomma o di carta. Di conseguenza, sezioni della macchina adiacenti tra loro non potranno mai avere rotazioni "troppo diverse" tra loro (in tal caso non potremmo certo parlare di elasticità lineare e materiali lineari!).

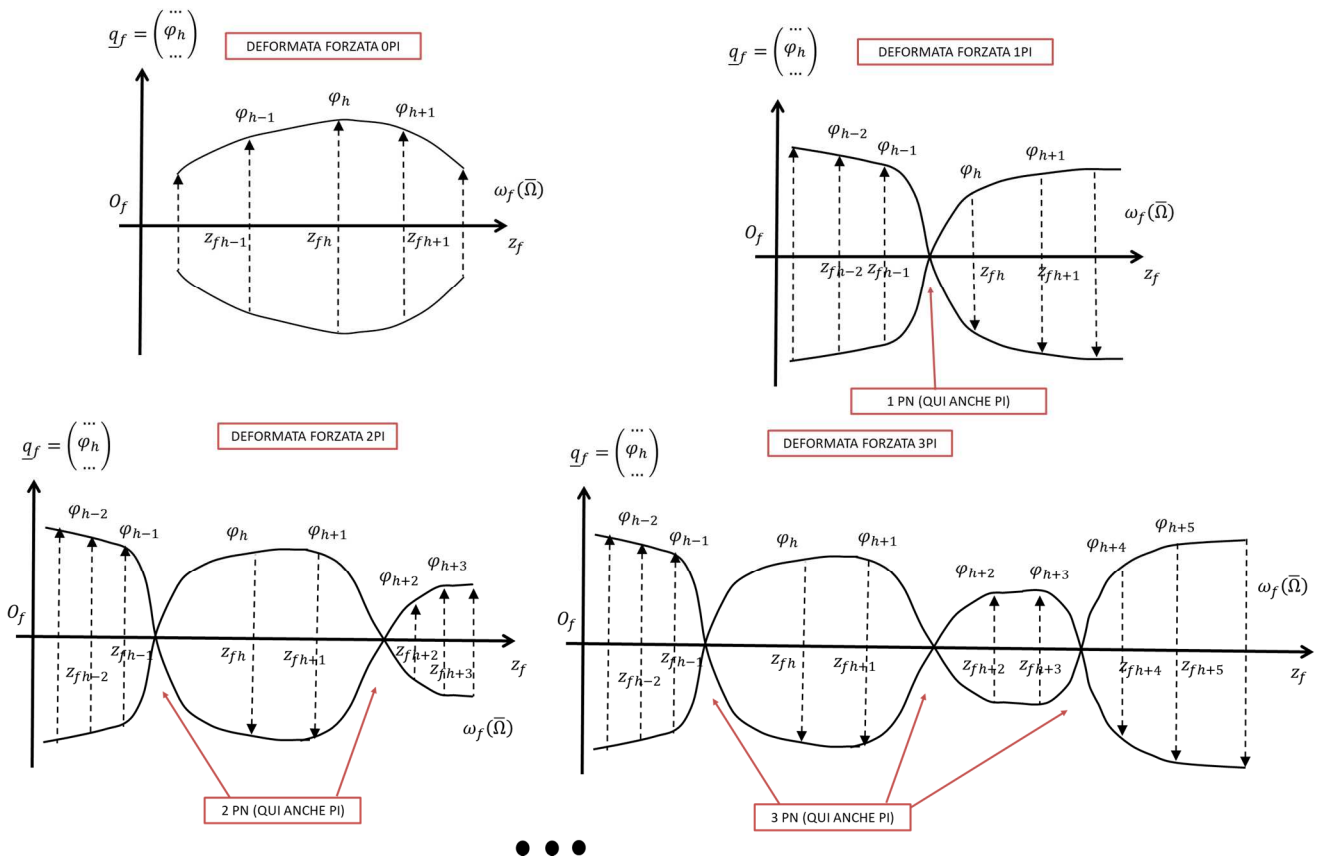


Figura 113 Il concetto di coerenza modale (si vedano anche le figure analoghe dei capitoli 4 e 10)

Come si può notare dalla Fig. 113, la deformata forzata è di tipo OPI quando non ha né punti nodali PN né ovviamente punti di inversione PI (le rotazioni  $\varphi_h(t)$  tendono a essere tutte in fase). Se invece esistono dei punti nodali PN, la deformata forzata può avere dei punti di inversione PI e di conseguenza potremo avere deformate forzate 1PI, 2PI, 3PI a seconda di quante inversioni del moto avvengono.

Naturalmente non è detto che, se ci sono dei punti nodali PN, il moto necessariamente si invertirà in essi e che, di conseguenza, il punto in questione sia per forza un punto di inversione PI. Possono benissimo esistere punti nodali PN in cui il moto non si inverte e che quindi non sono punti di inversione PI. I punti di inversione PI sono quindi un sottoinsieme dei punti nodali PN (il numero dei PI è minore o uguale di quello dei PN).

Come detto in precedenza, la rotazione della  $h$ -esima sezione  $\varphi_h(t)$  avviene chiaramente alla pulsazione della forzante  $\omega_f(\bar{\Omega})$  (la stessa per ogni nodo  $G_h$ !). Ciò è coerente col fatto che la pulsazione associata alla deformata forzata in questione è sempre una e una sola, ovvero  $\omega_f(\bar{\Omega})$ .

Le principali deformate forzate sono rappresentate in Fig. 114 e, nelle caratteristiche (OPI, 1PI, 2PI, 3PI) e nella forma (IDF, IIDF, IIIDF, etc.), ricordano i modi di vibrare IE, IIE, IIIE, IVE, etc. descritti nel paragrafo 7.7. Tuttavia le deformate forzate riguardano il moto forzato e non il moto libero, e non vanno dunque confuse con i modi di vibrare e le deformate modali!

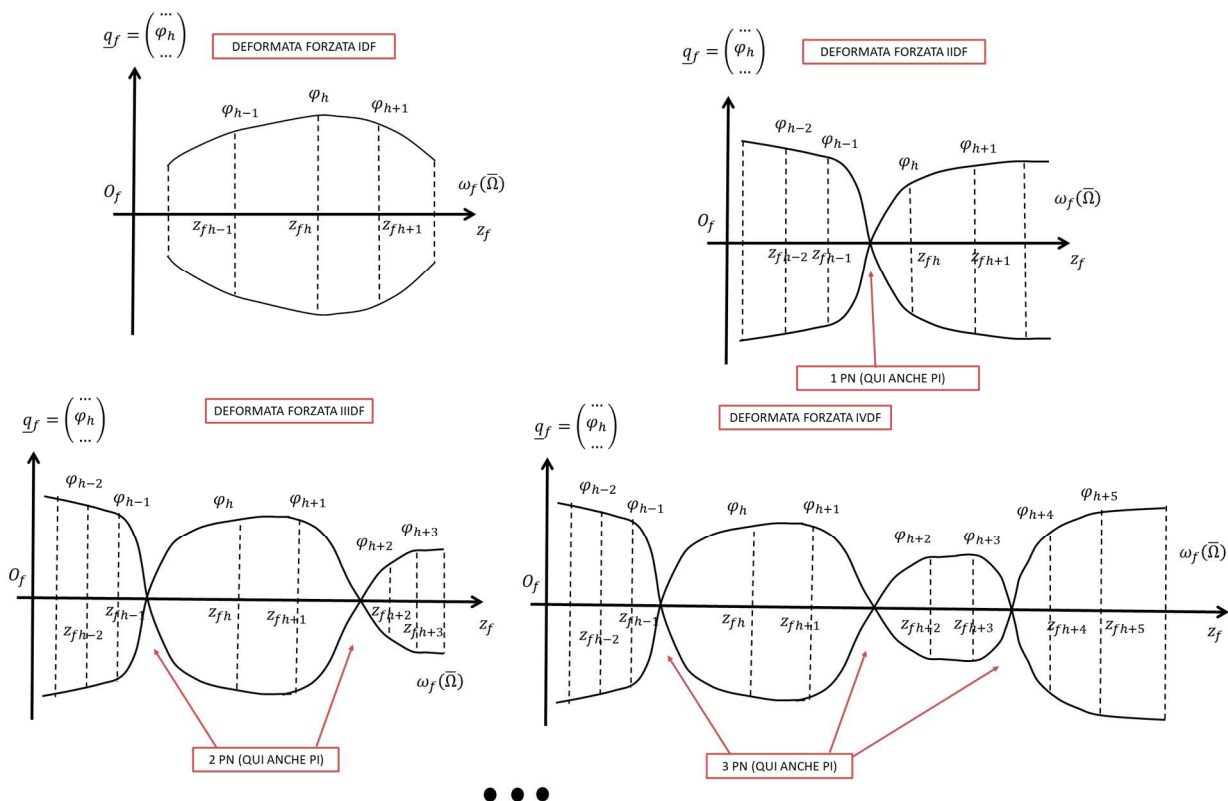


Figura 114 Deformate forzate per rotore elastico con forzante armonica generica (si vedano anche le figure analoghe dei capitoli 4 e 10)

ELENCO RIASSUNTIVO DELLE VARIE DEFORMATE FORZATE:

- 1) FORMA: IDF
- CARATTERISTICA: OPI

- 2) FORMA: IIDF  
CARETTERISTICA: OPI, 1PI
- 3) FORMA: IIIDF  
CARETTERISTICA: OPI, 1PI, 2PI
- 4) FORMA: IVDF  
CARETTERISTICA: OPI, 1PI, 2PI, 3PI  
... ..
- 5) FORZANTE PERIODICA:

$$M\ddot{\underline{q}} + (C_c(\Omega) + C_{sm})\dot{\underline{q}} + K_{etot}\underline{q} = \underline{Q}(t) = Re\left[\sum_{k=0}^{\infty} \underline{c}_k(\Omega)e^{j\omega_0(\Omega)kt}\right]. \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}. \quad (7.8.20)$$

$$\underline{Q}(t) = \begin{pmatrix} \dots \\ Q_h(t) \\ \dots \end{pmatrix}, \quad \underline{c}_k(\Omega) = \begin{pmatrix} \dots \\ c_{kh} \\ \dots \end{pmatrix}.$$

La soluzione del moto forzato del sistema può essere facilmente determinata grazie agli strumenti matematici introdotti nel capitolo 1 e si ha:

$$\underline{q}_f(t) = \begin{pmatrix} \dots \\ \varphi_h(t) \\ \dots \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} \underline{q}_k(t) = Re\left[\sum_{k=0}^{\infty} [\alpha(k\omega_0, \Omega)\underline{c}_k(\Omega)e^{j\omega_0(\Omega)kt}]\right] \quad (7.8.21)$$

$$\underline{q}_k(t) = \begin{pmatrix} \dots \\ \varphi_{kh}(t) \\ \dots \end{pmatrix} = Re\left[\alpha(k\omega_0, \Omega)\underline{c}_k(\Omega)e^{j\omega_0(\Omega)kt}\right],$$

$$\underline{q}_{k0} = \begin{pmatrix} \dots \\ \varphi_{kh0} \\ \dots \end{pmatrix} = \alpha(k\omega_0(\Omega), \Omega)\underline{c}_k(\Omega) = [-k^2\omega_0(\Omega)^2M + jk\omega_0(\Omega)(C_c(\Omega) + C_{sm}) + K_{etot}]^{-1}\underline{c}_k(\Omega)$$

dove in questi casi è utile distinguere nella ricettanza  $\alpha(k\omega_0(\Omega), \Omega)$  la doppia dipendenza dalla pulsazione della forzante e della velocità di rotazione della macchina.

Applicando il teorema di sovrapposizione modale in questo caso abbiamo:

$$\underline{q}_k(t) = Re\left[\alpha(k\omega_0(\Omega), \Omega)\underline{c}_k(\Omega)e^{j\omega_0(\Omega)kt}\right] = Re\left[\sum_{m=1}^{2N} \frac{(q_{Rm} q_{Lm}^H)}{j\omega_0(\Omega)k - s_m} \underline{c}_k(\Omega)e^{j\omega_0(\Omega)kt}\right] =$$

$$Re\left[\sum_{m=1}^{2N} \left(\frac{q_{Lm}^H \underline{c}_k}{j\omega_0(\Omega)k - s_m}\right) q_{Rm} e^{j\omega_0(\Omega)kt}\right], \quad (7.8.22)$$

da cui possiamo dedurre che i modi che maggiormente contribuiscono alle singole armoniche della soluzione sono quelli in cui  $\left(\frac{q_{Lm}^H \underline{c}_k}{j\omega_0(\Omega)k - s_m}\right)$  è grande, ovvero quando  $\omega_0(\Omega)k$  è vicina a una delle pulsazioni proprie del sistema  $\omega_{pk}$  contenuta in  $s_k$  (corrispondenti alle risonanze del sistema) o quando  $\underline{q}_{Lk}^H \underline{c}_k$  è grande (forzanti ortogonali al corrispondente autovettore).

Il diagramma di Campbell associato a questo caso è riportato in Fig. 115. Rispetto allo studio nel moto libero abbiamo aggiunto la curva del carico  $\omega_0(\Omega)k$  sul diagramma relativo alle pulsazioni proprie  $\omega_{pi}$ . Le intersezioni

della curva del carico con i rami del diagramma  $\Omega_c$  sono ancora una volta le pulsazioni critiche. Il valore di smorzamento modale associato alle varie pulsazioni critiche  $\zeta_c$  può essere facilmente trovato riportando la pulsazione critica in questione  $\Omega_c$  sul diagramma dello smorzamento.

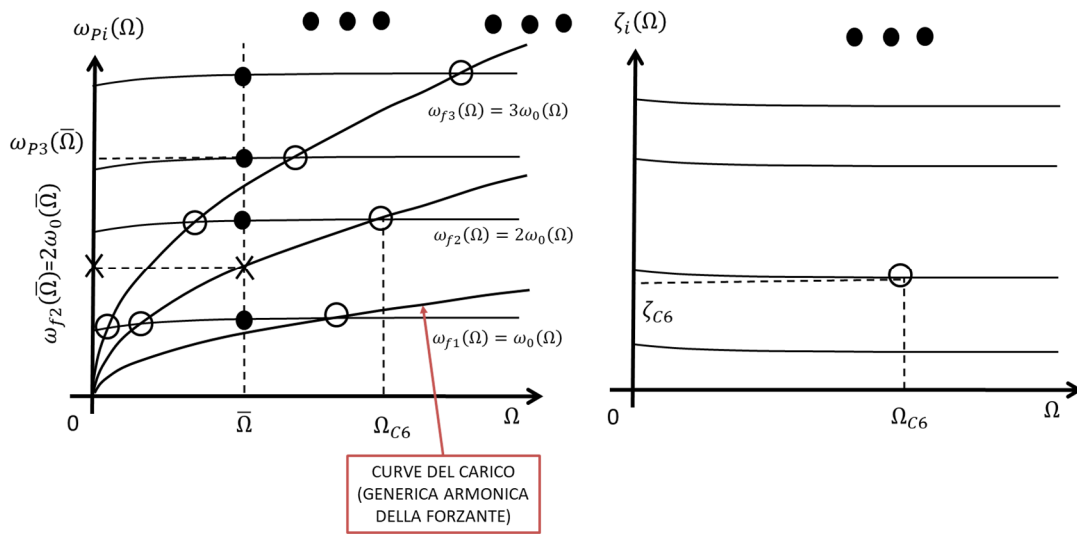


Figura 115 Diagramma di Campbell per rotore elastico con forzante periodica

Per capire quanto effettivamente vibra il sistema dobbiamo fare uso dei diagrammi di Bode. A tale fine dobbiamo prima specificare una velocità di lavoro della macchina  $\bar{\Omega}$  alla quale studiare il sistema. Riporto quindi tale velocità  $\bar{\Omega}$  sul diagramma di Campbell; l'intersezione tra la retta verticale passante per  $\bar{\Omega}$  e gli  $N$  rami del diagramma delle pulsazioni proprie  $\omega_{Pi}$  rappresentano le  $N$  pulsazioni proprie del sistema coincidenti, a loro volta, con le pulsazioni di risonanza del sistema. A questo punto, supponendo di voler trovare quanto vale la rotazione della  $h$ -esima sezione  $\varphi_{k h 0}$  attorno all'asse  $z_h$  (nel dominio della frequenza), posso tracciare i rispettivi diagrammi (Fig. 116). Per determinare il modulo e la fase della rotazione  $\varphi_{k h 0}$  (per ogni singola armonica!) devo determinare sul diagramma di Bode il punto in cui agisce la forzante. Ma questo può essere dedotto dal diagramma di Campbell intersecando la curva del carico con la sezione verticale passante per  $\bar{\Omega}$  (si vedano sempre la Fig. 115 e la Fig. 116).

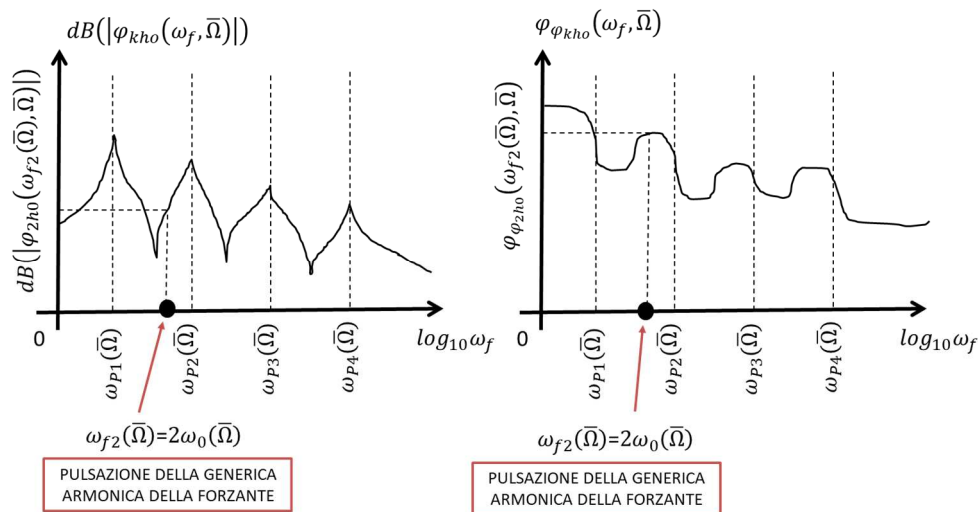


Figura 116 Diagramma di Bode per rotore elastico con forzante periodica



Guardando ai diagrammi di Campbell e di Bode, risulta chiaro il significato di pulsazione critica  $\Omega_c$ . Qualora infatti la pulsazione di lavoro della macchina  $\bar{\Omega}$  (la speed) si trovasse in corrispondenza di una critica  $\Omega_c$ , la pulsazione in cui la forzante agirebbe sulla macchina  $k\omega_0(\bar{\Omega})$  si troverebbe proprio in corrispondenza di una pulsazione propria  $\omega_{Pi}(\bar{\Omega})$  e quindi di una pulsazione di risonanza. Ci troveremmo quindi necessariamente in condizioni di massima amplificazione.

Per quanto riguarda lo studio degli autovettori, al contrario delle vibrazioni flessionali, non ha più senso parlare di "whirl forzato" in quanto non stiamo più studiando la traiettoria del nodo  $\underline{G}_h$  ma solamente la rotazione della sezione a esso solidale  $\varphi_{kh}(t)$  (per ogni singola armonica!) (si veda la Fig. 109):

$$\varphi_{kh}(t) = \text{Re}(\varphi_{kh0} e^{jk\omega_0(\bar{\Omega})t}). \quad (7.8.23)$$

Tale rotazione oscilla semplicemente alla pulsazione  $k\omega_0(\bar{\Omega})$  (uguale per tutti i nodi!) con modulo e fase (contenuti in  $\varphi_{kh0}$ ) dipendenti dal nodo in questione. Si noti come, al contrario del moto libero, non essendo presente il termine esponenziale dovuto allo smorzamento, l'oscillazione della rotazione  $\varphi_{kh}(t)$  permarrà come in Fig. 117 senza mai smorzarsi. Se siamo vicino a una risonanza e/o lo smorzamento modale è in generale piccolo, allora le dimensioni dell'oscillazione saranno più grandi, altrimenti saranno più piccole.

In linea teorica ogni rotazione  $\varphi_{kh}(t)$  della sezione associata al nodo  $\underline{G}_h$  può oscillare con qualunque ampiezza e qualunque fase (contenuti in  $\varphi_{kh0}$ !). Tuttavia, per il principio di coerenza modale, anche nelle vibrazioni torsionali i modi di vibrare tendono ad avere solamente forme regolari come quelle riportate in Fig. 117. Questo è dovuto al fatto i rotor sono solitamente di metallo (acciaio, leghe ad alta resistenza, etc) e non di gomma o di carta. Di conseguenza, sezioni della macchina adiacenti tra loro non potranno mai avere rotazioni "troppo diverse" tra loro (in tal caso non potremmo certo parlare di elasticità lineare e materiali lineari!).

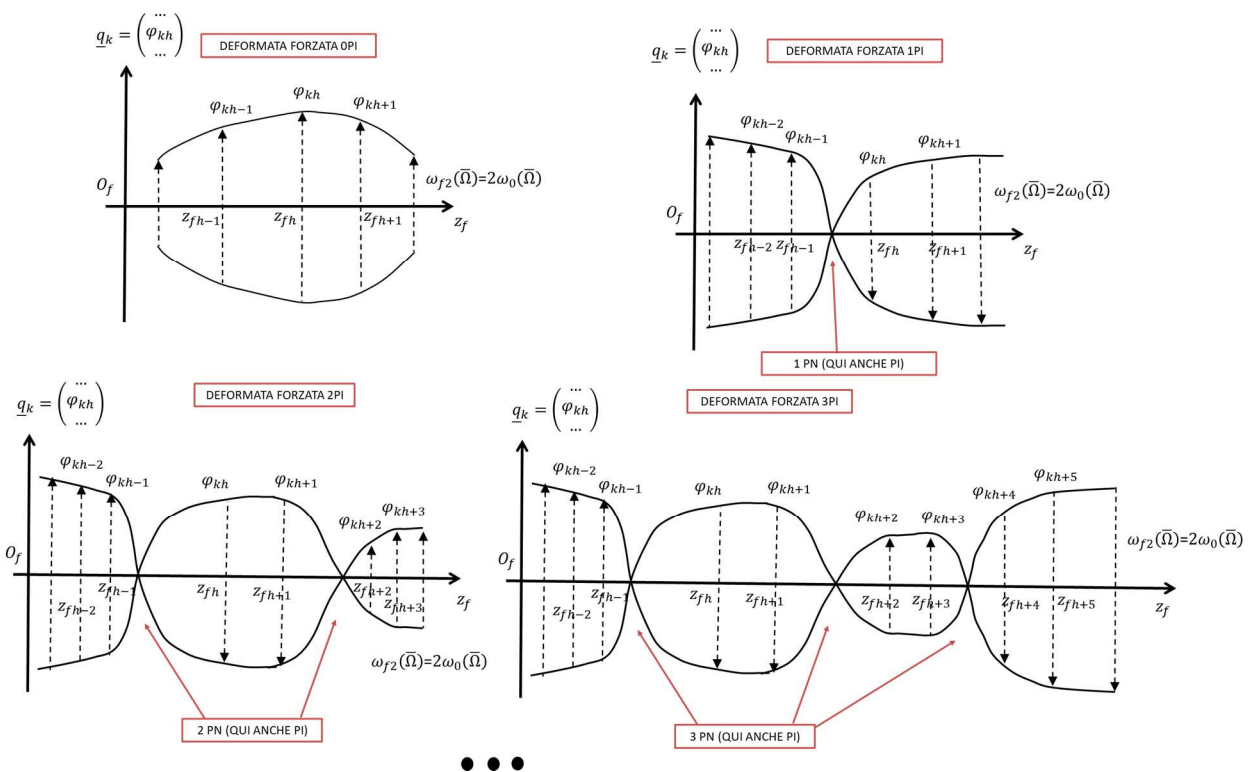


Figura 117 Il concetto di coerenza modale (si vedano anche le figure analoghe dei capitoli 4 e 10)

Come si può notare dalla Fig. 117 (per ogni singola armonica!), la deformata forzata è di tipo OPI quando non ha né punti nodali PN né ovviamente punti di inversione PI (le rotazioni  $\varphi_{kh}(t)$  tendono a essere tutte in fase). Se invece esistono dei punti nodali PN, la deformata forzata può avere dei punti di inversione PI e di conseguenza potremo avere deformate forzate 1PI, 2PI, 3PI a seconda di quante inversioni del moto avvengono.

Naturalmente non è detto che, se ci sono dei punti nodali PN, il moto necessariamente si invertirà in essi e che, di conseguenza, il punto in questione sia per forza un punto di inversione PI. Possono benissimo esistere punti nodali PN in cui il moto non si inverte e che quindi non sono punti di inversione PI. I punti di inversione PI sono quindi un sottoinsieme dei punti nodali PN (il numero dei PI è minore o uguale di quello dei PN).

Come detto in precedenza, la rotazione della  $h$ -esima sezione  $\varphi_{kh}(t)$  avviene chiaramente alla pulsazione della forzante  $k\omega_0(\bar{\Omega})$  (la stessa per ogni nodo  $\underline{G}_h!$ ). Ciò è coerente col fatto che la pulsazione associata alla deformata forzata in questione è sempre una e una sola, ovvero  $k\omega_0(\bar{\Omega})$ .

Le principali deformate forzate sono rappresentate in Fig. 118 e, nelle caratteristiche (OPI, 1PI, 2PI, 3PI) e nella forma (IDF, IIDF, IIIDF, etc.), ricordano i modi di vibrare IE, IIE, IIIE, IVE, etc. descritti nel paragrafo 7.7. Tuttavia le deformate forzate riguardano il moto forzato e non il moto libero, e non vanno dunque confuse con i modi di vibrare e le deformate modali!

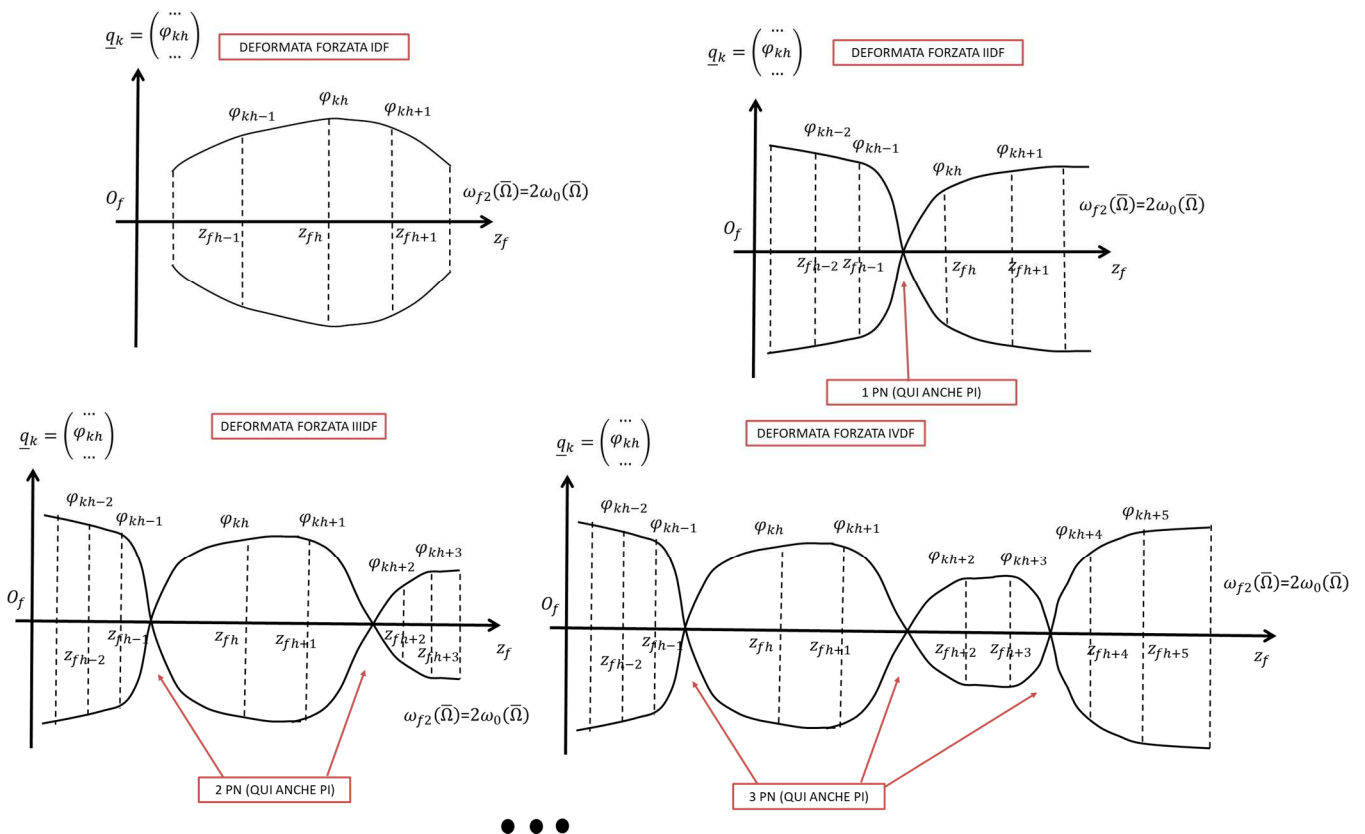


Figura 118 Deformate forzate per rotore elastico con forzante armonica periodica (si vedano anche le figure analoghe dei capitoli 4 e 10)

ELENCO RIASSUNTIVO DELLE VARIE DEFORMATE FORZATE:

- 1) FORMA: IDF  
CARATTERISTICA: OPI
- 2) FORMA: IIDF  
CARATTERISTICA: OPI, 1PI
- 3) FORMA: IIIDF  
CARATTERISTICA: OPI, 1PI, 2PI
- 4) FORMA: IVDF  
CARATTERISTICA: OPI, 1PI, 2PI, 3PI
- ... ..

6) FORZANTE GENERICA:

$$M\ddot{\underline{q}} + (C_c(\Omega) + C_{sm})\dot{\underline{q}} + K_{tot}\underline{q} = \underline{Q}(t, \Omega) \quad (7.8.24)$$

$$\underline{Q}(t, \Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\underline{Q}}(\omega, \Omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad \tilde{\underline{Q}}(\omega, \Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{Q}(t, \Omega) e^{-j\omega t} dt$$

$$\underline{Q}(t, \Omega) = \begin{pmatrix} \dots \\ Q_h(t, \Omega) \\ \dots \end{pmatrix}, \quad \tilde{\underline{Q}}(\omega, \Omega) = \begin{pmatrix} \dots \\ \tilde{Q}_h(\omega, \Omega) \\ \dots \end{pmatrix}$$

La soluzione del moto forzato del sistema può essere facilmente determinata grazie agli strumenti matematici introdotti nel capitolo 1 e si ha:

$$\underline{q}_f(t, \Omega) = \begin{pmatrix} \dots \\ \varphi_h(t, \Omega) \\ \dots \end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\underline{q}}(\omega, \Omega) e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(\omega, \Omega) \tilde{\underline{Q}}(\omega, \Omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (7.8.25)$$

$$\tilde{\underline{q}}(\omega, \Omega) = \begin{pmatrix} \dots \\ \tilde{\varphi}_h(\omega, \Omega) \\ \dots \end{pmatrix} = \alpha(\omega, \Omega) \tilde{\underline{Q}}(\omega, \Omega) = [-\omega^2 M + j\omega(C_c(\Omega) + C_{sm}) + K_{tot}]^{-1} \tilde{\underline{Q}}(\omega, \Omega)$$

dove in questi casi è utile distinguere nella ricettanza  $\alpha(\omega, \Omega)$  la doppia dipendenza dalla pulsazione della forzante e della velocità di rotazione della macchina.

Applicando il teorema di sovrapposizione modale in questo caso abbiamo:

$$\begin{aligned} \tilde{\underline{q}}(\omega, \Omega) &= \alpha(\omega, \Omega) \tilde{\underline{Q}}(\omega, \Omega) = \sum_{k=1}^{2N} \frac{(q_{Rk}^H \ q_{Lk}^H)}{j\omega - s_k} \tilde{\underline{Q}}(\omega, \Omega) = \\ &= \sum_{k=1}^{2N} \left( \frac{q_{Lk}^H \tilde{\underline{Q}}(\omega, \Omega)}{j\omega - s_k} \right) \underline{q}_{Rk}, \end{aligned} \quad (7.8.26)$$

da cui possiamo dedurre che i modi che maggiormente contribuiscono alle singole armoniche della soluzione sono quelli in cui  $\left(\frac{q_{Lk}^H \tilde{Q}(\omega, \Omega)}{j\omega - s_k}\right)$  è grande, ovvero quando  $\omega$  è vicina a una delle pulsazioni proprie del sistema  $\omega_{pk}$  contenuta in  $s_k$  (corrispondenti alle risonanze del sistema) o quando  $q_{Lk}^H \tilde{Q}(\omega, \Omega)$  è grande (forzanti ortogonali al corrispondente autovettore).

Consideriamo a titolo di pure esempio una forzante generica come quella in Fig. 119 (un tipico segnale passabanda con frequenza portante  $\omega_f(\Omega)$ , ovvero come nella realtà appare un segnale puramente armonico). In questo caso  $\delta(\Omega)$  e  $\Delta(\Omega)$  sono le soglie di sensibilità del segnale, utili per determinare in quale range dello spettro il contributo in frequenza del segnale sia realmente apprezzabile. Per semplicità supporremo che, come spesso accade in questo caso,  $\delta(\Omega)$ ,  $\Delta(\Omega)$  e la frequenza portante del segnale  $\omega_f(\Omega)$  siano le stesse per ogni componente della forzante  $\tilde{Q}(\omega, \Omega)$ .

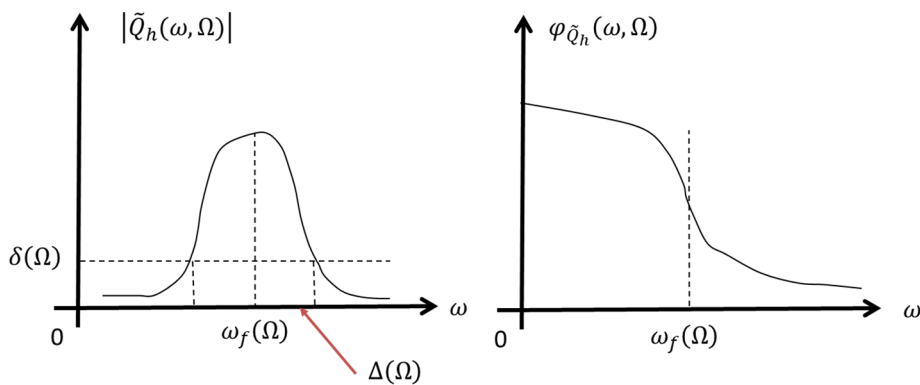


Figura 119 Forzante generica del sistema

Il diagramma di Campbell associato a questo caso è riportato in Fig. 120. Rispetto allo studio nel moto libero abbiamo aggiunto la banda del carico ( $\omega_f(\Omega), \Delta(\Omega)$ ) sul diagramma relativo alle pulsazioni proprie  $\omega_{pi}$ . Le intersezioni della banda del carico con i rami del diagramma  $I\Omega_c$  rappresentano le bande critiche. Il valore di smorzamento modale (banda di smorzamento) associato alle bande critiche  $I\zeta_c$  può essere facilmente trovato riportando la banda critica in questione  $I\Omega_c$  sul diagramma dello smorzamento.

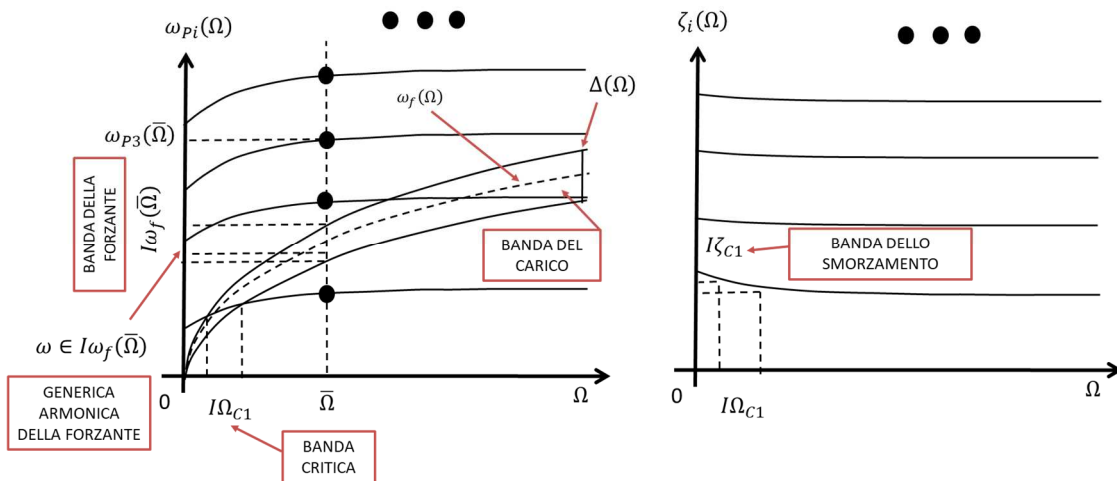


Figura 120 Diagramma di Campbell per rotore elastico con forzante generica

Per capire quanto effettivamente vibra il sistema dobbiamo fare uso dei diagrammi di Bode. A tale fine dobbiamo prima specificare una velocità di lavoro della macchina  $\bar{\Omega}$  alla quale studiare il sistema. Riporto quindi tale velocità  $\bar{\Omega}$  sul diagramma di Campbell; l'intersezione tra la retta verticale passante per  $\bar{\Omega}$  e gli  $N$  rami del diagramma delle pulsazioni proprie  $\omega_{p_i}$  rappresentano le  $N$  pulsazioni proprie del sistema coincidenti, a loro volta, con le pulsazioni di risonanza del sistema. A questo punto, supponendo di voler trovare quanto vale la rotazione della  $h$ -esima sezione  $\tilde{\varphi}_h(\omega, \Omega)$  attorno all'asse  $z_h$  (nel dominio della frequenza), posso tracciare i rispettivi diagrammi (Fig. 121). Per determinare le bande del modulo e della fase della rotazione  $\tilde{\varphi}_h(\omega, \Omega)$  devo determinare sul diagramma di Bode la banda in cui agisce la forzante. Ma questo può essere dedotto dal diagramma di Campbell intersecando la banda del carico con la sezione verticale passante per  $\bar{\Omega}$  (si vedano sempre la Fig. 120 e la Fig. 121). Lo stesso ragionamento può essere effettuato per la generica componente armonica a pulsazione  $\omega \in I\omega_f(\bar{\Omega})$  appartenente alla banda  $I\omega_f(\bar{\Omega})$  in cui agisce la forzante (Fig. 120 e Fig. 121).

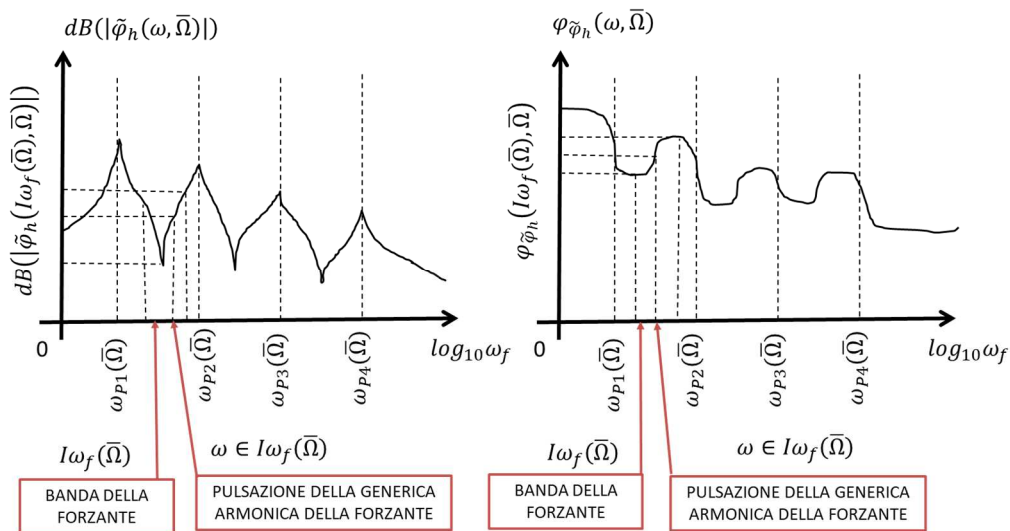


Figura 121 Diagramma di Bode per rotore elastico con forzante generica

Guardando ai diagrammi di Campbell e di Bode, risulta chiaro il significato di banda critica  $I\Omega_c$ . Qualora infatti la pulsazione di lavoro della macchina  $\bar{\Omega}$  (la speed) si trovasse in corrispondenza di una banda critica  $I\Omega_c$ , la banda in cui la forzante agirebbe sulla macchina  $I\omega_f(\bar{\Omega})$  includerebbe proprio una pulsazione propria  $\omega_{p_i}(\bar{\Omega})$  e quindi una pulsazione di risonanza. Ci troveremmo quindi necessariamente in condizioni di massima amplificazione.

Per quanto riguarda lo studio degli autovettori, al contrario delle vibrazioni flessionali, non ha più senso parlare di "whirl forzato" in quanto non stiamo più studiando la traiettoria del nodo  $\underline{G}_h$  ma solamente la rotazione della sezione a esso solidale  $\varphi_{h\omega}(t, \Omega)$  (per ogni singola armonica  $\omega \in I\omega_f(\bar{\Omega})!$ ) (si veda la Fig. 122):

$$\underline{q}_\omega(t, \Omega) = \begin{pmatrix} \dots \\ \varphi_{h\omega}(t, \Omega) \\ \dots \end{pmatrix} = \text{Re} \left( \underline{\tilde{q}}(\omega, \Omega) e^{j\omega t} \right) = \text{Re} \left( \begin{pmatrix} \dots \\ \tilde{\varphi}_h(\omega, \Omega) \\ \dots \end{pmatrix} e^{j\omega t} \right), \quad \varphi_{h\omega}(t, \Omega) = \text{Re} \left( \tilde{\varphi}_h(\omega, \Omega) e^{j\omega t} \right). \quad (7.8.27)$$

Tale rotazione oscilla semplicemente alla pulsazione  $\omega$  (uguale per tutti i nodi!) con modulo e fase (contenuti in  $\tilde{\varphi}_h(\omega, \Omega)$ ) dipendenti dal nodo in questione. Si noti come, al contrario del moto libero, non essendo presente il termine esponenziale dovuto allo smorzamento, l'oscillazione della rotazione  $\varphi_{h\omega}(t, \Omega)$  permarrà come in Fig. 122 senza mai smorzarsi. Se siamo vicini a una risonanza e/o lo smorzamento modale è in generale piccolo, allora le dimensioni dell'oscillazione saranno più grandi, altrimenti saranno più piccole.

In linea teorica ogni rotazione  $\varphi_{h\omega}(t, \Omega)$  della sezione associata al nodo  $G_h$  può oscillare con qualunque ampiezza e qualunque fase (contenuti in  $\tilde{\varphi}_h(\omega, \Omega)$ !). Tuttavia, per il principio di coerenza modale, anche nelle vibrazioni torsionali i modi di vibrare tendono ad avere solamente forme regolari come quelle riportate in Fig. 122. Questo è dovuto al fatto i rotori sono solitamente di metallo (acciaio, leghe ad alta resistenza, etc) e non di gomma o di carta. Di conseguenza, sezioni della macchina adiacenti tra loro non potranno mai avere rotazioni "troppo diverse" tra loro (in tal caso non potremmo certo parlare di elasticità lineare e materiali lineari!).

Come si può notare dalla Fig. 122 (per ogni singola armonica!), la deformata forzata è di tipo OPI quando non ha né punti nodali PN né ovviamente punti di inversione PI (le rotazioni  $\varphi_{h\omega}(t)$  tendono a essere tutte in fase). Se invece esistono dei punti nodali PN, la deformata forzata può avere dei punti di inversione PI e di conseguenza potremo avere deformate forzate 1PI, 2PI, 3PI a seconda di quante inversioni del moto avvengono.

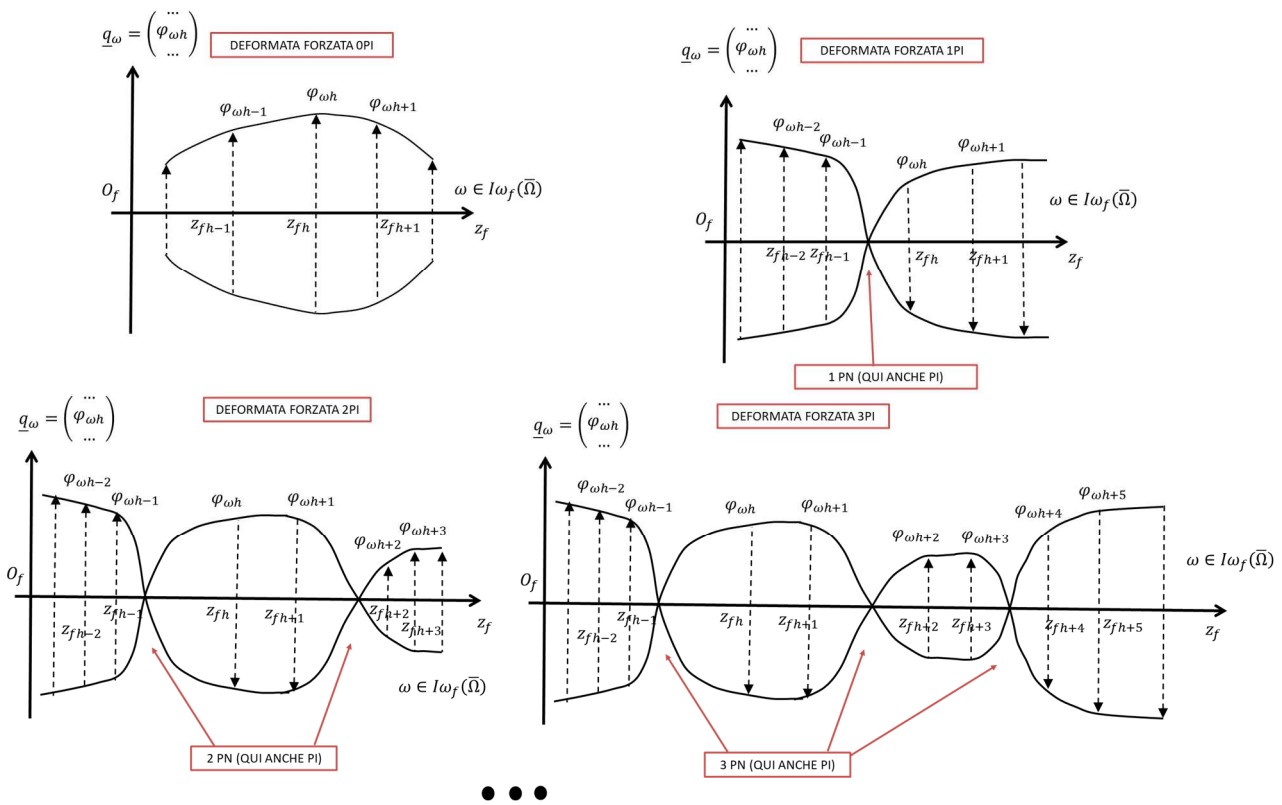


Figura 122 Il concetto di coerenza modale (si vedano anche le figure analoghe dei capitoli 4 e 10)

Naturalmente non è detto che, se ci sono dei punti nodali PN, il moto necessariamente si invertirà in essi e che, di conseguenza, il punto in questione sia per forza un punto di inversione PI. Possono benissimo esistere punti nodali PN in cui il moto non si inverte e che quindi non sono punti di inversione PI. I punti di inversione PI sono quindi un sottoinsieme dei punti nodali PN (il numero dei PI è minore o uguale di quello dei PN).

Come detto in precedenza, la rotazione della  $h$ -esima sezione  $\varphi_{h\omega}(t, \Omega)$  avviene chiaramente alla pulsazione della forzante  $\omega \in I\omega_f(\bar{\Omega})$  (la stessa per ogni nodo  $\underline{G}_h$ !). Ciò è coerente col fatto che la pulsazione associata alla deformata forzata in questione è sempre una e una sola, ovvero  $\omega \in I\omega_f(\bar{\Omega})$ .

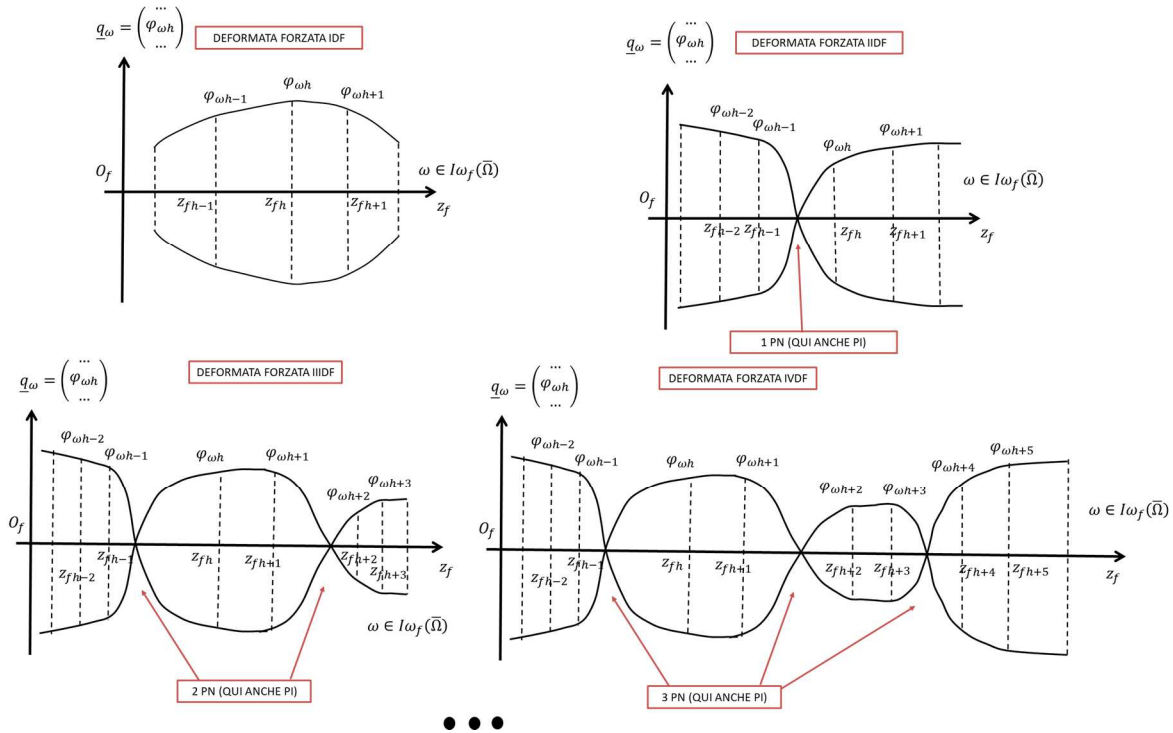


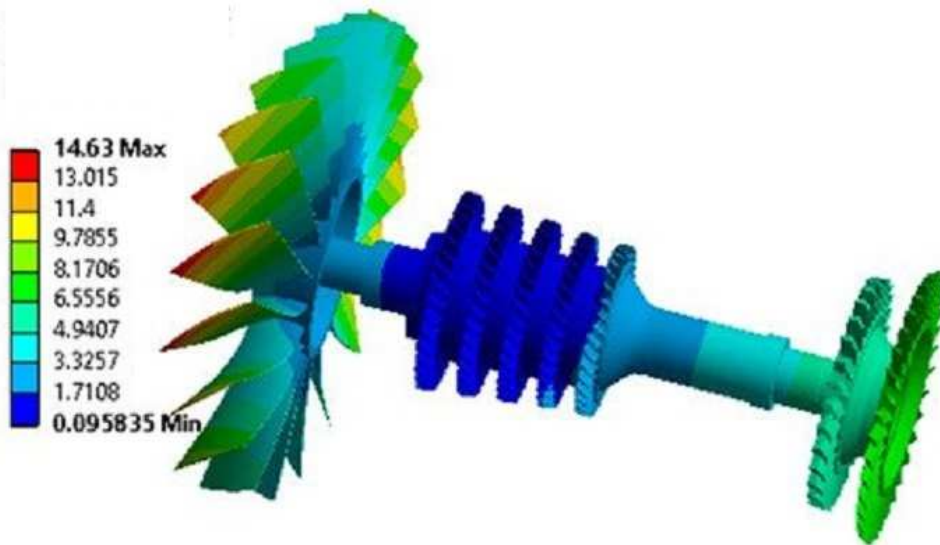
Figura 123 Deformate forzate per rotore elastico con forzante armonica periodica (si vedano anche le figure analoghe dei capitoli 4 e 10)

Le principali deformate forzate sono rappresentate in Fig. 123 e, nelle caratteristiche (0PI, 1PI, 2PI, 3PI) e nella forma (IDF, IIDF, IIVDF, etc.), ricordano i modi di vibrare IE, IIE, IIIE, IVE, etc. descritti nel paragrafo 7.7. Tuttavia le deformate forzate riguardano il moto forzato e non il moto libero, e non vanno dunque confuse con i modi di vibrare e le deformate modali!

ELENCO RIASSUNTIVO DELLE VARIE DEFORMATE FORZATE:

- 1) FORMA: IDF  
CARATTERISTICA: 0PI
- 2) FORMA: IIDF  
CARETTERISTICA: 0PI, 1PI
- 3) FORMA: IIVDF  
CARETTERISTICA: 0PI, 1PI, 2PI
- 4) FORMA: IVDF  
CARETTERISTICA: 0PI, 1PI, 2PI, 3PI
- ... ..

## 8. VIBRAZIONI ASSIALI: ROTORI ELASTICI 1D



Tipico schema di rotore elastico 1D per analisi assiale

Sotto le ipotesi di lavoro fatte nel capitolo 4 e coerentemente con la notazione introdotta in tale capitolo, cominciamo ora lo studio delle vibrazioni assiali dei rotori elastici 1D (ovvero rotori aventi una dimensione prevalente e l'asse di rotazione principale coincidente con essa). Faremo di conseguenza uso della teoria assiale della trave 1D, teoria caratterizzata localmente da un solo DOF (ovvero la traslazione delle sezioni della trave lungo l'asse  $z_f$ ) (vedi Fig. 124).

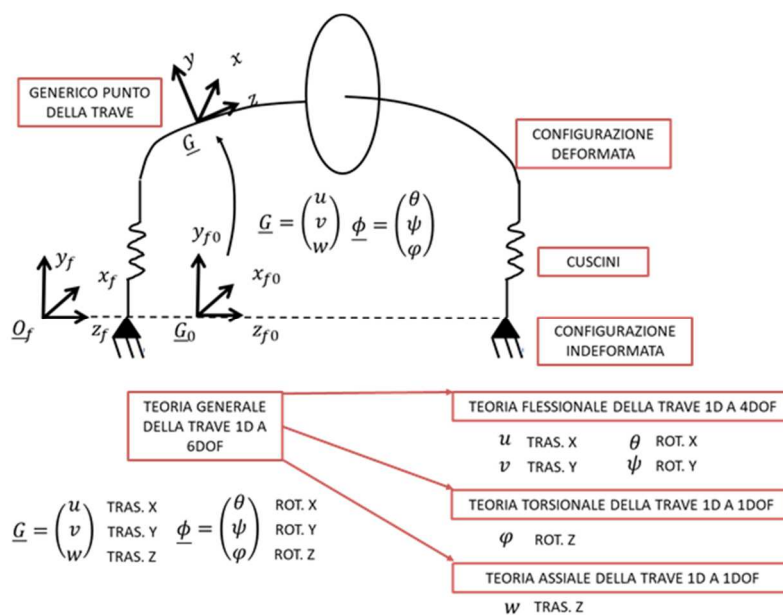


Figura 124 Teoria 1D della trave nello spazio



## 8.1 Equazioni di moto (approccio Lagrangiano)

In accordo con la nomenclatura e le ipotesi del capitolo 4 svilupperemo un modello FEM di macchina rotante 1D (a 1 DOF per nodo e a 2 nodi per elemento) per studiare la dinamica assiale a 1DOF del rotore. Supponiamo intanto che la mesh sia nota (posizione dei nodi, caratteristiche degli elementi e funzioni di forma note). Non entreremo in seguito in questi argomenti che supporremo noti. Riassumiamo per praticità le principali ipotesi di lavoro:

- trave snella (presenza di una dimensione prevalente, tipica della strutture 1D, e coincidente in questo caso con l'asse di rotazione principale) ad asse rettilineo.
- trave a sezione piana: la generica sezione della trave associata al nodo  $\underline{G}_k$  rimane sempre contenuta nel piano  $xy$  della terna solidale al nodo stesso e non si deforma; la sezione della trave può quindi rototraslare nello spazio con 6DOF disponibili  $\underline{G}_k, \underline{\phi}_k$  (la generica trave a sezione piana nello spazio è quindi a 6DOF).
- elasticità lineare (caratteristiche elastiche dei materiali lineari).
- linearizziamo poi il problema nell'intorno della configurazione nominale. In altre parole, studiamo il problema ai "piccoli spostamenti" nell'intorno della configurazione in questione. Da un punto di vista fisico, consideriamo tutte variabili del problema piccole (eccetto ovviamente la speed della macchina  $\Omega$ ) e consideriamo piccole anche le loro derivate. Applicare questa ipotesi a una quantità fisica equivale a considerare solamente i termini di ordine 0 (le costanti) e i termini di ordine 1 (la variabili stesse), ignorando qualunque altro termine di ordine superiore.
- consideriamo solamente il grado di libertà assiale (visto che il nostro scopo è studiare la dinamica assiale). In altre parole nelle equazioni spaziali, delle 6 equazioni normalmente presenti, considereremo solo la terza (rotazione attorno a  $z_f$ ).

Le ipotesi sopraelencate, tra le altre cose, garantiscono nel caso di rotore elastico anche il disaccoppiamento fondamentale tra dinamica flessionale (a 4DOF), dinamica torsionale (a 1DOF) e dinamica assiale (1DOF). Quando tali ipotesi non saranno verificate, allora sarà necessario l'impiego una teoria della trave 1D a 6DOF.

L'unica variabile nodale associata al  $k$ -esimo nodo sarà in questo caso la traslazione della sezione  $w_k$  lungo l'asse di rotazione della macchina  $z_f$  (si veda la Fig. 125).

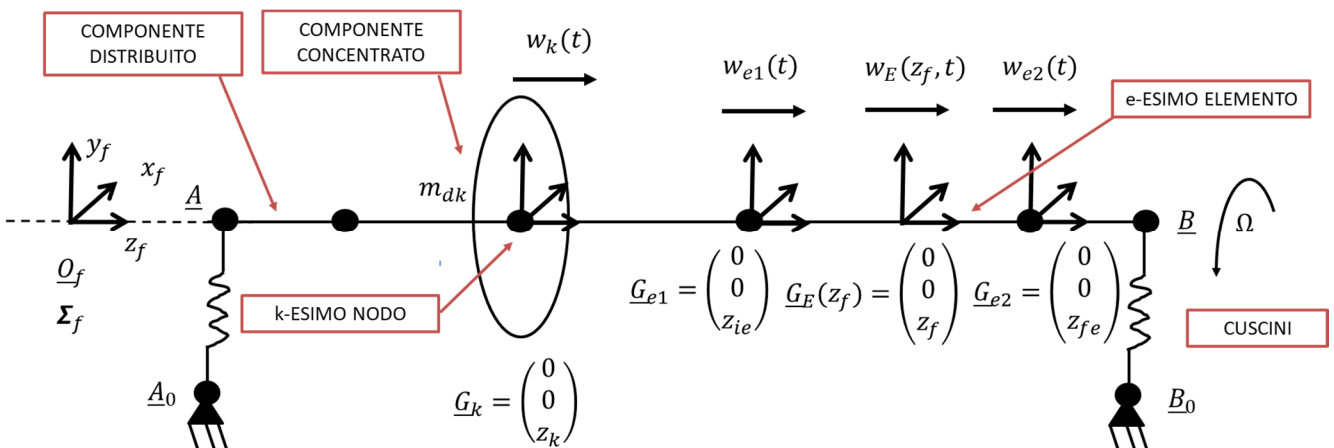


Figura 125 Modello FEM di rotore elastico 1D con 2 nodi per elemento e 1DOF per nodo

In linea con quanto detto, avremo ora un'unica variabile nodale per ogni nodo e, a partire da esse, potremo definire il vettore contenente tutte le variabili Lagrangiane del sistema:

$$q_k(t) = w_k \in R^{\text{DOFN}=1}, \quad k = 1 \dots NN, \quad \underline{q}(t) = \begin{pmatrix} w_1 \\ \dots \\ w_{NN} \end{pmatrix} \in R^{\text{DOFN} \cdot NN = NN}. \quad (8.1.1)$$

Le equivalenti grandezze per il generico elemento sono di conseguenza:

$$q_{e1}(t) = w_{e1} \in R^{\text{DOFN}=1}, \quad q_{e2}(t) = w_{e2} \in R^{\text{DOFN}=1}, \quad q_E(z_f, t) = w_E \in R^{\text{DOFN}=1} \quad (8.1.2)$$

$$\underline{q}_e(t) = \begin{pmatrix} w_{e1} \\ w_{e2} \end{pmatrix} \in R^{\text{DOFN} \cdot Ne = 1 \cdot 2 = 2}, \quad e = 1 \dots NE \quad (8.1.3)$$

dove  $\underline{q}_e(t)$  è il vettore che contiene le variabili nodali dei nodi appartenenti all'elemento considerato. Come sempre, un utile strumento per estrarre  $\underline{q}_k$  e  $\underline{q}_e$  dal vettore contenente tutte le variabili lagrangiane  $\underline{q}$  sono le matrici di connessione (matrici binarie formate da 0 e 1):

$$q_k = \varphi_k = J_k \underline{q}, \quad \underline{q}_e = H_e \underline{q}. \quad (8.1.4)$$

Usando un approccio Lagrangiano, dovremo arrivare a scrivere le equazioni di Lagrange per il nostro sistema

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)^T - \left( \frac{\partial L}{\partial q} \right)^T = \underline{Q}_{NC}, \quad L = T - V. \quad (8.1.5)$$

Dovremo quindi essere in grado di scrivere l'energia cinetica  $T$ , l'energia potenziale  $V$  e le azioni Lagrangiane non conservative  $\underline{Q}_{NC}$  del nostro sistema.

Alla fine (si veda sempre la Fig. 125) dovremo considerare i seguenti componenti della macchina rotante 1D:

- 1) COMPONENTI CONCENTRATI: entità concentrate dotate di massa e inerzia ma non di proprietà elastiche (stadi, giranti, etc.); i componenti concentrati dovranno essere posizionati sull'albero, solidalmente collegati a un nodo di riferimento del modello FEM (naturalmente non tutti i nodi sono associati a un componente concentrato!). Tali componenti avranno un'energia cinetica  $T_{dk}$  (d sta per disk) e un'energia potenziale  $V_{dk}$  solitamente trascurabile ( $V_{dk} = cost$ ).
- 2) COMPONENTI DISTRIBUITI / ELASTICI: entità distribuite dotate di massa, inerzia e di proprietà elastiche (solitamente sono i tratti di albero); i componenti elastici sono quasi sempre associati agli elementi del modello FEM. Tali componenti avranno un'energia cinetica  $T_e$  e un'energia potenziale  $V_e$ .
- 3) COMPONENTI ESTERNI / NON CONSERVATIVI: comprendono tutto quello che agisce sulla macchina dall'esterno come forzanti esterne (carichi palari / forzanti di fluido, azioni dovute a motori/generatori, azione della gravità o di altri campi di forza esterni, etc.), componenti modellabili come elementi di forza (cuscini, tenute, giunti, riduttori, etc.), smorzamento del materiale e altri effetti strutturali non conservativi modellati come azioni esterne usando il Principio dei Lavori Virtuali. I componenti esterni / non conservativi sono chiaramente associati alle azioni Lagrangiane non conservative  $\underline{Q}_{NC}$ . In questo capitolo parleremo delle forzanti esterne più comuni e in modo assai semplificato dello smorzamento. Analizzeremo inoltre gli elementi di forza e soprattutto i cuscini fluidodinamici mentre nel capitolo 9

torneremo a parlare di forzanti esterne soffermandoci sulla modellazione delle forzanti di fluido (interazione fluido-struttura).

Nel complesso avremo dunque

$$L = T - V = \sum_{k=1}^{NN} T_{dk} + \sum_{e=1}^{NE} T_e - \sum_{e=1}^{NE} V_e. \quad (8.1.6)$$

## 8.2 Elementi concentrati

Per quanto riguarda gli elementi concentrati, modellabili come corpi rigidi concentrati solidalmente collegati alla terna associata al generico nodo  $k$ -esimo, calcoleremo l'energia cinetica  $T_{dk}$  e trascureremo l'energia potenziale  $V_{dk} = cost$ . L'energia cinetica  $T_{dk}$  può essere calcolata facilmente poiché il moto dell'elemento concentrato è una pura traslazione lungo  $z_k$ :

$$T_{dk} = \frac{1}{2} m_{dk} \dot{w}_k^2 \quad (8.2.1)$$

dove  $m_{dk}$  è la massa dell'elemento concentrato associato al  $k$ -esimo elemento.

## 8.3 Elementi elastici

Per calcolare l'energia cinetica  $T_e$  e l'energia potenziale elastica  $V_e$  degli elementi elastici faremo uso della più semplice teoria assiale della trave 1D a 1 DOF. In questo caso per la nomenclatura si faccia riferimento alla Fig. 126.

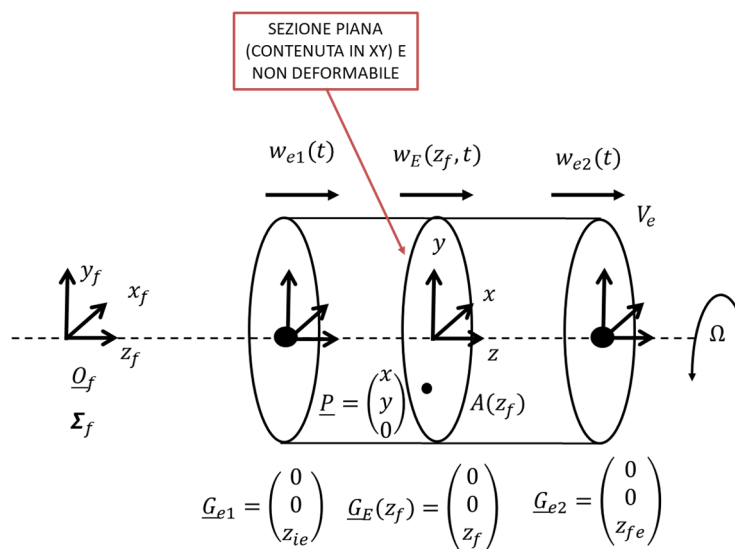


Figura 126 Elemento FEM 1D con 2 nodi per elemento e 4DOF per nodo

Una volta richiamata la nomenclatura, è il momento di introdurre l'approssimazione FEM per questo specifico problema:

$$q_E(z_f, t) = w_E(z_f, t) \cong N_e(z_f) \underline{q}_e(t). \quad (8.3.1)$$

In questo caso  $N_e(z_f)$  è semplicemente un vettore riga  $1 \times 2$  (coerentemente con la (8.3.1)) e ognuno dei suoi 2 elementi è fatto da polinomi interpolanti. La teoria della trave 1D in questione è governata dall'equazione

$$\begin{cases} \rho A \frac{\partial^2 w_E}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial z_f} \left( AE \frac{\partial w_E}{\partial z_f} \right) = q(z_f, t) \\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w_E}{\partial z_f}, \quad \sigma_{zz} = E \varepsilon_{zz} = E \frac{\partial w_E}{\partial z_f} \end{cases} \quad (8.3.2)$$

dove  $\rho$  è la densità del materiale,  $A$  l'area della sezione,  $E$  il modulo di Young, e  $q(z_f, t)$  è l'eventuale carico distribuito sulla trave.

Troviamo ora l'energia potenziale elastica del generico elemento  $V_e$  :

$$\begin{aligned} V_e &= \frac{1}{2} \int_{V_e} \sum_{i,j} \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} dV = \frac{1}{2} \int_{V_e} \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} dV = \frac{1}{2} \int_{z_{ie}}^{z_{fe}} \int_{A(z_f)} E \left( \frac{\partial w_E}{\partial z_f} \right)^2 dA dz_f = \\ &= \int_{z_{ie}}^{z_{fe}} \int_{A(z_f)} E \underline{q}_e^T N_e^T N_e' \underline{q}_e dA dz_f = \frac{1}{2} \underline{q}_e^T \left[ \int_{z_{ie}}^{z_{fe}} A E N_e^T N_e' dz_f \right] \underline{q}_e = \\ &= \frac{1}{2} \underline{q}_e^T K_e \underline{q}_e \end{aligned} \quad (8.3.3)$$

Il calcolo dell'energia potenziale elastica del generico elemento  $T_e$

$$T_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} \rho \|\underline{v}_p\|^2 dV \quad (8.3.4)$$

è questa volta più semplice di quanto accadeva per le vibrazioni flessionali perché il generico punto della sezione della trave ha un moto di pura traslazione lungo l'asse della trave stessa, ovvero:  $\|\underline{v}_p\| = \left| \frac{\partial w_E}{\partial t} \right|$ . Si ha dunque:

$$\begin{aligned} T_e &= \frac{1}{2} \int_{V_e} \rho \left( \frac{\partial w_E}{\partial t} \right)^2 dV = \\ &= \frac{1}{2} \int_{z_{ie}}^{z_{fe}} \int_A \rho \underline{\dot{q}}_e^T N_e^T N_e \underline{\dot{q}}_e dA dz_f = \frac{1}{2} \underline{\dot{q}}_e^T \left[ \int_{z_{ie}}^{z_{fe}} \rho A N_e^T N_e dz_f \right] \underline{\dot{q}}_e = \frac{1}{2} \underline{\dot{q}}_e^T M_e \underline{\dot{q}}_e. \end{aligned} \quad (8.3.5)$$

## 8.4 Assemblaggio delle equazioni

L'assemblaggio delle equazioni di moto anche in questo caso è abbastanza facile una volta determinati i vari contributi. Ricordando che

$$L = T - V = \sum_{k=1}^{NN} T_{dk} + \sum_{e=1}^{NE} T_e - \sum_{e=1}^{NE} V_e, \quad (8.4.1)$$

alla luce dei risultati per paragrafo 8.3, possiamo scrivere per gli elementi concentrati e per gli elementi distribuiti:

$$T_{dk} = \frac{1}{2} \dot{w}_k m_{dk} \dot{w}_k \quad (8.4.2)$$

$$V_e = \frac{1}{2} \underline{q}_e^T K_e \underline{q}_e$$

$$T_e = \frac{1}{2} \dot{\underline{q}}_e^T M_e \dot{\underline{q}}_e.$$

Introducendo le (8.4.2) nella (8.4.1) e usando le matrici di connessione  $\varphi_k = J_k \underline{q}$  e  $\underline{q}_e = H_e \underline{q}$ , si ottiene

$$V_{etot} = \sum_{e=1}^{NE} V_e = \sum_{e=1}^{NE} \frac{1}{2} \underline{q}_e^T K_e \underline{q}_e = \frac{1}{2} \underline{q}^T \left( \sum_{e=1}^{NE} H_e^T K_e H_e \right) \underline{q} = \frac{1}{2} \underline{q}^T K_{etot} \underline{q} \quad (8.4.3)$$

$$\begin{aligned} T_{etot} &= \sum_{e=1}^{NE} T_e = \sum_{e=1}^{NE} \frac{1}{2} \dot{\underline{q}}_e^T M_e \dot{\underline{q}}_e = \frac{1}{2} \dot{\underline{q}}^T \left( \sum_{e=1}^{NE} H_e^T M_e H_e \right) \dot{\underline{q}} = \\ &= \frac{1}{2} \dot{\underline{q}}^T M_{etot} \dot{\underline{q}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{dtot} &= \sum_{k=1}^{NN} T_{dk} = \sum_{k=1}^{NN} \frac{1}{2} \dot{w}_k m_{dk} \dot{w}_k = \\ &= \frac{1}{2} \dot{\underline{q}}^T M_{dtot} \dot{\underline{q}}, \quad M_{dtot} = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & m_{dk} & \\ & & \ddots \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Sostituendo infine le (8.4.3) nelle equazioni di Lagrange (8.1.5) si arriva alla seguente equazione:

$$(M_{dtot} + M_{etot}) \ddot{\underline{q}} + K_{etot} \underline{q} = \underline{Q}_{NC} = \underline{Q}_b + \underline{Q}_{sm} + \underline{Q}_{ext} \quad (8.4.4)$$

dove, dentro le azioni lagrangiane non conservative  $\underline{Q}_{NC}$ , abbiamo considerato le generiche forzanti esterne  $\underline{Q}_{ext}$  agenti sulla macchina (carichi palari / forzanti di fluido, azioni dovute a motori/generatori, azione della gravità o di altri campi di forza esterni, etc.), lo smorzamento del materiale  $\underline{Q}_{sm}$  (modellato come azione esterna usando il Principio dei Lavori Virtuali) e le azioni  $\underline{Q}_b$  dei componenti modellabili come elementi di forza (cuscini, tenute, giunti, riduttori, etc.). Solitamente le matrici  $M_{dtot}$ ,  $M_{etot}$  sono simmetriche definite positive mentre la matrice  $K_{etot}$  è simmetrica semidefinita positiva.

In questo capitolo parleremo delle forzanti esterne più comuni e, in modo assai semplificato, dello smorzamento. Parleremo inoltre degli elementi di forza e soprattutto dei cuscini fluidodinamici e nel capitolo 9 torneremo a parlare di forzanti esterne soffermandoci sulla modellazione delle forzanti di fluido (interazione fluido-struttura).

Supponiamo per ora di adottare per gli elementi di forza (e soprattutto per cuscini e tenute) agenti sul generico nodo  $k$ -esimo una classica formulazione linearizzata tipo molla tridimensionale:

$$Q_{bk} = -k_{Ck}(\Omega)w_k - c_{Ck}(\Omega)\dot{w}_k = \quad (8.4.5)$$

in cui i coefficienti di rigidezza e smorzamento  $k_{Ck}(\Omega)$ ,  $c_{Ck}(\Omega)$  possono dipendere dalla speed  $\Omega$  e da altri parametri del sistema. Il vettore complessivo delle azioni lagrangiane associate agli elementi di forza  $\underline{Q}_b$  potrà essere determinato semplicemente impilando le (8.4.5):

$$\underline{Q}_b = -K_C(\Omega)\underline{\dot{q}} - C_C(\Omega)\underline{\dot{q}}, \quad K_C(\Omega) = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & k_{Ck}(\Omega) & \\ & & \ddots \end{bmatrix}, \quad C_C(\Omega) = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & c_{Ck}(\Omega) & \\ & & \ddots \end{bmatrix}. \quad (8.4.6)$$

Inserendo la (8.4.6) nella (8.4.4) si arriva alle equazioni:

$$(M_{dtot} + M_{etot})\underline{\ddot{q}} + C_C(\Omega)\underline{\dot{q}} + (K_C(\Omega) + K_{etot})\underline{q} = \underline{Q}_{sm} + \underline{Q}_{ext} \quad (8.4.7)$$

$$M\underline{\ddot{q}} + C_C(\Omega)\underline{\dot{q}} + (K_C(\Omega) + K_{etot})\underline{q} = \underline{Q}_{sm} + \underline{Q}_{ext}$$

dove la matrice  $M$  rimane simmetrica definita positiva.

Supponendo infine di adottare un semplice modello di smorzamento del materiale lineare (vedremo nel prossimo paragrafo come fare a determinare la matrice di smorzamento  $C_{sm}$  con il Principio dei Lavori Virtuali)

$$\underline{Q}_{sm} = -C_{sm}\underline{\dot{q}}, \quad (8.4.8)$$

si ottiene l'equazione generale della rotordinamica assiale (a 1DOF) per un rotore elastico 1D:

$$M\underline{\ddot{q}} + (C_C(\Omega) + C_{sm})\underline{\dot{q}} + (K_C(\Omega) + K_{etot})\underline{q} = \underline{Q}_{ext} \quad (8.4.9)$$

$$M\underline{\ddot{q}} + C\underline{\dot{q}} + K\underline{q} = \underline{Q}_{ext}.$$

## 8.5 Trattazione semplificata dello smorzamento di materiale

Mostriamo ora come calcolare le azioni lagrangiane associate allo smorzamento del materiale nell'ipotesi estremamente semplificata di smorzamento lineare (modello di smorzamento linearizzato):

$$\underline{Q}_{sm} = -C_{sm}\underline{\dot{q}}. \quad (8.5.1)$$

Il calcolo di  $\underline{Q}_{sm}$  è come sempre una interessante e istruttiva applicazione del Principio dei Lavori Virtuali (PLV) al modello di trave in uso. Il PLV afferma che il lavoro virtuale scritto nello spazio della variabili lagrangiane è uguale, per qualunque spostamento virtuale compatibile con i vincoli del sistema, al lavoro virtuale scritto nello "spazio fisico". Considerando l' $e$ -esimo elemento del nostro modello FEM, si ha:

$$\delta q_e^T \underline{Q}_{sm}^e = -\delta L_{sm}^e. \quad (8.5.2)$$

dove  $\delta L_{sm}^e$  è il lavoro virtuale nello spazio fisico effettuato dal sistema. Ipotizzando che il materiale abbia una semplice caratteristica lineare visco-elastica del tipo

$$\sigma_{zz} = \sigma_{zzel} + \sigma_{zzsm} = E\varepsilon_{zz} + E_{sm}\dot{\varepsilon}_{zz}, \quad (8.5.3)$$

è possibile calcolare  $-\delta L_{sm}^e$  per la sola componente di smorzamento della (8.5.3) (ho già considerato la componente elastica nel paragrafo 8.3!):

$$-\delta L_{sm}^e = - \int_{V_e} \sum_{i,j} \delta \varepsilon_{ij} \sigma_{ijsm} dV = - \int_{V_e} \delta \varepsilon_{zz} \sigma_{zzsm} dV. \quad (8.5.4)$$

Ricordando che valgono le seguenti relazioni costitutive

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w_E}{\partial z_f}, \quad \sigma_{zz} = E \varepsilon_{zz} = E \frac{\partial w_E}{\partial z_f} \quad (8.5.5)$$

si ha

$$\delta \varepsilon_{zz} = \delta \frac{\partial w_E}{\partial z_f} = N_e' \delta \underline{q}_e, \quad \sigma_{zzsm} = E_{sm} \dot{\varepsilon}_{zz} = E_{sm} \frac{\partial^2 w_E}{\partial z_f \partial t} = G_{sm} N_e' \dot{\underline{q}}_e \quad (8.5.6)$$

Sostituendo nella (8.5.4) si ha infine:

$$\begin{aligned} -\delta L_{sm}^e &= - \int_{z_{ie}}^{z_{fe}} \int_A \left[ E_{sm} \delta \underline{q}_e^T N_e'^T N_e' \dot{\underline{q}}_e \right] dA dz_f = \\ -\delta L_{sm,u} &= -\delta \underline{q}_e^T \int_{z_{ie}}^{z_{fe}} E_{sm} A N_e'^T N_e' dz_f \dot{\underline{q}}_e = \\ &= -\delta \underline{q}_e^T C_{sm}^e \dot{\underline{q}}_e \end{aligned} \quad (8.5.7)$$

Dal momento che il PLV è vero qualunque siano gli spostamenti virtuali compatibili con i vincoli  $\delta \underline{q}_e$ , si ha che

$$\underline{Q}_{sm}^e = -C_{sm}^e \dot{\underline{q}}_e. \quad (8.5.8)$$

Infine, per trovare il vettore complessivo delle azioni lagrangiane associate allo smorzamento  $\underline{Q}_{sm}$ , usiamo nuovamente le matrici di connessione:

$$\underline{Q}^{sm} = \sum_{e=1}^{NE} H_e^T \underline{Q}_{sm}^e = - \sum_{e=1}^{NE} H_e^T C_{sm}^e H_e \dot{\underline{q}} = -C_{sm} \dot{\underline{q}}. \quad (8.5.9)$$

## 8.6 Cuscini oleodinamici

Come già detto nel caso delle vibrazioni flessionali, per una data configurazione (atto di moto) di albero (corpo 1) e sede / pattino (corpo 2), la forze e i momenti agenti sui corpi in questione a seguito nella presenza del cuscinio dipenderanno dagli atti di moto stessi:

$$\underline{F}_{21} = \underline{F}_{21}(\underline{G}_1, \underline{\dot{G}}_1, \underline{\phi}_1, \underline{\dot{\phi}}_1, \underline{G}_2, \underline{\dot{G}}_2, \underline{\phi}_2, \underline{\dot{\phi}}_2), \quad \underline{F}_{12} = \underline{F}_{12}(\underline{G}_1, \underline{\dot{G}}_1, \underline{\phi}_1, \underline{\dot{\phi}}_1, \underline{G}_2, \underline{\dot{G}}_2, \underline{\phi}_2, \underline{\dot{\phi}}_2) \quad (8.6.1)$$

$$\underline{M}_{21} = \underline{M}_{21}(\underline{G}_1, \underline{\dot{G}}_1, \underline{\phi}_1, \underline{\dot{\phi}}_1, \underline{G}_2, \underline{\dot{G}}_2, \underline{\phi}_2, \underline{\dot{\phi}}_2), \quad \underline{M}_{12} = \underline{M}_{12}(\underline{G}_1, \underline{\dot{G}}_1, \underline{\phi}_1, \underline{\dot{\phi}}_1, \underline{G}_2, \underline{\dot{G}}_2, \underline{\phi}_2, \underline{\dot{\phi}}_2).$$

Se ora identifichiamo il corpo 1 con l'albero e con 2 la sede e supponiamo che il cuscinio sia collocato in prossimità del nodo  $k$ -esimo, si ha quindi  $\underline{G}_1 = \underline{G}_k$  e  $\underline{\phi}_1 = \underline{\phi}_k$ . Considerando quindi solo le componenti assiali di  $\underline{F}_{21}$ ,  $\underline{M}_{21}$  (vedi la (8.6.1)) e la dipendenza dalle sole variabili assiali contenute nelle coordinate spaziali  $\underline{G}_k$ ,  $\underline{\phi}_k$  (ovvero la traslazione della sezione  $w_k$  lungo l'asse  $z_f$ ) e dalla speed della macchina  $\Omega$ , si ottengono le azioni lagrangiane agenti sull'albero:

$$Q_{bk} = F_{z21} = Q_{bk}(w_k, \dot{w}_k, \Omega). \quad (8.6.2)$$

Solitamente, per la maggioranza delle applicazioni pratiche, la dipendenza dalle altre componenti dell'atto di moto può essere ignorata in prima approssimazione.

Se invece identifichiamo con 2 l'h-esimo pattino (con  $h = 2 \dots NP + 1$ ), dovremo chiaramente tener conto delle forze e dei momenti agenti sull'albero prodotti da tutti i pattini:

$$Q_{bhk} = F_{z21} = Q_{bhk}(w_k, \dot{w}_k, \Omega), \quad Q_{bk} = F_{z1} = Q_{bk}(w_k, \dot{w}_k, \Omega) = \sum_{h=2}^{NP+1} Q_{bhk}(w_k, \dot{w}_k, \Omega). \quad (8.6.3)$$

La modellazione a parametri concentrati dei cuscini a fluido mediante i coefficienti di rigidezza e smorzamento equivalenti  $k_{Ck}$  e  $c_{Ck}$  richiede, anche nel caso delle vibrazioni assiali, la linearizzazione delle azioni lagrangiane non conservative associate ai cuscini:

$$Q_{bk} = F_{z21} = Q_{bk}(z_k, \dot{z}_k, \Omega). \quad (8.6.4)$$

Linearizzando la (8.6.4) nell'intorno di un punto di lavoro dell'albero  $w_{k0}$ ,  $\dot{w}_{k0}$  si ottiene:

$$Q_{bk}^{lin} = Q_{bk}(w_{k0}, \dot{w}_{k0}, \Omega) + \frac{\partial Q_{bk}(w_{k0}, \dot{w}_{k0}, \Omega)}{\partial w_k} (w_k - w_{k0}) + \frac{\partial Q_{bk}(w_{k0}, \dot{w}_{k0}, \Omega)}{\partial \dot{w}_k} (\dot{w}_k - \dot{w}_{k0}). \quad (8.6.5)$$

Data la grande complessità della funzione  $Q_{bk}(w_k, \dot{w}_k, \Omega)$  le varie derivate (e quindi la linearizzazione) dovrà essere effettuata numericamente a partire da un'opportuna campagna di simulazioni al variare dell'atto di moto dell'albero  $\underline{w}_k, \underline{\dot{w}}_k$  e della speed della macchina  $\Omega$  oppure mediante un'accurata campagna sperimentale al banco prova (sempre al variare dell'atto di moto dell'albero e della speed della macchina).

Per semplicità si sceglie solitamente come configurazione di riferimento la posizione nominale dell'albero da fermo, ovvero  $w_{k0} = \underline{0}$ ,  $\dot{w}_{k0} = \underline{0}$ . Si suppone inoltre che il cuscinio non eserciti né forze né momenti sull'albero in configurazione nominale e cioè:  $Q_{bk}(w_{k0}, \dot{w}_{k0}, \Omega) = 0$ .

Se definiscono dunque i coefficienti di smorzamento del cuscinio come (coefficienti scalari in quanto la dinamica torsionale della trave è a 1DOF):

$$k_{Ck}(\Omega) = -\frac{\partial Q_{bk}(w_{k0}, \dot{w}_{k0}, \Omega)}{\partial w_k}, \quad c_{Ck}(\Omega) = -\frac{\partial Q_{bk}(w_{k0}, \dot{w}_{k0}, \Omega)}{\partial \dot{w}_k} \quad (8.6.6)$$

da cui

$$Q_{bk}^{lin} = -k_{Ck}(\Omega)w_k - c_{Ck}(\Omega)\dot{w}_k. \quad (8.6.7)$$

e dove i coefficienti di rigidezza e di smorzamento  $k_{Ck}(\Omega)$ ,  $c_{Ck}(\Omega)$  può dipendere dalla speed  $\Omega$  e da altri parametri del sistema.

In Fig. 127 si riportano a titolo di esempio l'andamenti tipico, in funzione della speed della macchina  $\Omega$ , dei coefficienti  $k_{Ck}(\Omega)$ ,  $c_{Ck}(\Omega)$ .



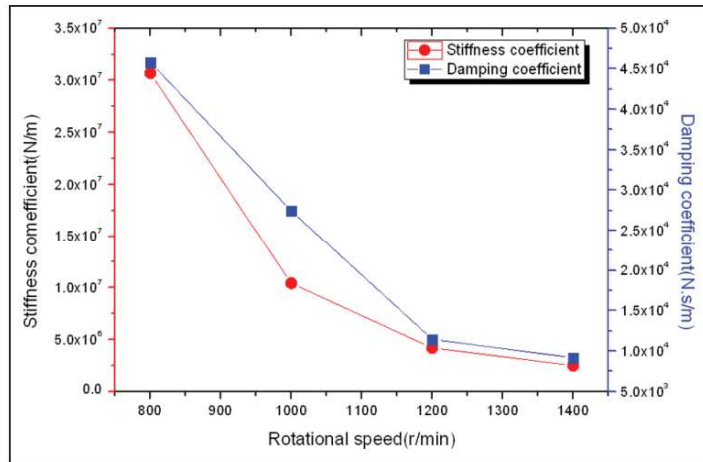
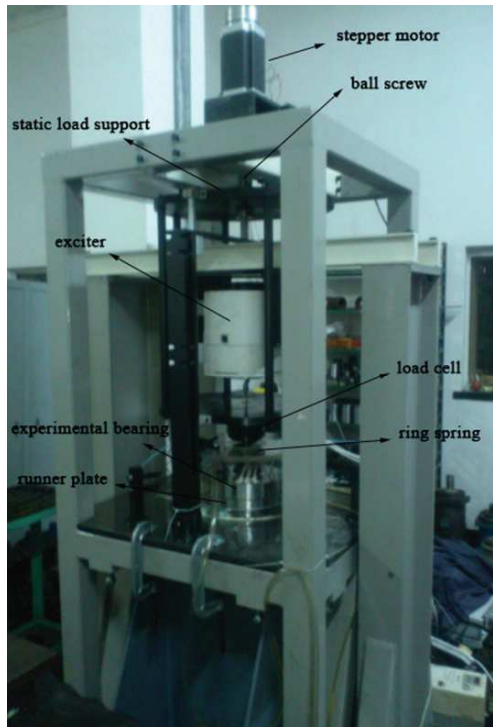


Figura 127 Coefficienti di rigidezza e smorzamento del cuscinio in funzione della speed della macchina

E' evidente la forte dipendenza dei coefficienti di rigidezza e smorzamento dalla speed della macchina  $\Omega$ , aspetto potenzialmente piuttosto negativi sia per la stabilit  del sistema che per i livelli di vibrazione della macchina (si veda quanto detto per i diagrammi di Campbell e di Bode).

## 8.7 Vibrazioni libere: diagrammi di Campbell, classificazione modale e mappa modale

Analizziamo ora la soluzione dell'equazione:

$$M\ddot{\underline{q}} + (C_c(\Omega) + C_{sm})\dot{\underline{q}} + (K_c(\Omega) + K_{tot})\underline{q} = \underline{Q}_{ext} = \underline{0} \quad (8.7.1)$$

Come detto nel paragrafo 1.2, l'analisi ci dice che la soluzione libera (associata al moto libero) ha la forma:

$$\underline{q}_l(t) = \sum_{j=1}^{2N} c_j \underline{q}_j e^{s_j t} \quad (8.7.2)$$

dove

$$s_{i,i+N} = -\zeta_i \omega_{ni} \pm j \omega_{ni} \sqrt{1 - \zeta_i^2} = -\zeta_i \omega_{ni} \pm j \omega_{pi}, \quad \underline{q}_i = \begin{pmatrix} \dots \\ w_{ik} \\ \dots \end{pmatrix}, \quad \underline{q}_{i+N} = \bar{\underline{q}}_i, \quad i = 1 \dots N, \quad (8.7.3)$$

sono gli autovalori (associati alle pulsazioni proprie  $\omega_{pi}$ ) e gli autovettori del problema (associati alle deformate modali).

I modi di vibrare del sistema sono definiti invece come

$$\underline{q}_i(t) = \begin{pmatrix} \dots \\ w_{ik}(t) \\ \dots \end{pmatrix} = \text{Re}(\underline{q}_i e^{s_i t}) = \text{Re}\left(\begin{pmatrix} \dots \\ w_{ik} \\ \dots \end{pmatrix} e^{s_i t}\right), \quad w_{ik}(t) = \text{Re}(w_{ik} e^{s_i t}) \quad (8.7.4)$$

Si noti che il sistema ha  $2N$  autovalori ( $N$  coppie complesse coniugate),  $2N$  autovettori ( $N$  coppie complesse coniugate) e  $2N$  modi di vibrare ( $N$  coppie uguali). Di conseguenza le pulsazioni naturali / proprie e gli smorzamenti modali distinti saranno solamente  $N$ .

Naturalmente, sempre per effetto dei cuscini a fluido, sia gli autovalori che gli autovettori del problema dipendono dal parametro  $\Omega$  (la velocità di rotazione / speed della macchina):

$$s_i(\Omega), \omega_{ni}(\Omega), \omega_{pi}(\Omega), \zeta_i(\Omega), \underline{q}_i(\Omega) \quad \text{con } \Omega \in [0, \Omega_{max}]. \quad (8.7.5)$$

E' dunque molto importante capire a livello qualitativo questa dipendenza sia per il autovalori (tramite il diagramma di Campbell) che per gli autovettori (tramite lo studio del moto (whirl libero) e la classificazione modale). Il tutto sarà infine riassunto dalla mappa modale.

Partendo dallo studio degli autovalori, anche per le vibrazioni assiali, si usa descrivere la dipendenza delle pulsazioni proprie o naturali  $\omega_{ni}(\Omega), \omega_{pi}(\Omega)$  e degli smorzamenti modali  $\zeta_i(\Omega)$  da  $\Omega$  in due diversi diagrammi Campbell (si veda la Fig. 128). In questo caso il sistema ha solamente  $N$  pulsazioni naturali / proprie e smorzamenti modali e quindi i diagrammi di Campbell sono formati da  $N$  rami. A prescindere dal fatto che l'ipotesi di disaccoppiamento delle dinamiche flessionali, torsionali e assiali sia verificata o meno, gli autovalori relativi ai DOF assiali (corrispondente a un dinamica 1D localmente a 1DOF) non tendono a raggrupparsi in grappoli ma sono indipendenti tra loro (o, meglio, formano "grappoli di un solo elemento").

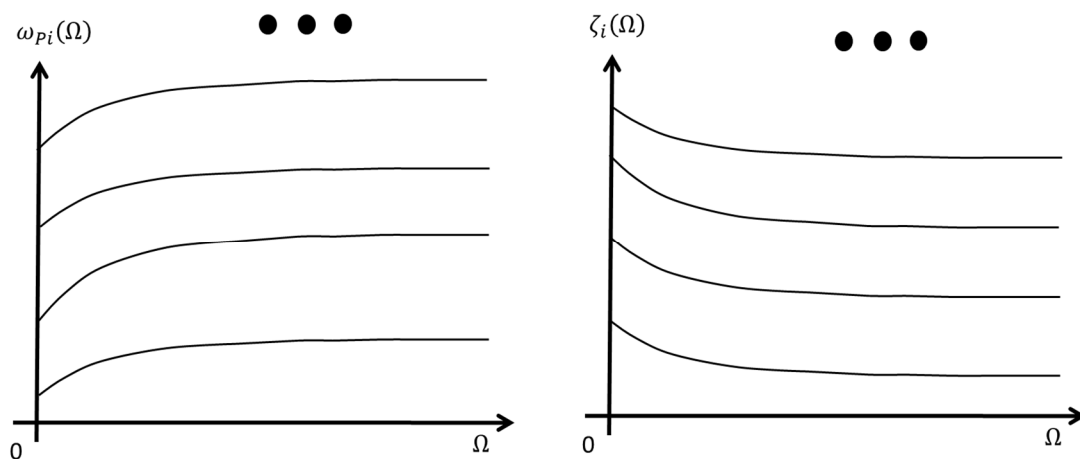


Figura 128 Diagramma di Campbell per il rotore elastico

Guardando alla Fig. 128 si nota come le pulsazioni naturali / proprie possono tendere a un valore asintotico per  $\Omega$  grandi così come gli smorzamenti (dipende dall'andamento di  $k_{ck}(\Omega), c_{ck}(\Omega)$ ). Analogamente, la separazione tra i vari rami dei diagrammi di Campbell e la loro eventuale tendenza ad andare velocemente ad asintoto dipendono anch'esse dal comportamento di  $k_{ck}(\Omega), c_{ck}(\Omega)$ .

Per quanto riguarda lo studio degli autovettori, al contrario delle vibrazioni assiali, non ha più senso parlare di “whirl libero” in quanto non stiamo più studiando la traiettoria del nodo  $\underline{G}_k$  ma solamente la traslazione della sezione a esso solidale  $w_{ik}(t)$  lungo l’asse  $z_f$  (si veda la Fig. 129):

$$w_{ik}(t) = Re(w_{ik}e^{s_i t}). \tag{8.7.6}$$

Tale traslazione oscilla semplicemente alla pulsazione  $\omega_{p_i}(\Omega)$  (uguale per tutti i nodi!) con modulo e fase (contenuti in  $w_{ik}$ ) dipendenti dal nodo in questione. Tale oscillazione sarà come quella disegnata in Fig. 129 nel caso in cui gli smorzamenti modali siano nulli  $\zeta_i$  ( $\omega_{p_i} = \omega_{n_i}$ ). Nel caso in cui gli smorzamenti siano positivi  $\zeta_i > 0$  l’oscillazione dei vari nodi tenderà a zero.

In linea teorica ogni traslazione  $w_{ik}(t)$  della sezione associata al nodo  $\underline{G}_k$  può oscillare con qualunque ampiezza e qualunque fase (contenuti in  $w_{ik}$ !). Tuttavia, per il principio di coerenza modale, anche nelle vibrazioni assiali i modi di vibrare tendono ad avere solamente forme regolari come quelle riportate in Fig. 129. Questo è dovuto al fatto i rotori sono solitamente di metallo (acciaio, leghe ad alta resistenza, etc) e non di gomma o di carta. Di conseguenza, sezioni della macchina adiacenti tra loro non potranno mai avere rotazioni “troppo diverse” tra loro (in tal caso non potremmo certo parlare di elasticità lineare e materiali lineari!).

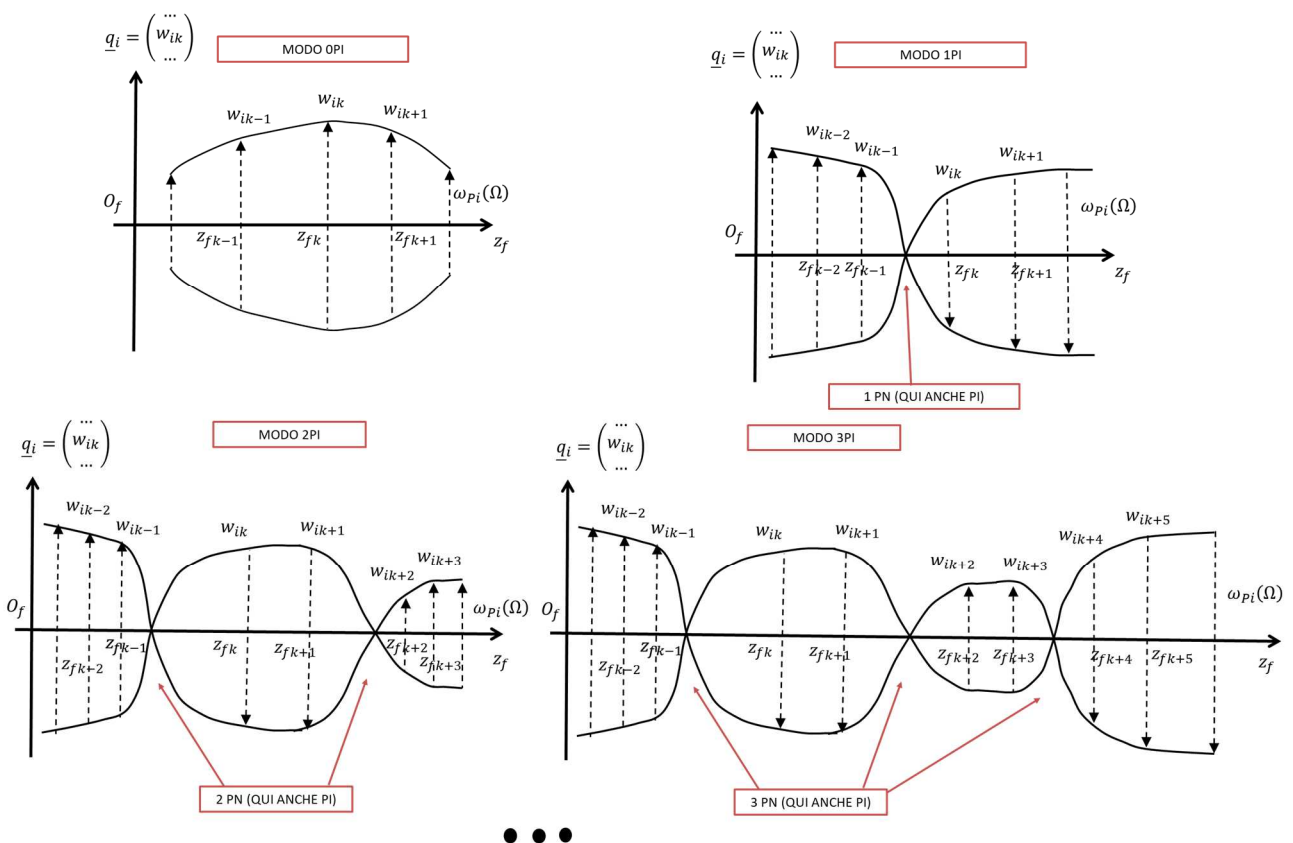


Figura 129 Il concetto di coerenza modale (si vedano anche le figure analoghe dei capitoli 4 e 10)

Come si può notare dalla Fig. 129, il modo di vibrare è detto 0PI quando non ha né punti nodali PN né ovviamente punti di inversione PI (le traslazioni  $w_{ik}(t)$  tendono a essere tutte in fase). Se invece esistono dei punti nodali PN, il modo può avere dei punti di inversione PI e di conseguenza potremo avere modi 1PI, 2PI, 3PI a seconda di quante inversioni del moto avvengono.

Naturalmente non è detto che, se ci sono dei punti nodali PN, il modo necessariamente si invertirà in essi e che, di conseguenza, il punto in questione sia per forza un punto di inversione PI. Possono benissimo esistere punti nodali PN in cui il modo non si inverte e che quindi non sono punti di inversione PI. I punti di inversione PI sono quindi un sottoinsieme dei punti nodali PN (il numero dei PI è minore o uguale di quello dei PN).

Continuando quindi lo studio degli autovettori, è importante introdurre nuovamente la classificazione modale, ovvero un elenco qualitativo dei principali modi che il sistema può presentare. Come è possibile notare nella tabella riassuntiva riportata in Fig. 130, potremo avere modi di tipo primo elastico IE (senza punti nodali), secondo elastico IIE (con un punto nodale), terzo elastico IIIE (con due punti nodali) e così via al crescere del numero dei punti nodali e quindi dei lodi della deformata.

Ogni modo di vibrare IE, IIE, IIIE, IVE, etc. (a seconda dei punti nodali) può naturalmente assumere le varie caratteristiche introdotte poco fa, ovvero 1PI, 2PI, 3PI e così via (a seconda dei punti di inversione).

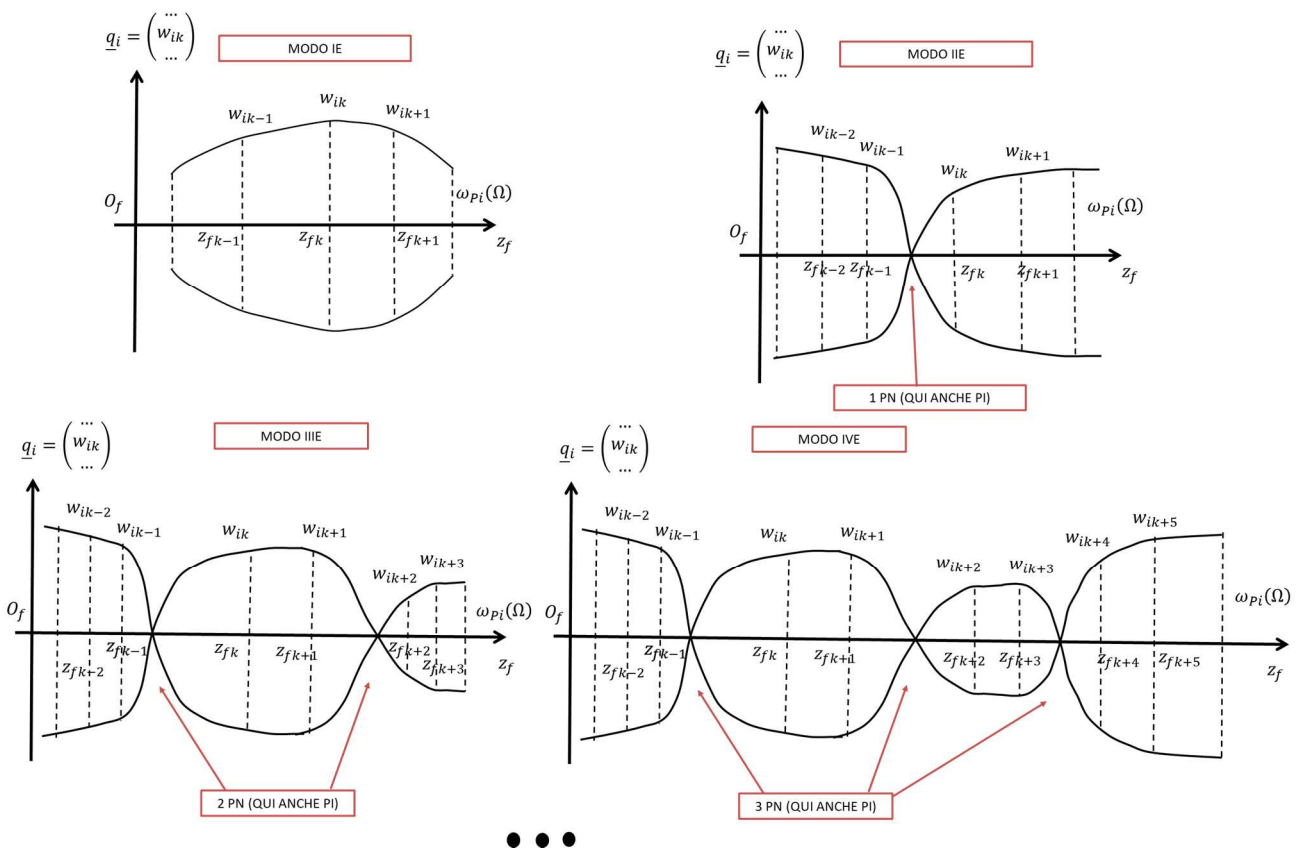


Figura 130 Classificazione modale per rotori elastici (si vedano anche le figure analoghe dei capitoli 4 e 10)

La rappresentazione dei modi riportata in Fig. 130 (così come per la Fig. 129) è valida a rigore nel caso in cui lo smorzamento modale sia nullo  $\zeta_i = 0$  ( $\omega_{pi} = \omega_{ni}$ ). Nel caso in cui gli smorzamenti siano positivi  $\zeta_i > 0$  l'oscillazione dei vari nodi tenderà a zero. A livello di stabilità passiamo di fatto da un modo semplicemente stabile (associato a un polo semplicemente stabile) a un modo asintoticamente stabile (associato a un polo asintoticamente stabile).

Usualmente, al crescere della pulsazione, il numero dei punti nodali aumenta. Si passa quindi da modi IE, a modi IIE, a modi IIIE, a modi IVE e così via. Per quanto riguarda invece la caratteristica del modo, usualmente, al crescere della pulsazione si hanno caratteristiche 0PI, 1PI, 2PI, 3PI, etc. (a seconda dei punti di inversione).

L'effetto della rigidità assiale dei cuscini  $k_{ck}(\Omega)$  sui modi assiali è analogo a quello visto per le vibrazioni flessionali e non verrà qui scritto nel dettaglio. Chiaramente, al crescere della rigidità dei cuscini rispetto alla rigidità dell'albero, i nodi dell'albero in corrispondenza degli stessi sono sempre più attratti verso la loro posizione nominale (si muoveranno sempre meno). Di conseguenza i modi assiali della trave somiglieranno sempre più a quelli della trave incernierata agli estremi come nel caso flessionale.

Tutto quanto è stato detto viene solitamente riassunto sulla mappa modale (vedi Fig. 131), ovvero un versione arricchita del diagramma di Campbell della pulsazioni proprie  $\omega_{pi}(\Omega)$ . Su ognuno dei rami del diagramma sono rappresentate, per ogni valore di  $\Omega$ , le forme modali che si manifestano sulla macchina considerata (IE, IIE, IIIE e così via all'aumentare dei punti nodali) insieme alla caratteristica di ciascun modo (0PI, 1PI, 2PI, 3PI e così via all'aumentare dei punti di inversione). Come già sottolineato, solitamente, al crescere della pulsazione  $\omega_{pi}(\Omega)$ , il numero dei punti nodali aumenta. Si passa quindi da modi IE, a modi IIE, a modi IIIE, a modi IVE e così via. Per quanto riguarda invece la caratteristica del modo, usualmente, al crescere della pulsazione  $\omega_{pi}(\Omega)$  si hanno caratteristiche 0PI, 1PI, 2PI, 3PI, etc. (a seconda dei punti di inversione).

Si noti inoltre che su ogni ramo, al variare di  $\Omega$ , possono esserci dei punti di transizione in cui la caratteristica del modo di vibrare cambia (come ad esempio nel secondo ramo dell'esempio riportato in Fig. 131). La transizione può riguardare anche la natura del modo stesso (come ad esempio nel quarto ramo dell'esempio riportato in Fig. 131).

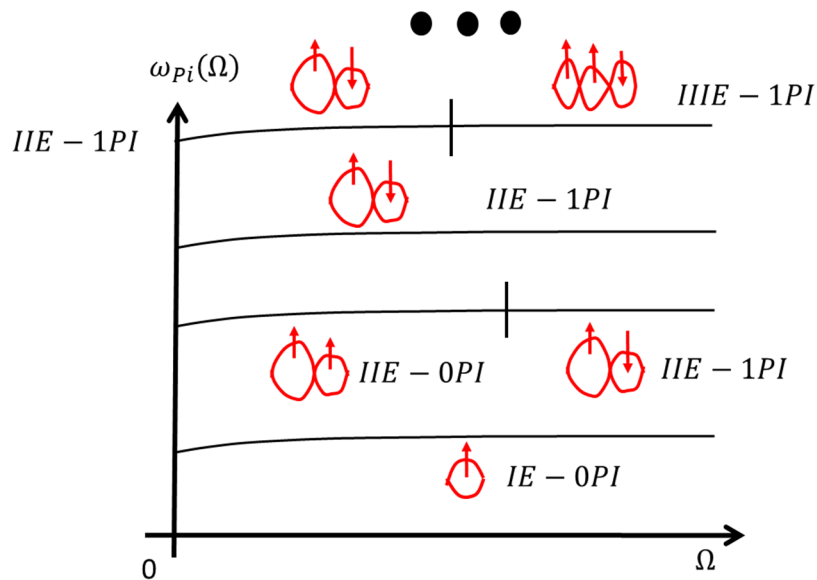


Figura 131 Mappa modale per rotor elastici

ELENCO RIASSUNTIVO DELLE VARIE DEFORMATE MODALI:

- 1) FORMA: IE  
CARATTERISTICA: OPI
- 2) FORMA: IIE  
CARATTERISTICA: OPI, 1PI
- 3) FORMA: IIIE  
CARATTERISTICA: OPI, 1PI, 2PI
- 4) FORMA: IVE  
CARATTERISTICA: OPI, 1PI, 2PI, 3PI
- ... ..

## 8.8 Vibrazioni forzate: classificazione delle forzanti, diagrammi di Campbell e diagrammi di Bode

### CLASSIFICAZIONE DELLE FORZANTI

Come nel caso delle vibrazioni assiali, le principali forzanti che possono agire su una macchina rotante 1D (avente una dimensione prevalente, coincidente con l'asse di rotazione principale) sono le seguenti:

- 1) FORZANTE ARMONICA

$$\underline{Q}(t) = Re \left[ \underline{Q}_0(\Omega) e^{j\omega_f(\Omega)t} \right], \quad \underline{Q}(t) = \begin{pmatrix} \dots \\ Q_h(t) \\ \dots \end{pmatrix}, \quad \underline{Q}_0(\Omega) = \begin{pmatrix} \dots \\ Q_{0h} \\ \dots \end{pmatrix} \quad (8.8.1)$$

dove  $h = 1 \dots NN$  indica il generico nodo e  $Q_h(t)$  la generica forza su di esso agente. Se  $\omega_f(\Omega) = \Omega$  si parla di forzanti armoniche sincrone (prodotte ad esempio dagli sbilanciamenti presenti sul rotore), se  $\omega_f(\Omega) = n\Omega$  con  $n$  intero positivo o della forma  $1/m$  si parla di forzanti armoniche super/sub-sincrone (come ad esempio quelle derivanti dall'interazione palare (le forzanti di fluido), quelle derivanti da componenti come cuscini, giunti, riduttori, etc.), se  $\omega_f(\Omega) = \omega_f = cost$  si parla di forzanti armoniche asincrone (a esempio vibrazione a pulsazione costante provenienti dal basamento). Infine, quando ho una dipendenza qualunque  $\omega_f(\Omega)$ , si parla di forzanti armoniche generiche (derivanti per esempio da motori elettrici, generatori o altre macchine interagenti con quella considerata).

- 2) FORZANTE PERIODICA

$$\underline{Q}(t) = Re \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \underline{Q}_k(\Omega) e^{jk\omega_0(\Omega)t} \right], \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}. \quad (8.8.2)$$

In questo caso la forzante periodica di periodo  $T$  è caratterizzata dalla sovrapposizione di un numero infinito numerabile di forzanti armoniche elementari a pulsazione  $k\omega_0(\Omega)$  (si veda la serie di Fourier). Si noti che la pulsazione principale  $\omega_0(\Omega)$  può dipendere dalla speed della macchina  $\Omega$  in uno qualunque dei modi

descritti nel punto 1). Le forzanti periodiche sono anch'esse prodotte dall'interazione palare (le forzanti di fluido) e da componenti vari come cuscini, giunti, riduttori, etc.

3) FORZANTE GENERICA

$$\underline{Q}(t, \Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{\tilde{Q}}(\omega, \Omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad \underline{\tilde{Q}}(\omega, \Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{Q}(t, \Omega) e^{-j\omega t} dt \quad (8.8.3)$$

Nel caso di forzante generica, la forzante è la sovrapposizione di un numero infinito non numerabile di forzanti armoniche elementari di pulsazione  $\omega$ . In generale non è da escludere che anche lo spettro della forzante possa dipendere dalla speed della macchina  $\Omega$ :  $\underline{\tilde{Q}}(\omega, \Omega)$ . Anche in questo caso le forzanti generiche possono essere prodotte dall'interazione palare (le forzanti di fluido) e da componenti vari come cuscini, giunti, riduttori, etc. Si riporta in Fig. 132 un esempio di spettro di forzante generica, in questo caso una forzante simil-armonica. Si ricorda che nella realtà segnali armonici e periodici perfetti non esistono perché avrebbero un'energia infinita. Quando si misura una vibrazione armonica in realtà si misura un segnale simil-armonico avente uno spettro come quello riportato in Fig. 132.

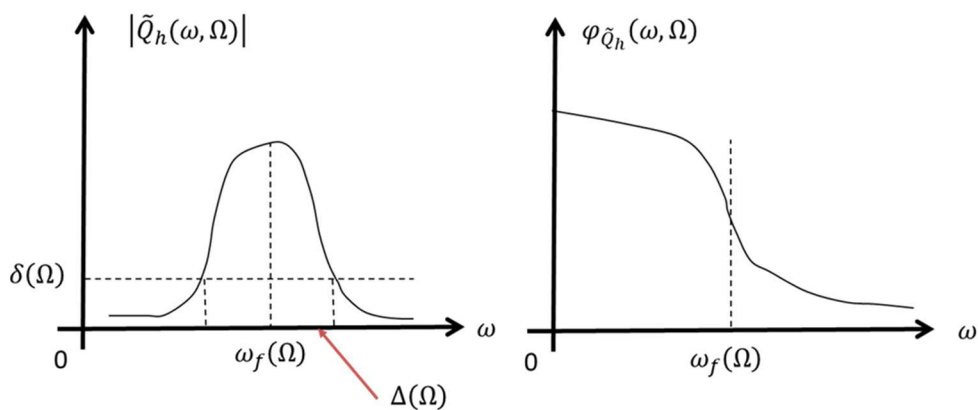


Figura 132 Esempio di spettro di forzante generica

**DIAGRAMMI DI CAMPBELL E DIAGRAMMI DI BODE**

1) FORZANTE ARMONICA SINCRONA:

$$M \underline{\ddot{q}} + (C_c(\Omega) + C_{sm}) \underline{\dot{q}} + (K_c(\Omega) + K_{tot}) \underline{q} = \underline{Q}(t) = Re \left[ \underline{Q}_0(\Omega) e^{j\Omega t} \right]. \quad (8.8.4)$$

$$\underline{Q}(t) = \begin{pmatrix} \dots \\ Q_h(t) \\ \dots \end{pmatrix}, \quad \underline{Q}_0(\Omega) = \begin{pmatrix} \dots \\ Q_{0h} \\ \dots \end{pmatrix}.$$

La soluzione del moto forzato del sistema può essere facilmente determinata grazie agli strumenti matematici introdotti nel capitolo 1 e si ha:

$$\underline{q}_f(t) = \begin{pmatrix} \dots \\ w_h(t) \\ \dots \end{pmatrix} = Re \left[ \underline{q}_0 e^{j\Omega t} \right], \quad (8.8.5)$$

$$\underline{q}_0 = \begin{pmatrix} \dots \\ w_{0h} \\ \dots \end{pmatrix} = \alpha(\Omega, \Omega) \underline{Q}_0(\Omega) = [-\Omega^2 M + j\Omega(C_C(\Omega) + C_{sm}) + (K_C(\Omega) + K_{etot})]^{-1} \underline{Q}_0(\Omega),$$

dove in questi casi è utile distinguere nella ricettanza  $\alpha(\Omega, \Omega)$  la doppia dipendenza dalla pulsazione della forzante e dalla velocità di rotazione della macchina.

Applicando il teorema di sovrapposizione modale in questo caso abbiamo:

$$\underline{q}_0 = \alpha(\Omega, \Omega) \underline{Q}_0(\Omega) = \sum_{k=1}^{2N} \frac{(q_{Rk} q_{Lk}^H)}{j\Omega - s_k} \underline{Q}_0(\Omega) = \sum_{k=1}^{2N} \left( \frac{q_{Lk}^H \underline{Q}_0}{j\Omega - s_k} \right) \underline{q}_{Rk} \quad (8.8.6)$$

da cui possiamo dedurre che i modi che maggiormente contribuiscono alla soluzione sono quelli in cui  $\left( \frac{q_{Lk}^H \underline{Q}_0}{j\Omega - s_k} \right)$  è grande, ovvero quando  $\Omega$  è vicina a una delle pulsazioni proprie del sistema  $\omega_{pk}$  contenuta in  $s_k$  (corrispondenti alle risonanze del sistema) o quando  $q_{Lk}^H \underline{Q}_0$  è grande (forzanti ortogonale al corrispondente autovettore).

Il diagramma di Campbell associato a questo caso è riportato in Fig. 133. Rispetto allo studio nel moto libero abbiamo aggiunto la curva del carico  $\omega_f(\Omega) = \Omega$  sul diagramma relativo alle pulsazioni proprie  $\omega_{pi}$ . Le intersezioni della curva del carico con i rami del diagramma  $\Omega_c$  sono ancora una volta le pulsazioni critiche. Il valore di smorzamento modale associato alle varie pulsazioni critiche  $\zeta_c$  può essere facilmente trovato riportando la pulsazione critica in questione  $\Omega_c$  sul diagramma dello smorzamento.

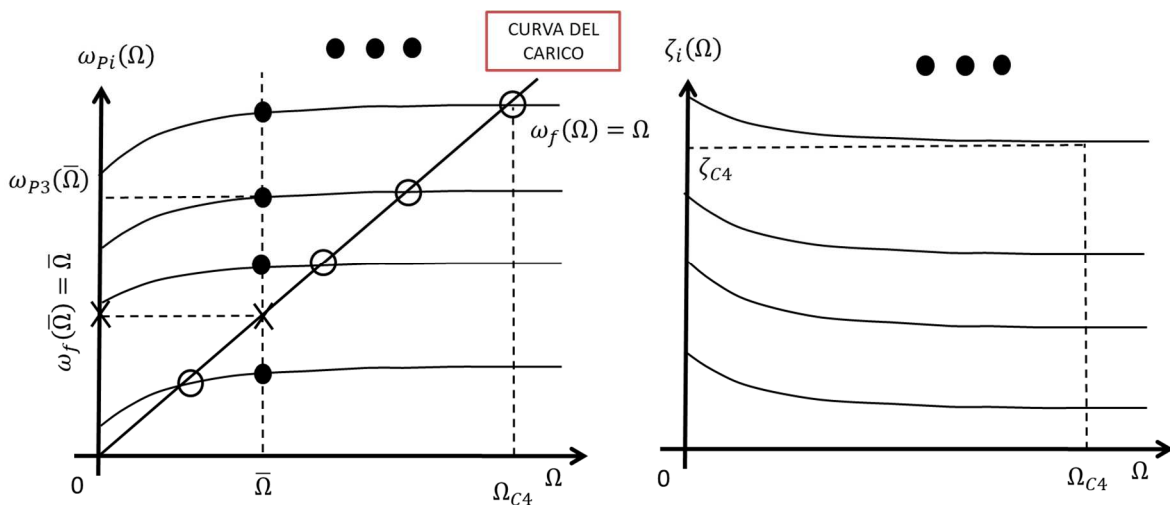


Figura 133 Diagramma di Campbell per rotore elastico con forzante armonica sincrona

Per capire quanto effettivamente vibra il sistema dobbiamo fare uso dei diagrammi di Bode. A tale fine dobbiamo prima specificare una velocità di lavoro della macchina  $\bar{\Omega}$  alla quale studiare il sistema. Riporto quindi tale velocità  $\bar{\Omega}$  sul diagramma di Campbell; l'intersezione tra la retta verticale passante per  $\bar{\Omega}$  e gli  $N$  rami del diagramma delle pulsazioni proprie  $\omega_{pi}$  rappresentano le  $N$  pulsazioni proprie del sistema coincidenti, a loro volta, con le pulsazioni di risonanza del sistema. A questo punto, supponendo di voler trovare quanto vale la traslazione della  $h$ -esima sezione  $w_{0h}$  lungo l'asse  $z_h$  (nel dominio della frequenza), posso tracciare i rispettivi diagrammi (Fig. 134). Per determinare il modulo e la fase della traslazione  $w_{0h}$  devo determinare sul diagramma di Bode il punto in cui agisce la forzante. Ma questo può essere dedotto dal diagramma di Campbell intersecando la curva del carico con la sezione verticale passante per  $\bar{\Omega}$  (si vedano sempre la Fig. 133 e la Fig. 134).



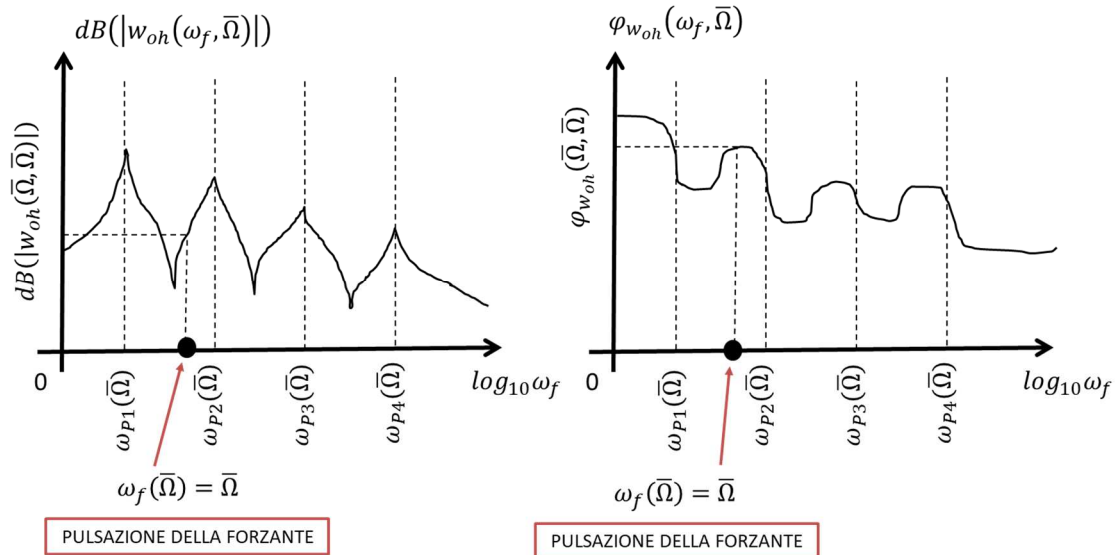


Figura 134 Diagramma di Bode per rotore elastico con forzante armonica sincrona

Guardando ai diagrammi di Campbell e di Bode, risulta chiaro il significato di pulsazione critica  $\Omega_c$ . Qualora infatti la pulsazione di lavoro della macchina  $\bar{\Omega}$  (la speed) si trovasse in corrispondenza di una critica  $\Omega_c$ , la pulsazione in cui la forzante agirebbe sulla macchina  $\omega_f(\bar{\Omega}) = \bar{\Omega}$  si troverebbe proprio in corrispondenza di una pulsazione propria  $\omega_{P_i}(\bar{\Omega})$  e quindi di una pulsazione di risonanza. Ci troveremmo quindi necessariamente in condizioni di massima amplificazione.

Per quanto riguarda lo studio degli autovettori, al contrario delle vibrazioni flessionali, non ha più senso parlare di “whirl forzato” in quanto non stiamo più studiando la traiettoria del nodo  $\underline{G}_h$  ma solamente la traslazione della sezione a esso solidale  $w_h(t)$  (si veda la Fig. 135):

$$w_h(t) = \text{Re}(w_{0h}e^{\bar{\Omega}t}). \tag{8.8.7}$$

Tale traslazione oscilla semplicemente alla pulsazione  $\omega_f(\bar{\Omega}) = \bar{\Omega}$  (uguale per tutti i nodi!) con modulo e fase (contenuti in  $w_{0h}$ ) dipendenti dal nodo in questione. Si noti come, al contrario del moto libero, non essendo presente il termine esponenziale dovuto allo smorzamento, l’oscillazione della traslazione  $w_h(t)$  permarrà come in Fig. 135 senza mai smorzarsi. Se siamo vicino a una risonanza e/o lo smorzamento modale è in generale piccolo, allora le dimensioni dell’oscillazione saranno più grandi, altrimenti saranno più piccole.

In linea teorica ogni traslazione  $w_h(t)$  della sezione associata al nodo  $\underline{G}_h$  può oscillare con qualunque ampiezza e qualunque fase (contenuti in  $w_{0h}$ !). Tuttavia, per il principio di coerenza modale, anche nelle vibrazioni assiali i modi di vibrare tendono ad avere solamente forme regolari come quelle riportate in Fig. 135. Questo è dovuto al fatto i rotori sono solitamente di metallo (acciaio, leghe ad alta resistenza, etc) e non di gomma o di carta. Di

conseguenza, sezioni della macchina adiacenti tra loro non potranno mai avere rotazioni “troppo diverse” tra loro (in tal caso non potremmo certo parlare di elasticità lineare e materiali lineari!).

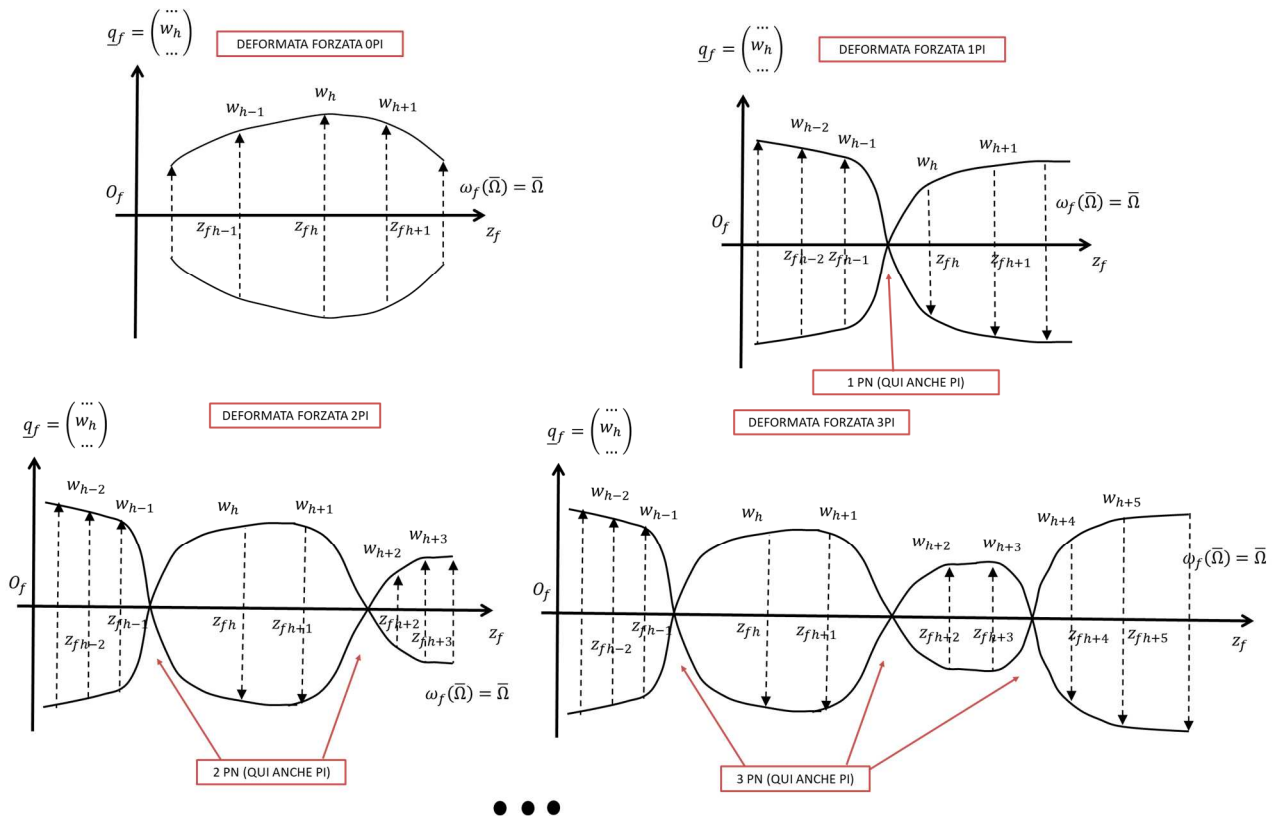


Figura 135 Il concetto di coerenza modale (si vedano anche le figure analoghe dei capitoli 4 e 10)

Come si può notare dalla Fig. 135, la deformata forzata è di tipo OPI quando non ha né punti nodali PN né ovviamente punti di inversione PI (le rotazioni  $w_h(t)$  tendono a essere tutte in fase). Se invece esistono dei punti nodali PN, la deformata forzata può avere dei punti di inversione PI e di conseguenza potremo avere deformate forzate 1PI, 2PI, 3PI a seconda di quante inversioni del moto avvengono.

Naturalmente non è detto che, se ci sono dei punti nodali PN, il moto necessariamente si invertirà in essi e che, di conseguenza, il punto in questione sia per forza un punto di inversione PI. Possono benissimo esistere punti nodali PN in cui il moto non si inverte e che quindi non sono punti di inversione PI. I punti di inversione PI sono quindi un sottoinsieme dei punti nodali PN (il numero dei PI è minore o uguale di quello dei PN).

Come detto in precedenza, la traslazione della  $h$ -esima sezione  $w_h(t)$  avviene chiaramente alla pulsazione della forzante  $\omega_f(\bar{\Omega}) = \bar{\Omega}$  (la stessa per ogni nodo  $\underline{G}_h$ !). Ciò è coerente col fatto che la pulsazione associata alla deformata forzata in questione è sempre una e una sola, ovvero  $n\bar{\Omega}$ .

Le principali deformate forzate sono rappresentate in Fig. 136 e, nelle caratteristiche (OPI, 1PI, 2PI, 3PI) e nella forma (IDF, IIDF, IIIDF, etc.), ricordano i modi di vibrare IE, IIE, IIIE, IVE, etc. descritti nel paragrafo 8.7. Tuttavia le deformate forzate riguardano il moto forzato e non il moto libero, e non vanno dunque confuse con i modi di vibrare e le deformate modali!

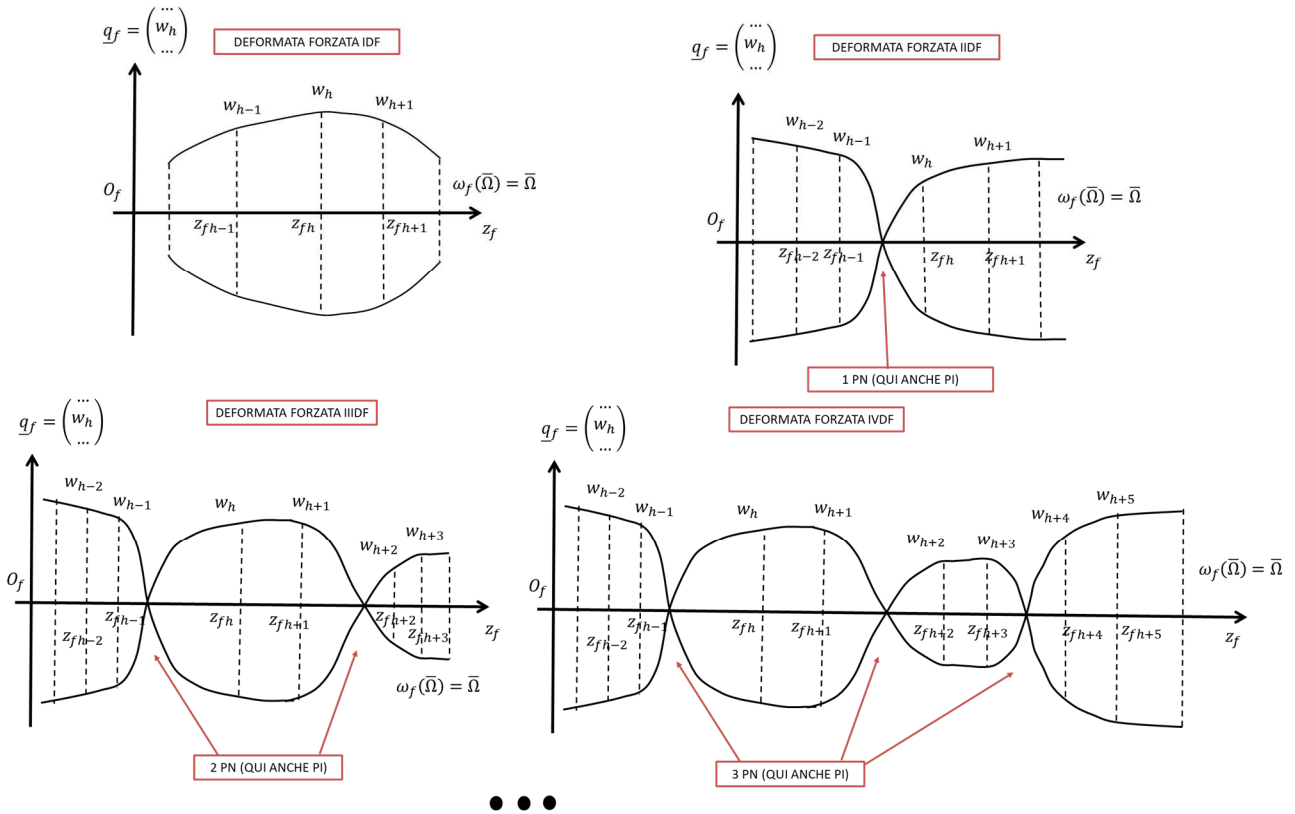


Figura 136 Deformate forzate per rotore elastico con forzante armonica sincrona (si vedano anche le figure analoghe dei capitoli 4 e 10)

ELENCO RIASSUNTIVO DELLE VARIE DEFORMATE FORZATE:

- 1) FORMA: IDF  
CARATTERISTICA: OPI
- 2) FORMA: IIDF  
CARETTERISTICA: OPI, 1PI
- 3) FORMA: IIIDF  
CARETTERISTICA: OPI, 1PI, 2PI
- 4) FORMA: IVDF  
CARETTERISTICA: OPI, 1PI, 2PI, 3PI
- ... ..

2) FORZANTE ARMONICA SUPER /SUB-SINCRONA:

$$M\ddot{\underline{q}} + (C_c(\Omega) + C_{sm})\dot{\underline{q}} + (K_c(\Omega) + K_{tot})\underline{q} = \underline{Q}(t) = Re \left[ \underline{Q}_0(\Omega) e^{jn\Omega t} \right]. \quad (8.8.8)$$

$$\underline{Q}(t) = \begin{pmatrix} \dots \\ Q_h(t) \\ \dots \end{pmatrix}, \quad \underline{Q}_0(\Omega) = \begin{pmatrix} \dots \\ Q_{0h} \\ \dots \end{pmatrix}.$$

La soluzione del moto forzato del sistema può essere facilmente determinata grazie agli strumenti matematici introdotti nel capitolo 1 e si ha:

$$\underline{q}_f(t) = \begin{pmatrix} \dots \\ w_h(t) \\ \dots \end{pmatrix} = Re \left[ \underline{q}_0 e^{jn\Omega t} \right], \quad (8.8.9)$$

$$\underline{q}_0 = \begin{pmatrix} \dots \\ w_{0h} \\ \dots \end{pmatrix} = \alpha(n\Omega, \Omega) \underline{Q}_0(\Omega) = [-n^2\Omega^2 M + jn\Omega(C_c(\Omega) + C_{sm}) + (K_c(\Omega) + K_{tot})]^{-1} \underline{Q}_0(\Omega),$$

dove in questi casi è utile distinguere nella ricettanza  $\alpha(n\Omega, \Omega)$  la doppia dipendenza dalla pulsazione della forzante e dalla velocità di rotazione della macchina.

Applicando il teorema di sovrapposizione modale in questo caso abbiamo:

$$\underline{q}_0 = \alpha(n\Omega, \Omega) \underline{Q}_0(\Omega) = \sum_{k=1}^{2N} \frac{(q_{Rk} \underline{q}_{Lk}^H)}{jn\Omega - s_k} \underline{Q}_0(\Omega) = \sum_{k=1}^{2N} \left( \frac{q_{Lk}^H \underline{Q}_0}{jn\Omega - s_k} \right) \underline{q}_{Rk} \quad (8.8.10)$$

da cui possiamo dedurre che i modi che maggiormente contribuiscono alla soluzione sono quelli in cui  $\left( \frac{q_{Lk}^H \underline{Q}_0}{jn\Omega - s_k} \right)$  è grande, ovvero quando  $n\Omega$  è vicina a una delle pulsazioni proprie del sistema  $\omega_{pk}$  contenuta in  $s_k$  (corrispondenti alle risonanze del sistema) o quando  $\underline{q}_{Lk}^H \underline{Q}_0$  è grande (forzanti ortogonali al corrispondente autovettore).

Il diagramma di Campbell associato a questo caso è riportato in Fig. 137. Rispetto allo studio nel moto libero abbiamo aggiunto la curva del carico  $\omega_f(\Omega) = n\Omega$  sul diagramma relativo alle pulsazioni proprie  $\omega_{pi}$ . Le intersezioni della curva del carico con i rami del diagramma  $\Omega_c$  sono ancora una volta le pulsazioni critiche. E' utile osservare come il caso di forzante armonica super-sincrona sia più problematico del caso di forzante armonica sub-sincrona in quanto una retta di carico più inclinata genera un maggior numero di pulsazioni critiche all'interno del range di velocità di lavoro della macchina (ovvero di intersezioni tra la retta di carico e i rami del diagramma). Il valore di smorzamento modale associato alle varie pulsazioni critiche  $\zeta_c$  può essere facilmente trovato riportando la pulsazione critica in questione  $\Omega_c$  sul diagramma dello smorzamento.

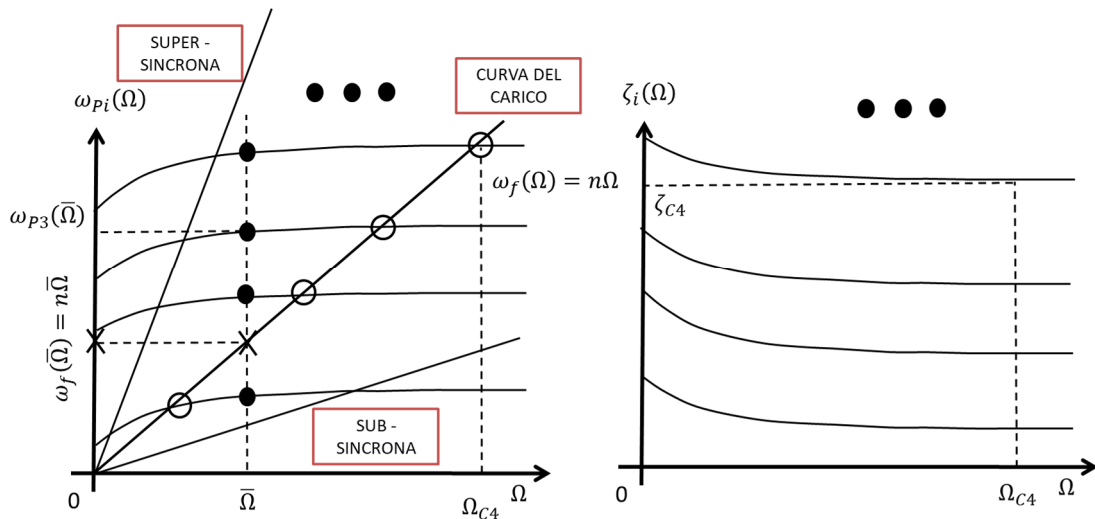


Figura 137 Diagramma di Campbell per rotore elastico con forzante armonica sub/super-sincrona

Per capire quanto effettivamente vibra il sistema dobbiamo fare uso dei diagrammi di Bode. A tale fine dobbiamo prima specificare una velocità di lavoro della macchina  $\bar{\Omega}$  alla quale studiare il sistema. Riporto quindi tale velocità  $\bar{\Omega}$  sul diagramma di Campbell; l'intersezione tra la retta verticale passante per  $\bar{\Omega}$  e gli  $N$  rami del diagramma delle pulsazioni proprie  $\omega_{pi}$  rappresentano le  $N$  pulsazioni proprie del sistema coincidenti, a loro volta, con le pulsazioni di risonanza del sistema. A questo punto, supponendo di voler trovare quanto vale la traslazione della  $h$ -esima sezione  $w_{oh}$  lungo l'asse  $z_h$  (nel dominio della frequenza), posso tracciare i rispettivi diagrammi (Fig. 138). Per determinare il modulo e la fase della traslazione  $w_{oh}$  devo determinare sul diagramma di Bode il punto in cui agisce la forzante. Ma questo può essere dedotto dal diagramma di Campbell intersecando la curva del carico con la sezione verticale passante per  $\bar{\Omega}$  (si vedano sempre la Fig. 137 e la Fig. 138).

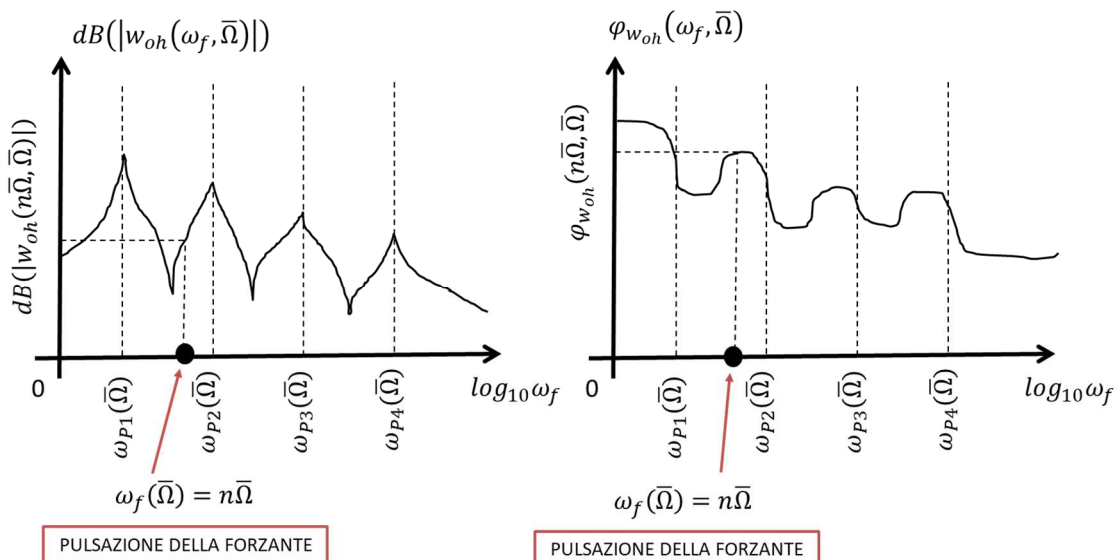


Figura 138 Diagramma di Bode per rotore elastico con forzante armonica sub/super-sincrona

Guardando ai diagrammi di Campbell e di Bode, risulta chiaro il significato di pulsazione critica  $\Omega_c$ . Qualora infatti la pulsazione di lavoro della macchina  $\bar{\Omega}$  (la speed) si trovasse in corrispondenza di una critica  $\Omega_c$ , la pulsazione in

cui la forzante agirebbe sulla macchina  $\omega_f(\bar{\Omega}) = n\bar{\Omega}$  si troverebbe proprio in corrispondenza di una pulsazione propria  $\omega_{pi}(\bar{\Omega})$  e quindi di una pulsazione di risonanza. Ci troveremmo quindi necessariamente in condizioni di massima amplificazione.

Per quanto riguarda lo studio degli autovettori, al contrario delle vibrazioni flessionali, non ha più senso parlare di “whirl forzato” in quanto non stiamo più studiando la traiettoria del nodo  $\underline{G}_h$  ma solamente la traslazione della sezione a esso solidale  $w_h(t)$  (si veda la Fig. 1139):

$$w_h(t) = \text{Re}(w_{0h}e^{n\bar{\Omega}t}). \quad (8.8.11)$$

Tale traslazione oscilla semplicemente alla pulsazione  $\omega_f(\bar{\Omega}) = n\bar{\Omega}$  (uguale per tutti i nodi!) con modulo e fase (contenuti in  $w_{0h}$ ) dipendenti dal nodo in questione. Si noti come, al contrario del moto libero, non essendo presente il termine esponenziale dovuto allo smorzamento, l’oscillazione della rotazione  $\varphi_h(t)$  permarrà come in Fig. 139 senza mai smorzarsi. Se siamo vicino a una risonanza e/o lo smorzamento modale è in generale piccolo, allora le dimensioni dell’oscillazione saranno più grandi, altrimenti saranno più piccole.

In linea teorica ogni traslazione  $w_h(t)$  della sezione associata al nodo  $\underline{G}_h$  può oscillare con qualunque ampiezza e qualunque fase (contenuti in  $w_{0h}$ !). Tuttavia, per il principio di coerenza modale, anche nelle vibrazioni assiali i modi di vibrare tendono ad avere solamente forme regolari come quelle riportate in Fig. 139. Questo è dovuto al fatto i rotori sono solitamente di metallo (acciaio, leghe ad alta resistenza, etc) e non di gomma o di carta. Di conseguenza, sezioni della macchina adiacenti tra loro non potranno mai avere rotazioni “troppo diverse” tra loro (in tal caso non potremmo certo parlare di elasticità lineare e materiali lineari!).

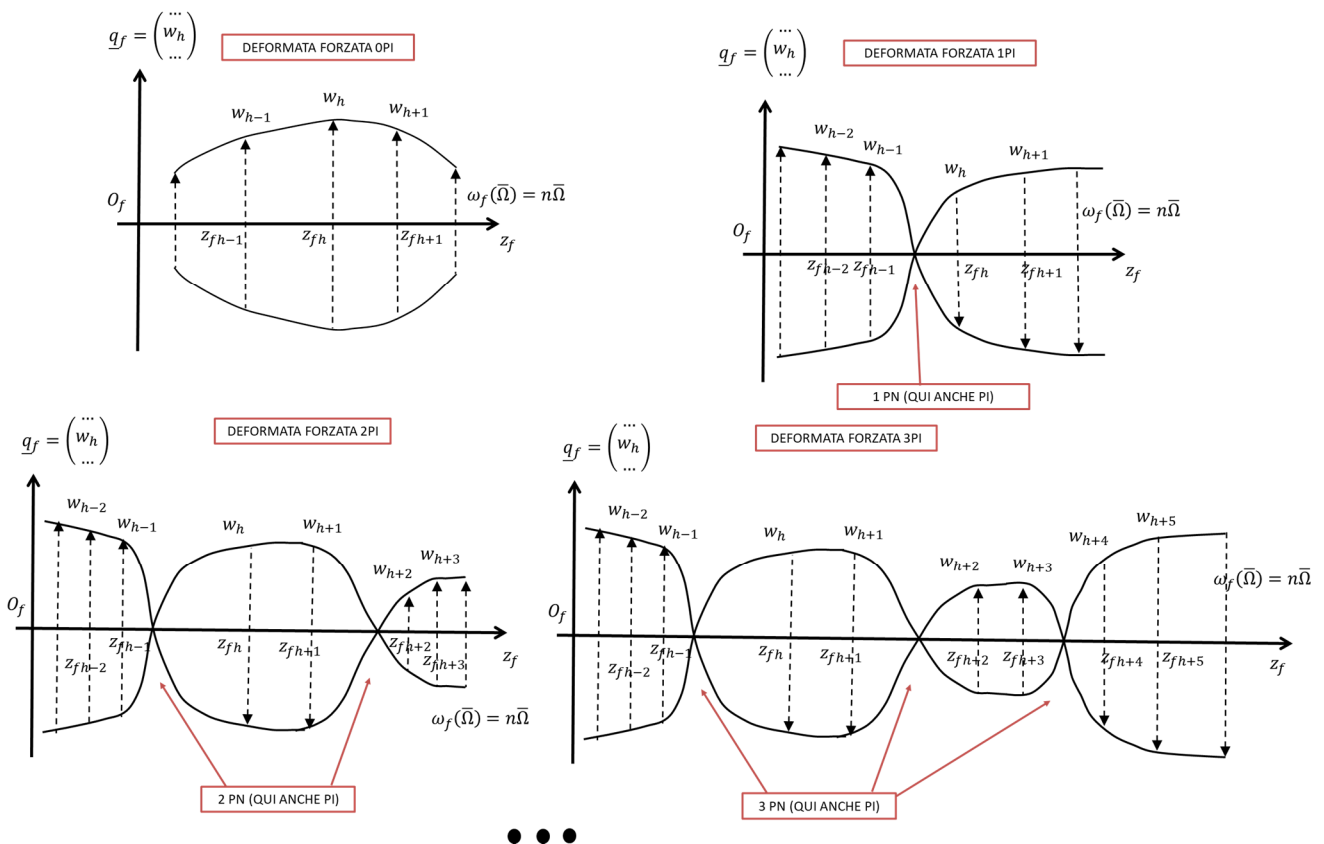


Figura 139 Il concetto di coerenza modale (si vedano anche le figure analoghe dei capitoli 4 e 10)

Come si può notare dalla Fig. 139, la deformata forzata è di tipo OPI quando non ha né punti nodali PN né ovviamente punti di inversione PI (le rotazioni  $w_h(t)$  tendono a essere tutte in fase). Se invece esistono dei punti nodali PN, la deformata forzata può avere dei punti di inversione PI e di conseguenza potremo avere deformate forzate 1PI, 2PI, 3PI a seconda di quante inversioni del moto avvengono.

Naturalmente non è detto che, se ci sono dei punti nodali PN, il moto necessariamente si invertirà in essi e che, di conseguenza, il punto in questione sia per forza un punto di inversione PI. Possono benissimo esistere punti nodali PN in cui il moto non si inverte e che quindi non sono punti di inversione PI. I punti di inversione PI sono quindi un sottoinsieme dei punti nodali PN (il numero dei PI è minore o uguale di quello dei PN).

Come detto in precedenza, la traslazione della  $h$ -esima sezione  $w_h(t)$  avviene chiaramente alla pulsazione della forzante  $\omega_f(\bar{\Omega}) = n\bar{\Omega}$  (la stessa per ogni nodo  $G_h$ !). Ciò è coerente col fatto che la pulsazione associata alla deformata forzata in questione è sempre una e una sola, ovvero  $n\bar{\Omega}$ .

Le principali deformate forzate sono rappresentate in Fig. 140 e, nelle caratteristiche (OPI, 1PI, 2PI, 3PI) e nella forma (IDF, IIDF, IIIDF, etc.), ricordano i modi di vibrare IE, IIE, IIIE, IVE, etc. descritti nel paragrafo 8.7. Tuttavia le deformate forzate riguardano il moto forzato e non il moto libero, e non vanno dunque confuse con i modi di vibrare e le deformate modali!

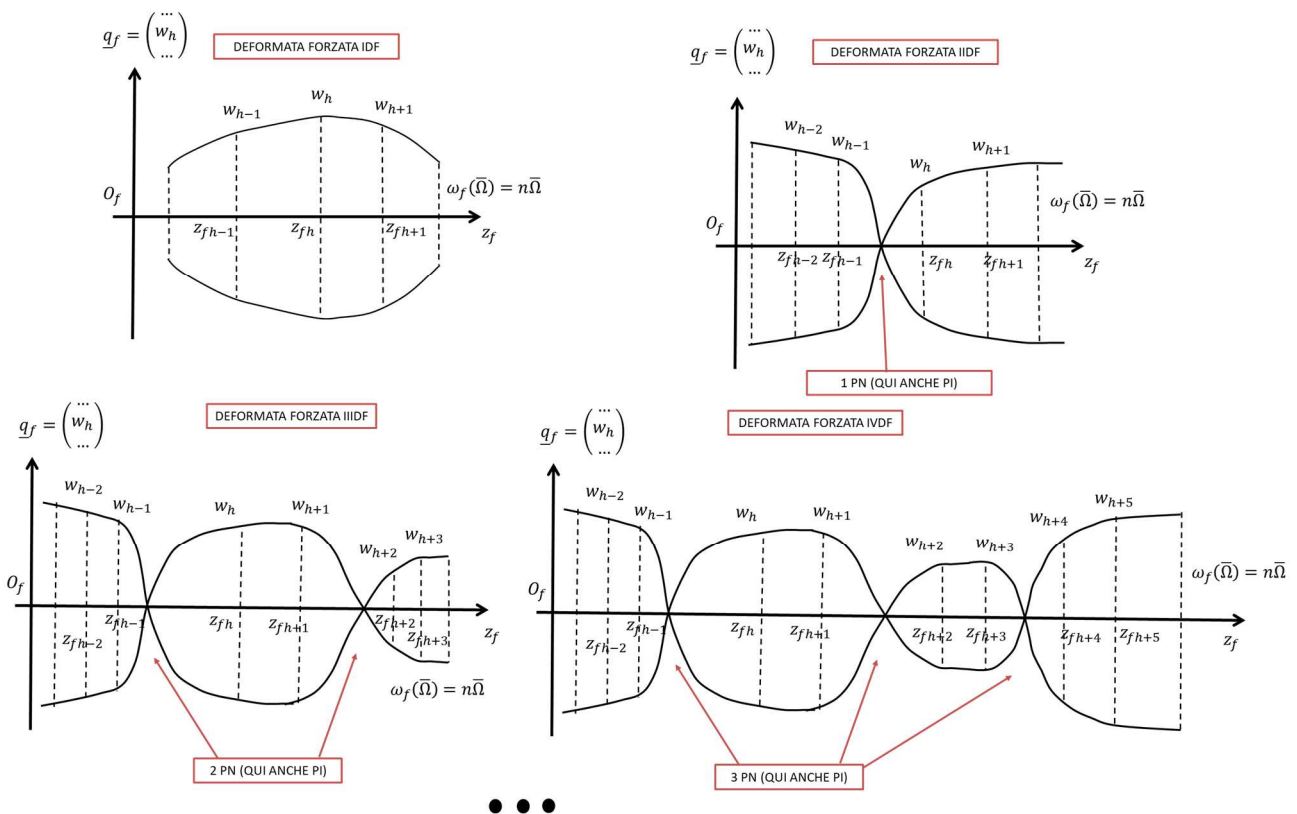


Figura 140 Deformate forzate per rotore elastico con forzante armonica sub/super-sincrona (si vedano anche le figure analoghe dei capitoli 4 e 10)

ELENCO RIASSUNTIVO DELLE VARIE DEFORMATE FORZATE:

- 1) FORMA: IDF  
CARATTERISTICA: OPI
- 2) FORMA: IIDF  
CARATTERISTICA: OPI, 1PI
- 3) FORMA: IIIDF  
CARATTERISTICA: OPI, 1PI, 2PI
- 4) FORMA: IVDF  
CARATTERISTICA: OPI, 1PI, 2PI, 3PI
- ... ..

3) FORZANTE ARMONICA ASINCRONA:

$$M\ddot{\underline{q}} + (C_c(\Omega) + C_{sm})\dot{\underline{q}} + (K_c(\Omega) + K_{etot})\underline{q} = \underline{Q}(t) = \text{Re} \left[ \underline{Q}_0(\Omega) e^{j\omega_f t} \right]. \quad (8.8.12)$$

$$\underline{Q}(t) = \begin{pmatrix} \dots \\ Q_h(t) \\ \dots \end{pmatrix}, \quad \underline{Q}_0(\Omega) = \begin{pmatrix} \dots \\ Q_{0h} \\ \dots \end{pmatrix}.$$

La soluzione del moto forzato del sistema può essere facilmente determinata grazie agli strumenti matematici introdotti nel capitolo 1 e si ha:

$$\underline{q}_f(t) = \begin{pmatrix} \dots \\ w_h(t) \\ \dots \end{pmatrix} = \text{Re} \left[ \underline{q}_0 e^{j\omega_f t} \right], \quad (8.8.13)$$

$$\underline{q}_0 = \begin{pmatrix} \dots \\ w_{0h} \\ \dots \end{pmatrix} = \alpha(\omega_f, \Omega) \underline{Q}_0(\Omega) = \left[ -\omega_f^2 M + j\omega_f (C_c(\Omega) + C_{sm}) + (K_c(\Omega) + K_{etot}) \right]^{-1} \underline{Q}_0(\Omega),$$

dove in questi casi è utile distinguere nella ricettanza  $\alpha(\omega_f, \Omega)$  la doppia dipendenza dalla pulsazione della forzante e della velocità di rotazione della macchina.

Applicando il teorema di sovrapposizione modale in questo caso abbiamo:

$$\underline{q}_0 = \alpha(\omega_f, \Omega) \underline{Q}_0(\Omega) = \sum_{k=1}^{2N} \frac{(q_{Rk} q_{Lk}^H)}{j\omega_f - s_k} \underline{Q}_0(\Omega) = \sum_{k=1}^{2N} \left( \frac{q_{Lk}^H Q_0}{j\omega_f - s_k} \right) \underline{q}_{Rk} \quad (8.8.14)$$

da cui possiamo dedurre che i modi che maggiormente contribuiscono alla soluzione sono quelli in cui  $\left( \frac{q_{Lk}^H Q_0}{j\omega_f - s_k} \right)$  è grande, ovvero quando  $\omega_f$  è vicina a una delle pulsazioni proprie del sistema  $\omega_{Pk}$  contenuta in  $s_k$  (corrispondenti alle risonanze del sistema) o quando  $q_{Lk}^H Q_0$  è grande (forzanti ortogonali al corrispondente autovettore).

Il diagramma di Campbell associato a questo caso è riportato in Fig. 141. Rispetto allo studio nel moto libero abbiamo aggiunto la curva del carico  $\omega_f(\Omega) = \omega_f = \text{cost}$  sul diagramma relativo alle pulsazioni proprie  $\omega_{Pi}$ . Le intersezioni della curva del carico con i rami del diagramma  $\Omega_c$  sono ancora una volta le pulsazioni critiche. E' utile osservare come il caso di forzante armonica asincrona sia particolarmente favorevole in quanto una retta di carico orizzontale genera al massimo una pulsazione critica all'interno del range di velocità di lavoro della macchina

Prof. Enrico Meli, Dipartimento di Ingegneria Industriale, Università di Firenze



(ovvero al massimo una intersezione tra la retta di carico e i rami del diagramma). Il valore di smorzamento modale associato alle varie pulsazioni critiche  $\zeta_c$  può essere facilmente trovato riportando la pulsazione critica in questione  $\Omega_c$  sul diagramma dello smorzamento.

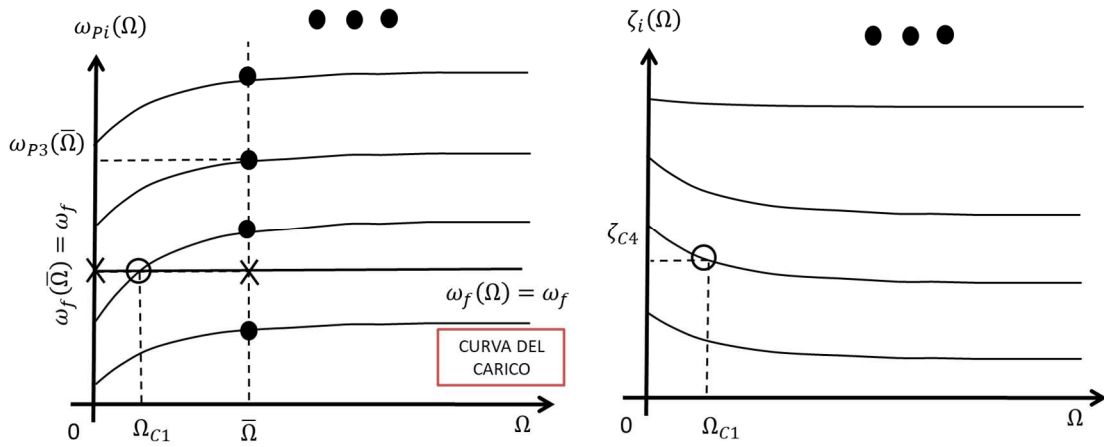


Figura 141 Diagramma di Campbell per rotore elastico con forzante armonica asincrona

Per capire quanto effettivamente vibra il sistema dobbiamo fare uso dei diagrammi di Bode. A tale fine dobbiamo prima specificare una velocità di lavoro della macchina  $\bar{\Omega}$  alla quale studiare il sistema. Riporto quindi tale velocità  $\bar{\Omega}$  sul diagramma di Campbell; l'intersezione tra la retta verticale passante per  $\bar{\Omega}$  e gli  $N$  rami del diagramma delle pulsazioni proprie  $\omega_{Pi}$  rappresentano le  $N$  pulsazioni proprie del sistema coincidenti, a loro volta, con le pulsazioni di risonanza del sistema. A questo punto, supponendo di voler trovare quanto vale la traslazione della  $h$ -esima sezione  $w_{oh}$  lungo l'asse  $z_h$  (nel dominio della frequenza), posso tracciare i rispettivi diagrammi (Fig. 142). Per determinare il modulo e la fase della traslazione  $w_{oh}$  devo determinare sul diagramma di Bode il punto in cui agisce la forzante. Ma questo può essere dedotto dal diagramma di Campbell intersecando la curva del carico con la sezione verticale passante per  $\bar{\Omega}$  (si vedano sempre la Fig. 141 e la Fig. 142).

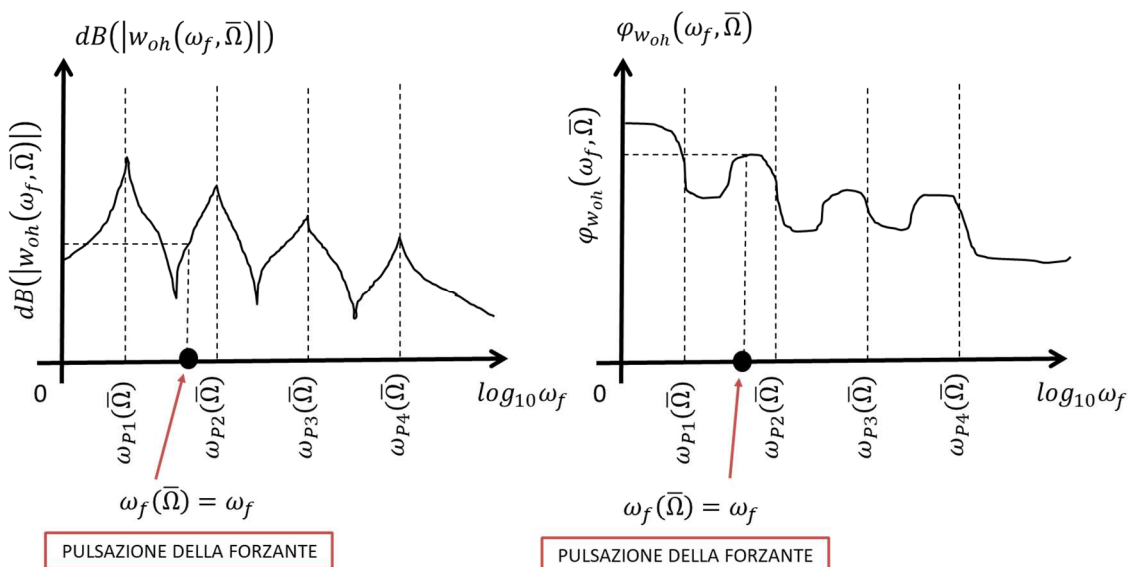


Figura 142 Diagramma di Bode per rotore elastico con forzante armonica asincrona

Guardando ai diagrammi di Campbell e di Bode, risulta chiaro il significato di pulsazione critica  $\Omega_c$ . Qualora infatti la pulsazione di lavoro della macchina  $\bar{\Omega}$  (la speed) si trovasse in corrispondenza di una critica  $\Omega_c$ , la pulsazione in cui la forzante agirebbe sulla macchina  $\omega_f(\bar{\Omega}) = \omega_f$  si troverebbe proprio in corrispondenza di una pulsazione propria  $\omega_{pi}(\bar{\Omega})$  e quindi di una pulsazione di risonanza. Ci troveremmo quindi necessariamente in condizioni di massima amplificazione.

Per quanto riguarda lo studio degli autovettori, al contrario delle vibrazioni flessionali, non ha più senso parlare di "whirl forzato" in quanto non stiamo più studiando la traiettoria del nodo  $\underline{G}_h$  ma solamente la traslazione della sezione a esso solidale  $w_h(t)$  (si veda la Fig. 143):

$$w_h(t) = Re(w_{0h}e^{n\omega_f t}). \tag{8.8.15}$$

Tale traslazione oscilla semplicemente alla pulsazione  $\omega_f(\bar{\Omega}) = \omega_f$  (uguale per tutti i nodi!) con modulo e fase (contenuti in  $w_{0h}$ ) dipendenti dal nodo in questione. Si noti come, al contrario del moto libero, non essendo presente il termine esponenziale dovuto allo smorzamento, l'oscillazione della rotazione  $w_h(t)$  permarrà come in Fig. 143 senza mai smorzarsi. Se siamo vicini a una risonanza e/o lo smorzamento modale è in generale piccolo, allora le dimensioni dell'oscillazione saranno più grandi, altrimenti saranno più piccole.

In linea teorica ogni traslazione  $w_h(t)$  della sezione associata al nodo  $\underline{G}_h$  può oscillare con qualunque ampiezza e qualunque fase (contenuti in  $w_{0h}$ !). Tuttavia, per il principio di coerenza modale, anche nelle vibrazioni assiali i modi di vibrare tendono ad avere solamente forme regolari come quelle riportate in Fig. 143. Questo è dovuto al fatto i rotori sono solitamente di metallo (acciaio, leghe ad alta resistenza, etc) e non di gomma o di carta. Di conseguenza, sezioni della macchina adiacenti tra loro non potranno mai avere rotazioni "troppo diverse" tra loro (in tal caso non potremmo certo parlare di elasticità lineare e materiali lineari!).

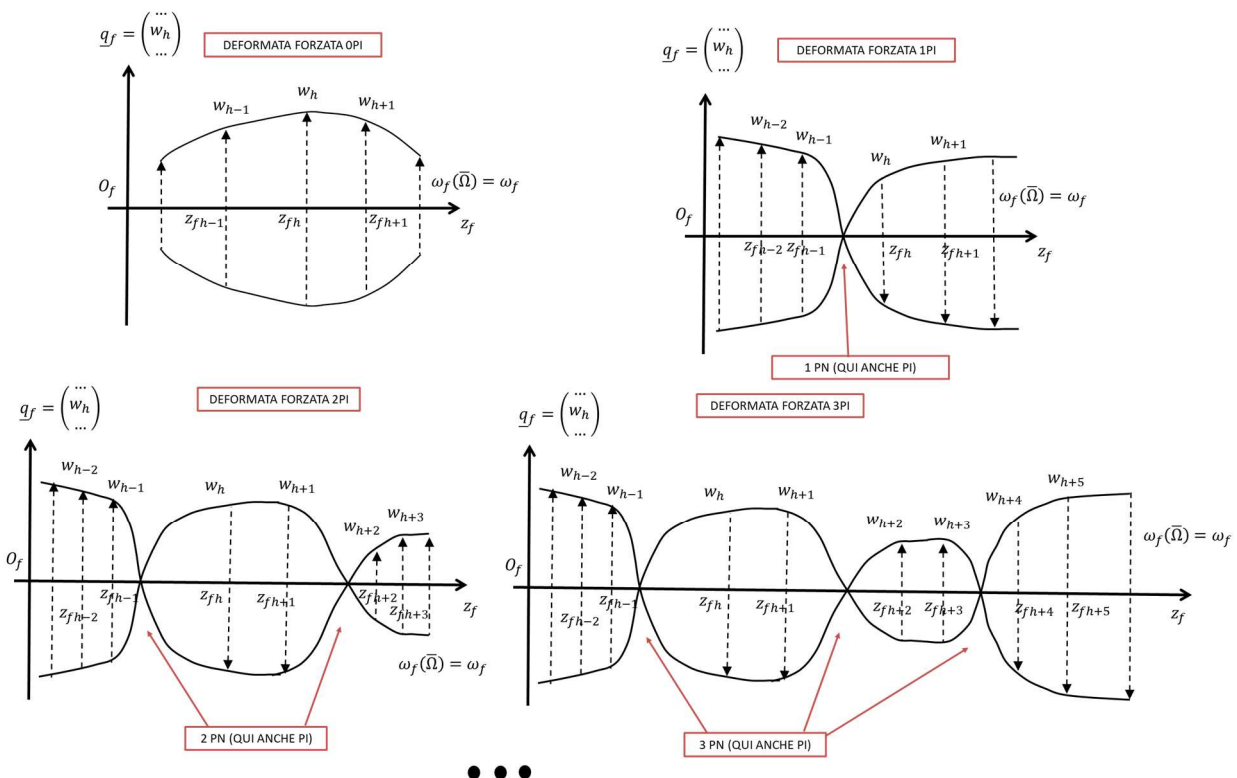


Figura 143 Il concetto di coerenza modale (si vedano anche le figure analoghe dei capitoli 4 e 10)

Come si può notare dalla Fig. 143, la deformata forzata è di tipo OPI quando non ha né punti nodali PN né ovviamente punti di inversione PI (le rotazioni  $w_h(t)$  tendono a essere tutte in fase). Se invece esistono dei punti nodali PN, la deformata forzata può avere dei punti di inversione PI e di conseguenza potremo avere deformate forzate 1PI, 2PI, 3PI a seconda di quante inversioni del moto avvengono.

Naturalmente non è detto che, se ci sono dei punti nodali PN, il moto necessariamente si invertirà in essi e che, di conseguenza, il punto in questione sia per forza un punto di inversione PI. Possono benissimo esistere punti nodali PN in cui il moto non si inverte e che quindi non sono punti di inversione PI. I punti di inversione PI sono quindi un sottoinsieme dei punti nodali PN (il numero dei PI è minore o uguale di quello dei PN).

Come detto in precedenza, la traslazione della  $h$ -esima sezione  $w_h(t)$  avviene chiaramente alla pulsazione della forzante  $\omega_f(\bar{\Omega}) = \omega_f$  (la stessa per ogni nodo  $\underline{G}_h$ !). Ciò è coerente col fatto che la pulsazione associata alla deformata forzata in questione è sempre una e una sola, ovvero  $\omega_f$ .

Le principali deformate forzate sono rappresentate in Fig. 144 e, nelle caratteristiche (OPI, 1PI, 2PI, 3PI) e nella forma (IDF, IIDF, IIIDF, etc.), ricordano i modi di vibrare IE, IIE, IIIE, IVE, etc. descritti nel paragrafo 8.7. Tuttavia le deformate forzate riguardano il moto forzato e non il moto libero, e non vanno dunque confuse con i modi di vibrare e le deformate modali!

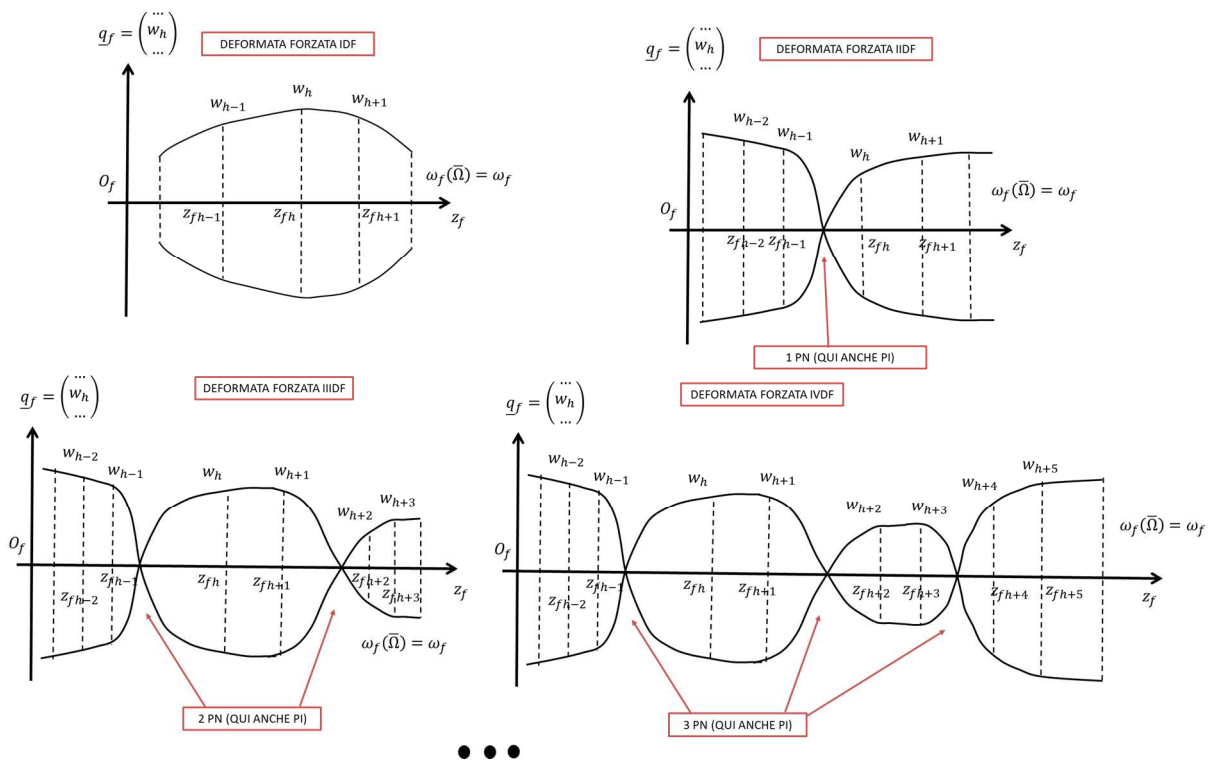


Figura 144 Deformate forzate per rotore elastico con forzante armonica asincrona (si vedano anche le figure analoghe dei capitoli 4 e 10)

ELENCO RIASSUNTIVO DELLE VARIE DEFORMATE FORZATE:

- 1) FORMA: IDF  
CARATTERISTICA: OPI
- 2) FORMA: IIDF  
CARATTERISTICA: OPI, 1PI
- 3) FORMA: IIIDF  
CARATTERISTICA: OPI, 1PI, 2PI
- 4) FORMA: IVDF  
CARATTERISTICA: OPI, 1PI, 2PI, 3PI
- ... ..

4) FORZANTE ARMONICA GENERICA:

$$M\ddot{\underline{q}} + (C_c(\Omega) + C_{sm})\dot{\underline{q}} + (K_c(\Omega) + K_{tot})\underline{q} = \underline{Q}(t) = \text{Re} \left[ \underline{Q}_0(\Omega) e^{j\omega_f(\Omega)t} \right]. \quad (8.8.16)$$

$$\underline{Q}(t) = \begin{pmatrix} \dots \\ Q_h(t) \\ \dots \end{pmatrix}, \quad \underline{Q}_0(\Omega) = \begin{pmatrix} \dots \\ Q_{0h} \\ \dots \end{pmatrix}.$$

La soluzione del moto forzato del sistema può essere facilmente determinata grazie agli strumenti matematici introdotti nel capitolo 1 e si ha:

$$\underline{q}_f(t) = \begin{pmatrix} \dots \\ w_h(t) \\ \dots \end{pmatrix} = \text{Re} \left[ \underline{q}_0 e^{j\omega_f(\Omega)t} \right] \quad (8.8.17)$$

$$\underline{q}_0 = \begin{pmatrix} \dots \\ w_{0h} \\ \dots \end{pmatrix} = \alpha(\omega_f(\Omega), \Omega) \underline{Q}_0(\Omega) = [-\omega_f(\Omega)^2 M + j\omega_f(\Omega)(C_c(\Omega) + C_{sm}) + K_{tot}]^{-1} \underline{Q}_0(\Omega),$$

dove in questi casi è utile distinguere nella ricettanza  $\alpha(\omega_f(\Omega), \Omega)$  la doppia dipendenza dalla pulsazione della forzante e della velocità di rotazione della macchina.

Applicando il teorema di sovrapposizione modale in questo caso abbiamo:

$$\underline{q}_0 = \alpha(\omega_f(\Omega), \Omega) \underline{Q}_0(\Omega) = \sum_{k=1}^{2N} \frac{(q_{Rk} q_{Lk}^H)}{j\omega_f(\Omega) - s_k} \underline{Q}_0(\Omega) = \sum_{k=1}^{2N} \left( \frac{q_{Lk}^H Q_0}{j\omega_f(\Omega) - s_k} \right) \underline{q}_{Rk} \quad (8.8.18)$$

da cui possiamo dedurre che i modi che maggiormente contribuiscono alla soluzione sono quelli in cui  $\left( \frac{q_{Lk}^H Q_0}{j\omega_f(\Omega) - s_k} \right)$  è grande, ovvero quando  $\omega_f(\Omega)$  è vicina a una delle pulsazioni proprie del sistema  $\omega_{pk}$  contenuta in  $s_k$  (corrispondenti alle risonanze del sistema) o quando  $q_{Lk}^H Q_0$  è grande (forzanti ortogonali al corrispondente autovettore).

Il diagramma di Campbell associato a questo caso è riportato in Fig. 145. Rispetto allo studio nel moto libero abbiamo aggiunto la curva del carico  $\omega_f(\Omega)$  sul diagramma relativo alle pulsazioni proprie  $\omega_{pi}$ . Le intersezioni della curva del carico con i rami del diagramma  $\Omega_c$  sono ancora una volta le pulsazioni critiche. Il valore di smorzamento modale associato alle varie pulsazioni critiche  $\zeta_c$  può essere facilmente trovato riportando la pulsazione critica in questione  $\Omega_c$  sul diagramma dello smorzamento.

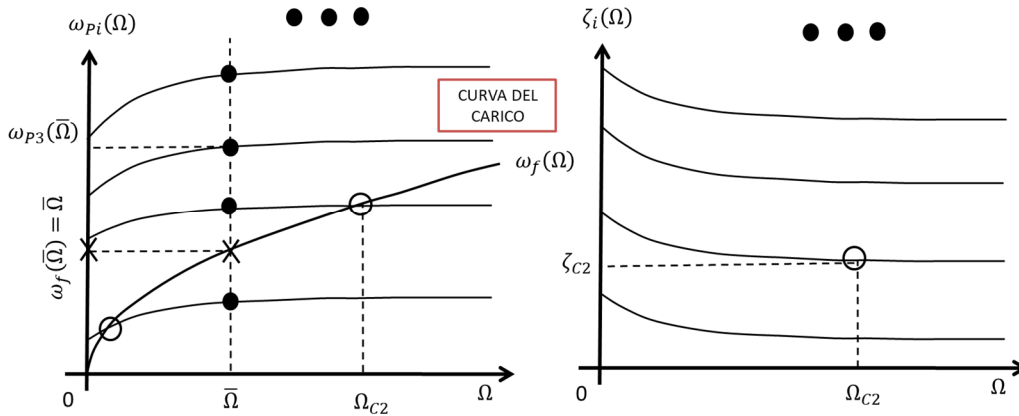


Figura 145 Diagramma di Campbell per rotore elastico con forzante armonica generica

Per capire quanto effettivamente vibra il sistema dobbiamo fare uso dei diagrammi di Bode. A tale fine dobbiamo prima specificare una velocità di lavoro della macchina  $\bar{\Omega}$  alla quale studiare il sistema. Riporto quindi tale velocità  $\bar{\Omega}$  sul diagramma di Campbell; l'intersezione tra la retta verticale passante per  $\bar{\Omega}$  e gli  $N$  rami del diagramma delle pulsazioni proprie  $\omega_{pi}$  rappresentano le  $N$  pulsazioni proprie del sistema coincidenti, a loro volta, con le pulsazioni di risonanza del sistema. A questo punto, supponendo di voler trovare quanto vale la traslazione della  $h$ -esima sezione  $w_{oh}$  lungo l'asse  $z_h$  (nel dominio della frequenza), posso tracciare i rispettivi diagrammi (Fig. 146). Per determinare il modulo e la fase della traslazione  $w_{oh}$  devo determinare sul diagramma di Bode il punto in cui agisce la forzante. Ma questo può essere dedotto dal diagramma di Campbell intersecando la curva del carico con la sezione verticale passante per  $\bar{\Omega}$  (si vedano sempre la Fig. 145 e la Fig. 146).

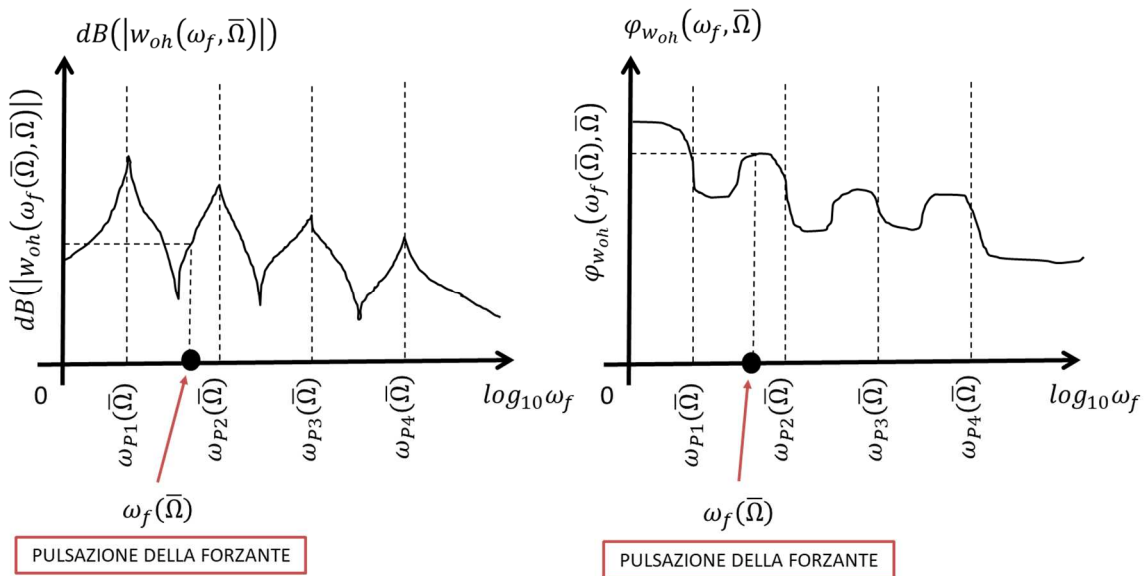


Figura 146 Diagramma di Bode per rotore elastico con forzante armonica generica

Guardando ai diagrammi di Campbell e di Bode, risulta chiaro il significato di pulsazione critica  $\Omega_c$ . Qualora infatti la pulsazione di lavoro della macchina  $\bar{\Omega}$  (la speed) si trovasse in corrispondenza di una critica  $\Omega_c$ , la pulsazione in cui la forzante agirebbe sulla macchina  $\omega_f(\bar{\Omega})$  si troverebbe proprio in corrispondenza di una pulsazione propria

$\omega_{pi}(\bar{\Omega})$  e quindi di una pulsazione di risonanza. Ci troveremmo quindi necessariamente in condizioni di massima amplificazione.

Per quanto riguarda lo studio degli autovettori, al contrario delle vibrazioni flessionali, non ha più senso parlare di "whirl forzato" in quanto non stiamo più studiando la traiettoria del nodo  $\underline{G}_h$  ma solamente la traslazione della sezione a esso solidale  $w_h(t)$  (si veda la Fig. 147):

$$w_h(t) = \text{Re}(w_{0h}e^{n\omega_f(\bar{\Omega})t}). \quad (8.8.19)$$

Tale traslazione oscilla semplicemente alla pulsazione  $\omega_f(\bar{\Omega})$  (uguale per tutti i nodi!) con modulo e fase (contenuti in  $w_{0h}$ ) dipendenti dal nodo in questione. Si noti come, al contrario del moto libero, non essendo presente il termine esponenziale dovuto allo smorzamento, l'oscillazione della rotazione  $w(t)$  permarrà come in Fig. 147 senza mai smorzarsi. Se siamo vicini a una risonanza e/o lo smorzamento modale è in generale piccolo, allora le dimensioni dell'oscillazione saranno più grandi, altrimenti saranno più piccole.

In linea teorica ogni traslazione  $w_h(t)$  della sezione associata al nodo  $\underline{G}_h$  può oscillare con qualunque ampiezza e qualunque fase (contenuti in  $w_{0h}$ !). Tuttavia, per il principio di coerenza modale, anche nelle vibrazioni assiali i modi di vibrare tendono ad avere solamente forme regolari come quelle riportate in Fig. 147. Questo è dovuto al fatto i rotori sono solitamente di metallo (acciaio, leghe ad alta resistenza, etc) e non di gomma o di carta. Di conseguenza, sezioni della macchina adiacenti tra loro non potranno mai avere rotazioni "troppo diverse" tra loro (in tal caso non potremmo certo parlare di elasticità lineare e materiali lineari!).

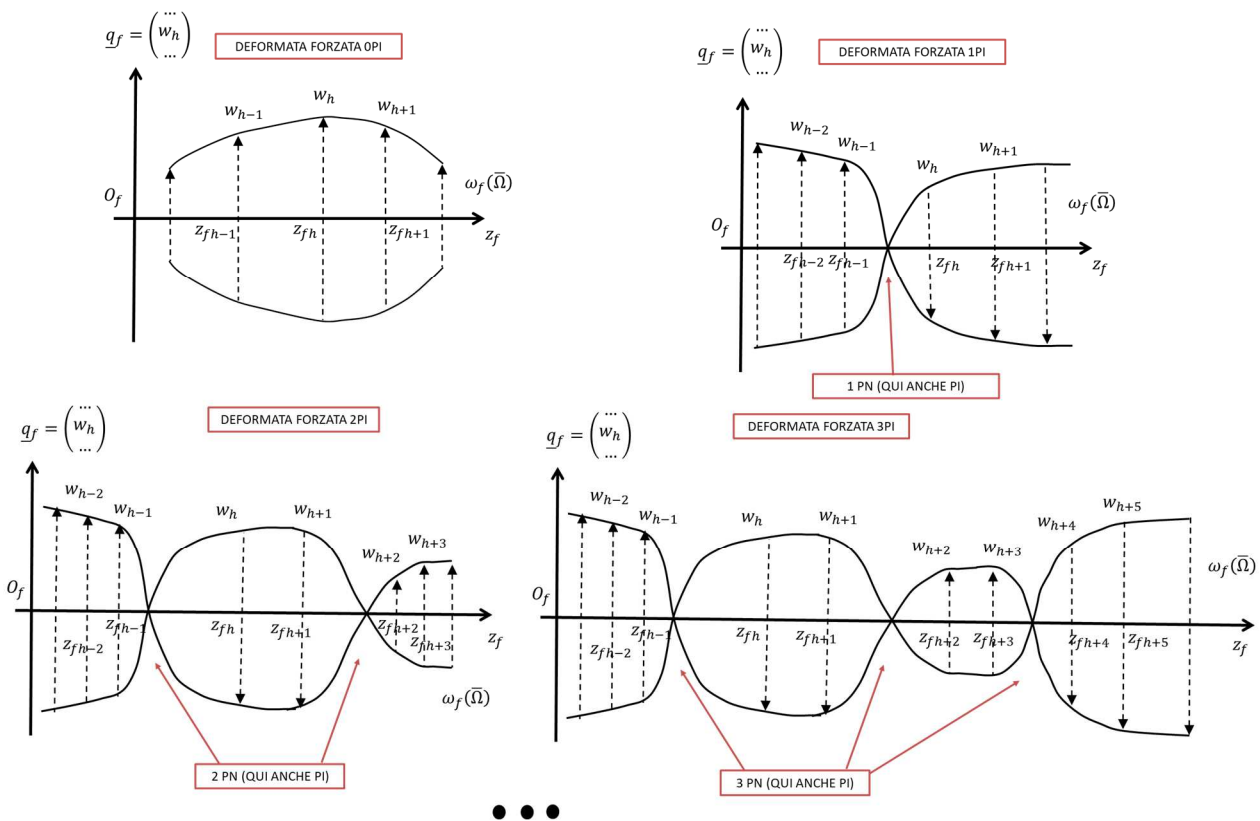


Figura 147 Il concetto di coerenza modale (si vedano anche le figure analoghe dei capitoli 4 e 10)

Come si può notare dalla Fig. 147, la deformata forzata è di tipo OPI quando non ha né punti nodali PN né ovviamente punti di inversione PI (le rotazioni  $w_h(t)$  tendono a essere tutte in fase). Se invece esistono dei punti nodali PN, la deformata forzata può avere dei punti di inversione PI e di conseguenza potremo avere deformate forzate 1PI, 2PI, 3PI a seconda di quante inversioni del moto avvengono.

Naturalmente non è detto che, se ci sono dei punti nodali PN, il moto necessariamente si invertirà in essi e che, di conseguenza, il punto in questione sia per forza un punto di inversione PI. Possono benissimo esistere punti nodali PN in cui il moto non si inverte e che quindi non sono punti di inversione PI. I punti di inversione PI sono quindi un sottoinsieme dei punti nodali PN (il numero dei PI è minore o uguale di quello dei PN).

Come detto in precedenza, la traslazione della  $h$ -esima sezione  $w_h(t)$  avviene chiaramente alla pulsazione della forzante  $\omega_f(\bar{\Omega})$  (la stessa per ogni nodo  $G_h!$ ). Ciò è coerente col fatto che la pulsazione associata alla deformata forzata in questione è sempre una e una sola, ovvero  $\omega_f(\bar{\Omega})$ .

Le principali deformate forzate sono rappresentate in Fig. 148 e, nelle caratteristiche (OPI, 1PI, 2PI, 3PI) e nella forma (IDF, IIDF, IIIDF, etc.), ricordano i modi di vibrare IE, IIE, IIIE, IVE, etc. descritti nel paragrafo 8.7. Tuttavia le deformate forzate riguardano il moto forzato e non il moto libero, e non vanno dunque confuse con i modi di vibrare e le deformate modali!

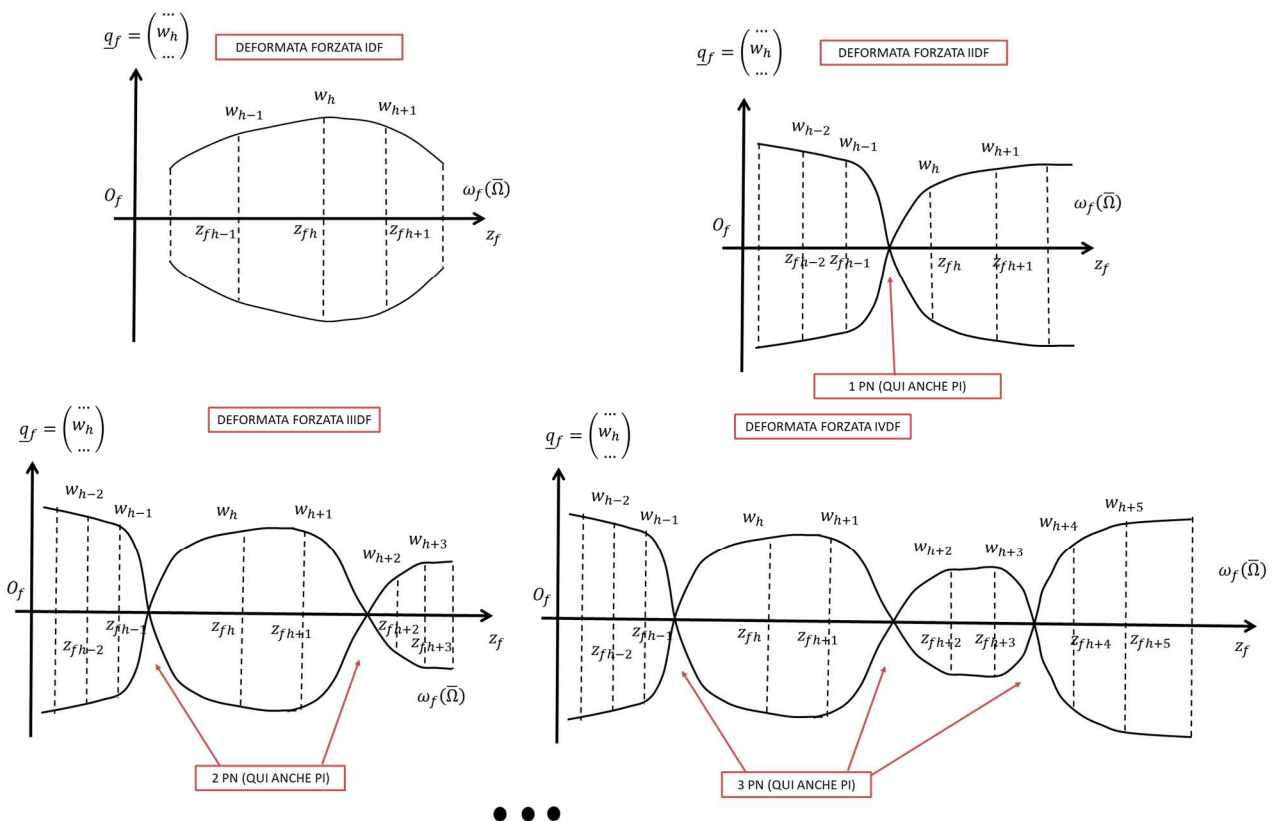


Figura 148 Deformate forzate per rotore elastico con forzante armonica generica (si vedano anche le figure analoghe dei capitoli 4 e 10)

ELENCO RIASSUNTIVO DELLE VARIE DEFORMATE FORZATE:

- 1) FORMA: IDF
- CARATTERISTICA: OPI

- 2) FORMA: IIDF  
CARETTERISTICA: OPI, 1PI
- 3) FORMA: IIIDF  
CARETTERISTICA: OPI, 1PI, 2PI
- 4) FORMA: IVDF  
CARETTERISTICA: OPI, 1PI, 2PI, 3PI
- ... ..

5) FORZANTE PERIODICA:

$$M\ddot{\underline{q}} + (C_C(\Omega) + C_{sm})\dot{\underline{q}} + (K_C(\Omega) + K_{etot})\underline{q} = \underline{Q}(t) = Re[\sum_{k=0}^{\infty} \underline{c}_k(\Omega)e^{j\omega_0(\Omega)kt}], \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}. \quad (8.8.20)$$

$$\underline{Q}(t) = \begin{pmatrix} \dots \\ Q_h(t) \\ \dots \end{pmatrix}, \quad \underline{c}_k(\Omega) = \begin{pmatrix} \dots \\ c_{kh} \\ \dots \end{pmatrix}.$$

La soluzione del moto forzato del sistema può essere facilmente determinata grazie agli strumenti matematici introdotti nel capitolo 1 e si ha:

$$\underline{q}_f(t) = \begin{pmatrix} \dots \\ w_h(t) \\ \dots \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} \underline{q}_k(t) = Re[\sum_{k=0}^{\infty} [\alpha(k\omega_0, \Omega)\underline{c}_k(\Omega)e^{j\omega_0(\Omega)kt}]] \quad (8.8.21)$$

$$\underline{q}_k(t) = \begin{pmatrix} \dots \\ w_{kh}(t) \\ \dots \end{pmatrix} = Re[\alpha(k\omega_0, \Omega)\underline{c}_k(\Omega)e^{j\omega_0(\Omega)kt}],$$

$$\underline{q}_{k0} = \begin{pmatrix} \dots \\ w_{kh0} \\ \dots \end{pmatrix} = \alpha(k\omega_0(\Omega), \Omega)\underline{c}_k(\Omega) = [-k^2\omega_0(\Omega)^2M + jk\omega_0(\Omega)(C_C(\Omega) + C_{sm}) + (K_C(\Omega) + K_{etot})]^{-1}\underline{c}_k(\Omega)$$

dove in questi casi è utile distinguere nella ricettanza  $\alpha(k\omega_0(\Omega), \Omega)$  la doppia dipendenza dalla pulsazione della forzante e della velocità di rotazione della macchina.

Applicando il teorema di sovrapposizione modale in questo caso abbiamo:

$$\underline{q}_k(t) = Re[\alpha(k\omega_0(\Omega), \Omega)\underline{c}_k(\Omega)e^{j\omega_0(\Omega)kt}] = Re\left[\sum_{m=1}^{2N} \frac{(q_{Rm} q_{Lm}^H)}{j\omega_0(\Omega)k - s_m} \underline{c}_k(\Omega)e^{j\omega_0(\Omega)kt}\right] =$$

$$Re\left[\sum_{m=1}^{2N} \left(\frac{q_{Lm}^H \underline{c}_k}{j\omega_0(\Omega)k - s_m}\right) \underline{q}_{Rm} e^{j\omega_0(\Omega)kt}\right], \quad (8.8.22)$$

da cui possiamo dedurre che i modi che maggiormente contribuiscono alle singole armoniche della soluzione sono quelli in cui  $\left(\frac{q_{Lm}^H \underline{c}_k}{j\omega_0(\Omega)k - s_m}\right)$  è grande, ovvero quando  $\omega_0(\Omega)k$  è vicina a una delle pulsazioni proprie del sistema  $\omega_{Pk}$  contenuta in  $s_k$  (corrispondenti alle risonanze del sistema) o quando  $\underline{q}_{Lk}^H \underline{c}_k$  è grande (forzanti ortogonali al corrispondente autovettore).



Il diagramma di Campbell associato a questo caso è riportato in Fig. 149. Rispetto allo studio nel moto libero abbiamo aggiunto la curva del carico  $\omega_0(\Omega)k$  sul diagramma relativo alle pulsazioni proprie  $\omega_{pi}$ . Le intersezioni della curva del carico con i rami del diagramma  $\Omega_c$  sono ancora una volta le pulsazioni critiche. Il valore di smorzamento modale associato alle varie pulsazioni critiche  $\zeta_c$  può essere facilmente trovato riportando la pulsazione critica in questione  $\Omega_c$  sul diagramma dello smorzamento.

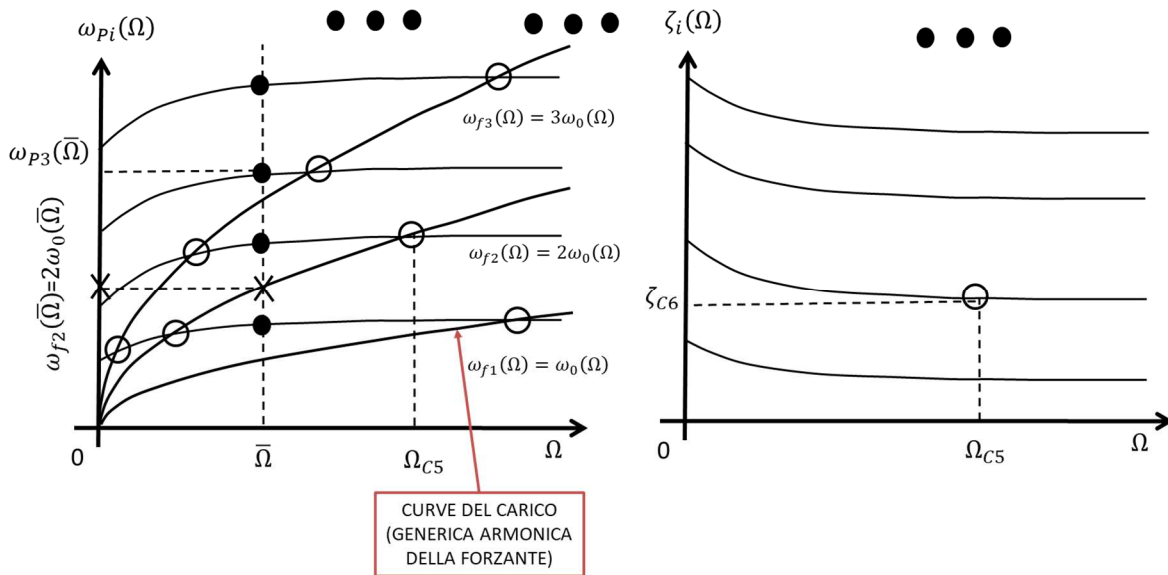


Figura 149 Diagramma di Campbell per rotore elastico con forzante periodica

Per capire quanto effettivamente vibra il sistema dobbiamo fare uso dei diagrammi di Bode. A tale fine dobbiamo prima specificare una velocità di lavoro della macchina  $\bar{\Omega}$  alla quale studiare il sistema. Riporto quindi tale velocità  $\bar{\Omega}$  sul diagramma di Campbell; l'intersezione tra la retta verticale passante per  $\bar{\Omega}$  e gli  $N$  rami del diagramma delle pulsazioni proprie  $\omega_{pi}$  rappresentano le  $N$  pulsazioni proprie del sistema coincidenti, a loro volta, con le pulsazioni di risonanza del sistema. A questo punto, supponendo di voler trovare quanto vale la traslazione della  $h$ -esima sezione  $w_{kh0}$  lungo l'asse  $z_h$  (nel dominio della frequenza), posso tracciare i rispettivi diagrammi (Fig. 150). Per determinare il modulo e la fase della traslazione  $w_{kh0}$  (per ogni singola armonica!) devo determinare sul diagramma di Bode il punto in cui agisce la forzante. Ma questo può essere dedotto dal diagramma di Campbell intersecando la curva del carico con la sezione verticale passante per  $\bar{\Omega}$  (si vedano sempre la Fig. 149 e la Fig. 150).

Guardando ai diagrammi di Campbell e di Bode, risulta chiaro il significato di pulsazione critica  $\Omega_c$ . Qualora infatti la pulsazione di lavoro della macchina  $\bar{\Omega}$  (la speed) si trovasse in corrispondenza di una critica  $\Omega_c$ , la pulsazione in cui la forzante agirebbe sulla macchina  $k\omega_0(\bar{\Omega})$  si troverebbe proprio in corrispondenza di una pulsazione propria

$\omega_{p_i}(\bar{\Omega})$  e quindi di una pulsazione di risonanza. Ci troveremmo quindi necessariamente in condizioni di massima amplificazione.

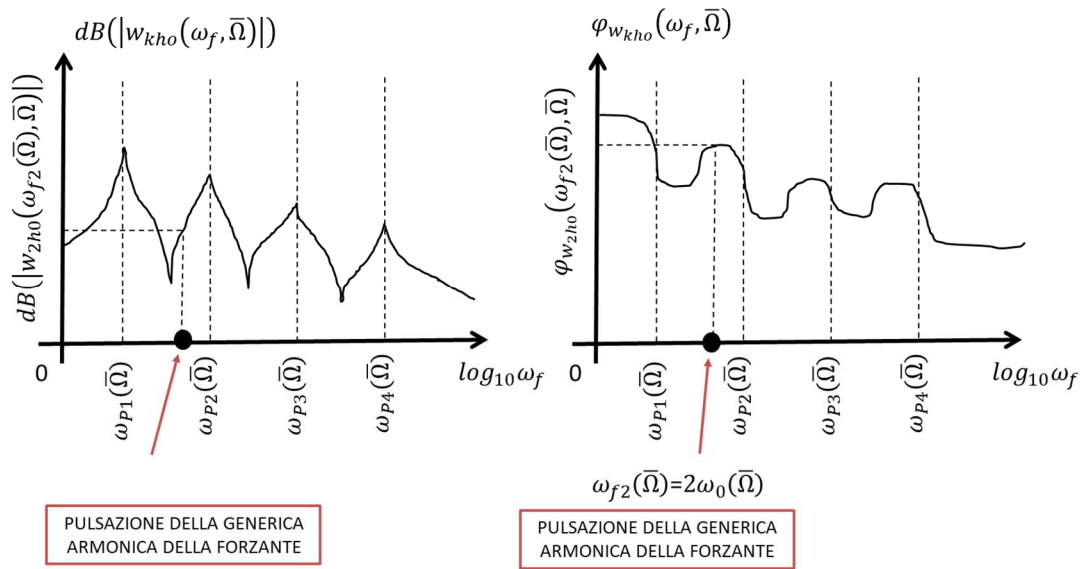


Figura 150 Diagramma di Bode per rotore elastico con forzante periodica

Per quanto riguarda lo studio degli autovettori, al contrario delle vibrazioni flessionali, non ha più senso parlare di “whirl forzato” in quanto non stiamo più studiando la traiettoria del nodo  $\underline{G}_h$  ma solamente la traslazione della sezione a esso solidale  $w_{kh}(t)$  (per ogni singola armonica!) (si veda la Fig. 151):

$$w_{kh}(t) = \text{Re}(w_{kh0} e^{jk\omega_0(\bar{\Omega})t}). \quad (8.8.22)$$

Tale rotazione oscilla semplicemente alla pulsazione  $k\omega_0(\bar{\Omega})$  (uguale per tutti i nodi!) con modulo e fase (contenuti in  $w_{kh0}$ ) dipendenti dal nodo in questione. Si noti come, al contrario del moto libero, non essendo presente il termine esponenziale dovuto allo smorzamento, l’oscillazione della rotazione  $w_{kh}(t)$  permarrà come in Fig. 151 senza mai smorzarsi. Se siamo vicino a una risonanza e/o lo smorzamento modale è in generale piccolo, allora le dimensioni dell’oscillazione saranno più grandi, altrimenti saranno più piccole.

In linea teorica ogni traslazione  $w_{kh}(t)$  della sezione associata al nodo  $\underline{G}_h$  può oscillare con qualunque ampiezza e qualunque fase (contenuti in  $w_{kh0}$ !). Tuttavia, per il principio di coerenza modale, anche nelle vibrazioni assiali i modi di vibrare tendono ad avere solamente forme regolari come quelle riportate in Fig. 151. Questo è dovuto al fatto i rotor sono solitamente di metallo (acciaio, leghe ad alta resistenza, etc) e non di gomma o di carta. Di

conseguenza, sezioni della macchina adiacenti tra loro non potranno mai avere rotazioni “troppo diverse” tra loro (in tal caso non potremmo certo parlare di elasticità lineare e materiali lineari!).

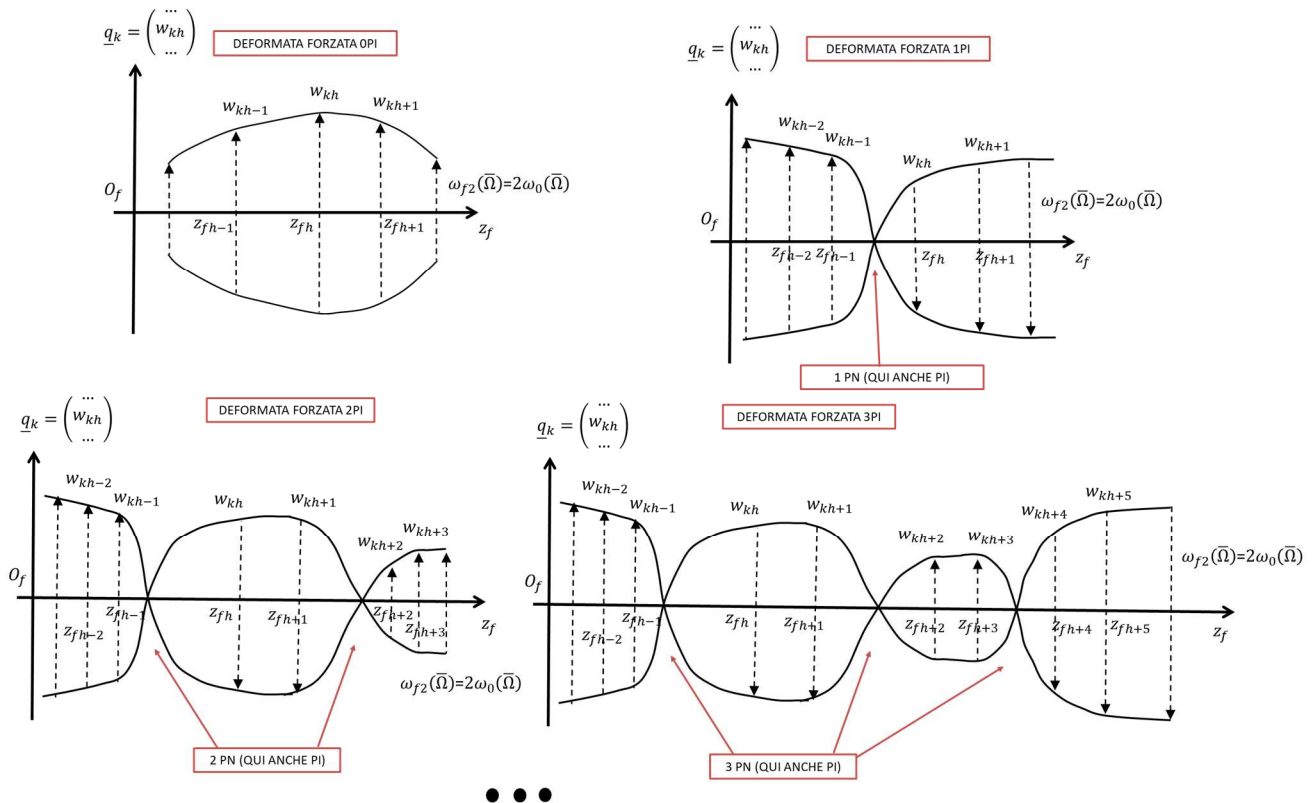


Figura 151 Il concetto di coerenza modale (si vedano anche le figure analoghe dei capitoli 4 e 10)

Come si può notare dalla Fig. 151 (per ogni singola armonica!), la deformata forzata è di tipo OPI quando non ha né punti nodali PN né ovviamente punti di inversione PI (le rotazioni  $w_{kh}(t)$  tendono a essere tutte in fase). Se invece esistono dei punti nodali PN, la deformata forzata può avere dei punti di inversione PI e di conseguenza potremo avere deformate forzate 1PI, 2PI, 3PI a seconda di quante inversioni del moto avvengono.

Naturalmente non è detto che, se ci sono dei punti nodali PN, il moto necessariamente si invertirà in essi e che, di conseguenza, il punto in questione sia per forza un punto di inversione PI. Possono benissimo esistere punti nodali PN in cui il moto non si inverte e che quindi non sono punti di inversione PI. I punti di inversione PI sono quindi un sottoinsieme dei punti nodali PN (il numero dei PI è minore o uguale di quello dei PN).

Come detto in precedenza, la traslazione della  $h$ -esima sezione  $w_{kh}(t)$  avviene chiaramente alla pulsazione della forzante  $k\omega_0(\bar{\Omega})$  (la stessa per ogni nodo  $\underline{G}_h$ !). Ciò è coerente col fatto che la pulsazione associata alla deformata forzata in questione è sempre una e una sola, ovvero  $k\omega_0(\bar{\Omega})$ .

Le principali deformate forzate sono rappresentate in Fig. 152 e, nelle caratteristiche (0PI, 1PI, 2PI, 3PI) e nella forma (IDF, IIDF, IIIDF, etc.), ricordano i modi di vibrare IE, IIE, IIIE, IVE, etc. descritti nel paragrafo 8.7. Tuttavia le deformate forzate riguardano il moto forzato e non il moto libero, e non vanno dunque confuse con i modi di vibrare e le deformate modali!

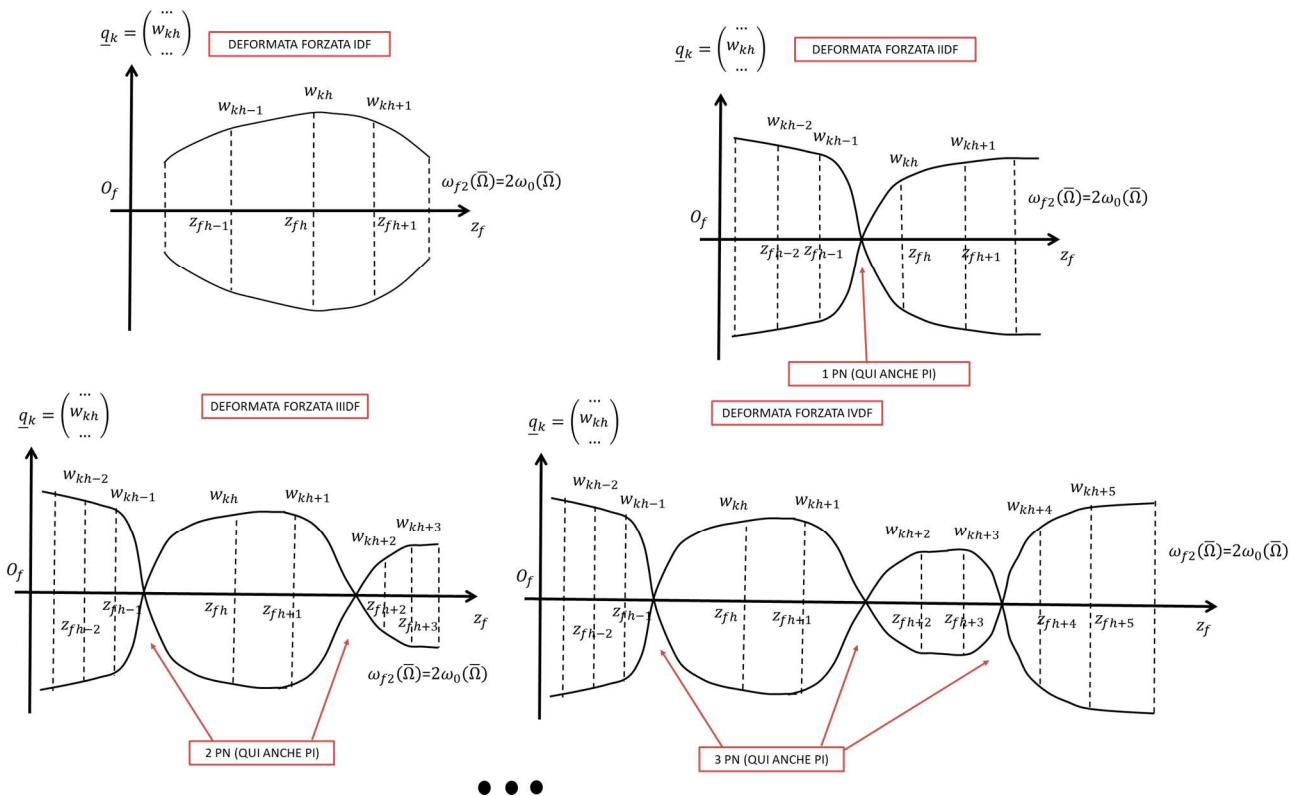


Figura 152 Deformate forzate per rotore elastico con forzante armonica periodica (si vedano anche le figure analoghe dei capitoli 4 e 10)

ELENCO RIASSUNTIVO DELLE VARIE DEFORMATE FORZATE:

- 1) FORMA: IDF  
CARATTERISTICA: 0PI
- 2) FORMA: IIDF  
CARETTERISTICA: 0PI, 1PI
- 3) FORMA: IIIDF  
CARETTERISTICA: 0PI, 1PI, 2PI
- 4) FORMA: IVDF  
CARETTERISTICA: 0PI, 1PI, 2PI, 3PI
- ... ..

6) FORZANTE GENERICA:

$$M\ddot{\underline{q}} + (C_c(\Omega) + C_{sm})\dot{\underline{q}} + (K_c(\Omega) + K_{etot})\underline{q} = \underline{Q}(t, \Omega) \quad (8.8.23)$$

$$\underline{Q}(t, \Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{\tilde{Q}}(\omega, \Omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad \underline{\tilde{Q}}(\omega, \Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{Q}(t, \Omega) e^{-j\omega t} dt$$

$$\underline{Q}(t, \Omega) = \begin{pmatrix} \dots \\ Q_h(t, \Omega) \\ \dots \end{pmatrix}, \quad \underline{\tilde{Q}}(\omega, \Omega) = \begin{pmatrix} \dots \\ \tilde{Q}_h(\omega, \Omega) \\ \dots \end{pmatrix}$$

La soluzione del moto forzato del sistema può essere facilmente determinata grazie agli strumenti matematici introdotti nel capitolo 1 e si ha:

$$\underline{q}_f(t, \Omega) = \begin{pmatrix} \dots \\ w_h(t, \Omega) \\ \dots \end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{\tilde{q}}(\omega, \Omega) e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(\omega, \Omega) \underline{\tilde{Q}}(\omega, \Omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (8.8.24)$$

$$\underline{\tilde{q}}(\omega, \Omega) = \begin{pmatrix} \dots \\ \tilde{w}_h(\omega, \Omega) \\ \dots \end{pmatrix} = \alpha(\omega, \Omega) \underline{\tilde{Q}}(\omega, \Omega) = [-\omega^2 M + j\omega(C_c(\Omega) + C_{sm}) + (K_c(\Omega) + K_{etot})]^{-1} \underline{\tilde{Q}}(\omega, \Omega)$$

dove in questi casi è utile distinguere nella ricettanza  $\alpha(\omega, \Omega)$  la doppia dipendenza dalla pulsazione della forzante e della velocità di rotazione della macchina.

Applicando il teorema di sovrapposizione modale in questo caso abbiamo:

$$\underline{\tilde{q}}(\omega, \Omega) = \alpha(\omega, \Omega) \underline{\tilde{Q}}(\omega, \Omega) = \sum_{k=1}^{2N} \frac{(q_{Rk} \underline{q}_{Lk}^H)}{j\omega - s_k} \underline{\tilde{Q}}(\omega, \Omega) =$$

$$= \sum_{k=1}^{2N} \left( \frac{q_{Lk}^H \underline{\tilde{Q}}(\omega, \Omega)}{j\omega - s_k} \right) \underline{q}_{Rk}, \quad (8.8.25)$$

da cui possiamo dedurre che i modi che maggiormente contribuiscono alle singole armoniche della soluzione sono quelli in cui  $\left( \frac{q_{Lk}^H \underline{\tilde{Q}}(\omega, \Omega)}{j\omega - s_k} \right)$  è grande, ovvero quando  $\omega$  è vicina a una delle pulsazioni proprie del sistema  $\omega_{pk}$  contenuta in  $s_k$  (corrispondenti alle risonanze del sistema) o quando  $q_{Lk}^H \underline{\tilde{Q}}(\omega, \Omega)$  è grande (forzanti ortogonali al corrispondente autovettore).

Consideriamo a titolo di pure esempio una forzante generica come quella in Fig. 153 (un tipico segnale passabanda con frequenza portante  $\omega_f(\Omega)$ , ovvero come nella realtà appare un segnale puramente armonico). In questo caso  $\delta(\Omega)$  e  $\Delta(\Omega)$  sono le soglie di sensibilità del segnale, utili per determinare in quale range dello spettro il contributo in frequenza del segnale sia realmente apprezzabile. Per semplicità supporremo che, come spesso accade in questo caso,  $\delta(\Omega)$ ,  $\Delta(\Omega)$  e la frequenza portante del segnale  $\omega_f(\Omega)$  siano le stesse per ogni componente della forzante  $\underline{\tilde{Q}}(\omega, \Omega)$ .

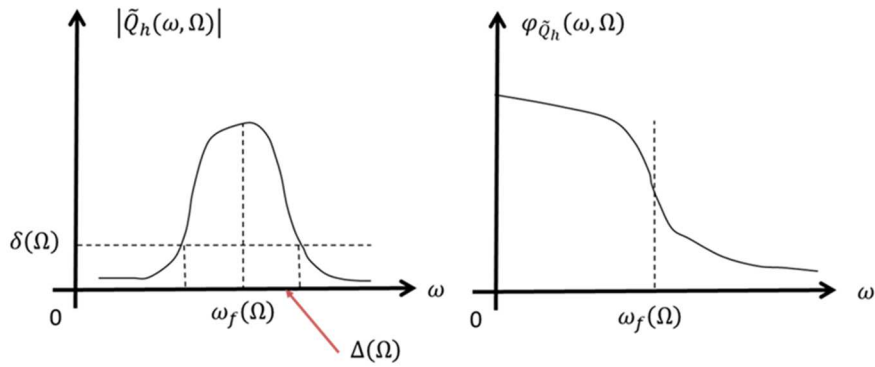


Figura 153 Forzante generica del sistema

Il diagramma di Campbell associato a questo caso è riportato in Fig. 154. Rispetto allo studio nel moto libero abbiamo aggiunto la banda del carico ( $\omega_f(\Omega), \Delta(\Omega)$ ) sul diagramma relativo alle pulsazioni proprie  $\omega_{pi}$ . Le intersezioni della banda del carico con i rami del diagramma  $I\Omega_c$  rappresentano le bande critiche. Il valore di smorzamento modale (banda di smorzamento) associato alle bande critiche  $I\zeta_c$  può essere facilmente trovato riportando la banda critica in questione  $I\Omega_c$  sul diagramma dello smorzamento.

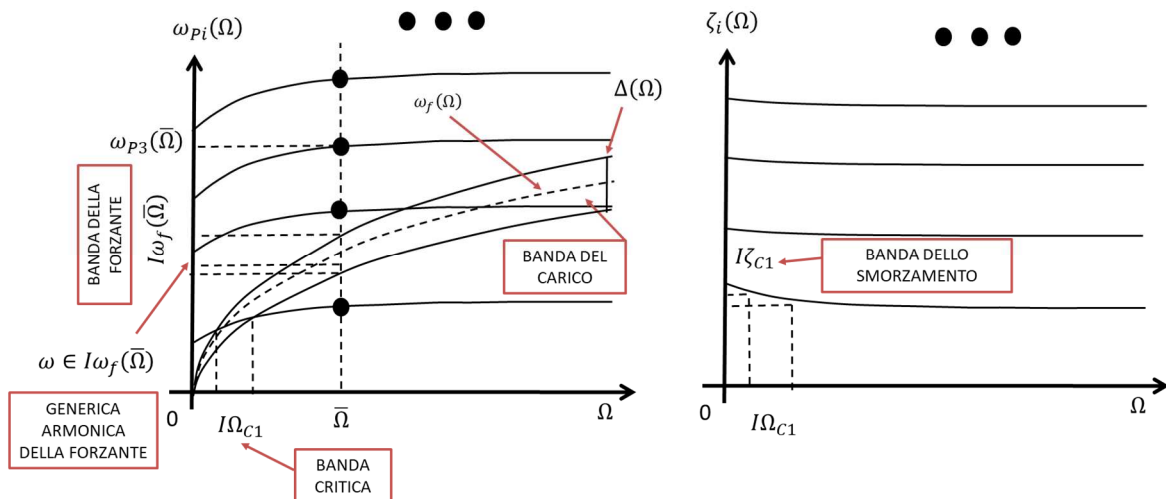


Figura 154 Diagramma di Campbell per rotore elastico con forzante generica

Per capire quanto effettivamente vibra il sistema dobbiamo fare uso dei diagrammi di Bode. A tale fine dobbiamo prima specificare una velocità di lavoro della macchina  $\bar{\Omega}$  alla quale studiare il sistema. Riporto quindi tale velocità  $\bar{\Omega}$  sul diagramma di Campbell; l'intersezione tra la retta verticale passante per  $\bar{\Omega}$  e gli  $N$  rami del diagramma delle pulsazioni proprie  $\omega_{pi}$  rappresentano le  $N$  pulsazioni proprie del sistema coincidenti, a loro volta, con le pulsazioni di risonanza del sistema. A questo punto, supponendo di voler trovare quanto vale la traslazione della  $h$ -esima sezione  $\tilde{w}_h(\omega, \Omega)$  lungo l'asse  $z_h$  (nel dominio della frequenza), posso tracciare i rispettivi diagrammi (Fig. 155). Per determinare le bande del modulo e della fase della traslazione  $\tilde{w}_h(\omega, \Omega)$  devo determinare sul diagramma di Bode la banda in cui agisce la forzante. Ma questo può essere dedotto dal diagramma di Campbell intersecando la banda del carico con la sezione verticale passante per  $\bar{\Omega}$  (si vedano sempre la Fig. 154 e la Fig. 155). ). Lo stesso

ragionamento può essere effettuato per la generica componente armonica a pulsazione  $\omega \in I\omega_f(\bar{\Omega})$  appartenente alla banda  $I\omega_f(\bar{\Omega})$  in cui agisce la forzante (Fig. 154 e Fig. 155).

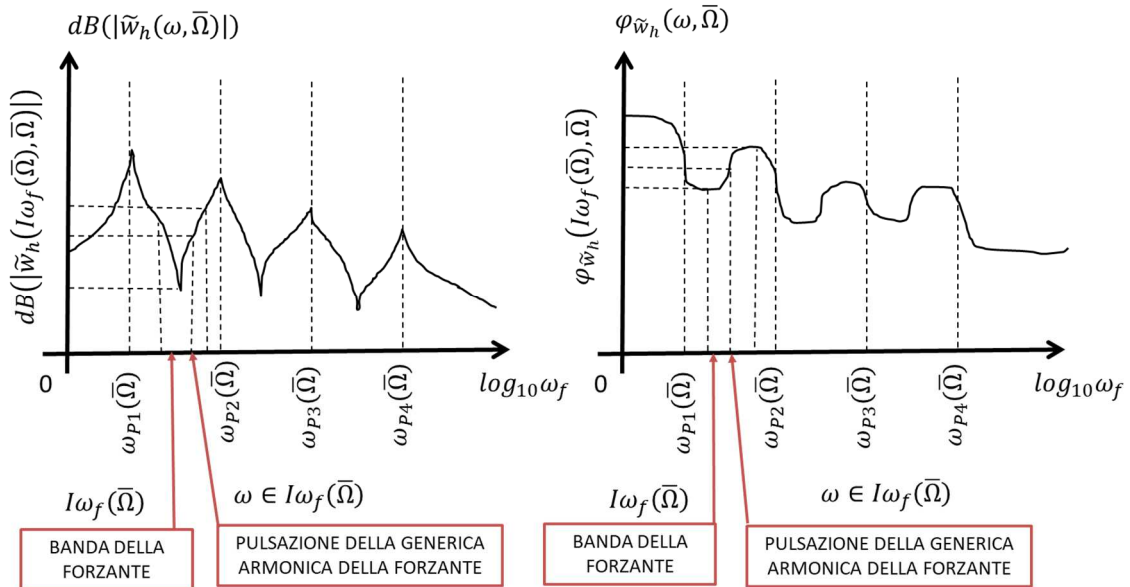


Figura 155 Diagramma di Bode per rotore elastico con forzante generica

Guardando ai diagrammi di Campbell e di Bode, risulta chiaro il significato di banda critica  $I\Omega_c$ . Qualora infatti la pulsazione di lavoro della macchina  $\bar{\Omega}$  (la speed) si trovasse in corrispondenza di una banda critica  $I\Omega_c$ , la banda in cui la forzante agirebbe sulla macchina  $I\omega_f(\bar{\Omega})$  includerebbe proprio una pulsazione propria  $\omega_{pi}(\bar{\Omega})$  e quindi una pulsazione di risonanza. Ci troveremmo quindi necessariamente in condizioni di massima amplificazione.

Per quanto riguarda lo studio degli autovettori, al contrario delle vibrazioni flessionali, non ha più senso parlare di “whirl forzato” in quanto non stiamo più studiando la traiettoria del nodo  $\underline{G}_h$  ma solamente la traslazione della sezione a esso solidale  $w_{h\omega}(t, \Omega)$  (per ogni singola armonica  $\omega \in I\omega_f(\bar{\Omega})!$ ) (si veda la Fig. 156):

$$\underline{q}_\omega(t, \Omega) = \begin{pmatrix} \dots \\ w_{h\omega}(t, \Omega) \\ \dots \end{pmatrix} = Re(\underline{\tilde{q}}(\omega, \Omega)e^{j\omega t}) = Re\left(\begin{pmatrix} \dots \\ \tilde{w}_h(\omega, \Omega) \\ \dots \end{pmatrix} e^{j\omega t}\right), \quad w_{h\omega}(t, \Omega) = Re(\tilde{w}_h(\omega, \Omega)e^{j\omega t}). \tag{8.8.26}$$

Tale traslazione oscilla semplicemente alla pulsazione  $\omega$  (uguale per tutti i nodi!) con modulo e fase (contenuti in  $\tilde{w}_h(\omega, \Omega)$ ) dipendenti dal nodo in questione. Si noti come, al contrario del moto libero, non essendo presente il termine esponenziale dovuto allo smorzamento, l’oscillazione della rotazione  $w_{h\omega}(t, \Omega)$  permarrà come in Fig. 156 senza mai smorzarsi. Se siamo vicini a una risonanza e/o lo smorzamento modale è in generale piccolo, allora le dimensioni dell’oscillazione saranno più grandi, altrimenti saranno più piccole.

In linea teorica ogni traslazione  $w_{h\omega}(t, \Omega)$  della sezione associata al nodo  $\underline{G}_h$  può oscillare con qualunque ampiezza e qualunque fase (contenuti in  $\tilde{w}_h(\omega, \Omega)$ !). Tuttavia, per il principio di coerenza modale, anche nelle vibrazioni assiali i modi di vibrare tendono ad avere solamente forme regolari come quelle riportate in Fig. 156. Questo è dovuto al fatto i rotor sono solitamente di metallo (acciaio, leghe ad alta resistenza, etc) e non di gomma

o di carta. Di conseguenza, sezioni della macchina adiacenti tra loro non potranno mai avere rotazioni “troppo diverse” tra loro (in tal caso non potremmo certo parlare di elasticità lineare e materiali lineari!).

Come si può notare dalla Fig. 156 (per ogni singola armonica!), la deformata forzata è di tipo OPI quando non ha né punti nodali PN né ovviamente punti di inversione PI (le rotazioni  $w_{\omega h}(t)$  tendono a essere tutte in fase). Se invece esistono dei punti nodali PN, la deformata forzata può avere dei punti di inversione PI e di conseguenza potremo avere deformate forzate 1PI, 2PI, 3PI a seconda di quante inversioni del moto avvengono.

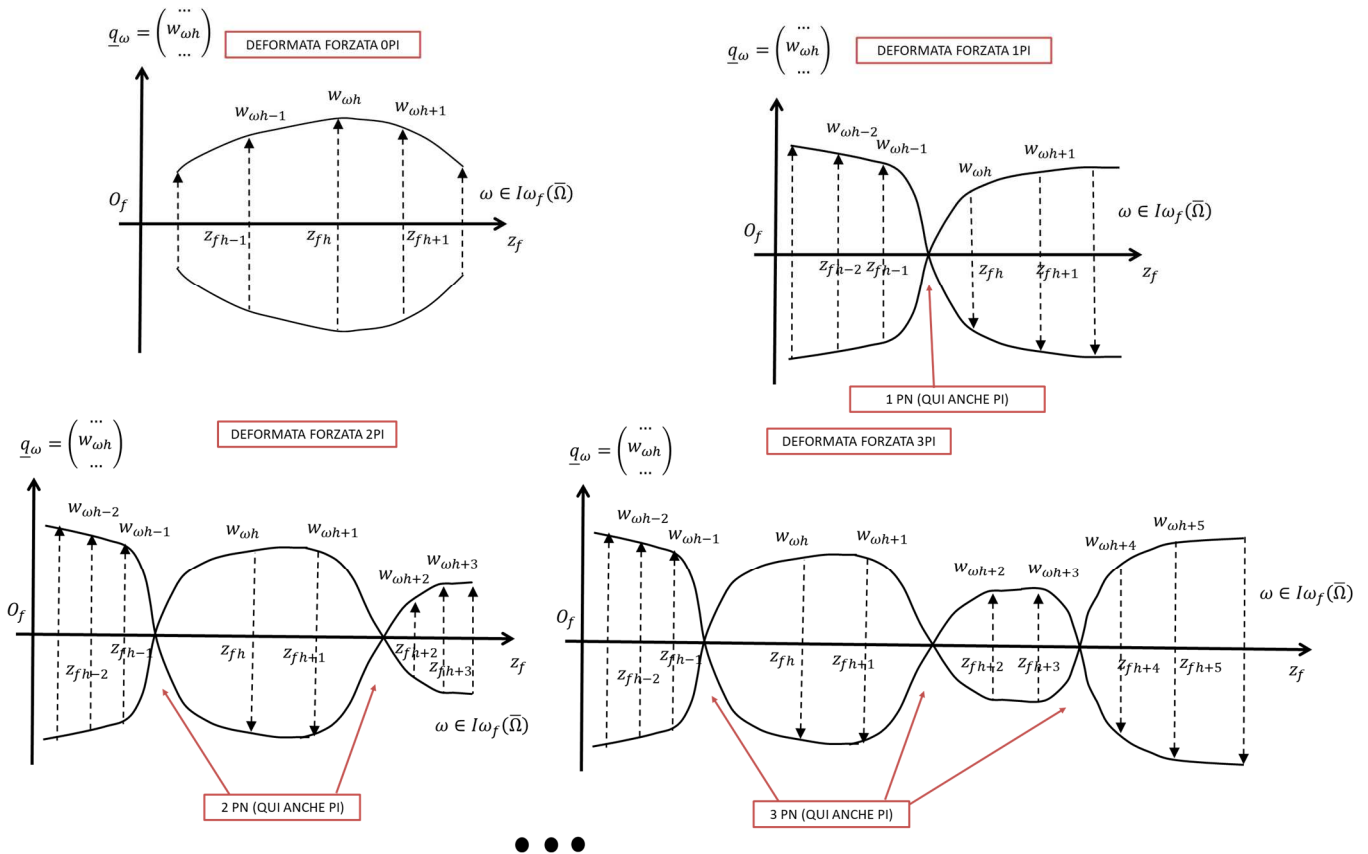


Figura 156 Il concetto di coerenza modale (si vedano anche le figure analoghe dei capitoli 4 e 10)

Naturalmente non è detto che, se ci sono dei punti nodali PN, il moto necessariamente si invertirà in essi e che, di conseguenza, il punto in questione sia per forza un punto di inversione PI. Possono benissimo esistere punti nodali PN in cui il moto non si inverte e che quindi non sono punti di inversione PI. I punti di inversione PI sono quindi un sottoinsieme dei punti nodali PN (il numero dei PI è minore o uguale di quello dei PN).



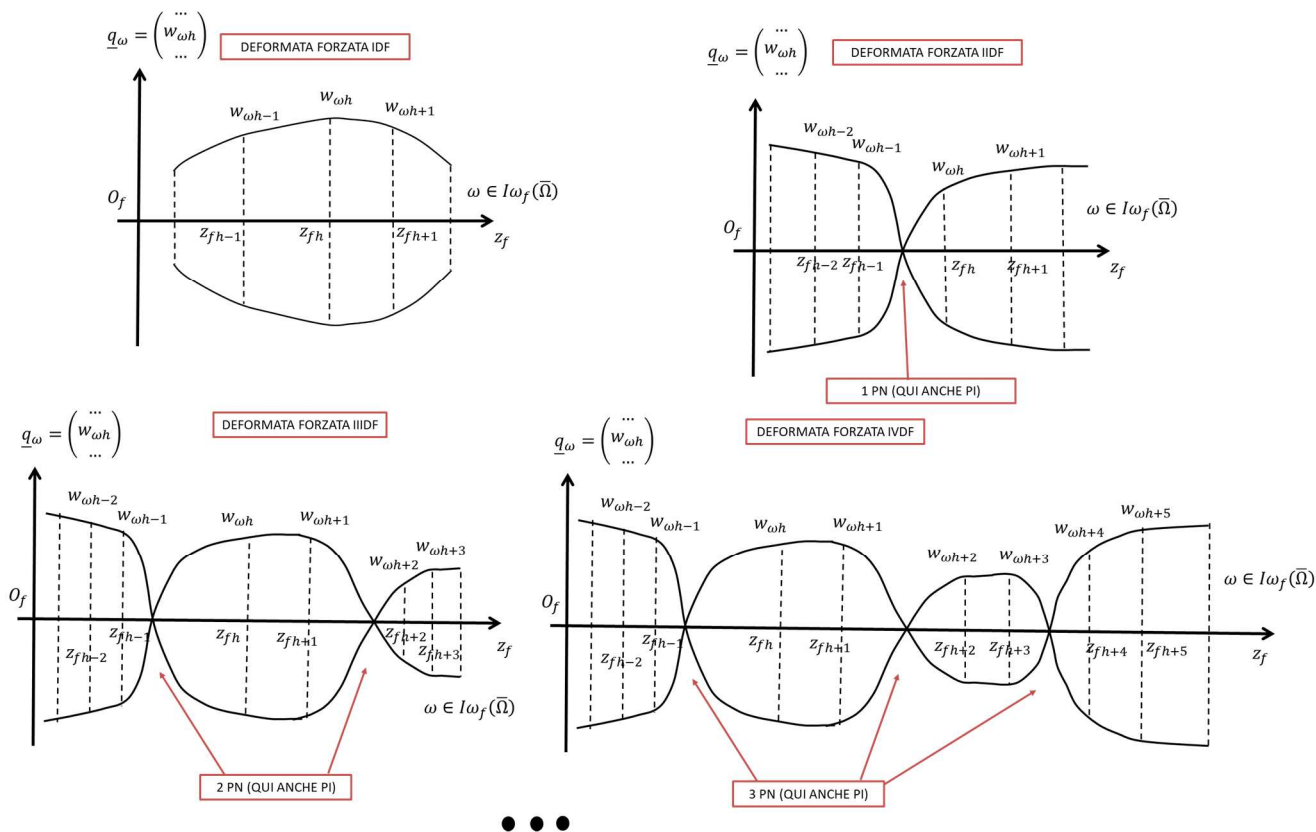


Figura 157 Deformate forzate per rotore elastico con forzante armonica periodica (si vedano anche le figure analoghe dei capitoli 4 e 10)

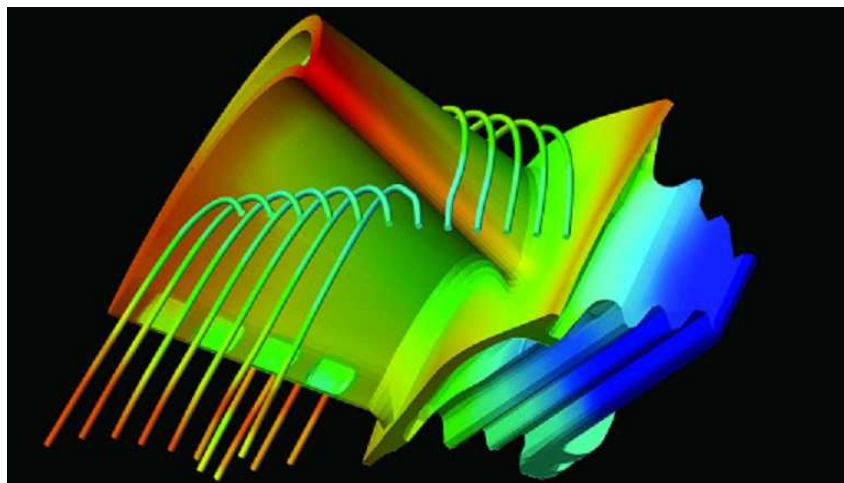
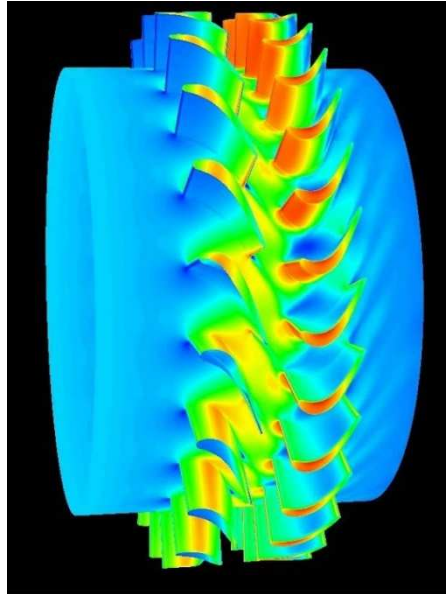
Come detto in precedenza, la traslazione della  $h$ -esima sezione  $z_{h\omega}(t, \Omega)$  avviene chiaramente alla pulsazione della forzante  $\omega \in I_{\omega_f}(\bar{\Omega})$  (la stessa per ogni nodo  $\underline{G}_h$ !). Ciò è coerente col fatto che la pulsazione associata alla deformata forzata in questione è sempre una e una sola, ovvero  $\omega \in I_{\omega_f}(\bar{\Omega})$ .

Le principali deformate forzate sono rappresentate in Fig. 157 e, nelle caratteristiche (OPI, 1PI, 2PI, 3PI) e nella forma (IDF, IIDF, IIIDF, etc.), ricordano i modi di vibrare IE, IIE, IIIE, IVE, etc. descritti nel paragrafo 8.7. Tuttavia le deformate forzate riguardano il moto forzato e non il moto libero, e non vanno dunque confuse con i modi di vibrare e le deformate modali!

ELENCO RIASSUNTIVO DELLE VARIE DEFORMATE FORZATE:

- 1) FORMA: IDF  
CARATTERISTICA: OPI
- 2) FORMA: IIDF  
CARETTERISTICA: OPI, 1PI
- 3) FORMA: IIIDF  
CARETTERISTICA: OPI, 1PI, 2PI
- 4) FORMA: IVDF  
CARETTERISTICA: OPI, 1PI, 2PI, 3PI
- ... ..

## 9. MODELLAZIONE DI COMPONENTI COMPLESSI 3D E INTERAZIONE FLUIDO-STRUTTURA



**Modellazione termo-elasto-fluidodinamica di componenti complessi 3D e dell'interazione fluido-struttura (palettature, camera di combustione, cuscini a fluido, etc.)**

In questo capitolo tratteremo a livello basilare la modellazione di componenti complessi 3D per i quali naturalmente non valgono le ipotesi fatte nei capitoli precedenti. Particolare attenzione sarà data al caso in cui un dominio solido interagisce con un dominio fluido (interazione fluido-struttura) (Fig. 158), una situazione molto comune in turbomacchine e motori (si pensi a palettature / giranti, alle camere di combustione e a elementi di forza quali cuscini a fluido e tenute).

Gli strumenti sviluppati in questo capitolo saranno usati nel capitolo successivo per studiare più nel dettaglio la modellazione di rotor elastici complessi 3D e delle forzanti di fluido derivanti da palettature e giranti.

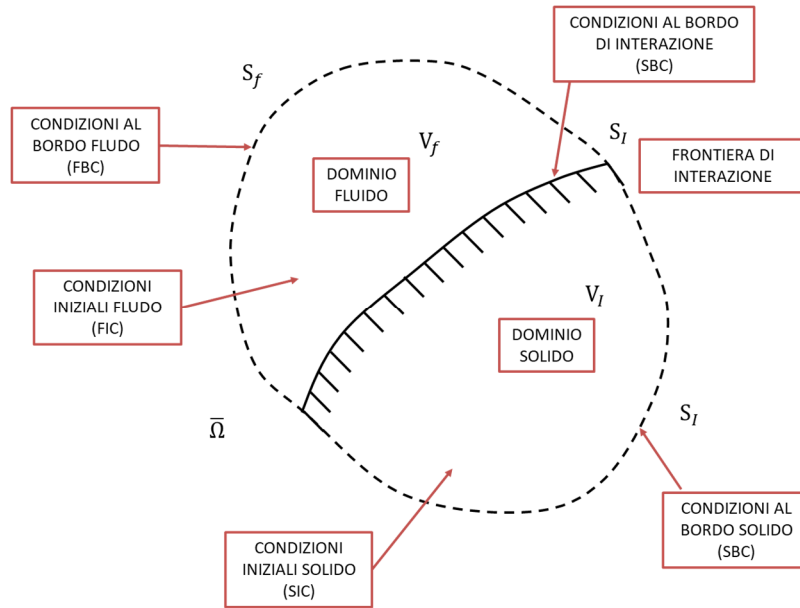


Figura 158 Interazione tra dominio solido e dominio fluido e relative condizioni iniziali e al bordo

## 9.1 Teorema del trasporto

Introduciamo adesso uno dei teoremi più importanti di tutta l'ingegneria, dal quale potremo derivare facilmente le varie leggi di conservazione, ovvero il teorema del trasporto (o teorema di Reynolds). Si faccia riferimento alla Fig. 159 per la notazione.

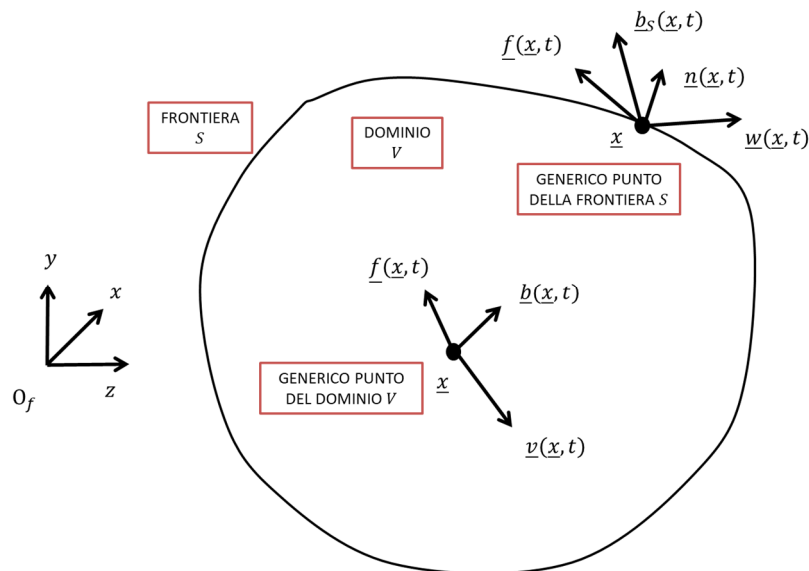


Figura 159 Generico volume di controllo

Si consideri il volume di controllo  $V$  di frontiera  $S = \partial V$ , volume non troppo piccolo in modo che possano essere trascurati a livello locale gli effetti atomici / molecolare e in modo che siano valide le ipotesi base del continuo di Cauchy. Supponiamo che nel generico punto  $\underline{x}$  il mezzo abbia velocità  $\underline{v}(\underline{x}, t)$  e che la frontiera (di normale  $\underline{n}(\underline{x}, t)$ )

si muova con velocità  $\underline{w}(\underline{x}, t)$ . Supponiamo inoltre di associare a ogni punto del mezzo  $\underline{x}$  una generica proprietà  $\underline{f}(\underline{x}, t)$ , chiamata anche “effetto” (ad esempio, come vedremo, la densità, la densità di quantità di moto, la densità di energia, etc.). Chiameremo invece “causa” di volume  $\underline{b}(\underline{x}, t)$  e di superficie  $\underline{b}_S(\underline{x}, t)$  quella generica azione che produce una variazione di tale effetto (creazione/distruzione di massa, densità di forza, densità di potenza meccanica o termica, etc.). Si noti che  $\underline{f}(\underline{x}, t)$  può essere uno scalare, un vettore, una matrice, etc., così come ovviamente  $\underline{b}(\underline{x}, t)$ ,  $\underline{b}_S(\underline{x}, t)$ .

Fatte queste premesse, il teorema del trasporto afferma che la variazione complessiva della quantità  $\underline{f}(\underline{x}, t)$  nel volume di controllo è uguale alla variazione di tale quantità all’interno di tale volume più il flusso di tale quantità sulla superficie (ovvero quello che entra e quello che esce). Si ha dunque:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \underline{f}(\underline{x}, t) dV = \int_{V(t)} \frac{\partial \underline{f}}{\partial t}(\underline{x}, t) dV + \int_{S(t)} \underline{f}(\underline{x}, t) (\underline{w}^T \underline{n}) dS. \quad (9.1.1)$$

Tale risultato può essere dimostrato, ad esempio, come segue. Consideriamo l’evoluzione del dominio  $V(t)$  in un intervallo di tempo “sufficientemente piccolo”  $\Delta t$ :  $V(t + \Delta t)$ . Dalla definizione di derivata si ha:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \underline{f}(\underline{x}, t) dV = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\int_{V(t+\Delta t)} \underline{f}(\underline{x}, t+\Delta t) dV - \int_{V(t)} \underline{f}(\underline{x}, t) dV}{\Delta t} \right). \quad (9.1.2)$$

Chiamiamo  $V_1(t)$ ,  $V_2(t)$  i volumetti indicati in Fig. 160.

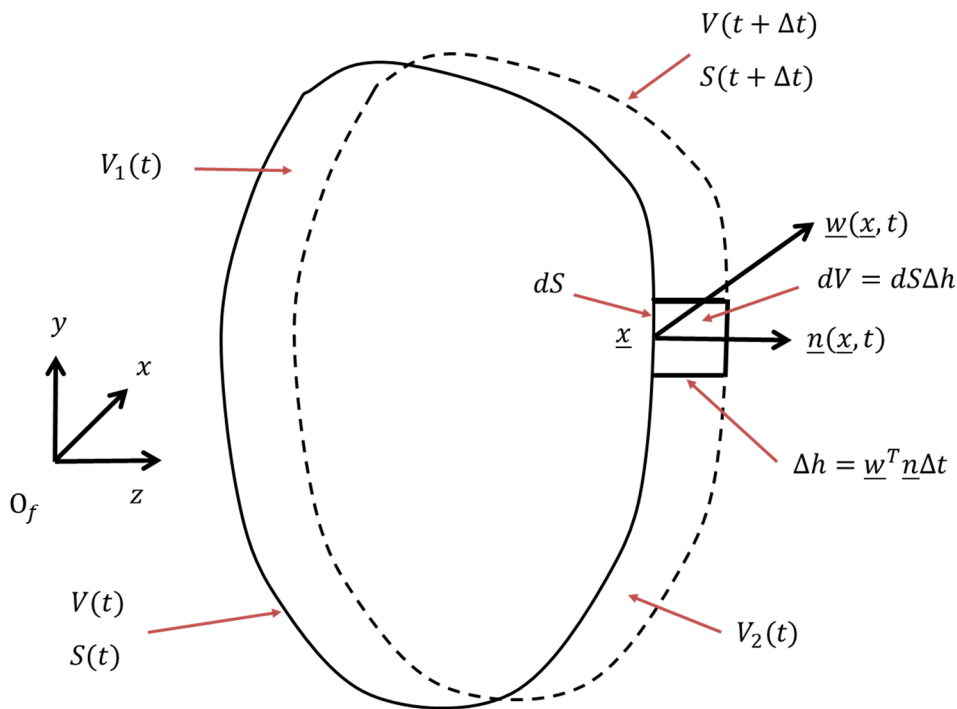


Figura 160 Spostamento del volume di controllo

Si ha perciò:

$$\int_{V(t+\Delta t)} \underline{f}(\underline{x}, t + \Delta t) dV = \int_{V(t)} \underline{f}(\underline{x}, t + \Delta t) dV + \int_{V_2(t)} \underline{f}(\underline{x}, t + \Delta t) dV - \int_{V_1(t)} \underline{f}(\underline{x}, t + \Delta t) dV \quad (9.1.3)$$

e la (9.1.1) diviene dunque

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \underline{f}(\underline{x}, t) dV = \\ & = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\int_{V(t)} \underline{f}(\underline{x}, t + \Delta t) dV - \int_{V(t)} \underline{f}(\underline{x}, t) dV}{\Delta t} \right) + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\int_{V_2(t)} \underline{f}(\underline{x}, t + \Delta t) dV - \int_{V_1(t)} \underline{f}(\underline{x}, t + \Delta t) dV}{\Delta t} \right). \end{aligned} \quad (9.1.4)$$

A questo punto nel primo termine posso portare il limite dentro gli integrali (sto integrando sul solito dominio!) e ottengo

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\int_{V(t)} \underline{f}(\underline{x}, t + \Delta t) dV - \int_{V(t)} \underline{f}(\underline{x}, t) dV}{\Delta t} \right) = \int_{V(t)} \frac{\partial \underline{f}}{\partial t}(\underline{x}, t) dV. \quad (9.1.5)$$

Nel secondo termine si nota che invece che, se  $\Delta t$  è sufficientemente piccolo, il volume infinitesimo  $dV$  può essere scritto come

$$dV = \Delta h dS = \underline{w}^T \underline{n} \Delta t dS. \quad (9.1.6)$$

Introducendo la (9.1.6) nella (9.1.4), si ha perciò, nell'ipotesi che  $\underline{f}(\underline{x}, t + \Delta t)$  non vari lungo lo spessore  $\Delta h$  in quanto sufficiente piccolo:

$$\int_{V_2(t)} \underline{f}(\underline{x}, t + \Delta t) dV - \int_{V_1(t)} \underline{f}(\underline{x}, t + \Delta t) dV = \int_{S(t)} \underline{f}(\underline{x}, t + \Delta t) \Delta h dS = \int_{S(t)} \underline{f}(\underline{x}, t + \Delta t) \underline{w}^T \underline{n} \Delta t dS. \quad (9.1.7)$$

e di conseguenza:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\int_{V_2(t)} \underline{f}(\underline{x}, t + \Delta t) dV - \int_{V_1(t)} \underline{f}(\underline{x}, t + \Delta t) dV}{\Delta t} \right) = \int_{S(t)} \underline{f}(\underline{x}, t) (\underline{w}^T \underline{n}) dS. \quad (9.1.8)$$

Abbiamo così ottenuto il teorema del trasporto e, nel caso in cui il volume di controllo si muova seguendo il moto del mezzo  $\underline{w} = \underline{v}$ , abbiamo

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \underline{f}(\underline{x}, t) dV = \int_{V(t)} \frac{\partial \underline{f}}{\partial t}(\underline{x}, t) dV + \int_{S(t)} \underline{f}(\underline{x}, t) (\underline{v}^T \underline{n}) dS. \quad (9.1.9)$$

## 9.2 Equazione di Cauchy e leggi di conservazione

A partire dal teorema del trasporto è facilmente ottenibile l'equazione di Cauchy, l'equazione fondamentale della meccanica del continuo. Estendendo il secondo Principio della Dinamica ai mezzi continui, si ipotizza che la variazione complessiva degli "effetti" nel volume di controllo sia uguale alla somma di tutte le cause presenti nello stesso volume (sia all'interno del dominio che sulla sua superficie):

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \underline{f} dV = \int_{V(t)} \underline{b} dV + \int_{S(t)} \underline{b}_S dS = \int_{V(t)} \underline{b} dV + \int_{S(t)} H \underline{n} dS \quad (9.2.1)$$

Dove, in accordo con la teoria di Cauchy, abbiamo espresso le "cause" di superficie come  $\underline{b}_S(\underline{x}, t) = H \underline{n}$ . Nel caso in cui  $\underline{b}_S$  sia uno scalare, allora  $H$  sarà un vettore  $\underline{h}^T$ .

Dalla (9.1.9) e dalla (9.2.1) si ricava

$$\int_{V(t)} \underline{b} dV + \int_{S(t)} H \underline{n} dS = \int_{V(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int_{S(t)} \underline{f} (\underline{v}^T \underline{n}) dS \quad (9.2.2)$$

da cui, applicando il teorema della divergenza ai secondi termini di ciascun membro, si ha

$$\int_{V(t)} \underline{b} dV + \int_{V(t)} \text{div}(H) dV = \int_{V(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int_{V(t)} \text{div}(\underline{f} \underline{v}^T) dV. \quad (9.2.3)$$

Si ricordi che, data una qualunque matrice  $A(\underline{x}, t)$ , si ha

$$A(\underline{x}, t) = \begin{bmatrix} \underline{a}_1^T \\ \underline{a}_2^T \\ \underline{a}_3^T \end{bmatrix}, \quad \text{div}(A(\underline{x}, t)) = \begin{bmatrix} \text{div} \underline{a}_1^T \\ \text{div} \underline{a}_2^T \\ \text{div} \underline{a}_3^T \end{bmatrix}. \quad (9.2.4)$$

A questo punto, ricordando che per il Lemma Fondamentale del Calcolo delle Variazioni si ha (per una generica funzione  $\underline{a}(\underline{x}, t)$ ):

$$\int_{V(t)} \underline{a}(\underline{x}, t) dV = \underline{0} \quad \forall V \Rightarrow \underline{a}(\underline{x}, t) = \underline{0}, \quad (9.2.5)$$

dalla (9.2.3) otteniamo immediatamente l'equazione di Cauchy:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}(\underline{f} \underline{v}^T) = \underline{b} + \text{div}(H). \quad (9.2.6)$$

L'applicazione sistematica dell'equazione di Cauchy alle varie coppie di grandezze "causa" – "effetto" ci permetterà di ricavare tutte le leggi di conservazione dell'ingegneria.

## 9.3 Conservazione della massa

La prima legge di conservazione riguarda la massa (equazione di continuità). In questo caso l'"effetto"  $\underline{f}$  è la densità  $\rho$  mentre si suppone che non ci siano "cause" (non ci sono fenomeni che creano e distruggono massa):  $\underline{b} = \underline{0}$  e  $H = 0$ . La (9.2.6) produce dunque:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{v}) = 0. \quad (9.3.1)$$

Nel seguito useremo l'equazione di continuità per i fluidi ma non per i solidi.

## 9.4 Conservazione della quantità di moto

### CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO NEI FLUIDI

La seconda legge di conservazione riguarda la quantità di moto. In questo caso l'"effetto"  $\underline{f}$  è la densità di quantità di moto  $\rho \underline{v}$  mentre le "cause" di volume sono le azioni esterne  $\underline{b} = \rho \underline{f}_e$  e le cause di superficie sono gli stress nel fluido  $H = \sigma = -p I_{3 \times 3} + \mu (J_v + J_v^T) + \lambda \text{div} \underline{v} I_{3 \times 3}$  (per un fluido Newtoniano). La (9.2.6) produce dunque:

$$\frac{\partial(\rho \underline{v})}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{v} \underline{v}^T) = \rho \underline{f}_e + \text{div}(\underline{\sigma}). \quad (9.4.1)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + J_v \underline{v} \right) = \rho \underline{f}_e + \text{div}(\underline{\sigma}). \quad (9.4.2)$$

La (9.4.2) è più generale delle equazioni di Navier – Stokes perché in generale le costanti di Lamè del fluido possono dipendere da temperature e pressione  $\mu(p, T), \lambda(p, T)$  (si pensi agli oli!). Se tali parametri sono ipotizzati costanti, svolgendo i calcoli e riordinando i termini, si ottengono come detto le equazioni di Navier – Stokes:

$$\rho \left( \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + J_v \underline{v} \right) = -\nabla p + \mu \Delta \underline{v} + (\mu + \lambda) \nabla(\text{div } \underline{v}) + \rho \underline{f}_e. \quad (9.4.3)$$

## CONSERVAZIONE DELLA QUANTITA' DI MOTO NEI SOLIDI

Per quanto riguarda i solidi, se supponiamo che gli spostamenti elastici  $\underline{u}$  e le loro derivate siano piccoli (studiamo il problema ai “piccoli spostamenti”) e se supponiamo che l’elasticità sia lineare (materiali lineari), avremo che

$$\underline{v} = \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} \quad (9.4.4)$$

e quindi, se trascuriamo i termini di ordine superiore al primo, dalla (9.4.2), abbiamo (scompare il termini non lineare convettivo!):

$$\rho \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} = \rho \underline{f}_e + \text{div}(\underline{\sigma}). \quad (9.4.5)$$

Se adottiamo dunque dei modelli termo-elastici lineari per il materiale avremo dunque:

$$\underline{\sigma} = \bar{\bar{C}}(T) \underline{\varepsilon} + \bar{\bar{D}}(T) \dot{\underline{\varepsilon}} + \bar{\bar{C}}_T(T) \underline{\varepsilon}_T (T - T_0), \quad \underline{\varepsilon} = \frac{J_u + J_u}{2} \quad (9.4.6)$$

in cui  $\bar{\bar{C}}$  è il tensore elastico di Hooke (quarto ordine),  $\bar{\bar{D}}$  è il tensore viscoso (modello di smorzamento del materiale linearizzato, il più semplice possibile) e  $\bar{\bar{C}}_T$  è il tensore che lega gli strain termici  $\underline{\varepsilon}_T$  (dovuti alla dilatazione termica e funzioni quindi della temperatura  $T$ ) agli stress termici. Si ricorda infine che, per un materiale isotropo:

$$\underline{\sigma} = \lambda(\text{div } \underline{u}) I_{3 \times 3} + 2\mu \underline{\varepsilon}, \quad \underline{\varepsilon} = \frac{J_u + J_u}{2}, \quad (9.4.7)$$

dove come sempre  $\lambda(T)$  e  $\mu(T)$  sono le costanti di Lamè del materiale. Per materiali isotropi, se non si considerano gli effetti viscosi e termici, e se tutti i parametri del problema sono costanti (in particolare non dipendono da  $T$ ), allora le equazioni (9.4.5), producono le equazioni di Navier (da non confondere con quelle di Navier – Stokes!):

$$\rho \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} = \mu \Delta \underline{u} + (\mu + \lambda) \nabla(\text{div } \underline{u}) + \rho \underline{f}_e. \quad (9.4.8)$$

## 9.5 Conservazione dell'energia

### CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA NEI FLUIDI

La terza legge di conservazione riguarda infine l'energia di moto. In questo caso l'"effetto"  $\underline{f}$  è la densità di energia  $e = \frac{1}{2}\rho\|\underline{v}\|^2 + \rho u(p, T)$  (dove l'equazione per l'energia interna specifica  $u(p, T)$  è supposta nota) mentre le "cause" di volume sono le sorgenti di potenza specifica meccanica  $\underline{v}^T \cdot \rho \underline{f}_e$  (la potenza associata alle azioni esterne), potenza associata alle dissipazioni viscosi nel fluido  $\underline{v}^T \text{div}(\sigma)$  (con  $\sigma = -pI_{3x3} + \mu(J_v + J_v^T) + \lambda \text{div} \underline{v} I_{3x3}$ ) e le sorgenti di potenza specifica termica  $\underline{f}_q$  (ad esempio la presenza di fonti di calore esterne). Le "cause" di superficie sono invece la potenza termica specifica associata al vettore flusso termico  $\underline{h}^T = -\underline{q}^T$ . La (9.2.6) produce dunque:

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \text{div} (e\underline{v}) = \underline{v}^T \cdot \rho \underline{f}_e + \underline{v}^T \text{div}(\sigma) + \underline{f}_q - \text{div} \underline{q}. \quad (9.5.1)$$

### CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA NEI SOLIDI

Nel caso dei solidi è possibile usare nuovamente la (9.5.1)

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \text{div} (e\underline{v}) = \underline{v}^T \cdot \rho \underline{f}_e + \underline{v}^T \text{div}(\sigma) + \underline{f}_q - \text{div} \underline{q} \quad (9.5.2)$$

ricordando che, come nel caso della quantità di moto:

$$\underline{v} = \frac{\partial \underline{u}}{\partial t}, \quad e = \frac{1}{2}\rho\|\underline{v}\|^2 + \rho u(T), \quad \sigma = \bar{C}(T)\varepsilon + \bar{D}(T)\dot{\varepsilon} + \bar{C}_T(T)\varepsilon_T(T - T_0), \quad \varepsilon = \frac{J_u + J_u}{2}. \quad (9.5.2)$$

dove  $\varepsilon : \sigma = \sum_{h,l} \varepsilon_{hl} \sigma_{hl}$ . In prima approssimazione, è lecito trascurare nella (9.5.2) i termini di ordine superiore al secondo. Anche per i solidi naturalmente l'equazione per l'energia interna specifica  $u(T)$  è supposta nota.

### BILANCIO EQUAZIONI - INCOGNITE

Prima di procedere oltre è utile fare un bilancio tra equazioni ed incognite sia per i fluidi che per i solidi. Per quanto riguarda i fluidi, ricordando che per chiudere il problema è necessario conoscere l'equazione per l'energia interna specifica, l'equazione di stato del fluido e il modello di trasmissione del calore

$$u = u(p, T), \quad f(\rho, p, T) = 0, \quad \underline{q} = \underline{q}(p, T, \nabla T), \quad (9.5.3)$$

il bilancio equazioni – incognite è riportato in Tab. 3.



	NUMERO DI EQUAZIONI	NUMERO DI INCOGNITE
CONTINUITA'	1 equazione	Pressione - $p$ -> 1
EQ. DELLA QDM	3 equazioni	Velocità - $v$ -> 3
EQ. DELL'ENERGIA	1 equazione	Densità - $\rho$ -> 1
EQ. PER EN. INT.	1 equazione	Temperatura - $T$ -> 1
EQ. DI STATO	1 equazione	Energia interna - $u$ -> 1
EQ. DEL CALORE	3 equazioni	Flusso termico - $q$ -> 3
Totale	10 equazioni	10 incognite

**Tabella 3 Bilancio equazioni – incognite per un fluido**

Per quanto riguarda invece i solidi, ricordando che per chiudere il problema è necessario nuovamente conoscere l'equazione per l'energia interna specifica, l'equazione di stato del solido e il modello di trasmissione del calore

$$u = u(T), \quad f(\rho, T) = 0, \quad \underline{q} = \underline{q}(T, \underline{\nabla}T), \quad (9.5.3)$$

il bilancio equazioni – incognite è riportato in Tab. 4.

	NUMERO DI EQUAZIONI	NUMERO DI INCOGNITE
EQ. DELLA QDM	3 equazioni	Spostamenti elastici - $u$ -> 3
EQ. DELL'ENERGIA	1 equazione	Densità - $\rho$ -> 1
EQ. PER EN. INT.	1 equazione	Temperatura - $T$ -> 1
EQ. DI STATO	1 equazione	Energia interna - $u$ -> 1
EQ. DEL CALORE	3 equazioni	Flusso termico - $q$ -> 3
Totale	9 equazioni	9 incognite

**Tabella 4 Bilancio equazioni – incognite per un solido**

## 9.6 Condizioni iniziali, condizioni al bordo e condizioni di accoppiamento

Per chiudere in modo corretto il modello di un sistema caratterizzato da un dominio fluido  $V_f$  e da un dominio solido  $V_s$  (vedi Fig. 161) è necessario porre particolare attenzione alle condizioni iniziali e al bordo da imporre su tali domini e, soprattutto, alle condizioni al bordo da imporre sulla superficie di interazione tra i due domini.

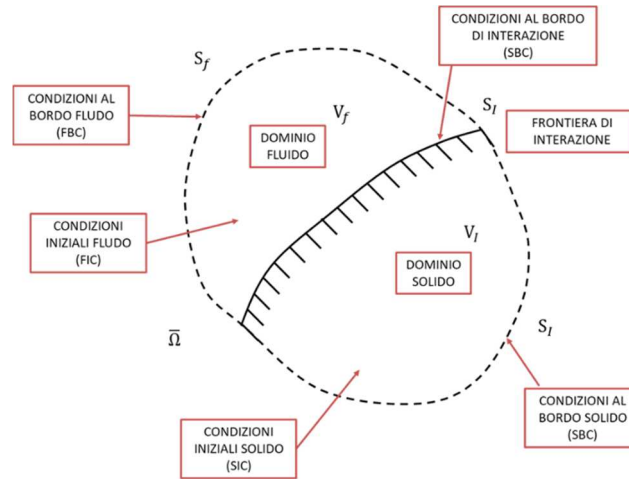


Figura 161 Interazione tra dominio solido e dominio fluido e relative condizioni iniziali e al bordo

Una possibile scelta di condizioni iniziali / al bordo (tra le tante possibili!) è la seguente:

- 1) DOMINIO FLUIDO:  $V_f$

Condizione al bordo (FBC)

$$\underline{v} = \underline{v}_f, \quad p = p_f, \quad T = T_f, \quad \underline{q} = \underline{q}_f \quad \text{su opportune zone di } S_f. \quad (9.6.1)$$

Condizione iniziali (FIC):

$$\underline{v} = \underline{v}_{0f}, \quad p = p_{0f}, \quad T = T_{0f}, \quad \underline{q} = \underline{q}_{0f}, \quad \text{per } t = t_0, \quad \text{su } V_f. \quad (9.6.2)$$

- 2) DOMINIO SOLIDO:  $V_s$

Condizione al bordo (SBC)

$$\underline{u} = \underline{u}_s, \quad \sigma = \sigma_s, \quad T = T_s, \quad \underline{q} = \underline{q}_s \quad \text{su opportune zone di } S_s. \quad (9.6.3)$$

Condizione iniziali (SIC):

$$\underline{u} = \underline{u}_{0s}, \quad \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} = \underline{v}_{0s}, \quad T = T_{0s}, \quad \underline{q} = \underline{q}_{0s}, \quad \text{per } t = t_{0s}, \quad \text{su } V_s. \quad (9.6.4)$$

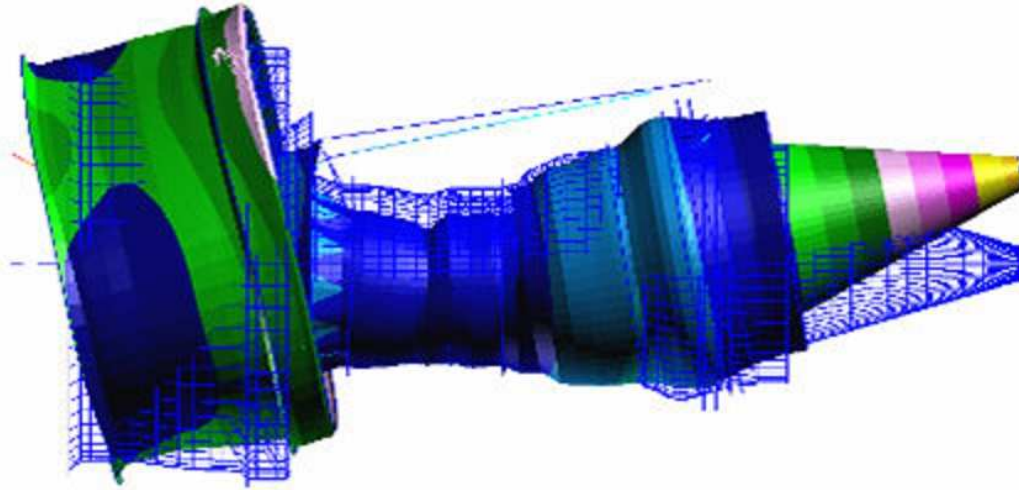
- 3) SUPERFICIE DI INTERAZIONE:  $S_I$

Condizione al bordo (IBC)

$$\underline{v}^f = \frac{\partial \underline{u}^f}{\partial t}, \quad \sigma^f \underline{n} = \sigma^s \underline{n}, \quad T^f = T^s, \quad \underline{q}^f = \underline{q}^s \quad \text{su opportune zone di } S_I. \quad (9.6.5)$$

Le condizioni al bordo sulla superficie di interazione  $S_I$  mirano a garantire la continuità delle velocità, degli stress, delle temperature e del flusso termico.

## 10. MODELLAZIONE DI ROTORI ELASTICI COMPLESSI 3D E DELLE FORZANTI DI FLUIDO



Tipico schema di rotore elastico 1D per analisi assiale

In questo capitolo sfrutteremo gli strumenti sviluppati nella precedente sezione per studiare più nel dettaglio la modellazione di rotori elastici complessi 3D e delle forzanti di fluido derivanti da palettature e giranti.

### 10.1 Equazioni di moto (approccio Lagrangiano)

Per modellare rotori elastici complessi 3D faremo uso in questo capitolo della teoria dell'elasticità classica 3D (teoria localmente a 3DOF, ovvero le 3 traslazioni nello spazio del generico punto del dominio). Tale approccio si rende necessario quando non è più possibile disaccoppiare tra loro le dinamiche flessionale (4DOF), torsionale (1DOF) e assiale (1DOF) della trave e quando non è neanche possibile usare una teoria della trave 1D a 6 DOF (o, come spesso accade, non è più conveniente in termini di rapporto accuratezza efficienza).

Introduciamo intanto il problema e fissiamo la nomenclatura nell'ottica di sviluppare un modello FEM di macchina rotante 3D (a 3 DOF per nodo e a elementi tetraedrici con 4 nodi per elemento) per studiare la dinamica del rotore complesso. Naturalmente la tipologia di elemento è stata scelta per semplicità a titolo di esempio per illustrare il ragionamento. Solitamente per componenti assialsimmetrici come l'albero è conveniente usare elementi esaedrici che sfruttino tale simmetria. Per elementi geometricamente complessi come palettature, giranti e cuscini è spesso invece conveniente usare elementi tetraedrici (si veda la Fig. 162 e la bibliografia).

Supponiamo come sempre che la mesh sia nota (posizione dei nodi, caratteristiche degli elementi e funzioni di forma note). Non entreremo in seguito in questi argomenti che supporremo noti. Si consideri quindi la situazione descritta in Fig. 162.

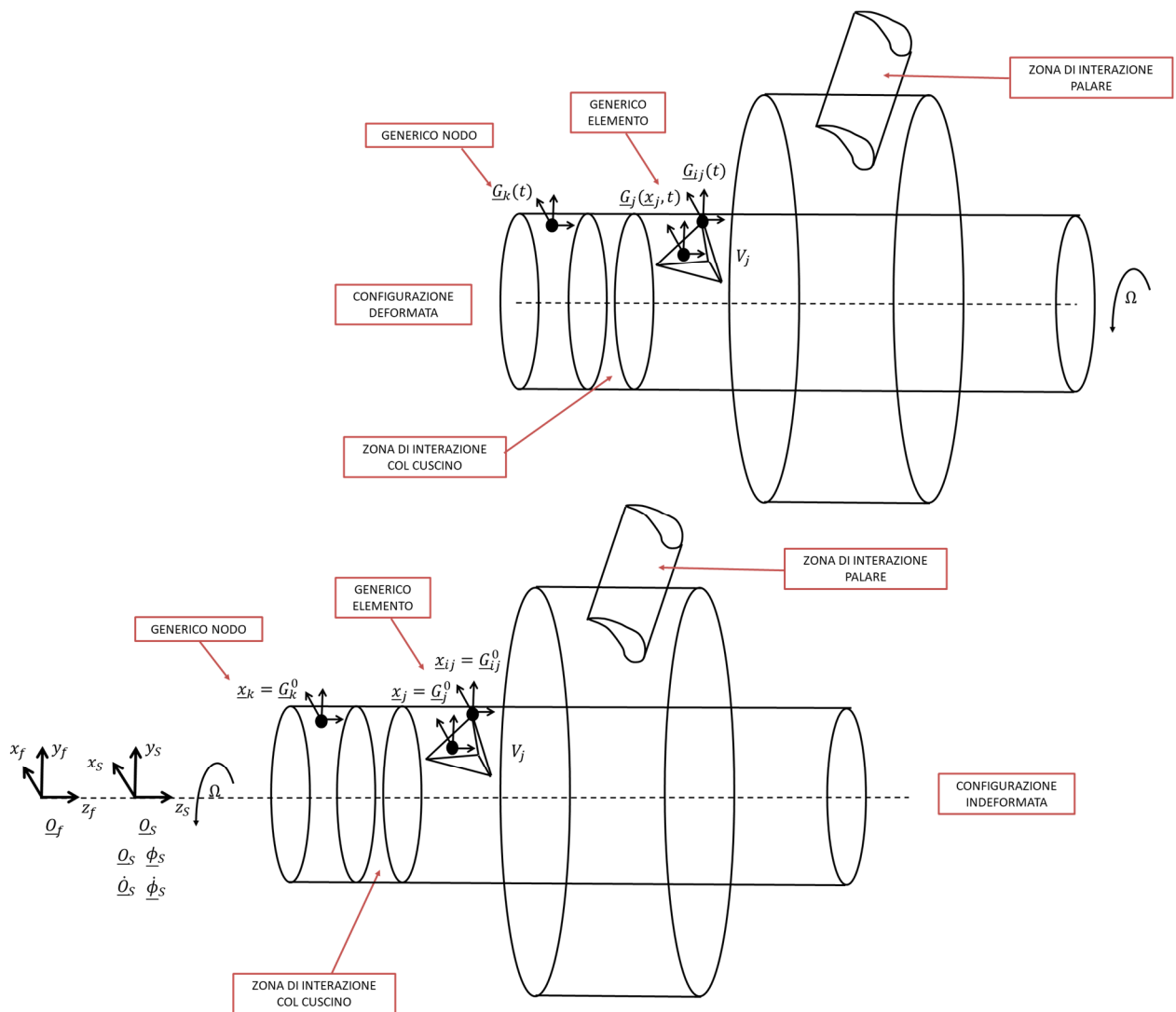
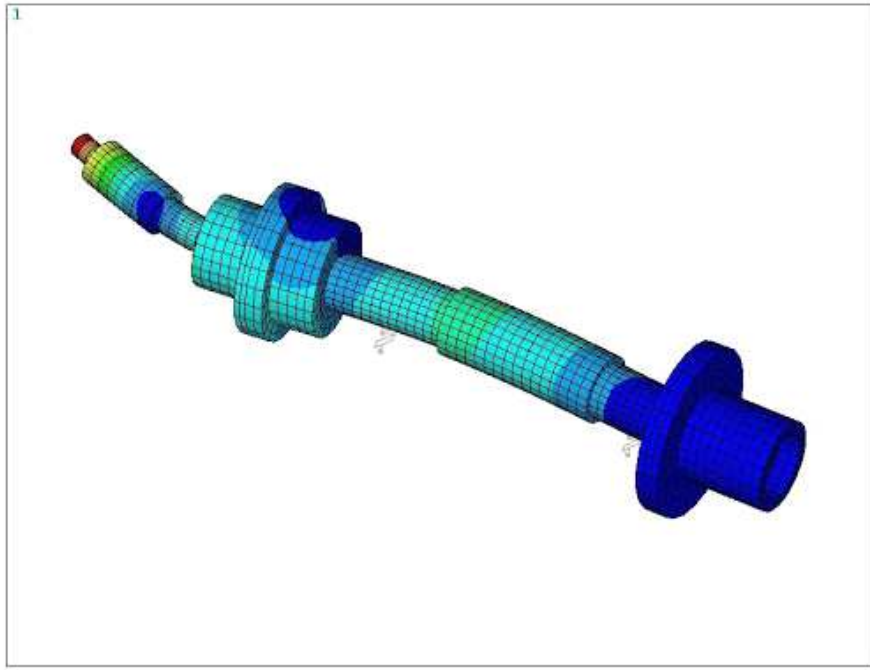


Figura 162 Modello FEM di rotore elastico 3D con elementi tetraedrici a 4 nodi per elemento e 3DOF per nodo

Lo spostamento complessivo del generico nodo  $\underline{G}_k$  della configurazione deformata può essere pensato come la somma dello spostamento rigido del corrispondente nodo nella configurazione indeformata  $\underline{G}_{k0}$  e dello spostamento elastico associato a tale nodo  $\underline{G}_k - \underline{G}_{k0}$ .

Per quanto riguarda lo spostamento rigido, supponiamoper adesso che la terna solidale alla configurazioni indeformata (che assorbe lo spostamento rigido) abbia atto di moto rispetto alla terna fissa:

$$\underline{O}_s, \quad \underline{\dot{O}}_s, \quad \underline{\phi}_s, \quad \underline{\dot{\phi}}_s, \tag{10.1.1}$$

$$\underline{O}_s = \begin{pmatrix} x_{os} \\ y_{os} \\ z_{os} \end{pmatrix}, \quad \underline{\dot{O}}_s = \begin{pmatrix} \dot{x}_{os} \\ \dot{y}_{os} \\ \dot{z}_{os} \end{pmatrix}, \quad \underline{\phi}_s = \begin{pmatrix} \theta_{os} \\ \psi_{os} \\ \varphi_{os} \end{pmatrix}, \quad \underline{\dot{\phi}}_s = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_{os} \\ \dot{\psi}_{os} \\ \dot{\varphi}_{os} \end{pmatrix}. \tag{10.1.2}$$

Si ha perciò:

$$\underline{G}_{k0f} = \underline{O}_{sf} + R(\underline{\phi}_s) \underline{G}_{k0s}, \quad \dot{\underline{G}}_{k0f} = \underline{\dot{O}}_{sf} + \underline{\omega}_f(\underline{\phi}_s, \underline{\dot{\phi}}_s) \times (\underline{G}_{k0f} - \underline{O}_{sf}) = \underline{\dot{O}}_{sf} + \underline{\omega}_f(\underline{\phi}_s, \underline{\dot{\phi}}_s) \times R(\underline{\phi}_s) \underline{G}_{k0s} \tag{10.1.3}$$

dove chiaramente  $\underline{G}_{k0s} = \underline{G}_{k0} = \underline{x}_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix}$  è noto essendo noti i nodi della mesh.

Per quanto riguarda invece lo spostamento elastico si introducono le grandezze nodali legate al nodo in questione (i tre spostamenti elastici spaziali per questo modello FEM a 3DOF per nodo) espresse nella corrispondente terna nodale in configurazione indeformata centrata in  $\underline{G}_{k0}$  (per semplicità prenderemo tali terne sempre parallele alla terna solidale associata alla configurazione indeformata e centrata in  $\underline{O}_s$ ):

$$(\underline{G}_k - \underline{G}_{k0})_{G_{k0}} = (\underline{G}_k - \underline{G}_{k0})_S = \underline{G}_k(t) = \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{pmatrix}, \quad \dot{\underline{G}}_k = \dot{\underline{G}}_k(t) = \begin{pmatrix} \dot{u}_k \\ \dot{v}_k \\ \dot{w}_k \end{pmatrix}. \quad k = 1 \dots NN \tag{10.1.4}$$

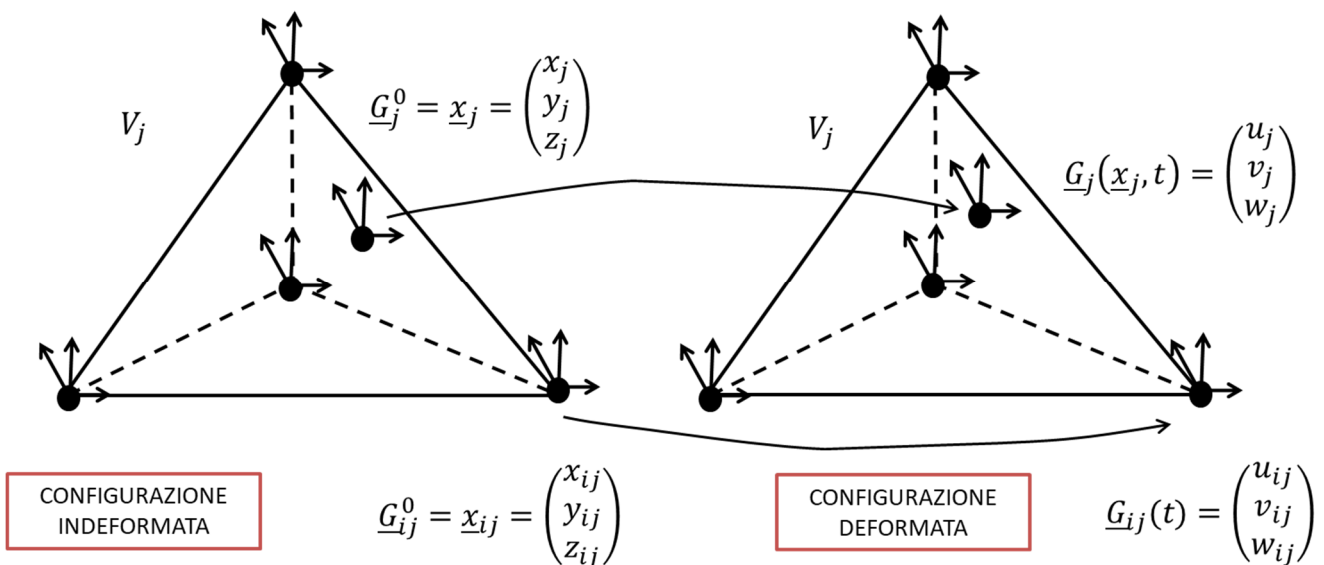


Figura 163 Schema FEM 3D con elementi tetraedrici a 4 nodi per elemento e 3 DOF per nodo

Si introducono poi, sempre per quanto riguarda lo spostamento elastico e sempre espresse nella corrispondente terna in configurazione indeformata centrata in  $\underline{G}_{ij0}$  (vedi le Fig. 162 e 163), le grandezze nodali legate ai nodi del generico elemento (i tre spostamenti nello spazio essendo una teoria fisica localmente a 3DOF). Dal momento che stiamo considerando un elemento tetraedrico a 4 nodi per elementi (e 3DOF per nodo) avremo:

$$\underline{G}_{ij0} = \underline{x}_{ij} = \begin{pmatrix} x_{ij} \\ y_{ij} \\ z_{ij} \end{pmatrix}, \quad \underline{G}_{ij}(t) = \begin{pmatrix} u_{ij} \\ v_{ij} \\ w_{ij} \end{pmatrix}, \quad \dot{\underline{G}}_{ij}(t) = \begin{pmatrix} \dot{u}_{ij} \\ \dot{v}_{ij} \\ \dot{w}_{ij} \end{pmatrix}, \quad j = 1 \dots NE, \quad i = 1 \dots Ne = 4 \quad (10.1.5)$$

Per quanto riguarda il generico elemento è utile anche introdurre la soluzione fisica espressa nella corrispondente terna in configurazione indeformata centrata in  $\underline{G}_{j0}$ , ovvero la soluzione che otterrei se risolvessi analiticamente le equazioni della teoria dell'elasticità:

$$\underline{G}_{j0} = \underline{x}_j = \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{pmatrix}, \quad \underline{G}_j(\underline{x}_j, t) = \begin{pmatrix} u_j \\ v_j \\ w_j \end{pmatrix}, \quad \dot{\underline{G}}_j(\underline{x}_j, t) = \begin{pmatrix} \dot{u}_j \\ \dot{v}_j \\ \dot{w}_j \end{pmatrix}, \quad j = 1 \dots NE \quad (10.1.6)$$

Naturalmente tali variabili dipendono sia dallo spazio che dal tempo, al contrario delle variabili nodali che dipendono invece solamente dal tempo (la posizione del nodo nello spazio è fissata).

Abbiamo ora tutti gli elementi per definire il vettore della variabili nodali e il vettore contenente tutte le variabili Lagrangiane del sistema:

$$\underline{q}_k(t) = \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{pmatrix} \in R^{\text{DOFN}=3}, \quad k = 1 \dots NN, \quad \underline{q}(t) = \begin{pmatrix} q_1 \\ \dots \\ q_{NN} \end{pmatrix} \in R^{\text{DOFN} \cdot NN = 3NN} \quad (10.1.7)$$

e le equivalenti grandezze per il generico elemento:

$$\underline{q}_{ij}(t) = \begin{pmatrix} u_{ij} \\ v_{ij} \\ w_{ij} \end{pmatrix} \in R^{\text{DOFN}=3}, \quad \underline{u}_j(\underline{x}_j, t) = \begin{pmatrix} u_j \\ v_j \\ w_j \end{pmatrix} \in R^{\text{DOFN}=3}, \quad j = 1 \dots NE, \quad i = 1 \dots Ne = 4 \quad (10.1.8)$$

$$\underline{q}_j(t) = \begin{pmatrix} q_{1j} \\ \dots \\ q_{Nej} \end{pmatrix} \in R^{\text{DOFN} \cdot Ne = 3 \cdot 4 = 12}, \quad j = 1 \dots NE \quad (10.1.9)$$

dove  $\underline{q}_j(t)$  è il vettore che contiene le variabili nodali dei nodi appartenenti all'elemento considerato  $\underline{q}_{ij}(t)$ . Un utile strumento per estrarre  $\underline{q}_k$  e  $\underline{q}_j$  dal vettore contenente tutte le variabili lagrangiane  $\underline{q}$  sono le matrici di connessione (matrici binarie formate da 0 e 1):

$$\underline{q}_k = J_k \underline{q}, \quad \underline{q}_j = H_j \underline{q}. \quad (10.1.10)$$

Usando un approccio Lagrangiano, dovremo arrivare ascrivere le equazioni di Lagrange per il nostro sistema

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)^T - \left( \frac{\partial L}{\partial q} \right)^T = \underline{Q}_{NC}, \quad L = T - V. \quad (10.1.11)$$

Dovremo quindi essere in grado di scrivere l'energia cinetica  $T$ , l'energia potenziale  $V$  e le azioni Lagrangiane non conservative del nostro sistema.

Alla fine (si vedano sempre le Fig. 162 e 163) dovremo considerare i seguenti componenti della macchina rotante 3D:

- 1) COMPONENTI CONCENTRATI: entità concentrate dotate di massa e inerzia ma non di proprietà elastiche; i componenti concentrati dovranno essere posizionati sull'albero, solidalmente collegati a un nodo di riferimento del modello FEM (naturalmente non tutti i nodi sono associati a un componente concentrato!). Tali componenti avranno un'energia cinetica  $T_{dk}$  (d sta per disk) e un'energia potenziale  $V_{dk}$  solitamente trascurabile ( $V_{dk} = cost$ ).
- 2) COMPONENTI DISTRIBUITI / ELASTICI: entità distribuite dotate di massa, inerzia e di proprietà elastiche; i componenti elastici sono quasi sempre associati agli elementi del modello FEM. Tali componenti avranno un'energia cinetica  $T_j$  e un'energia potenziale  $V_j$ .
- 3) COMPONENTI ESTERNI / NON CONSERVATIVI: comprendono tutto quello che agisce sulla macchina dall'esterno come forzanti esterne (carichi palari / forzanti di fluido, azioni dovute a motori/generatori, azione della gravità o di altri campi di forza esterni, etc.), componenti modellabili come elementi di forza (cuscini, tenute, giunti, riduttori, etc.), smorzamento dei materiali e altri effetti strutturali non conservativi modellati come azioni esterne usando il Principio dei Lavori Virtuali. I componenti esterni / non conservativi sono chiaramente associati alle azioni Lagrangiane non conservative  $Q_{NC}$ . In questo capitolo parleremo delle forzanti esterne più comuni e in modo assai semplificato dello smorzamento. Successivamente parleremo degli elementi di forza e soprattutto dei cuscini fluidodinamici, soffermandoci sull'applicazione dei carichi di pressione da essi generati sull'albero (si vedano i modelli sviluppati nel capitolo 5). Infine analizzeremo le forzanti di fluido (interazione fluido-struttura) a livello palare, focalizzandoci anche in questo caso sull'applicazione dei carichi di pressione generati dal fluido sulle palette e sull'albero (si vedano i modelli sviluppati nel capitolo 9).

Nel complesso avremo dunque

$$L = T - V = \sum_{k=1}^{NN} T_{dk} + \sum_{j=1}^{NE} T_j - \sum_{e=1}^{NE} V_j. \quad (10.1.12)$$

Prima di procedere, riassumiamo infine le ipotesi semplificative che faremo in seguito:

- come già detto, faremo uso della teoria dell'elasticità classica 3D (teoria localmente a 3DOF, ovvero le 3 traslazioni nello spazio del generico punto del dominio). Il generico nodo può quindi traslare nello spazio con 3DOF disponibili  $\underline{G}_k$ .
- elasticità lineare (caratteristiche elastiche dei materiali lineari), materiali isotropi.
- trascureremo per semplicità gli effetti termici all'interno del solido.
- 

## 10.2 Elementi concentrati

Per quanto riguarda gli elementi concentrati, modellabili come masse concentrate  $m_{dk}$  solidalmente collegate alla terna associata al generico nodo  $k$ -esimo, calcoleremo l'energia cinetica  $T_{dk}$  e trascureremo l'energia potenziale  $V_{dk} = cost$ : si trascurano per ora le variazioni di quota di elementi e gli effetti della gravità (la gravità verrà trattata

come azione esterna in seguito). L'energia cinetica  $T_{dk}$  può essere calcolata come ricordando l'espressione dell'energia cinetica del generico corpo rigido:

$$T_{dk} = \frac{1}{2} m_{dk} \|\underline{v}_{Gk}\|^2, \quad \underline{v}_{Gk} = \dot{\underline{G}}_{ktrf} + \dot{\underline{G}}_{krelf} = \dot{\underline{G}}_{ktrf} + R(\underline{\phi}_s) \dot{\underline{G}}_k. \quad (10.2.1)$$

$$\dot{\underline{G}}_{ktrf} = \dot{\underline{O}}_{sf} + \underline{\omega}_f(\underline{\phi}_s, \dot{\underline{\phi}}_s) \times R(\underline{\phi}_s)(\underline{G}_{k0s} + \underline{G}_k) = \dot{\underline{G}}_{k0f} + \underline{\omega}_f(\underline{\phi}_s, \dot{\underline{\phi}}_s) \times R(\underline{\phi}_s) \underline{G}_k$$

dove la prima parte di  $\underline{v}_{Gk}$  è la velocità di trascinamento del nodo (come se fosse solidale alla terna associata alla configurazione indeformata; tale velocità è collegata allo spostamento rigido) mentre la seconda parte è la velocità relativa del nodo (collegata allo spostamento elastico). Si noti che non è presente la parte rotazionale dell'energia cinetica per in questo schema FEM stiamo considerando solamente i 3 DOF traslazionale del nodo  $\underline{G}_k$  e non i 3DOF rotazionali associati alla terna a esso solidale (soluzione molto comune in applicazioni strutturali).

Supponendo ora che il moto rigido della configurazione indeformata rispetto al sistema inerziale sia una rotazione uniforme attorno all'asse  $z_f$  a velocità angolare  $\Omega$  costante (la speed della macchina!), si ha

$$\underline{O}_s = \begin{pmatrix} x_{os} \\ x_{os} \\ x_{os} \end{pmatrix} = \underline{0}, \quad \dot{\underline{O}}_{os} = \begin{pmatrix} \dot{x}_{os} \\ \dot{y}_{os} \\ \dot{z}_{os} \end{pmatrix} = \underline{0}, \quad \underline{\phi}_s = \begin{pmatrix} \theta_{os} \\ \psi_{os} \\ \varphi_{os} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega t \end{pmatrix}, \quad \dot{\underline{\phi}}_s = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_{os} \\ \dot{\psi}_{os} \\ \dot{\varphi}_{os} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix} \quad (10.2.2)$$

e quindi

$$\begin{aligned} \underline{v}_{Gk} &= R_z(\Omega t) \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix} \times \underline{G}_{k0s} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix} \times \underline{G}_k \right] + R_z(\Omega t) \begin{pmatrix} \dot{u}_k \\ \dot{v}_k \\ \dot{w}_k \end{pmatrix} = R_z(\Omega t) \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix} \times \underline{x}_k + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix} \times \underline{q}_k \right] + R_z(\Omega t) \dot{\underline{q}}_k \\ &= R_z(\Omega t) \left[ \Omega \underline{b}_k + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix} \times \underline{q}_k + \dot{\underline{q}}_k \right]. \end{aligned} \quad (10.2.3)$$

La (10.2.2) è chiaramente solamente solo un'approssimazione. La componente rigida dello spostamento complessivo dei nodi  $\underline{G}_k$  può essere descritta anche simulando in modo esatto l'evoluzione dell'atto di moto rigido  $\underline{O}_s$ ,  $\dot{\underline{O}}_s$ ,  $\underline{\phi}_s$ ,  $\dot{\underline{\phi}}_s$  senza imporlo a priori in modo approssimato come nella (10.2.2). Si entra in questo caso nella modellazione "flexible multibody" (che qui non tratteremo!), naturale generalizzazione del FEM in grado di descrivere il moto di corpi flessibili anche per grandi spostamenti rigidi.

In cui  $\underline{b}_k$  è un vettore costante noto. Per praticità i prodotti vettoriali possono essere rappresentati matricialmente come

$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = S(\underline{a})\underline{b}, \quad S(\underline{a}) = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (10.2.4)$$

Si ha perciò

$$\underline{v}_{Gk} = R_z(\Omega t) \left[ \Omega \underline{b}_k + \Omega A \underline{q}_k + \dot{\underline{q}}_k \right], \quad A = S \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right). \quad (10.2.5)$$

In definitiva si ha dunque per l'energia cinetica:



$$T_{dk} = \frac{1}{2} \dot{\underline{q}}_k^T M_{dk} \dot{\underline{q}}_k + \frac{1}{2} \Omega^2 \underline{q}_k^T A^T M_{dk} A \underline{q}_k + \frac{1}{2} \Omega^2 \underline{b}_k^T M_{dk} \underline{b}_k + \Omega^2 \underline{b}_k^T M_{dk} A \underline{q}_k + \Omega \underline{b}_k^T M_{dk} \dot{\underline{q}}_k + \Omega \underline{q}_k^T A^T M_{dk} \dot{\underline{q}}_k \quad (10.2.7)$$

$$T_{dk} = \frac{1}{2} \dot{\underline{q}}_k^T M_{dk} \dot{\underline{q}}_k + \frac{1}{2} \Omega^2 \underline{q}_k^T A^T M_{dk} A \underline{q}_k + T_{0dk} + \Omega^2 \underline{b}_k^T M_{dk} A \underline{q}_k + \Omega \underline{b}_k^T M_{dk} \dot{\underline{q}}_k + \Omega \underline{q}_k^T A^T M_{dk} \dot{\underline{q}}_k$$

con

$$M_{dk} = \begin{bmatrix} m_{dk} & 0 & 0 \\ 0 & m_{dk} & 0 \\ 0 & 0 & m_{dk} \end{bmatrix}. \quad (10.2.8)$$

I termini appena ricavati contribuiranno, come vedremo, alla matrice delle masse del sistema, alla matrice giroscopica e due effetti non descrivibili mediante modelli di trave 1D, ovvero l'effetto di dilatazione centrifuga e l'irrigidimento / ammorbidimento dinamico dell'albero.

### 10.3 Elementi elastici

Per calcolare l'energia cinetica  $T_j$  e l'energia potenziale elastica  $V_j$  degli elementi elastici faremo uso della teoria classica dell'elasticità per corpi 3D lineari e isotropi (teoria a 3 DOF locali, ovvero le tre traslazioni spaziali del generico punto  $\underline{G}_j(\underline{x}_j, t) = \underline{u}_j(\underline{x}_j, t)$  del dominio  $V_j$  considerato). Per la nomenclatura si faccia riferimento alle Fig. 162 e Fig. 163.

Una volta richiamata la nomenclatura, è il momento di introdurre la così detta approssimazione FEM per questo problema:

$$\underline{u}_j(\underline{x}_j, t) = \begin{pmatrix} u_j(\underline{x}_j, t) \\ v_j(\underline{x}_j, t) \\ w_j(\underline{x}_j, t) \end{pmatrix} \cong N_j(\underline{x}_j) \underline{q}_j(t) = \begin{pmatrix} N_{j1}(\underline{x}_j) \\ N_{j2}(\underline{x}_j) \\ N_{j3}(\underline{x}_j) \end{pmatrix} \underline{q}_j(t). \quad \underline{q}_j(t) = \begin{pmatrix} q_{1j} \\ \dots \\ q_{Nej} \end{pmatrix} \quad (10.3.1)$$

L'idea alla base del FEM è infatti quella di determinare la soluzione del problema solamente in alcuni punti specifici del dominio (e degli elementi della mesh in cui il dominio è suddiviso), ovvero nei nodi. Si ignora di conseguenza come si comporti realmente la soluzione all'interno dell'elemento e si prova ad approssimare il suo andamento in questa zona supponendo che esso sia una combinazione lineare dei valori presi dalla soluzione ai nodi (cioè delle variabili nodali). Il modo più generale per scrivere questa combinazione lineare è la (10.3.1). Naturalmente, poiché la posizione spaziale dei nodi è bloccata, le variabili nodali dipendono solo dal tempo. Di conseguenza la dipendenza della soluzione fisica  $\underline{u}_j(\underline{x}_j, t)$  dallo spazio viene presa in carico dalla matrice / funzione di forma  $N_j(\underline{x}_j)$ . In questo caso  $N_j(\underline{x}_j)$  è una matrice 3x12 (coerentemente con la (10.3.1)) composta da 3 righe  $N_{jh}(z_f)$  1x12 ( $h = 1,2,3$ ) e ognuno dei sui 36 elementi è fatto da polinomi interpolanti. Più è alto il grado di questi polinomi (e quindi l'ordine dell'elemento) maggiore sarà l'accuratezza dell'elemento in questione e la sua capacità di garantire la continuità della soluzione, la continuità delle sue derivate prime e così via. L'aver scelto come funzioni interpolanti dei polinomi rende i calcoli successivi molto semplici (si noti come il prodotto di polinomi è sempre un polinomio e la derivazione / integrazione di polinomi producono sempre polinomi e sono estremamente facili da effettuare).

E infine fondamentale notare come l'approssimazione FEM (10.3.1) separi di fatto la dipendenza spaziale ( $\underline{x}_j$ ) da quella temporale. Questo trasforma immediatamente ogni derivata parziale di  $\underline{u}_j(\underline{x}_j, t)$  in una derivata ordinaria di  $N_j(\underline{x}_j)$  (nel caso di derivate spaziali) e di  $q_j(t)$  (nel caso di derivate temporali). Questa trasformazione ha il notevole effetto di tramutare sistemi di equazioni differenziali alle derivate parziali (PDE) in sistemi di equazioni differenziali ordinarie (ODE) molto più semplici da risolvere e che costituiscono il punto di arrivo quando si discretizza una teoria fisica con un approccio FEM.

Come abbiamo già visto, la teoria classica dell'elasticità per corpi 3D lineari e isotropi è governata dalle equazioni di Navier

$$\rho_j \frac{\partial^2 \underline{u}_j}{\partial t^2} = \rho_j \underline{f}_{ej} + \text{div}(\underline{\sigma}_j). \quad (10.3.2)$$

dove  $\rho_j$  è la densità del materiale (qui supposta non dipendente dalla temperatura) e  $\underline{f}_{ej}$  rappresentano le azioni esterne. Per materiali lineari e isotropi vale la seguente relazione costitutiva:

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon}_j &= \frac{1}{2} (\underline{J}_{\underline{u}_j} + \underline{J}_{\underline{u}_j}^T), & \varepsilon_{jhl} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_{jh}}{\partial x_l} + \frac{\partial u_{jl}}{\partial x_h} \right), & h, l &= 1, 2, 3 \\ \underline{\sigma}_j &= \lambda (\text{div} \underline{u}_j) I_{3 \times 3} + 2\mu \underline{\varepsilon}_j \end{aligned} \quad (10.3.3)$$

$\mu, \lambda$  sono le costanti di Lamè del materiale (sempre supposte non dipendenti dalla temperatura). Ingegneristicamente e computazionalmente conviene impilare le componenti dei tensori di strain e si stress in opportuni vettori di 6 elementi:

$$\underline{\varepsilon}_j = \begin{pmatrix} \varepsilon_{j11} \\ \varepsilon_{j22} \\ \varepsilon_{j33} \\ 2\varepsilon_{j12} \\ 2\varepsilon_{j23} \\ 2\varepsilon_{j13} \end{pmatrix}, \quad \underline{\sigma}_j = \begin{pmatrix} \sigma_{j11} \\ \sigma_{j22} \\ \sigma_{j33} \\ \sigma_{j12} \\ \sigma_{j23} \\ \sigma_{j13} \end{pmatrix}. \quad (10.3.4)$$

Adottando questa convenzione, la legge di Hooke assume la forma

$$\underline{\sigma}_j = C \underline{\varepsilon}_j, \quad C = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (10.3.5)$$

In cui la matrice elastica  $C$  (matrice 6x6) prende il posto del tensore elastico del quarto ordine  $\bar{\bar{C}}(T)$  (qui supposto non dipendente dalla temperatura, si veda la (9.4.6)),  $E$  è il modulo di Young e  $\nu$  è il coefficiente di Poisson.

Troviamo ora l'energia potenziale elastica del generico elemento  $V_j$ :

$$V_j = \frac{1}{2} \int_{V_j} \sum_{h,l} \varepsilon_{jhl} \sigma_{jhl} dV = \frac{1}{2} \int_{V_e} \underline{\varepsilon}_j^T \underline{\sigma}_j dV = \frac{1}{2} \int_{V_e} \underline{\varepsilon}_j^T C \underline{\varepsilon}_j dV. \quad (10.3.6)$$

Occorre ora introdurre l'approssimazione FEM nel calcolo di  $\underline{\varepsilon}_j$ :

$$\underline{q}_j(\underline{x}_j, t) = \begin{pmatrix} u_j(\underline{x}_j, t) \\ v_j(\underline{x}_j, t) \\ w_j(\underline{x}_j, t) \end{pmatrix} \cong N_j(\underline{x}_j) \underline{q}_j(t) = \begin{pmatrix} N_{j1}(\underline{x}_j) \\ N_{j2}(\underline{x}_j) \\ N_{j3}(\underline{x}_j) \end{pmatrix} \underline{q}_j(t). \quad (10.3.7)$$

A partire dalla definizione di  $\underline{\varepsilon}$  (si veda la (10.3.3)) si ottiene

$$\underline{\varepsilon}_j \left( \underline{q}_j(\underline{x}_j, t) \right) = B_j(\underline{x}_j) \underline{q}_j(t) \quad (10.3.8)$$

dove la matrice  $B_j(\underline{x}_j)$  (di dimensioni 6x12) ha la forma:

$$B_j(\underline{x}_j) = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{1j}(\underline{x}_j)}{\partial x_j} \\ \frac{\partial N_{2j}(\underline{x}_j)}{\partial y_j} \\ \frac{\partial N_{3j}(\underline{x}_j)}{\partial z_j} \\ \left[ \frac{\partial N_{1j}(\underline{x}_j)}{\partial y_j} + \frac{\partial N_{2j}(\underline{x}_j)}{\partial x_j} \right] \\ \left[ \frac{\partial N_{2j}(\underline{x}_j)}{\partial z_j} + \frac{\partial N_{3j}(\underline{x}_j)}{\partial y_j} \right] \\ \left[ \frac{\partial N_{1j}(\underline{x}_j)}{\partial z_j} + \frac{\partial N_{3j}(\underline{x}_j)}{\partial x_j} \right] \end{bmatrix}. \quad (10.3.9)$$

Si ha perciò, per l'energia potenziale elastica  $V_j$ :

$$V_j = \frac{1}{2} \int_{V_j} \underline{\varepsilon}_j^T C \underline{\varepsilon}_j dV = \frac{1}{2} \int_{V_j} \underline{q}_j^T B_j^T C B_j \underline{q}_j dV_j = \frac{1}{2} \underline{q}_j^T \left[ \int_{V_j} B_j^T C B_j dV_j \right] \underline{q}_j = \frac{1}{2} \underline{q}_j^T K_j \underline{q}_j. \quad (10.3.10)$$

Il termine appena trovato contribuirà alla matrice di rigidità del sistema. Il calcolo dell'energia potenziale elastica del generico elemento  $T_j$

$$T_j = \frac{1}{2} \int_{V_j} \rho \|\underline{v}_{Gj}\|^2 dV \quad (10.3.10)$$

richiede nuovamente il calcolo della velocità  $\underline{v}_{Gj}$  del generico punto nel dominio  $V_j$  che, dalla (10.2.5), sappiamo essere

$$\underline{v}_{Gj}(\underline{x}_j, t) = R_z(\Omega t) \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix} \times \underline{x}_j + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \underline{u}_j(\underline{x}_j, t) \right] + R_z(\Omega t) \dot{\underline{u}}_j(\underline{x}_j, t) = R_z(\Omega t) [\Omega \underline{b}_j + \Omega A \underline{u}_j(\underline{x}_j, t)] + R_z(\Omega t) \dot{\underline{u}}_j(\underline{x}_j, t). \quad (10.3.11)$$

Grazie all'approssimazione FEM si ha dunque:

$$\underline{v}_{Gj}(\underline{x}_j, t) = R_z(\Omega t) \left[ \Omega \underline{b}_j + \Omega A N_j(\underline{x}_j) \underline{q}_j(t) + N_j(\underline{x}_j) \dot{\underline{q}}_j(t) \right]. \quad (10.3.12)$$

Inserendo la (10.3.12) e svolgendo i prodotti si ottiene:

$$T_j = \frac{1}{2} \dot{\underline{q}}_j^T \left[ \int_{V_j} \rho N_j^T N_j dV \right] \dot{\underline{q}}_j + \frac{1}{2} \Omega^2 \underline{q}_j^T \left[ \int_{V_j} \rho N_j^T A^T A N_j dV \right] \underline{q}_j + \frac{1}{2} \Omega^2 \left[ \int_{V_j} \rho \underline{b}_j^T \underline{b}_j dV \right] + \Omega \underline{q}_j^T \left[ \int_{V_j} \rho N_j^T A^T N_j dV \right] \dot{\underline{q}}_j + \Omega \left[ \int_{V_j} \rho \underline{b}_j^T N_j dV \right] \dot{\underline{q}}_j + \Omega^2 \left[ \int_{V_j} \rho \underline{b}_j^T A_j N_j dV \right] \underline{q}_j = \quad (10.3.13)$$

$$= \frac{1}{2} \dot{q}_j^T M_j \dot{q}_j + \frac{1}{2} \Omega^2 q_j^T K_{Mj} q_j + T_{0j} + \Omega q_j^T A_j \dot{q}_j + \Omega W_j^T \dot{q}_j + \Omega^2 E_j^T q_j .$$

Anche per elementi elastici i termini appena ricavati contribuiranno, come vedremo, alla matrice delle masse del sistema, alla matrice giroscopica e due effetti non descrivibili mediante modelli di trave 1D, ovvero l'effetto di dilatazione centrifuga e l'irrigidimento / ammorbidimento dinamico dell'albero.

## 10.4 Assemblaggio delle equazioni

L'assemblaggio della equazioni di moto è abbastanza facile una volta determinati i vari contributi. Ricordando che

$$L = T - V = \sum_{k=1}^{NN} T_{dk} + \sum_{j=1}^{NE} T_j - \sum_{j=1}^{NE} V_j, \quad (10.4.1)$$

alla luce dei risultati per paragrafo 10.3, possiamo scrivere per gli elementi concentrati e per gli elementi distribuiti:

$$T_{dk} = \frac{1}{2} \dot{q}_k^T M_{dk} \dot{q}_k + \frac{1}{2} \Omega^2 q_k^T A^T M_{dk} A q_k + T_{0dk} + \Omega^2 b_k^T M_{dk} A q_k + \Omega b_k^T M_{dk} \dot{q}_k + \Omega q_k^T A^T M_{dk} \dot{q}_k \quad (10.4.2)$$

$$V_j = \frac{1}{2} q_j^T K_j q_j$$

$$T_j = \frac{1}{2} \dot{q}_j^T M_j \dot{q}_j + \frac{1}{2} \Omega^2 q_j^T K_{Mj} q_j + T_{0j} + \Omega q_j^T A_j \dot{q}_j + \Omega W_j^T \dot{q}_j + \Omega^2 E_j^T q_j .$$

Introducendo le (10.4.2) nella (10.4.1) e usando le matrici di connessione  $q_k = J_k q$  e  $q_j = H_j q$ , si ottiene

$$V_{etot} = \sum_{j=1}^{NE} V_j = \sum_{j=1}^{NE} \frac{1}{2} q_j^T K_j q_j = \frac{1}{2} q^T \left( \sum_{j=1}^{NE} H_j^T K_j H_j \right) q = \frac{1}{2} q^T K_{etot} q \quad (10.4.3)$$

$$\begin{aligned} T_{etot} &= \sum_{j=1}^{NE} T_j = \frac{1}{2} \dot{q}^T \sum_{j=1}^{NE} H_j^T M_j H_j \dot{q} + \frac{1}{2} \Omega^2 q^T \sum_{j=1}^{NE} H_j^T K_{Mj} H_j q + T_0 + \\ &+ \Omega q^T \sum_{j=1}^{NE} H_j^T A_j H_j \dot{q} + \Omega \sum_{j=1}^{NE} W_j^T H_j \dot{q} + \Omega^2 \sum_{j=1}^{NE} E_j^T H_j q = \\ &= \frac{1}{2} \dot{q}^T M_{etot} \dot{q} + \frac{1}{2} \Omega^2 q^T K_{Metot} q + T_0 + \Omega q^T A_{etot} \dot{q} + \Omega W_{etot}^T \dot{q} + \Omega^2 E_{etot}^T q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{dtot} &= \sum_{k=1}^{NN} T_{dk} = \frac{1}{2} \dot{q}^T \sum_{j=1}^{NE} J_k^T M_{dk} J_k \dot{q} + \frac{1}{2} \Omega^2 q^T \sum_{k=1}^{NN} J_k^T A^T M_{dk} A J_k q + T_{0d} + \\ &+ \Omega q^T \sum_{j=1}^{NE} J_k^T A^T M_{dk} J_k \dot{q} + \Omega \sum_{j=1}^{NE} b_k^T M_{dk} J_k \dot{q} + \Omega^2 \sum_{j=1}^{NE} b_k^T M_{dk} A J_k q = \\ &= \frac{1}{2} \dot{q}^T M_{dtot} \dot{q} + \frac{1}{2} \Omega^2 q^T K_{Mdtot} q + T_{0d} + \Omega q^T A_{dtot} \dot{q} + \Omega W_{dtot}^T \dot{q} + \Omega^2 E_{dtot}^T q \end{aligned}$$

Sostituendo infine le (10.4.3) nelle equazioni di Lagrange (10.1.11) si arriva alla seguente equazione:

$$\begin{aligned} (M_{dtot} + M_{etot})\underline{\ddot{q}} + \Omega(A_{dtot} + A_{etot} - A_{dtot}^T - A_{etot}^T)\underline{\dot{q}} + (K_{etot} + \Omega^2 K_{Mdtot} + \Omega^2 K_{Metot})\underline{q} = \\ = \underline{Q}_{NC} = \underline{Q}_b + \underline{Q}_{sm} + \underline{Q}_{ext} + \Omega^2 \underline{E}_{dtot} = \underline{Q}_{NC} = \underline{Q}_b + \underline{Q}_{sm} + \underline{Q}_{ext,tot} \end{aligned} \quad (10.4.4)$$

$$M\underline{\ddot{q}} + \Omega G \underline{\dot{q}} + (K_{etot} + \Omega^2 K_{Mdtot} + \Omega^2 K_{Metot})\underline{q} = \underline{Q}_{NC} = \underline{Q}_b + \underline{Q}_{sm} + \underline{Q}_{ext,tot}$$

dove  $G$  è la matrice giroscopica del sistema (antisimmetrica),  $M$  è la matrice delle masse del sistema (simmetrica definita positiva) e dove, dentro le azioni lagrangiane non conservative  $\underline{Q}_{NC}$ , abbiamo considerato le generiche forzanti esterne  $\underline{Q}_{ext,tot}$  agenti sulla macchina (carichi palari / forzanti di fluido, azioni dovute a motori/generatori, azione della gravità o di altri campi di forza esterni, etc.), lo smorzamento del materiale  $\underline{Q}_{sm}$  (modellato come azione esterna usando il Principio dei Lavori Virtuali) e le azioni  $\underline{Q}_b$  dei componenti modellabili come elementi di forza (cuscini, tenute, giunti, riduttori, etc.).

In questo capitolo parleremo delle forzanti esterne più comuni (paragrafi 10.8, 10.9 e 10.10 sulla gravità) e in modo assai semplificato dello smorzamento (paragrafo 10.6). Tra le forzanti esterne, data la loro importanza a livello applicativo, analizzeremo più in dettaglio la modellazione delle forzanti di fluido (interazione fluido-struttura) (paragrafo 10.7). Ci soffermeremo inoltre sugli elementi di forza e soprattutto sui cuscini fluidodinamici (paragrafo 10.5).

Supponiamo per ora di adottare per gli elementi di forza (e soprattutto per cuscini e tenute) agenti sull'albero una classica formulazione linearizzata tipo molla tridimensionale (si veda il paragrafo 10.5):

$$\underline{Q}_b(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, \Omega) = -K_C(\Omega)\underline{q} - C_C(\Omega)\underline{\dot{q}} \quad (10.4.5)$$

in cui, come vedremo, le matrici di cuscino non sono simmetriche e potranno dipendere dalla speed  $\Omega$  e da altri parametri del sistema.

Inserendo la (10.4.5) nella (10.4.4) si arriva alle equazioni:

$$M\underline{\ddot{q}} + (\Omega G + C_C(\Omega))\underline{\dot{q}} + (K_{etot} + \Omega^2 K_{Metot} + \Omega^2 K_{Mdtot} + K_C(\Omega))\underline{q} = \underline{Q}_{sm} + \underline{Q}_{ext,tot} \quad (10.4.6)$$

$$M\underline{\ddot{q}} + (\Omega G + C_C(\Omega))\underline{\dot{q}} + K(\Omega)\underline{q} = \underline{Q}_{sm} + \underline{Q}_{ext,tot}$$

dove, a causa degli elementi di forza non simmetrici come cuscini e tenute (si veda la matrice  $K_C(\Omega)$ ), la matrice di rigidità complessiva  $K$  perdere qualunque proprietà.

Supponendo infine di adottare un semplice modello di smorzamento del materiale lineare (vedremo nel prossimo paragrafo come fare a determinare la matrice di smorzamento  $C_{sm}$  con il Principio dei Lavori Virtuali)

$$\underline{Q}_{sm} = -C_{sm}\underline{\dot{q}} \quad (10.4.7)$$

si ottiene l'equazione generale della rotordinamica 3D (a 3DOF locali) per un rotore elastico 3D:

$$M\underline{\ddot{q}} + (\Omega G + C_C(\Omega) + C_{sm})\underline{\dot{q}} + K\underline{q} = \underline{Q}_{ext,tot} \quad (10.4.8)$$

$$M\underline{\ddot{q}} + (\Omega G + C)\underline{\dot{q}} + K\underline{q} = \underline{Q}_{ext,tot}$$

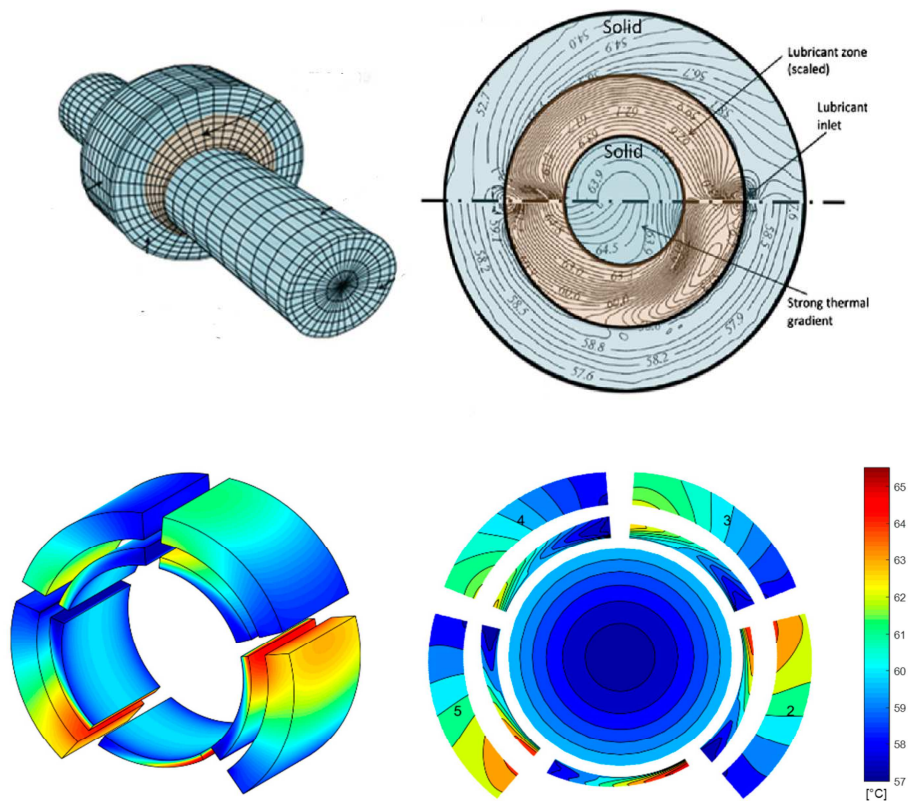
dove chiaramente anche la matrice  $C$  perde qualunque proprietà a seguito della presenza di  $C_C(\Omega)$ .

## 10.5 Cuscini oleodinamici

Con riferimento alla Fig. 164, vedremo ora come applicare all'albero le pressioni  $\underline{p}(x, \underline{q}_A, \dot{\underline{q}}_A, \Omega) = \sigma^f \underline{n}$  generate dal fluido lubrificante che riempie il meato del cuscano e calcolate con i modelli descritti nel capitolo 5 e, soprattutto, nel capitolo 9. Tali pressioni saranno chiaramente funzione della forma della superficie dell'albero interna al cuscano (regione  $A$ , vedi Fig. 164) e quindi dello spostamento elastico dei nodi di tale superficie  $\underline{q}_A$ , e della velocità di rotazione rigida del rotore  $\Omega$ , unica componente non nulla dell'originario atto di moto  $\underline{Q}_s, \dot{\underline{Q}}_s, \underline{\phi}_s, \dot{\underline{\phi}}_s$ , della terna che tiene conto della componente rigida del moto del rotore. Naturalmente, anche se non indicata, sarebbe comunque presente in  $\underline{p}$  anche la dipendenza dalla forma della superficie della sede / dei pattini del cuscano e quindi dallo spostamento elastico dei relativi nodi. Il vettore  $\underline{q}_A$

$$\underline{q}_A = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{q}_{Ak} \\ \dots \end{pmatrix}, \quad k = 1 \dots NNC, \quad \underline{q}_{Aj} = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{q}_{Aij} \\ \dots \end{pmatrix}, \quad j = 1 \dots NEC, \quad i = 1 \dots NeC = 3 \quad (10.5.1)$$

contiene infatti gli spostamenti nodali di tutti i nodi appartenenti alla superficie di albero interna al cuscano (regione  $A$ ) ( $\underline{q}_{Ak}$  rappresenta ovviamente il generico tra questi nodi). Indicheremo inoltre con  $\underline{q}_{Aj}$  il vettore degli spostamenti nodali di tutti i nodi appartenenti alla faccia dell'elemento  $j$  che si affaccia sulla superficie  $A$ .



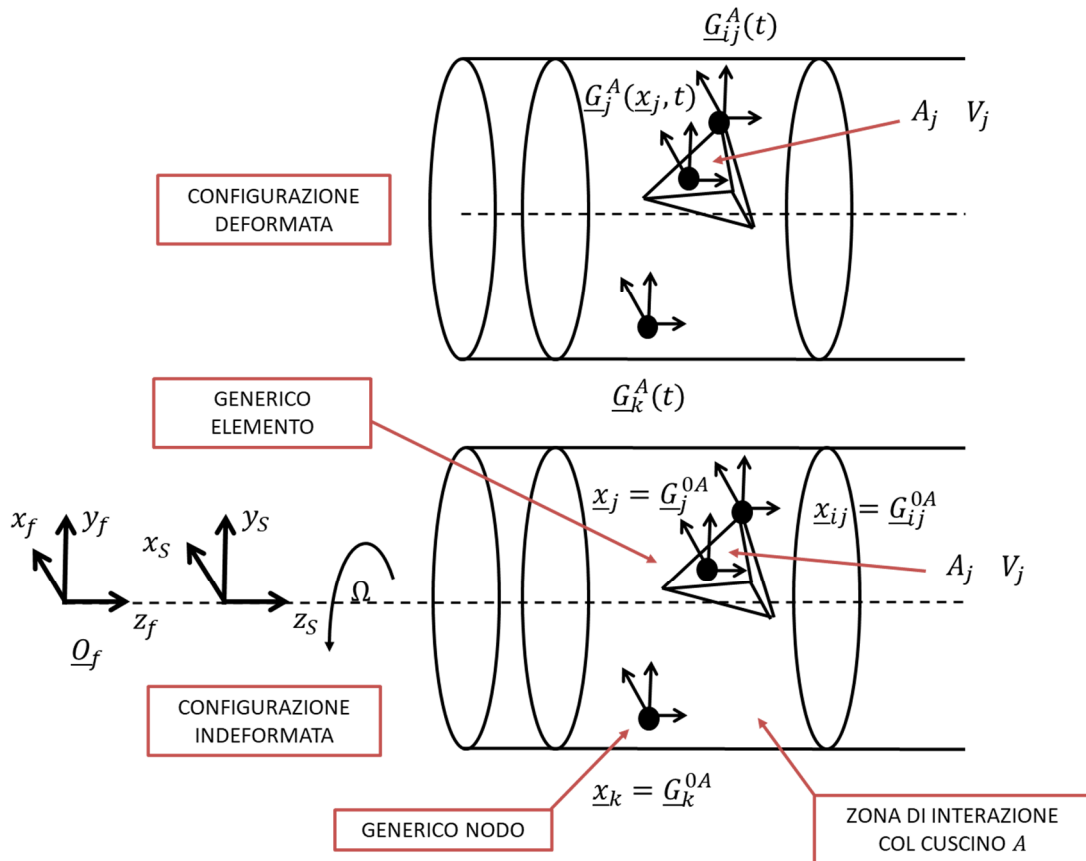


Figura 164 Cuscino a fluido e discretizzazione della relativa sezione dell'albero

L'azione lagrangiana  $\underline{Q}_b(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, \Omega)$  prodotta dall'elemento di forza cuscino (e di conseguenza da inserire nell'equazione di moto!) può essere determinata tramite il Principio dei Lavori Virtuali (si veda la (10.3.11)):

$$\begin{aligned} \delta \underline{q}^T \underline{Q}_b &= \int_A \delta \underline{G}^T \underline{p}(\underline{x}, \underline{q}_A, \underline{\dot{q}}_A, \Omega) dS = \sum_{j=1}^{NEC} \int_{A_j} \delta \underline{G}_{Aj}^T \underline{p}(\underline{x}_j, \underline{q}_A, \underline{\dot{q}}_A, \Omega) dS = & (10.5.2) \\ &= \sum_{j=1}^{NEC} \int_{A_j} \delta \underline{q}_{Aj}^T \underline{N}_{Aj}^T \underline{p}(\underline{x}_j, \underline{q}_A, \underline{\dot{q}}_A, \Omega) dS = \\ &= \delta \underline{q}^T \sum_{j=1}^{NEC} \int_{A_j} \underline{H}_{Aj}^T \underline{N}_{Aj}^T \underline{p}(\underline{x}_j, \underline{q}_A, \underline{\dot{q}}_A, \Omega) dS \end{aligned}$$

da cui, essendo gli spostamenti virtuali  $\delta \underline{q}$  arbitrari purché ammissibili con i vincoli, si ha

$$\underline{Q}_b = \sum_{j=1}^{NEC} \int_{A_j} \underline{H}_{Aj}^T \underline{N}_{Aj}^T \underline{p}(\underline{x}_j, \underline{q}_A, \underline{\dot{q}}_A, \Omega) dS. \quad (10.5.3)$$

La (10.5.3) ci permette dunque di trovare la relazione  $\underline{Q}_b(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, \Omega)$  cercata. Tuttavia tale relazione è non lineare e piuttosto complicata. Se volessimo una relazione lineare potremmo procedere a linearizzare tale relazione rispetto alla variabili  $\underline{q}_A$  in questione:

$$\underline{p}(\underline{x}_j, \underline{q}_A, \underline{\dot{q}}_A, \Omega) = \quad (10.5.4)$$

$$\begin{aligned}
 &= \underline{p}(\underline{x}_j, \underline{q}_{A0}, \underline{\dot{q}}_{A0}, \Omega) + \sum_{k=1}^{NNC} \frac{\partial \underline{p}(\underline{x}_j, \underline{q}_{A0}, \underline{\dot{q}}_{A0}, \Omega)}{\underline{q}_{Ak}} (\underline{q}_{Ak} - \underline{q}_{Ak0}) \\
 &\quad + \sum_{k=1}^{NNC} \frac{\partial \underline{p}(\underline{x}_j, \underline{q}_{A0}, \underline{\dot{q}}_{A0}, \Omega)}{\underline{\dot{q}}_{Ak}} (\underline{\dot{q}}_{Ak} - \underline{\dot{q}}_{Ak0}) = \\
 &= \sum_{k=1}^{NNC} \frac{\partial \underline{p}(\underline{x}_j, \underline{q}_{A0}, \underline{\dot{q}}_{A0}, \Omega)}{\underline{q}_{Ak}} \underline{q}_{Ak} + \sum_{k=1}^{NNC} \frac{\partial \underline{p}(\underline{x}_j, \underline{q}_{A0}, \underline{\dot{q}}_{A0}, \Omega)}{\underline{\dot{q}}_{Ak}} \underline{\dot{q}}_{Ak} = \\
 &= \sum_{k=1}^{NNC} \frac{\partial \underline{p}(\underline{x}_j, \underline{q}_{A0}, \underline{\dot{q}}_{A0}, \Omega)}{\underline{q}_{Ak}} J_{Ak} \underline{q} + \sum_{k=1}^{NNC} \frac{\partial \underline{p}(\underline{x}_j, \underline{q}_{A0}, \underline{\dot{q}}_{A0}, \Omega)}{\underline{\dot{q}}_{Ak}} J_{Ak} \underline{\dot{q}}
 \end{aligned}$$

dove come sempre abbiamo preso,  $\underline{q}_{Ak0} = \underline{0}$  e  $\underline{\dot{q}}_{Ak0} = \underline{0}$ . Inserendo nella (10.5.3) si ha infine

$$\begin{aligned}
 \underline{Q}_b &= \sum_{j=1}^{NEC} \int_{A_j} H_{Aj}^T N_{Aj}^T \underline{p}(\underline{x}_j, \underline{q}_{A0}, \underline{\dot{q}}_{A0}, \Omega) dS + \sum_{j=1}^{NEC} \int_{A_j} H_{Aj}^T N_{Aj}^T \sum_{k=1}^{NNC} \frac{\partial \underline{p}(\underline{x}_j, \underline{q}_{A0}, \underline{\dot{q}}_{A0}, \Omega)}{\underline{q}_{Ak}} J_{Ak} dS \underline{q} + \quad (10.5.5) \\
 &\quad + \sum_{j=1}^{NEC} \int_{A_j} H_{Aj}^T N_{Aj}^T \sum_{k=1}^{NNC} \frac{\partial \underline{p}(\underline{x}_j, \underline{q}_{A0}, \underline{\dot{q}}_{A0}, \Omega)}{\underline{\dot{q}}_{Ak}} J_{Ak} dS \underline{\dot{q}}, \\
 \underline{Q}_b(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, \Omega) &= \underline{Q}_0(\Omega) - K_C(\Omega) \underline{q} - C_C(\Omega) \underline{\dot{q}}.
 \end{aligned}$$

dove  $\underline{Q}_0(\Omega)$  il termine dovuto alle dissipazioni associate al moto di rotazione rigida dell'albero e naturalmente le matrici di cuscino  $K_C(\Omega)$  e  $C_C(\Omega)$  non sono simmetriche.

Naturalmente esistono anche modi più artigianali per applicare le azioni del cuscino all'albero, metodi molto diffusi ma tuttavia approssimati e che comportano dei problemi a livello logico. A partire dallo spostamento nodale dei nodi del tratto di albero all'interno del cuscino è possibile infatti ricostruire, tramite opportune operazioni di media, lo spostamento globale e l'orientazione globale di tale concio di albero. A questo punto, procedendo come nelle vibrazioni flessionali, date le matrici di cuscino usate per lo studio di tali vibrazioni, è possibile risalire alle forze e alle coppie esercitate dal cuscino sul tratto di albero. Tali azioni possono poi essere applicate al concio 3D di albero applicando alla sua superficie un campo fittizio di pressioni equivalente. Alternativamente tali forze / coppie risultanti possono essere applicate anche a dei nodi di riferimenti del concio 3D dell'albero, ad esempio sul suo asse (soluzione ancora più semplice ma che genera delle distribuzioni di stress non realistiche in quella zona!). In entrambi i casi si perdono comunque le informazioni su quanto avviene, in termini di pressione, sulla concio di albero interno al cuscino e sulla sua superficie.

Un'altra soluzione consiste nel modellare con una trave 1D il concio di albero all'interno del cuscino e di accoppiare tale concio al modello 3D della restante parte del rotore. A questo punto il concio dell'albero interno al cuscino interagisce col cuscino nello stesso modo visto per le vibrazioni flessionali (dove avevamo una trave 1D). Oltre ai problemi legati all'accoppiamento 1D-3D che può alterare gli stress a livello locale, anche in questo caso si perdono dunque informazioni su quanto avviene, in termini di pressione, sulla concio di albero interno al cuscino e sulla sua superficie.



## 10.6 Trattazione semplificata dello smorzamento di materiale

Mostriamo ora come calcolare le azioni lagrangiane associate allo smorzamento del materiale nell'ipotesi estremamente semplificata di smorzamento lineare (modello smorzamento linearizzato):

$$\underline{Q}_{sm} = -C_{sm}\underline{\dot{q}}. \quad (10.6.1)$$

Il calcolo di  $\underline{Q}_{sm}$  è una interessante e istruttiva applicazione del Principio dei Lavori Virtuali (PLV) al modello di trave in uso. Il PLV afferma che il lavoro virtuale scritto nello spazio della variabili lagrangiane è uguale, per qualunque spostamento virtuale compatibile con i vincoli del sistema, al lavoro virtuale scritto nello "spazio fisico". Considerando l'  $e$ -esimo elemento del nostro modello FEM, si ha:

$$\delta \underline{q}_j^T \underline{Q}_{sm}^j = -\delta L_{sm}^j. \quad (10.6.2)$$

dove  $\delta L_{sm}^e$  è il lavoro virtuale nello spazio fisico effettuato dal sistema. Ipotizzando che il materiale abbia una semplice caratteristica lineare visco-elastica del tipo

$$\underline{\sigma}_j = \underline{\sigma}_{jel} + \underline{\sigma}_{j sm} = \bar{\underline{C}} \underline{\varepsilon}_j + \bar{\underline{D}} \underline{\dot{\varepsilon}}_j \quad (10.6.3)$$

dove abbiamo supposto che i tensori  $\bar{\underline{C}}$  e  $\bar{\underline{D}}$  non dipendano della temperatura e dove abbia trascurato gli effetti termici, ovvero la dipendenza dalla temperatura (si veda la (9.4.6)).

E' possibile ora calcolare  $-\delta L_{sm}^j$  per la sola componente di smorzamento della (10.6.3) (ho già considerato la componente elastica nel paragrafi 10.3):

$$-\delta L_{sm}^j = -\int_{V_j} \sum_{h,l} \delta \varepsilon_{jhl} \sigma_{jh l sm} dV = -\int_{V_j} \delta \underline{\varepsilon}_j^T \underline{\sigma}_{j sm} dV = -\int_{V_j} \delta \underline{\varepsilon}_j^T \underline{D} \underline{\dot{\varepsilon}}_j dV \quad (10.6.4)$$

dove  $\underline{\varepsilon}_j$  e  $\underline{\sigma}_{j sm}$  sono come sempre le versioni "vettoriali" degli equivalenti vettori e  $\underline{D}$  è matrice 6x6 che contiene le componenti significative di  $\bar{\underline{D}}$  per materiali isotropi (si veda quanto detto in precedenza per il tensore di Hooke  $\bar{\underline{C}}$ ). Introducendo ora l'approssimazione FEM  $\underline{\varepsilon}_j(\underline{x}_j, t) = \underline{B}_j(\underline{x}_j) \underline{q}_j(t)$  si ottiene infine

$$\begin{aligned} -\delta L_{sm}^j &= -\int_{V_j} \delta \underline{q}_j^T \underline{B}_j^T \underline{D} \underline{B}_j \underline{\dot{q}}_j dV_j = \delta \underline{q}_j^T \left[ \int_{V_j} \underline{B}_j^T \underline{D} \underline{B}_j dV_j \right] \underline{\dot{q}}_j = \\ &= -\delta \underline{q}_j^T \underline{C}_{sm}^j \underline{\dot{q}}_j \end{aligned} \quad (10.6.5)$$

Dal momento che il PLV è vero qualunque siano gli spostamenti virtuali compatibili con i vincoli  $\delta \underline{q}_e$ , si ha che

$$\underline{Q}_{sm}^j = -\underline{C}_{sm}^j \underline{\dot{q}}_j. \quad (10.6.6)$$

Infine, per trovare il vettore complessivo delle azioni lagrangiane associate allo smorzamento  $\underline{Q}_{sm}$ , usiamo nuovamente le matrici di connessione:

$$\underline{Q}_{sm} = \sum_{j=1}^{NE} \underline{H}_j^T \underline{Q}_{sm}^j = -\sum_{j=1}^{NE} \underline{H}_j^T \underline{C}_{sm}^j \underline{H}_j \underline{\dot{q}} = -\underline{C}_{sm} \underline{\dot{q}}. \quad (10.6.7)$$

## 10.7 Forzanti di fluido

In questo paragrafo mostreremo brevemente come le forzanti derivanti dal fluido (si pensi ad esempio all'interazione palare) possano essere applicate al rotore 3D che stiamo studiando, generando così l'azione Lagrangiana  $Q_{fl}(t)$  (da inserire quindi nell'equazione di moto!). Come vedremo tale azione esterna potrà essere sia periodica che generica. Supponiamo che tali forzanti siano date come campo di pressione  $\underline{p}(x, t) = \sigma^f \underline{n}$  applicato a una generica regione  $A$  del rotore, ad esempio la superficie di una pala (Fig. 165).

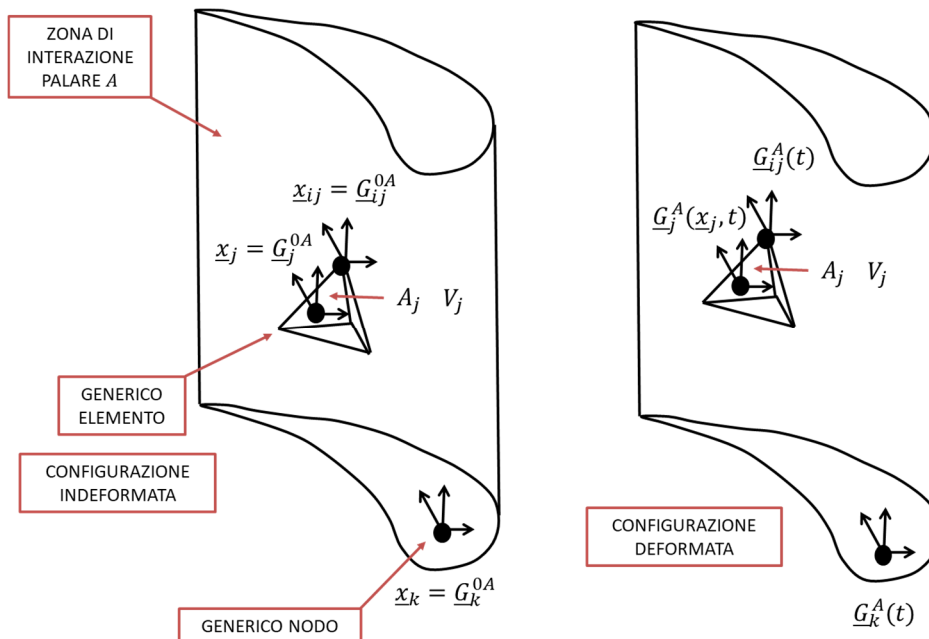
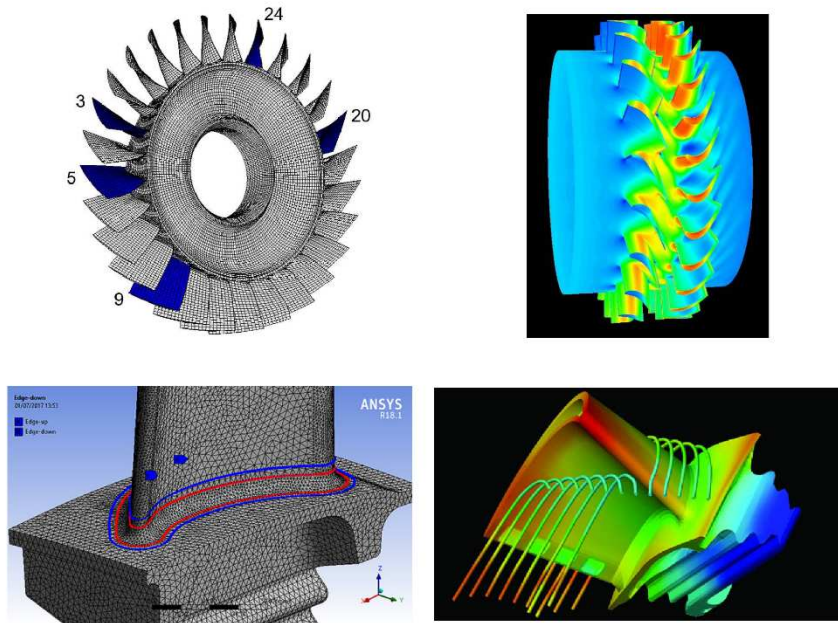


Figura 165 Superficie palare e relativa discretizzazione

Nel caso in cui il campo di pressioni  $\underline{p}(\underline{x}, t)$  sia periodico, avremo

$$\underline{p}(\underline{x}, t) = \text{Re} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \underline{p}_k(\underline{x}) e^{j\omega_0(\Omega)kt} \right], \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad (10.7.1)$$

mentre nel caso di campo di pressioni generico  $\underline{p}(\underline{x}, t)$

$$\underline{p}(\underline{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{\tilde{p}}(\underline{x}, \omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (10.7.2)$$

Definiamo nuovamente il vettore  $\underline{q}_A$

$$\underline{q}_A = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{q}_{Ah} \\ \dots \end{pmatrix}, \quad h = 1 \dots NNC, \quad \underline{q}_{Aj} = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{q}_{Aij} \\ \dots \end{pmatrix}, \quad j = 1 \dots NEC, \quad i = 1 \dots NeC = 3 \quad (10.7.3)$$

come il vettore contenente gli spostamenti nodali di tutti i nodi appartenenti alla superficie di albero interna al cuscinio (regione  $A$ ) ( $\underline{q}_{Ah}$  rappresenta ovviamente il generico tra questi nodi). Indicheremo inoltre con  $\underline{q}_{Aj}$  il vettore degli spostamenti nodali di tutti i nodi appartenenti alla faccia dell'elemento  $j$  che si affaccia sulla superficie  $A$ .

Nel caso di campo di pressioni periodico, l'applicazione delle varie armoniche di pressione  $\underline{p}_k(\underline{x})$  alla superficie palare  $A$  può essere effettuato ancora una volta mediante il Principio dei Lavori Virtuali (si veda la (10.3.11)):

$$\begin{aligned} \delta \underline{q}^T \underline{Q}_{flk} &= \int_A \delta \underline{G}^T \underline{p}_k(\underline{x}) dS = & (10.7.4) \\ &= \sum_{j=1}^{NEC} \int_{A_j} \delta \underline{G}_{Aj}^T \underline{p}_k(\underline{x}_j) dS = \\ &= \sum_{j=1}^{NEC} \int_{A_j} \delta \underline{q}_{Aj}^T \underline{N}_{Aj}^T \underline{p}_k(\underline{x}_j) dS = \\ &= \delta \underline{q}^T \sum_{j=1}^{NEC} \int_{A_j} \underline{H}_{Aj}^T \underline{N}_{Aj}^T \underline{p}(\underline{x}_j) dS \end{aligned}$$

da cui, essendo gli spostamenti virtuali  $\delta \underline{q}$  arbitrari purché ammissibili con i vincoli, si ha

$$\underline{Q}_{flk} = \sum_{j=1}^{NEC} \int_{A_j} \underline{H}_{Aj}^T \underline{N}_{Aj}^T \underline{p}(\underline{x}_j) dS. \quad (10.7.5)$$

Grazie al Principio di Sovrapposizione degli Effetti si ottiene infine:

$$\underline{Q}_{fl}(t) = \text{Re} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \underline{Q}_{flk} e^{j\omega_0(\Omega)kt} \right] \quad (10.7.6)$$

Nel caso di campo di pressioni generico, il ragionamento è del tutto analogo e per la generica armonica  $\underline{\tilde{p}}(\underline{x}, \omega)$  si ha

$$\delta \underline{q}^T \underline{Q}_{fl\omega}(\omega) = \int_A \delta \underline{G}^T \underline{\tilde{p}}(\underline{x}, \omega) dS = \quad (10.7.6)$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{j=1}^{NEC} \int_{A_j} \delta \underline{G}_{A_j}^T \tilde{\underline{p}}(\underline{x}_j, \omega) dS = \\
 &= \sum_{j=1}^{NEC} \int_{A_j} \delta \underline{q}_{A_j}^T N_{A_j}^T \tilde{\underline{p}}(\underline{x}_j, \omega) dS = \\
 &= \delta \underline{q}^T \sum_{j=1}^{NEC} \int_{A_j} H_{A_j}^T N_{A_j}^T \tilde{\underline{p}}(\underline{x}_j, \omega) dS
 \end{aligned}$$

da cui, essendo gli spostamenti virtuali  $\delta \underline{q}$  arbitrari purché ammissibili con i vincoli, si ha

$$\underline{Q}_{fl\omega}(\omega) = \sum_{j=1}^{NEC} \int_{A_j} H_{A_j}^T N_{A_j}^T \tilde{\underline{p}}(\underline{x}_j, \omega) dS. \quad (10.7.7)$$

Grazie ancora al Principio di Sovrapposizione degli Effetti si ottiene infine:

$$\underline{Q}_{fl}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{Q}_{fl\omega}(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (10.7.8)$$

## 10.8 Vibrazioni libere: diagrammi di Campbell, whirl libero, classificazione modale e mappa modale

Nel caso di rotor 3D complessi i modi di vibrare (per il moto libero) e le deformate forzate (per il moto forzato) possono avere le forma più disparate, soprattutto quando i modi di vibrare sono "locali" e riguardano certe parti specifiche del sistema, ed è di conseguenza quasi impossibile classificarli. Qualche considerazione di carattere generale può essere comunque fatta anche nel caso 3D se consideriamo il moto di alcuni nodi di riferimento particolarmente importanti per comprendere il moto del rotore 3D (Fig. 166). Solitamente conviene prendere alcuni nodi rappresentativi  $\underline{G}_k$  per ogni generica sezione di interesse  $A(z_f)$  (con  $z_f = z_s$ ) del rotore 3D in modo da poter ricostruire il comportamento medio di tale sezione a livello flessionale, torsionale e assiale. A partire dai nodi rappresentativi  $\underline{G}_k = [u_k \ v_k \ w_k]^T$  della sezione  $A(z_f)$ , è possibile ricostruire (tramite semplici operazioni di media sugli spostamenti nodali dei nodi della sezione) il comportamento flessionale medio  $u_M, v_M, \theta_M, \psi_M$  della sezione sfruttando le componenti  $u_k, v_k, w_k$ , il comportamento torsionale medio  $\varphi_M$  della sezione a partire dalle componenti  $u_k, v_k$  e il comportamento assiale medio  $w_M$  della sezione a partire dalla componente  $w_k$ .

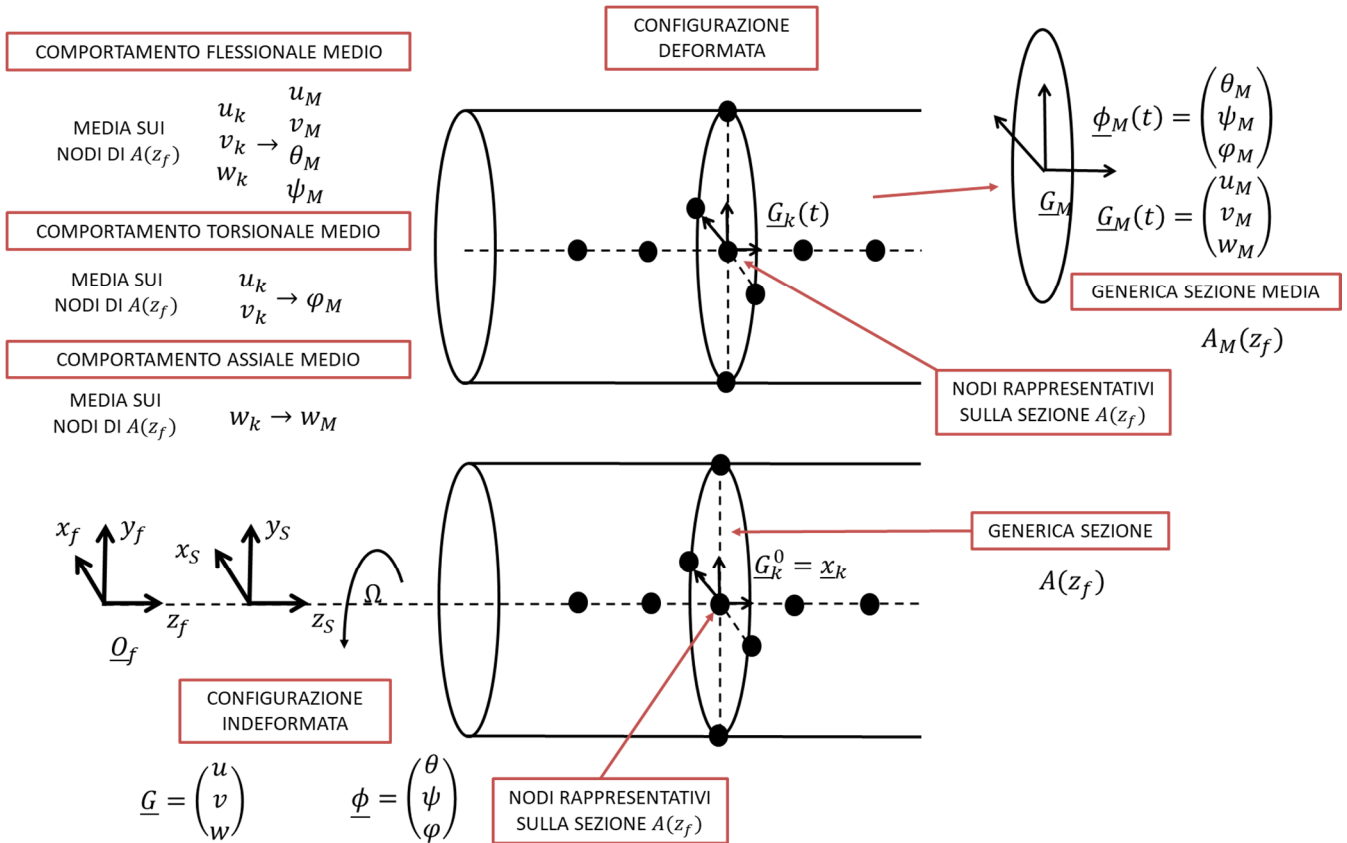


Figura 166 Comportamento medio della sezione

Ad esempio (ma esistono tecniche di ricostruzione ben più sofisticate!):

$$u_M = \frac{1}{N_{sezione}} \sum_{k=1}^{N_{sezione}} u_k, \quad v_M = \frac{1}{N_{sezione}} \sum_{k=1}^{N_{sezione}} v_k, \quad w_M = \frac{1}{N_{sezione}} \sum_{k=1}^{N_{sezione}} w_k \quad (10.8.1)$$

$$\theta_M = \frac{1}{N_{sezione}} \sum_{k=1}^{N_{sezione}} \text{atan}(w_k/y_k), \quad \psi_M = \frac{1}{N_{sezione}} \sum_{k=1}^{N_{sezione}} \text{atan}(-w_k/x_k),$$

$$\varphi_M = \frac{1}{N_{sezione}} \sum_{k=1}^{N_{sezione}} \text{atan}\left(\frac{u_k y_k - v_k x_k}{(x_k^2 + y_k^2)}\right).$$

Partiamo come sempre dalla soluzione dell'equazione:

$$M\ddot{q} + (\Omega G + C)\dot{q} + Kq = \underline{0}. \quad (10.8.2)$$

Come detto nel paragrafo 1.2, l'analisi ci dice che la soluzione libera (associata al moto libero) ha la forma:

$$q_l(t) = \sum_{j=1}^{2N} c_j q_j e^{s_j t} \quad N = 3 * NN \quad (10.8.3)$$

dove

$$s_{i,i+N} = -\zeta_i \omega_{ni} \pm j \omega_{ni} \sqrt{1 - \zeta_i^2} = -\zeta_i \omega_{ni} \pm j \omega_{pi}, \quad \underline{q}_i = \begin{pmatrix} \dots \\ q_{ik} \\ \dots \end{pmatrix}, \quad \underline{q}_{ik} = \begin{pmatrix} u_{ik} \\ v_{ik} \\ w_{ik} \end{pmatrix}, \quad \underline{q}_{i+N} = \bar{q}_i, \quad (10.8.4)$$

$$i = 1 \dots N, \quad k = 1 \dots NN$$

sono gli autovalori (associati alle pulsazioni proprie  $\omega_{pi}$ ) e gli autovettori del problema (associati alle deformate modali).

I modi di vibrare del sistema sono definiti invece come

$$\underline{q}_i(t) = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{q}_{ik}(t) \\ \dots \end{pmatrix} = Re(\underline{q}_i e^{s_i t}) = Re\left(\begin{pmatrix} \dots \\ \underline{q}_{ik} \\ \dots \end{pmatrix} e^{s_i t}\right) \quad \begin{pmatrix} u_{ik}(t) \\ v_{ik}(t) \\ w_{ik}(t) \end{pmatrix} = Re\left(\begin{pmatrix} u_{ik} \\ v_{ik} \\ w_{ik} \end{pmatrix} e^{s_i t}\right) \quad (10.8.5)$$

Si noti che il sistema ha  $2N$  autovalori ( $N$  coppie complesse coniugate),  $2N$  autovettori ( $N$  coppie complesse coniugate) e  $2N$  modi di vibrare ( $N$  coppie uguali). Di conseguenza le pulsazioni naturali / proprie e gli smorzamenti modali distinti saranno solamente  $N$ .

Come negli altri casi sia gli autovalori che gli autovettori del problema dipendono dal parametro  $\Omega$  (la velocità di rotazione / speed della macchina):

$$s_i(\Omega), \omega_{ni}(\Omega), \omega_{pi}(\Omega), \zeta_i(\Omega), \underline{q}_i(\Omega) \quad \text{con } \Omega \in [0 \quad \Omega_{max}]. \quad (10.8.6)$$

E' dunque molto importante capire a livello qualitativo questa dipendenza sia per il autovalori (tramite il diagramma di Campbell) che per gli autovettori (tramite lo studio del moto (whirl libero) e la classificazione modale). Si noti come lo studio degli autovettori (whirl e classificazione modale) sarà effettuato in modo semplificato facendo riferimento al comportamento medio del sezioni (in accordo con Fig. 166). Il tutto sarà infine riassunto dalla mappa modale.

Partendo dallo studio degli autovalori, si usa descrivere la dipendenza delle pulsazioni proprie o naturali  $\omega_{ni}(\Omega), \omega_{pi}(\Omega)$  e degli smorzamenti modali  $\zeta_i(\Omega)$  da  $\Omega$  in due diversi diagrammi Campbell (si veda la Fig. 167). In questo caso il sistema ha solamente  $N$  pulsazioni naturali / proprie e smorzamenti modali e quindi i diagrammi di Campbell sono formati da  $N$  rami.

Se infatti l'ipotesi di disaccoppiamento delle dinamiche flessionali, torsionali e assiali non è verificata, gli autovalori non formeranno purtroppo nessuna particolare struttura a grappoli. Nel migliore dei casi sarà possibile associare gli autovalori a dei modi prevalentemente flessionali (MPF) (se il moto flessionale sarà prevalente), a dei modi prevalentemente torsionali (MPT) (se il moto torsionale sarà prevalente) e a dei modi prevalentemente assiali (MPA) (se il moto assiali sarà prevalente). Se invece tali ipotesi sono verificate (si vedano i capitoli precedenti), gli autovalori relativi ai modi flessionali (a 4 DOF locali) tenderanno a raggrupparsi in grappoli di 4 mentre gli autovalori relativi ai modi torsionali (a 1 DOF locale) non formeranno nessun raggruppamento particolare (sono indipendenti tra loro o formano "grappoli di un solo elemento") così come gli autovalori relativi ai modi assiali (a 1 DOF locale).

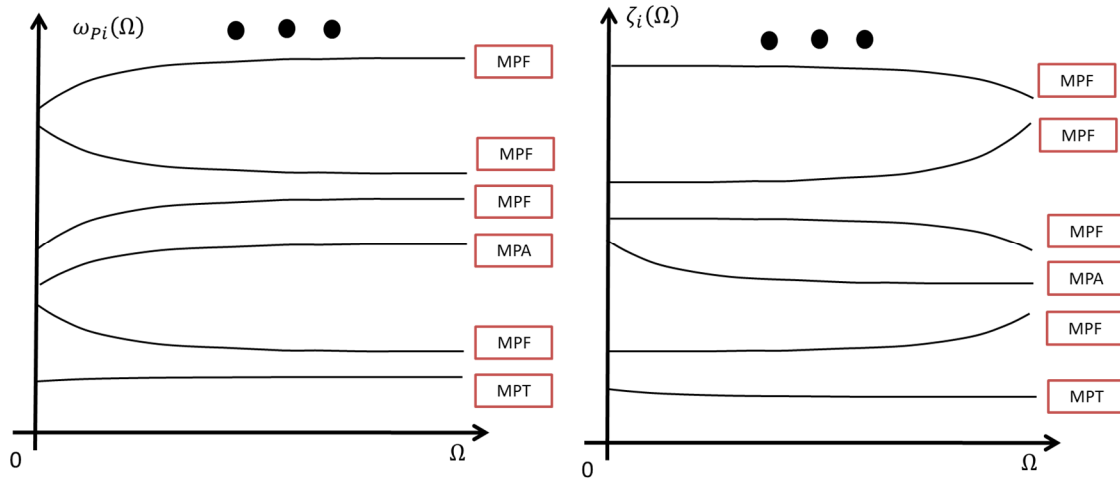


Figura 167 Diagramma di Campbell per il rotore elastico

Guardando alla Fig. 167 poco si può dire sul comportamento dei rami del diagramma di Campbell, se non che le pulsazioni naturali / proprie solitamente tendono a un valore asintotico per  $\Omega$  grandi mentre questo in genere non è vero per gli smorzamenti (a volte è vero per i modi prevalentemente torsionali MPT e assiali MPA). La tendenza dei rami dei diagrammi di Campbell a raggiungere velocemente un asintoto è come sempre più bassa se aumentano l'asimmetria e l'anisotropia degli elementi di forza (cuscini, tenute, etc.) e se aumentano gli effetti giroscopici  $\Omega G$ . Più questi fattori sono significativi, maggiore sono quindi la variabilità dei rami e la complicatezza del diagramma.

Si noti infine come, solitamente, i modi prevalentemente torsionali (MPT) sono caratterizzati da pulsazioni proprie più basse di quelli prevalentemente flessionali (MPF) e assiali (MPA).

Per quanto riguarda lo studio degli autovettori e il whirl libero, come detto a inizio paragrafo, tramite semplici operazioni di media, a partire dalla (10.8.4) è possibile ricostruire il comportamento medio della generica sezione  $A(z_f)$  del rotore 3D (relativo al generico modo di vibrare!):

$$\underline{G}_{Mi}(t) = \begin{pmatrix} u_{Mi}(t) \\ v_{Mi}(t) \\ w_{Mi}(t) \end{pmatrix}, \quad \underline{\Phi}_{Mi}(t) = \begin{pmatrix} \theta_{Mi}(t) \\ \psi_{Mi}(t) \\ \varphi_{Mi}(t) \end{pmatrix}, \quad \underline{q}_{Mi}(t) = \text{Re}(\underline{q}_{Mi}e^{s_i t}) = \begin{pmatrix} u_{Mi}(t) \\ v_{Mi}(t) \\ w_{Mi}(t) \\ \theta_{Mi}(t) \\ \psi_{Mi}(t) \\ \varphi_{Mi}(t) \end{pmatrix} = \text{Re} \left( \begin{pmatrix} u_{Mi} \\ v_{Mi} \\ w_{Mi} \\ \theta_{Mi} \\ \psi_{Mi} \\ \varphi_{Mi} \end{pmatrix} e^{s_i t} \right) \quad (10.8.7)$$

Il comportamento del modo può essere quindi approssimativamente pensato come la "composizione" della parte flessionale del modo, di quella torsionale e di quella assiale (Fig. 168):

$$\underline{q}_{Mfi}(t) = \begin{pmatrix} u_{Mi}(t) \\ v_{Mi}(t) \\ \theta_{Mi}(t) \\ \psi_{Mi}(t) \end{pmatrix} = \text{Re}(\underline{q}_{Mfi}e^{s_i t}) = \text{Re} \left( \begin{pmatrix} u_{Mi} \\ v_{Mi} \\ \theta_{Mi} \\ \psi_{Mi} \end{pmatrix} e^{s_i t} \right) \quad (10.8.8)$$

$$q_{Mai}(t) = w_{Mi}(t) = \text{Re}(w_{Mi}e^{s_i t}).$$

$$q_{Mti}(t) = \varphi_{Mi}(t) = \text{Re}(\varphi_{Mi}e^{s_i t}).$$

Naturalmente se tenderà a prevalere la parte flessionale avremo un modo prevalentemente flessionale (MPF), altrimenti ne avremo uno prevalentemente torsionale (MPT) o prevalentemente assiale (MPA). Dal momento che, grazie a quanto visto nei capitoli precedenti, già sappiamo come sono fatte le parti flessionali, torsionali e assiali del modo, potremo rappresentare la loro composizione come riportato in Fig.168 (relativamente al generico modo di vibrare!).

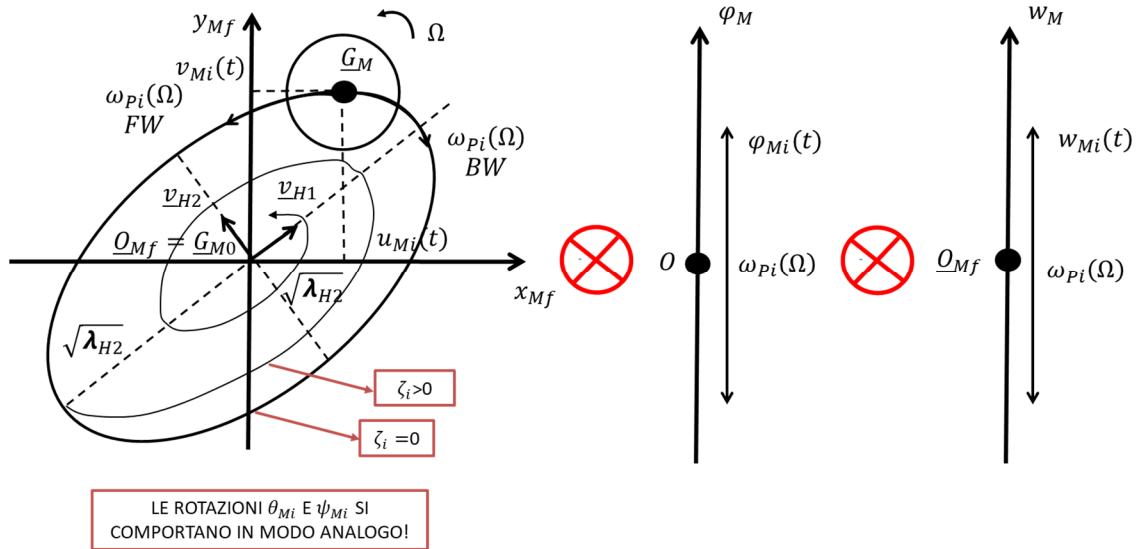


Figura 168 Whirl libero per la generica sezione (le componenti angolari  $\psi_{Mi}(t)$  e  $\theta_{Mi}(t)$  si comportano in modo analogo)

La rotazione del rotore avviene chiaramente alla pulsazione  $\Omega$  (la speed della macchina) mentre il moto di rivoluzione ellittico / a spirale della sezione media  $\underline{G}_M$  attorno all'asse  $z_{Mf}$  avviene alla pulsazione propria del modo in questione  $\omega_{Pi}(\Omega)$ .

Come sempre le fasi  $\varphi_{u_{Mi}}$ ,  $\varphi_{v_{Mi}}$  di  $u_{Mi}$  e  $v_{Mi}$  permettono di determinare se l'ellisse / spirale è percorsa in senso BW o FW. Se infatti vale la condizione

$$0 < \varphi_{v_{Mi}} - \varphi_{u_{Mi}} < \pi, \quad (10.8.9)$$

allora il modo è BW e l'ellisse / spirale sarà percorsa in senso BW. Se invece

$$-\pi < \varphi_{v_{Mi}} - \varphi_{u_{Mi}} < 0, \quad (10.8.10)$$

l'ellissi / spirale sarà percorsa in senso FW. Nel caso in cui  $\zeta_i > 0$  non abbiamo chiaramente più un'ellissi ma una spirale convergente verso lo zero.

Per quanto concerne infine la deformata modale, essa può essere nuovamente pensata come la composizione delle deformate modali associate alla parte flessionale del modo, a quella torsionale e a quella assiale. Se tenderà a prevalere la parte flessionale avremo un modo prevalentemente flessionale (MPF), altrimenti ne avremo uno prevalentemente torsionale (MPT) o prevalentemente assiale (MPA).

Poiché anche in questo caso, grazie a quanto visto nei capitoli precedenti, già sappiamo come sono fatte le deformate associate alle parti flessionali, torsionali e assiali del modo, e poiché le varie sezioni equivalenti del Prof. Enrico Meli, Dipartimento di Ingegneria Industriale, Università di Firenze



rotore 3D sono comunque soggette alla principio di coerenza modale (l'abero non è di gomma!), potremo rappresentare la loro composizione come riportato in Fig.169 (relativamente al generico modo di vibrare!).

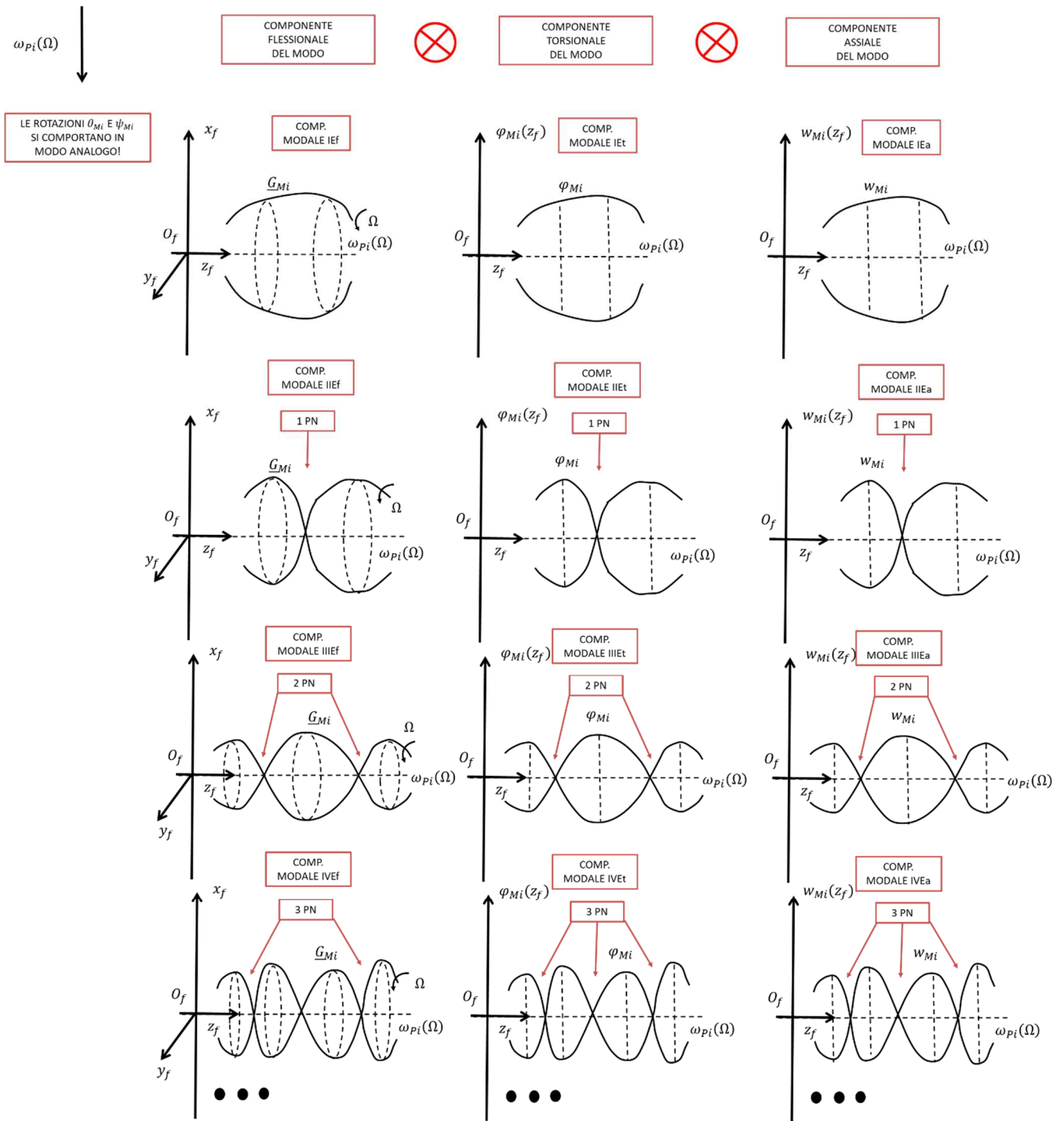


Figura 169 Classificazione modale per rotori elastici (le componenti angolari  $\psi_{Mi}(t)$  e  $\theta_{Mi}(t)$  si comportano in modo analogo)

Come si può notare dalla Fig. 169, ricordando quanto detto nei capitoli precedenti su vibrazioni flessionali torsionali e assiali, i modi di un rotore 3D possono essere piuttosto complessi e assumere molteplici forme. In generale in ogni modo di vibrare potrà essere individuata (anche se spesso è tutt'altro che evidente, soprattutto a colpo d'occhio!):

- una componente flessionale di tipo IEF, IIEF, IIIEF, etc. (a seconda dei punti nodali PN) avente a sua volta una caratteristica BW, FW, M1PI, M2PI, M3PI, etc. (a seconda dei punti di inversione PI);
- una componente torsionale di tipo IET, IIET, IIIET, etc. (a seconda dei punti nodali PN) avente a sua volta una caratteristica OPI, 1PI, 2PI, 3PI, etc. (a seconda dei punti di inversione PI);
- una componente assiale di tipo IEA, IIEA, IIIEA, etc. (a seconda dei punti nodali PN) avente a sua volta una caratteristica OPI, 1PI, 2PI, 3PI, etc. (a seconda dei punti di inversione PI).

Dal momento che, in teoria, ogni combinazione è possibile, le possibili deformate modali sono tantissime. Solitamente al crescere della pulsazione propria  $\omega_{Pi}(\Omega)$  crescono anche i punti nodali PN e i punti di inversione PI e quindi tendono a comparire deformate modale sempre più complesse.

Come detto in precedenza, la rotazione del rotore avviene chiaramente alla pulsazione  $\Omega$  (la speed della macchina) mentre i vari moti di oscillazione associati al modo (il moto di rivoluzione attorno all'asse  $z_f$  per la componente flessionale, il moto di rotazione attorno all'asse  $z_f$  per la componente torsionale e il moto di traslazione lungo l'asse  $z_f$  per la componente assiale) avvengono sempre alla stessa pulsazione propria  $\omega_{Pi}(\Omega)$  per tutte le sezioni medie equivalenti  $\underline{G}_M$  considerate. Ciò è coerente col fatto che la pulsazione associata al modo di vibrare in questione è sempre una e una sola, ovvero,  $\omega_{Pi}(\Omega)$ .

La rappresentazione dei modi riportata in Fig. 169 è valida a rigore nel caso in cui lo smorzamento modale sia nullo  $\zeta_i = 0$  ( $\omega_{Pi} = \omega_{ni}$ ). Come in precedenza, nel caso in cui lo smorzamento sia positivo  $\zeta_i > 0$ , i vari moti di oscillazione tenderanno a smorzarsi e a esaurirsi nel tempo.. A livello di stabilità passiamo di fatto da un polo semplicemente stabile (associato a un polo semplicemente stabile) a un modo asintoticamente stabile (associato a un polo asintoticamente stabile).

L'effetto della rigidità dei cuscinetti sulle deformate modali è analogo a quello visto per le vibrazioni flessionali e non verrà qui scritto nel dettaglio. Chiaramente, al crescere della rigidità dei cuscinetti rispetto a quella dell'albero, i nodi dell'albero in corrispondenza degli stessi sono sempre più attratti verso la loro posizione nominale (si muoveranno sempre meno). Di conseguenza le deformate forzate, in termini di sezioni medie, somiglieranno sempre più a quelle della trave incernierata agli estremi come nel caso flessionale.

Riportiamo per completezza in Fig. 169bis/ter un esempio di deformata modale completa includendo sia le componenti angolari  $\psi_{Mi}(t)$  e  $\theta_{Mi}(t)$  di basculamento della sezione media per la parte flessionale (prima non considerate esplicitamente perché meno importanti a livello ingegneristico e perché il loro comportamento qualitativo è identico a quello delle componenti spaziali  $u_{Mi}(t)$  e  $v_{Mi}(t)$ ) sia le componenti torsionali  $\varphi_{Mi}$  e assiali  $w_{Mi}$  medie della sezione. Nel caso dell'esempio abbiamo un modo flessionale IIEF spaziale (con 1PNftra e che potrà avere caratteristica BW, FW o M1PI) associato a un modo flessionale IIIEF rotazionale (con 2PNfrot e che potrà avere caratteristica BW, FW, M1PI, M2PI), associato a sua volta a un modo torsionale IIET (con 1PNt che potrà avere caratteristica OPI, 1PI), associato infine a un modo assiale IIET (con 1PNa che potrà avere caratteristica OPI, 1PI).

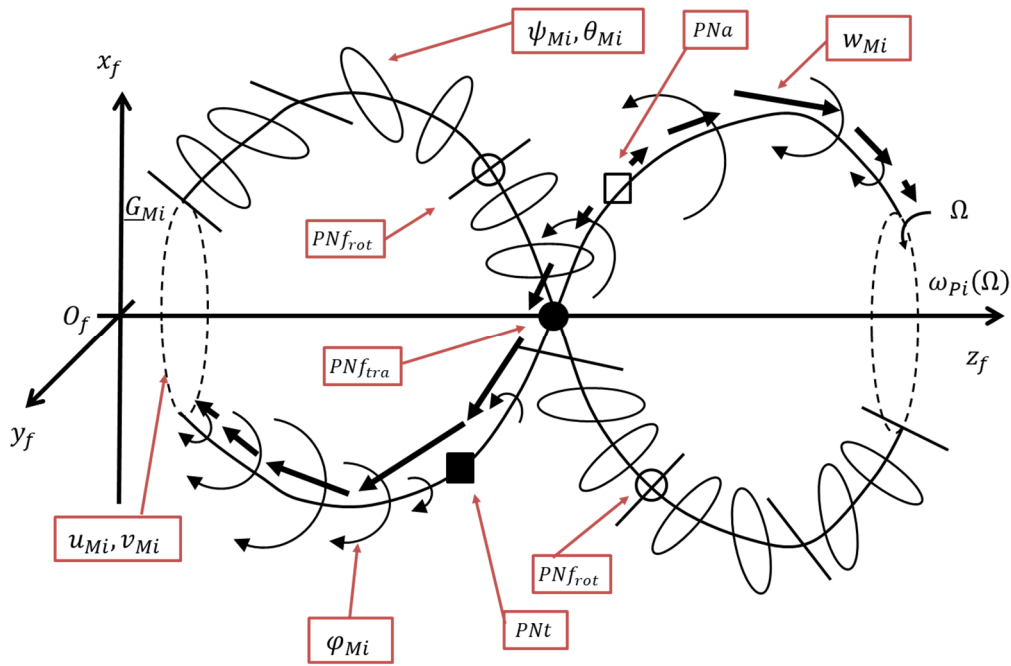


Figura 169bis Esempio di deformata modale per rotori elastici

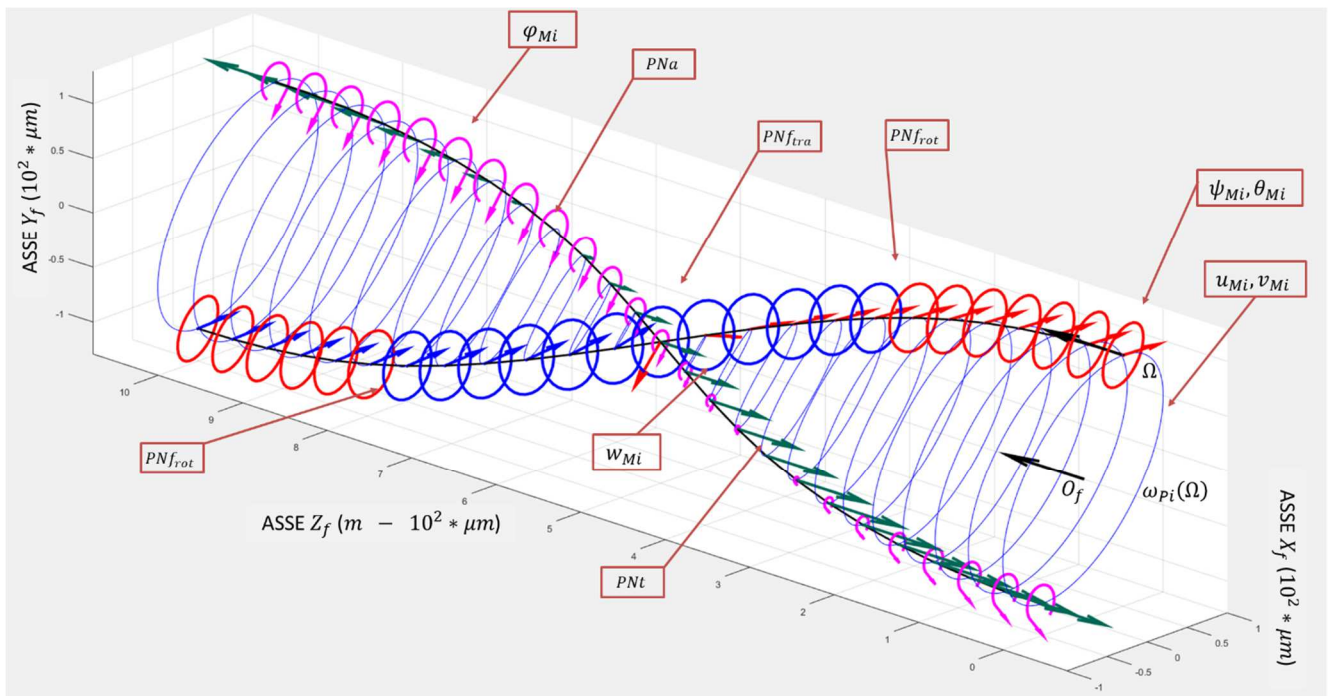


Figura 169ter Rappresentazione tipo software di deformata modale per rotori elastici

Tutto quanto è stato detto viene solitamente riassunto sulla mappa modale (vedi Fig. 170), ovvero un versione arricchita del diagramma di Campbell della pulsazioni proprie  $\omega_{pi}(\Omega)$ . Su ognuno dei rami dei vari grappoli del diagramma sono rappresentate, per ogni valore di  $\Omega$ , le forme modali che si manifestano sulla macchina considerata. Si noti inoltre che su ogni ramo, al variare di  $\Omega$ , possono esserci dei punti di transizione in cui la caratteristica del modo di vibrare cambia. La transizione può riguardare anche la natura del modo stesso.

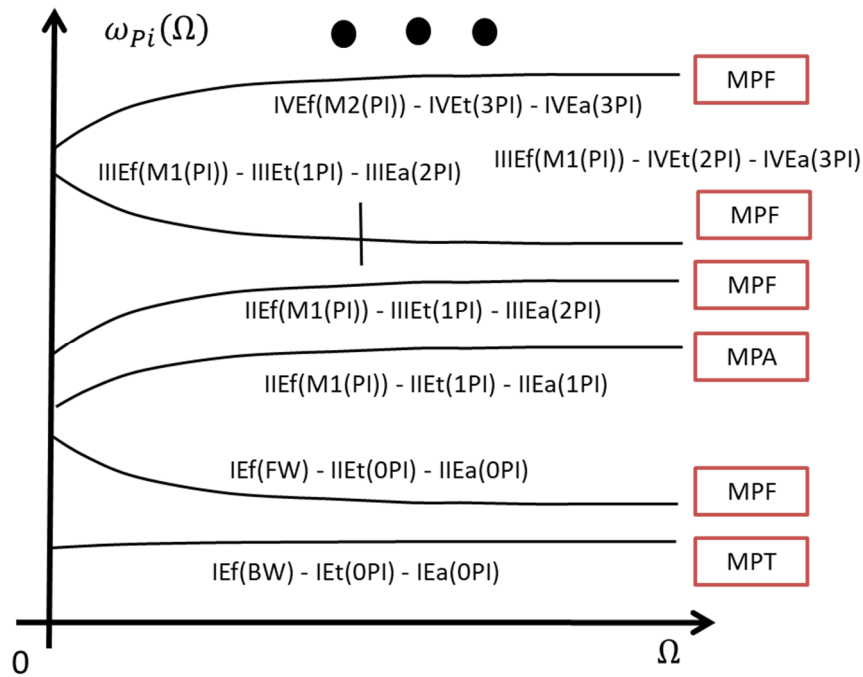


Figura 170 Mappa modale per rotori elastici

ELENCO RIASSUNTIVO DELLE VARIE DEFORMATE MODALI (IN TEORIA TUTTE LE COMBINAZIONE FLESSIONALI – TORSIONALI – ASSIALI SONO POSSIBILI):

- 1) FLESSIONALE
  - FORMA: IE  
CARATTERISTICA: BW, FW
  - FORMA: IIE  
CARATTERISTICA: BW, FW, M1PI
  - FORMA: IIIIE  
CARATTERISTICA: BW, FW, M1PI, M2PI
  - FORMA: IVE  
CARATTERISTICA: BW, FW, M1PI, M2PI, M3PI
  - ... ..
- 2) TORSIONALE
  - FORMA: IE  
CARATTERISTICA: OPI
  - FORMA: IIE  
CARATTERISTICA: OPI, 1PI
  - FORMA: IIIIE  
CARATTERISTICA: OPI, 1PI, 2PI
  - FORMA: IVE  
CARATTERISTICA: OPI, 1PI, 2PI, 3PI

- ... ..
- 3) ASSIALE
- FORMA: IE  
CARATTERISTICA: OPI
  - FORMA: IIE  
CARATTERISTICA: OPI, 1PI
  - FORMA: IIIE  
CARATTERISTICA: OPI, 1PI, 2PI
  - FORMA: IVE  
CARATTERISTICA: OPI, 1PI, 2PI, 3PI
- ... ..

## 10.9 Vibrazioni forzate: classificazione delle forzanti, diagrammi di Campbell, diagrammi di Bode e whirl forzato

### CLASSIFICAZIONE DELLE FORZANTI

Come nei casi precedenti, le principali forzanti che possono agire su una macchina rotante 3D sono le seguenti:

1) FORZANTE ARMONICA

$$\underline{Q}(t) = Re \left[ \underline{Q}_0(\Omega) e^{j\omega_f(\Omega)t} \right]. \quad \underline{Q}(t) = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{Q}_{0h}(t) \\ \dots \end{pmatrix}, \quad \underline{Q}_0(\Omega) = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{Q}_{0h} \\ \dots \end{pmatrix} \quad (10.9.1)$$

dove  $h = 1 \dots NN$  indica il generico nodo e  $Q_h(t)$  la generica azione su di esso agente. Se  $\omega_f(\Omega) = \Omega$  si parla di forzanti armoniche sincrone (prodotte ad esempio dagli sbilanciamenti presenti sul rotore), se  $\omega_f(\Omega) = n\Omega$  con  $n$  intero positivo o della forma  $1/m$  si parla di forzanti armoniche super/sub-sincrone (come ad esempio quelle derivanti dall'interazione palare (le forzanti di fluido), quelle derivanti da componenti come cuscini, giunti, riduttori, etc.), se  $\omega_f(\Omega) = \omega_f = cost$  si parla di forzanti armoniche asincrone (ad esempio vibrazione a pulsazione costante provenienti dal basamento). Infine, quando ho una dipendenza qualunque  $\omega_f(\Omega)$ , si parla di forzanti armoniche generiche (derivanti per esempio da motori elettrici, generatori o altre macchine interagenti con quella considerata).

2) FORZANTE PERIODICA

$$\underline{Q}(t) = Re \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \underline{Q}_k(\Omega) e^{jk\omega_0(\Omega)t} \right], \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}. \quad (10.9.2)$$

In questo caso la forzante periodica di periodo  $T$  è caratterizzata dalla sovrapposizione di un numero infinito numerabile di forzanti armoniche elementari a pulsazione  $k\omega_0(\Omega)$  (si veda la serie di Fourier). Si noti che la pulsazione principale  $\omega_0(\Omega)$  può dipendere dalla speed della macchina  $\Omega$  in uno qualunque dei modi descritti nel punto 1). Le forzanti periodiche sono anch'esse prodotte dall'interazione palare (le forzanti di fluido) e da componenti vari come cuscini, giunti, riduttori, etc.

3) FORZANTE GENERICA

$$\underline{Q}(t, \Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{\tilde{Q}}(\omega, \Omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad \underline{\tilde{Q}}(\omega, \Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{Q}(t, \Omega) e^{-j\omega t} dt \quad (10.9.3)$$

Nel caso di forzante generica, la forzante è la sovrapposizione di un numero infinito non numerabile di forzanti armoniche elementari di pulsazione  $\omega$ . In generale non è da escludere che anche lo spettro della forzante possa dipendere dalla speed della macchina  $\Omega$ :  $\underline{\tilde{Q}}(\omega, \Omega)$ . Anche in questo caso le forzanti generiche possono essere prodotte dall'interazione palare (le forzanti di fluido) e da componenti vari come cuscini, giunti, riduttori, etc. Si riporta in Fig. 98 un esempio di spettro di forzante generica, in questo caso una forzante simil-armonica. Si ricorda che nella realtà segnali armonici e periodici perfetti non esistono perché avrebbero un'energia infinita. Quando si misura una vibrazione armonica in realtà si misura un segnale simil-armonico avente uno spettro come quello riportato in Fig. 171.

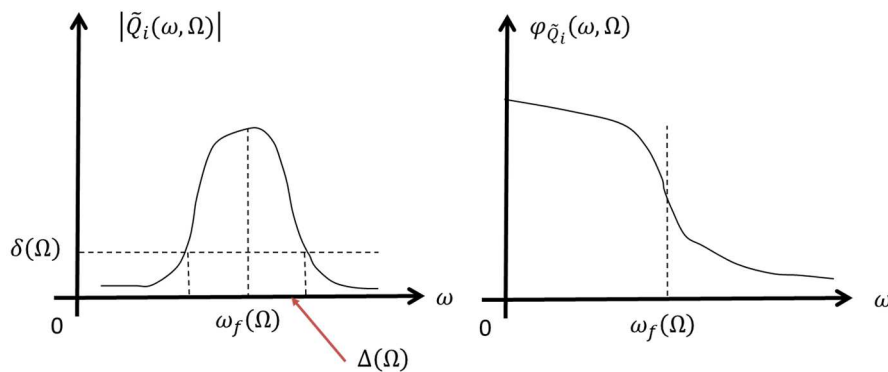


Figura 171 Esempio di spettro di forzante generica

**DIAGRAMMI DI CAMPBELL, DIAGRAMMI DI BODE e WHIRL**

1) FORZANTE ARMONICA SINCRONA:

$$M\underline{\ddot{q}} + (\Omega G + C)\underline{\dot{q}} + K\underline{q} = \underline{Q}(t) = \text{Re} \left[ \underline{Q}_0(\Omega) e^{j\Omega t} \right]. \quad (10.9.4)$$

Tra i vari tipi di forzante armonica sincrona ci occupiamo nuovamente di quella generata dallo sbilanciamento, essendo di gran lunga quello più importante a livello pratico:

$$M\underline{\ddot{q}} + (\Omega G + C)\underline{\dot{q}} + K\underline{q} = \underline{Q}_\varepsilon(t) = \text{Re} \left[ \underline{Q}_\varepsilon(\Omega) e^{j\Omega t} \right], \quad (10.9.5)$$

$$\underline{Q}_\varepsilon(t) = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{Q}_{\varepsilon h}(t) \\ \dots \end{pmatrix}, \quad \underline{Q}_\varepsilon(\Omega) = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{Q}_{\varepsilon h} \\ \dots \end{pmatrix}.$$

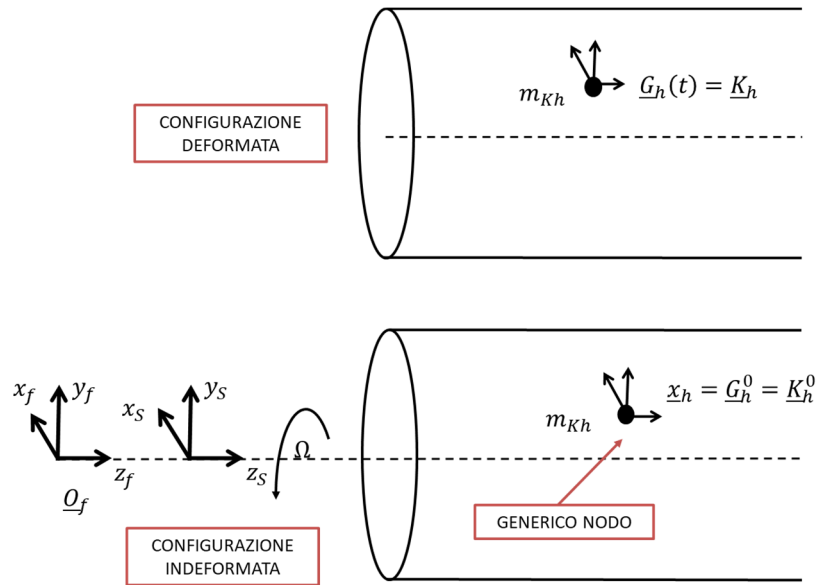


Figura 172 Rotore sbilanciato

Con riferimento alla Fig. 172, posiziono dunque lo sbilanciamento di massa  $m_{Kh}$  nel punto  $K_h$  coincidente con il nodo  $h$ -esimo  $\underline{G}_h$  e a esso solidale. La sua posizione nella terna associata alla componente rigida del moto del rotore 3D sarà dunque:

$$(\underline{G}_h - \underline{G}_{h0})_{G_{h0}} = (\underline{G}_h - \underline{G}_{h0})_S = \underline{G}_h(t) = \begin{pmatrix} u_h \\ v_h \\ w_h \end{pmatrix}, \quad \underline{G}_{h0S} = \begin{pmatrix} \varepsilon_h \cos(\delta_h) \\ \varepsilon_h \sin(\delta_h) \\ z_h \end{pmatrix} \quad (10.9.6)$$

dove  $\varepsilon_h$  è la distanza del punto dall'asse di rotazione  $h$ -esimo  $\underline{G}_{h0S}$  in configurazione indeformata e  $\delta_h$  è la sua fase.

A questo punto le azioni d'inerzia generate dallo sbilanciamento posto in  $K_h$  sul rotore possono essere calcolate in modo esatto come:

$$\begin{aligned} \underline{F}_{\varepsilon h}(t) &= -m_{Kh} \underline{a}_{KTh} - m_{Kh} \underline{a}_{KRh} - m_{Kh} \underline{a}_{KCh} = \\ &= -m_{Kh} \left[ \ddot{\underline{Q}}_S + \dot{\underline{\omega}}_{Sf} \times (\underline{G}_{hS} - \underline{O}_S)_f + \underline{\omega}_{Sf} \times (\underline{\omega}_{Sf} \times (\underline{G}_{hS} - \underline{O}_S)_f) \right] + \\ &\quad -m_{Kh} (\ddot{\underline{G}}_{hS})_f - 2m_{Kh} (\underline{\omega}_S \times \dot{\underline{G}}_{hS})_f. \end{aligned} \quad (10.9.7)$$

Si noti l'assenza del momento sbilanciante  $\underline{M}_{\varepsilon h}(t)$  poiché adesso lo sbilanciamento è un punto materiale privo di inerzia rotazionale (non c'è  $\sigma_{Kh}$ ) e poiché in questo caso  $\underline{K}_h = \underline{G}_h$ . Ricordando ora che

$$\underline{Q}_S = \begin{pmatrix} x_{os} \\ x_{os} \\ x_{os} \end{pmatrix} = \underline{0}, \quad \dot{\underline{Q}}_S = \begin{pmatrix} \dot{x}_{os} \\ \dot{y}_{os} \\ \dot{z}_{os} \end{pmatrix} = \underline{0}, \quad \underline{\phi}_S = \begin{pmatrix} \theta_{os} \\ \psi_{os} \\ \varphi_{os} = \Omega t \end{pmatrix} = \underline{0}, \quad \dot{\underline{\phi}}_S = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_{os} \\ \dot{\psi}_{os} \\ \dot{\varphi}_{os} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega = \text{cost} \end{pmatrix} \quad (10.9.8)$$

e trascurando i contributi elastici contenuti in

$$\underline{G}_h(t) = \begin{pmatrix} u_h \\ v_h \\ w_h \end{pmatrix}, \quad \dot{\underline{G}}_h(t) = \begin{pmatrix} \dot{u}_h \\ \dot{v}_h \\ \dot{w}_h \end{pmatrix}, \quad \ddot{\underline{G}}_h(t) = \begin{pmatrix} \ddot{u}_h \\ \ddot{v}_h \\ \ddot{w}_h \end{pmatrix} \quad (10.9.9)$$

rispetto ai contributi rigidi contenuti in  $\underline{G}_{h0S}$  (ovviamente nel calcolo delle azioni inerziali dovute allo sbilanciamento, non certo nelle equazioni di moto!) si ottiene finalmente:

$$\underline{Q}_{\varepsilon h}(t) = \underline{F}_{\varepsilon h}(t) = \Omega^2 \begin{pmatrix} m_{Kh} \varepsilon_h \cos(\Omega t + \delta_h) \\ m_{Kh} \varepsilon_h \sin(\Omega t + \delta_h) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10.9.10)$$

$$\underline{Q}_{\varepsilon h}(t) = -M_{Kh} \ddot{\underline{q}}_{\varepsilon h}, \quad \underline{q}_{\varepsilon h} = \begin{pmatrix} \varepsilon_h \cos(\Omega t + \delta_h) \\ \varepsilon_h \sin(\Omega t + \delta_h) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$M_{Kh} = \begin{pmatrix} m_{Kh} & 0 & 0 \\ 0 & m_{Kh} & 0 \\ 0 & 0 & m_{Kh} \end{pmatrix}.$$

Le componenti di  $\underline{Q}_{\varepsilon h}(t)$  danno la forza centrifuga prodotta dalla massa sbilanciante in  $K_h$ . Introducendo il classico formalismo complesso, si ha infine:

$$\underline{q}_{\varepsilon h} = \text{Re} \left[ \underline{q}_{\varepsilon oh} e^{j\Omega t} \right] = \text{Re} \left[ \begin{pmatrix} \varepsilon_h e^{j\delta_h} \\ -j\varepsilon_h e^{j\delta_h} \\ 0 \end{pmatrix} e^{j\Omega t} \right], \quad \underline{q}_{\varepsilon oh} = \begin{pmatrix} \varepsilon_h e^{j\delta_h} \\ -j\varepsilon_h e^{j\delta_h} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10.9.11)$$

da cui chiaramente si ha, sostituendo la (10.9.11) nella (10.9.10),

$$\underline{Q}_{\varepsilon h}(t) = \text{Re} \left[ \Omega^2 M_{Kh} \underline{q}_{\varepsilon oh} e^{j\Omega t} \right] = \text{Re} \left[ \Omega^2 \underline{b}_h e^{j\Omega t} \right], \quad \underline{b}_h = M_{Kh} \underline{q}_{\varepsilon oh}, \quad \underline{Q}_{\varepsilon h} = \Omega^2 \underline{b}_h, \quad (10.9.12)$$

$$\underline{Q}_{\varepsilon}(t) = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{Q}_{\varepsilon h}(t) \\ \dots \end{pmatrix} = \text{Re} \left[ \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{Q}_{\varepsilon h} \\ \dots \end{pmatrix} e^{j\Omega t} \right] = \text{Re} \left[ \begin{pmatrix} \dots \\ \Omega^2 \underline{b}_h \\ \dots \end{pmatrix} e^{j\Omega t} \right] = \text{Re} \left[ \Omega^2 \underline{b} e^{j\Omega t} \right] = \text{Re} \left[ \underline{Q}_{\varepsilon}(\Omega) e^{j\Omega t} \right].$$

Si nota infine che, non solo la forzante in questione è una forzante armonica sincrona, ma anche che, purtroppo, il suo modulo dipende da  $\Omega^2$  (cosa che era lecito aspettarsi in presenza di azioni inerziali centrifughe giroscopiche).

La soluzione del moto forzato del sistema può essere facilmente determinata grazie agli strumenti matematici introdotti nel capitolo 1 e si ha:

$$\underline{q}_f(t) = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{q}_h(t) \\ \dots \end{pmatrix} = \text{Re} \left[ \underline{q}_0 e^{j\Omega t} \right], \quad \underline{q}_h(t) = \begin{pmatrix} u_h(t) \\ v_h(t) \\ w_h(t) \end{pmatrix} \quad (10.9.13)$$

$$\underline{q}_0 = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{q}_{0h} \\ \dots \end{pmatrix} = \alpha(\Omega, \Omega) \underline{Q}_{\varepsilon}(\Omega) = \alpha(\Omega, \Omega) \Omega^2 \underline{b} = [-\Omega^2 M + j\Omega(C + \Omega G) + K]^{-1} \Omega^2 \underline{b}, \quad \underline{q}_{0h} = \begin{pmatrix} u_{0h} \\ v_{0h} \\ w_{0h} \end{pmatrix}$$

dove in questi casi è utile distinguere nella ricettanza  $\alpha(\Omega, \Omega)$  la doppia dipendenza dalla pulsazione della forzante e dalla velocità di rotazione della macchina (in questo caso uguali essendo la forzante armonica sincrona!).

Applicando il teorema di sovrapposizione modale in questo caso abbiamo:



$$\underline{q}_o = \alpha(\Omega, \Omega) \underline{Q}_\varepsilon(\Omega) = \sum_{k=1}^{2N} \frac{(q_{Rk} q_{Lk}^H)}{j\Omega - s_k} \Omega^2 \underline{b} = \Omega^2 \sum_{k=1}^{2N} \left( \frac{q_{Lk}^H \underline{b}}{j\Omega - s_k} \right) \underline{q}_{Rk} \quad (10.9.14)$$

da cui possiamo dedurre che i modi che maggiormente contribuiscono alla soluzione sono quelli in cui  $\left( \frac{q_{Lk}^H \underline{b}}{j\Omega - s_k} \right)$  è grande, ovvero quando  $\Omega$  è vicina a una delle pulsazioni proprie del sistema  $\omega_{pk}$  contenuta in  $s_k$  (corrispondenti alle risonanze del sistema) o quando  $q_{Lk}^H \underline{b}$  è grande (sbilanciamenti ortogonali al corrispondente autovettore).

Il diagramma di Campbell associato a questo caso è riportato in Fig. 173. Rispetto allo studio nel moto libero abbiamo aggiunto la curva del carico  $\omega_f(\Omega) = \Omega$  sul diagramma relativo alle pulsazioni proprie  $\omega_{pi}$ . Le intersezioni della curva del carico con i rami del diagramma  $\Omega_c$  sono come sempre le pulsazioni critiche. Come vedremo quando analizzeremo il diagramma di Bode, se la velocità angolare della macchina coincide con una pulsazione critica, il sistema si troverà necessariamente in risonanza, ovvero la forzante andrà inevitabilmente a sollecitare il sistema in una pulsazione di risonanza. Il valore di smorzamento modale associato alle varie pulsazioni critiche  $\zeta_c$  può essere facilmente trovato riportando la pulsazione critica in questione  $\Omega_c$  sul diagramma dello smorzamento.

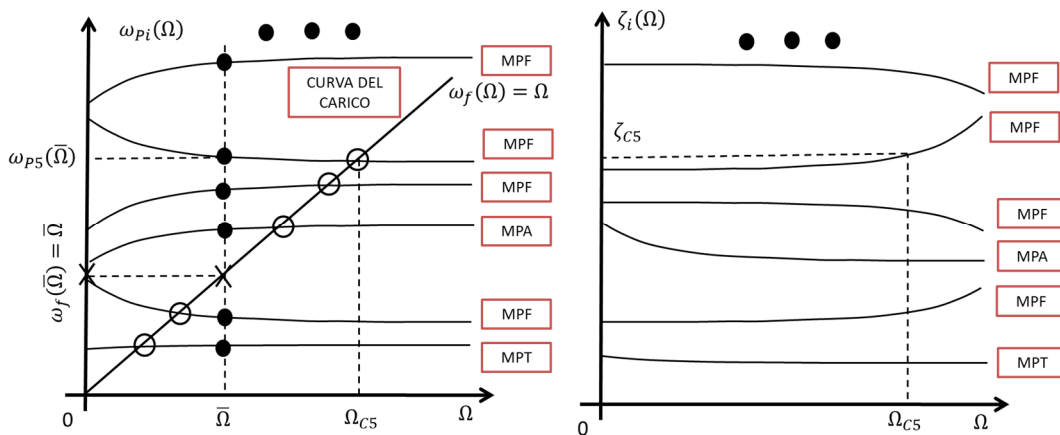


Figura 173 Diagramma di Campbell per rotore elastico con forzante armonica sincrona

Per capire quanto effettivamente vibra il sistema dobbiamo fare uso nuovamente dei diagrammi di Bode. A tale fine dobbiamo prima specificare una velocità di lavoro della macchina  $\bar{\Omega}$  alla quale studiare il sistema. Riporto quindi tale velocità  $\bar{\Omega}$  sul diagramma di Campbell; le intersezioni tra la retta verticale passante per  $\bar{\Omega}$  e i  $3 \cdot NN$  rami del diagramma delle pulsazioni proprie  $\omega_{pi}$  rappresentano le  $3 \cdot NN$  pulsazioni proprie del sistema coincidenti, a loro volta, le pulsazioni di risonanza del sistema. A questo punto, supponendo di voler trovare quanto vale lo spostamento lungo  $x$  del nodo  $h$ -esimo  $u_{0h}$  o della generica sezione media  $u_{M0}$  (nel dominio della frequenza), posso tracciare i rispettivi diagrammi (Fig. 174). Per determinare il modulo e la fase dello spostamento  $u_{0h}$  (o  $u_{M0}$ ) devo determinare sul diagramma di Bode il punto in cui agisce la forzante. Ma questo può essere dedotto dal diagramma di Campbell intersecando la curva del carico con la sezione verticale passante per  $\bar{\Omega}$  (si vedano sempre la Fig. 173 e la Fig. 174).

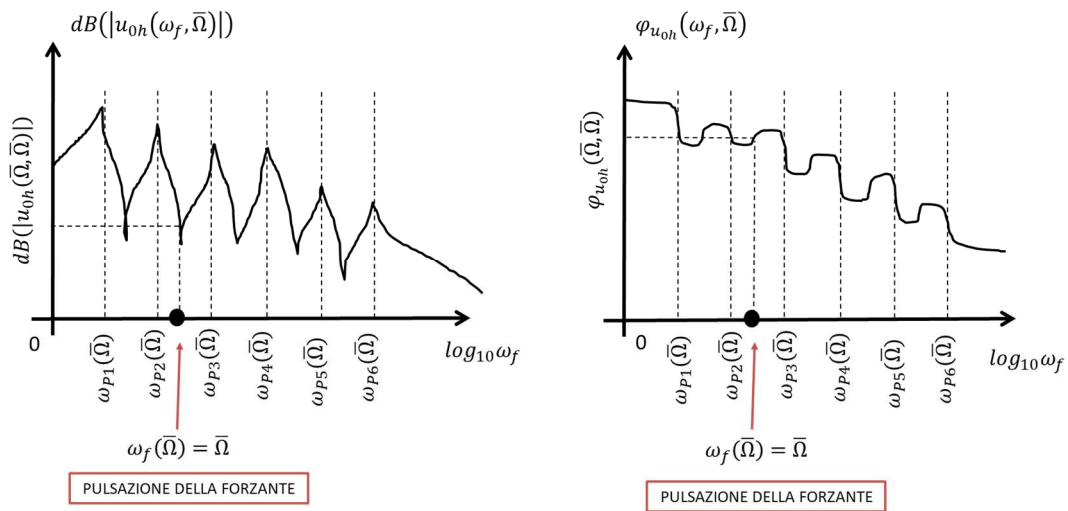


Figura 174 Diagramma di Bode per rotore elastico con forzante armonica sincrona

Guardando ai diagrammi di Campbell e di Bode, risulta ancora una volta chiaro il significato di pulsazione critica  $\Omega_c$ . Qualora infatti la pulsazione di lavoro della macchina  $\bar{\Omega}$  (la speed) si trovasse in corrispondenza di una critica  $\Omega_c$ , la pulsazione in cui la forzante agirebbe sulla macchina  $\omega_f(\bar{\Omega}) = \bar{\Omega}$  si troverebbe proprio in corrispondenza di una pulsazione propria  $\omega_{Pi}(\bar{\Omega})$  e quindi di una pulsazione di risonanza. Ci troveremmo quindi necessariamente in condizioni di massima amplificazione.

Per quanto riguarda lo studio delle deformate forzate e del whirl forzato, come detto a inizio paragrafo, tramite semplici operazioni di media, a partire dalla (10.9.13) è possibile ricostruire il comportamento medio della generica sezione  $A(z_f)$  del rotore 3D:

$$\underline{G}_M(t) = \begin{pmatrix} u_M(t) \\ v_M(t) \\ w_M(t) \end{pmatrix}, \quad \underline{\Phi}_M(t) = \begin{pmatrix} \theta_M(t) \\ \psi_M(t) \\ \varphi_M(t) \end{pmatrix}, \quad \underline{q}_M(t) = \text{Re}(\underline{q}_{M0} e^{j\Omega t}) = \begin{pmatrix} u_M(t) \\ v_M(t) \\ w_M(t) \\ \theta_M(t) \\ \psi_M(t) \\ \varphi_M(t) \end{pmatrix} = \text{Re} \left( \begin{pmatrix} u_{M0} \\ v_{M0} \\ w_{M0} \\ \theta_{M0} \\ \psi_{M0} \\ \varphi_{M0} \end{pmatrix} e^{j\Omega t} \right). \quad (10.9.15)$$

Il comportamento del moto di whirl forzato può essere quindi approssimativamente pensato come la “composizione” della parte flessionale del moto di whirl forzato, di quella torsionale e di quella assiale (Fig. 175):

$$\underline{q}_{Mf}(t) = \begin{pmatrix} u_M(t) \\ v_M(t) \\ \theta_M(t) \\ \psi_M(t) \end{pmatrix} = \text{Re}(\underline{q}_{Mf0} e^{j\Omega t}) = \text{Re} \left( \begin{pmatrix} u_{M0} \\ v_{M0} \\ \theta_{M0} \\ \psi_{M0} \end{pmatrix} e^{j\Omega t} \right) \quad (10.9.16)$$

$$q_{Ma}(t) = w_M(t) = \text{Re}(w_{M0} e^{j\Omega t}).$$

$$q_{Mt}(t) = \varphi_M(t) = \text{Re}(\varphi_{M0} e^{j\Omega t}).$$

Naturalmente se tenderà a prevalere la parte flessionale avremo un moto di whirl forzato prevalentemente flessionale (DFPF), altrimenti ne avremo uno prevalentemente torsionale (DFPT) o prevalentemente assiale (DFPA). Dal momento che, grazie a quanto visto nei capitoli precedenti, già sappiamo come sono fatte le parti Prof. Enrico Meli, Dipartimento di Ingegneria Industriale, Università di Firenze

flessionali, torsionali e assiali del moto di whirl forzato, potremo rappresentare la loro composizione come riportato in Fig. 175.

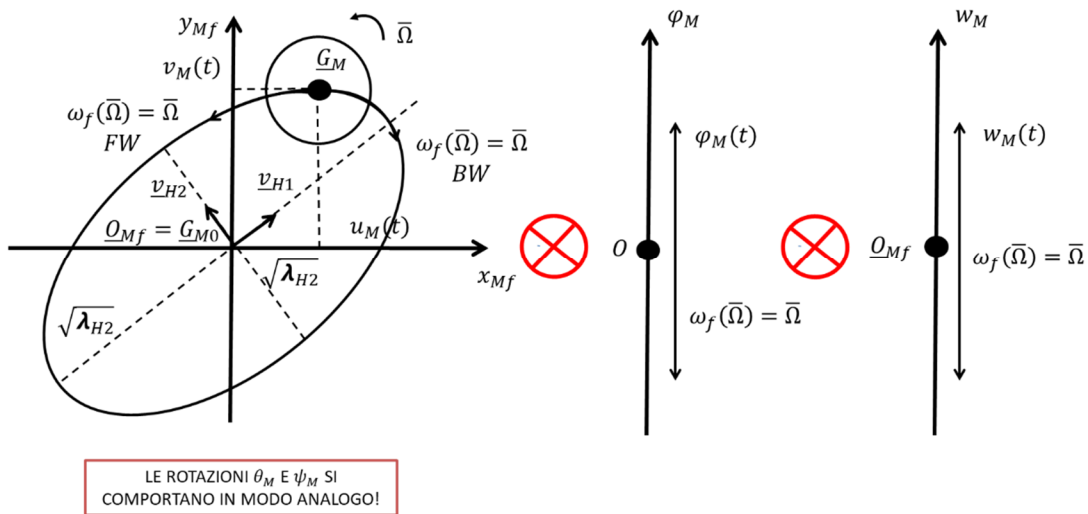


Figura 175 Whirl forzato per la generica sezione (le componenti angolari  $\psi_M(t)$  e  $\theta_M(t)$  si comportano in modo analogo)

La rotazione del rotore avviene chiaramente alla pulsazione  $\Omega$  (la speed della macchina) mentre il moto di rivoluzione ellittico della sezione media  $\underline{G}_M$  attorno all'asse  $z_{Mf}$  avviene sempre alla pulsazione della forzante in questione  $\omega_f(\bar{\Omega}) = \bar{\Omega}$ .

Come sempre le fasi  $\varphi_{u_{M0}}$ ,  $\varphi_{v_{M0}}$  di  $u_{M0}$  e  $v_{M0}$  permettono di determinare se l'ellisse è percorsa in senso BW o FW. Se infatti vale la condizione

$$0 < \varphi_{v_{M0}} - \varphi_{u_{M0}} < \pi, \quad (10.9.17)$$

allora il modo è BW e l'ellisse sarà percorsa in senso BW. Se invece

$$-\pi < \varphi_{v_{M0}} - \varphi_{u_{M0}} < 0, \quad (10.9.18)$$

l'ellissi sarà percorsa in senso FW.

Si noti come, al contrario del moto libero, non essendo presente il termine esponenziale dovuto allo smorzamento, la traiettoria sarà sempre un'oscillazione pura a prescindere dal valore dello smorzamento stesso (ovvero non si esaurirà mai). Se sono vicino a una risonanza e/o lo smorzamento modale è in generale piccolo, allora le dimensioni di tale oscillazione saranno più grandi, altrimenti saranno più piccole.

Per quanto concerne infine la deformata forzata, essa può essere nuovamente pensata come la composizione delle deformate forzate associate alla parte flessionale del modo, a quella torsionale e a quella assiale. Se tenderà a prevalere la parte flessionale avremo una deformata forzata prevalentemente flessionale (MPF), altrimenti ne avremo una prevalentemente torsionale (MPT) o prevalentemente assiale (MPA).

Poiché anche in questo caso, grazie a quanto visto nei capitoli precedenti, già sappiamo come sono fatte le deformate forzate associate alle parti flessionali, torsionali e assiali del modo, e poiché le varie sezioni equivalenti del rotore 3D sono comunque soggette al principio di coerenza modale (l'albero non è di gomma!), potremo rappresentare la loro composizione come riportato in Fig.176.

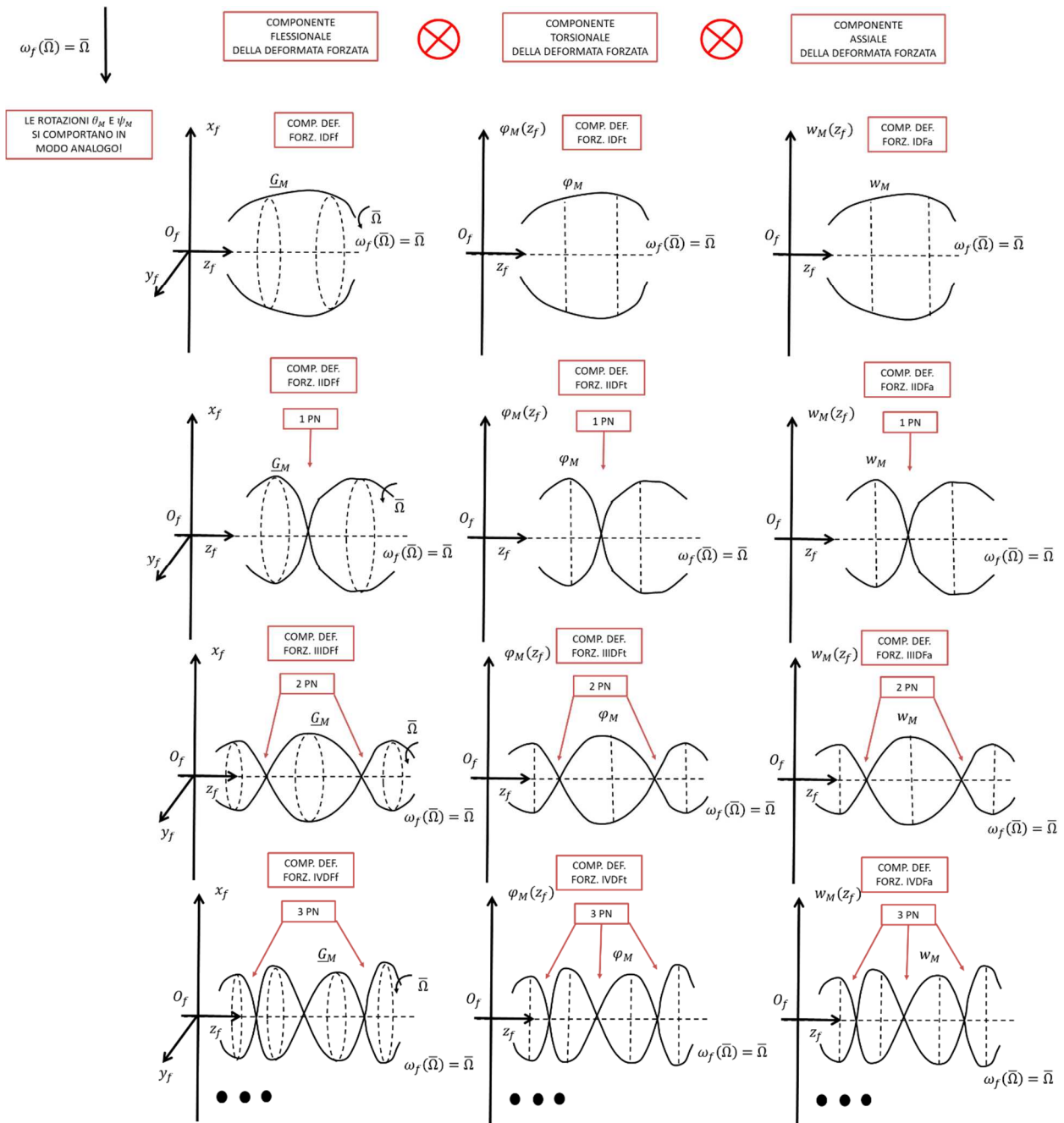


Figura 176 Deformate forzate per rotori elastici (le componenti angolari  $\psi_M(t)$  e  $\theta_M(t)$  si comportano in modo analogo)

Come si può notare dalla Fig. 176, ricordando quanto detto nei capitoli precedenti su vibrazioni flessionali torsionali e assiali, le deformate forzate di un rotore 3D possono essere piuttosto complesse e assumere molteplici forme. In generale in ogni deformata forzata potrà essere individuata (anche se spesso è tutt'altro che evidente, soprattutto a colpo d'occhio!):

- una componente flessionale di tipo IDFF, IIDFf, IIIDFf, etc. (a seconda dei punti nodali PN) avente a sua volta una caratteristica BW, FW, M1PI, M2PI, M3PI, etc. (a seconda dei punti di inversione PI);
- una componente torsionale di tipo IDFt, IIDFt, IIIDFt, etc. (a seconda dei punti nodali PN) avente a sua volta una caratteristica OPI, 1PI, 2PI, 3PI, etc. (a seconda dei punti di inversione PI);

- una componente assiale di tipo IDFa, IIDFa, IIIDFa, etc. (a seconda dei punti nodali PN) avente a sua volta una caratteristica OPI, 1PI, 2PI, 3PI, etc. (a seconda dei punti di inversione PI).

Dal momento che, in teoria, ogni combinazione è possibile, le possibili deformate forzate sono tantissime. Solitamente al crescere della pulsazione della forzante  $\omega_f(\bar{\Omega}) = \bar{\Omega}$  crescono anche i punti nodali PN e i punti di inversione PI e quindi tendono a comparire deformate forzate sempre più complesse.

Come detto in precedenza, la rotazione del rotore avviene chiaramente alla pulsazione  $\Omega$  (la speed della macchina) mentre i vari moti di oscillazione associati alle deformate forzate (il moto di rivoluzione attorno all'asse  $z_f$  per la componente flessionale, il moto di rotazione attorno all'asse  $z_f$  per la componente torsionale e il moto di traslazione lungo l'asse  $z_f$  per la componente assiale) avvengono sempre alla pulsazione della forzante  $\omega_f(\bar{\Omega}) = \bar{\Omega}$  per tutte le sezioni medie equivalenti  $\underline{G}_M$  considerate. Ciò è coerente col fatto che la pulsazione associata al modo di vibrare in questione è sempre una e una sola, ovvero,  $\omega_f(\bar{\Omega}) = \bar{\Omega}$ .

Nella rappresentazione delle deformate forzate riportata in Fig. 176, al contrario del moto libero, i vari moti di oscillazione saranno sempre delle oscillazioni pure a prescindere dal valore dello smorzamento stesso (ovvero non si esauriranno mai). Se sono vicino a una risonanza e/o lo smorzamento modale è in generale piccolo, allora le dimensioni di tali oscillazioni saranno più grandi, altrimenti saranno più piccole.

Riportiamo per completezza in Fig. 176bis/ter un esempio di deformata forzata completa includendo sia le componenti angolari  $\psi_M(t)$  e  $\theta_M(t)$  di basculamento della sezione media per la parte flessionale (prima non considerate esplicitamente perché meno importanti a livello ingegneristico e perché il loro comportamento qualitativo è identico a quello delle componenti spaziali  $u_M(t)$  e  $v_M(t)$ ) sia le componenti torsionali  $\varphi_M$  e assiali  $w_M$  medie della sezione. Nel caso dell'esempio abbiamo una deformata forzata flessionale IIDFf spaziale (con 1PNftra e che potrà avere caratteristica BW, FW o M1PI) associata a una deformata forzata flessionale IIIDFf rotazionale (con 2PNfrot e che potrà avere caratteristica BW, FW, M1PI, M2PI), associata a sua volta a una deformata forzata torsionale IIDFt (con 1PNt che potrà avere caratteristica OPI, 1PI), associato infine a una deformata forzata assiale IIDFt (con 1PNa che potrà avere caratteristica OPI, 1PI).

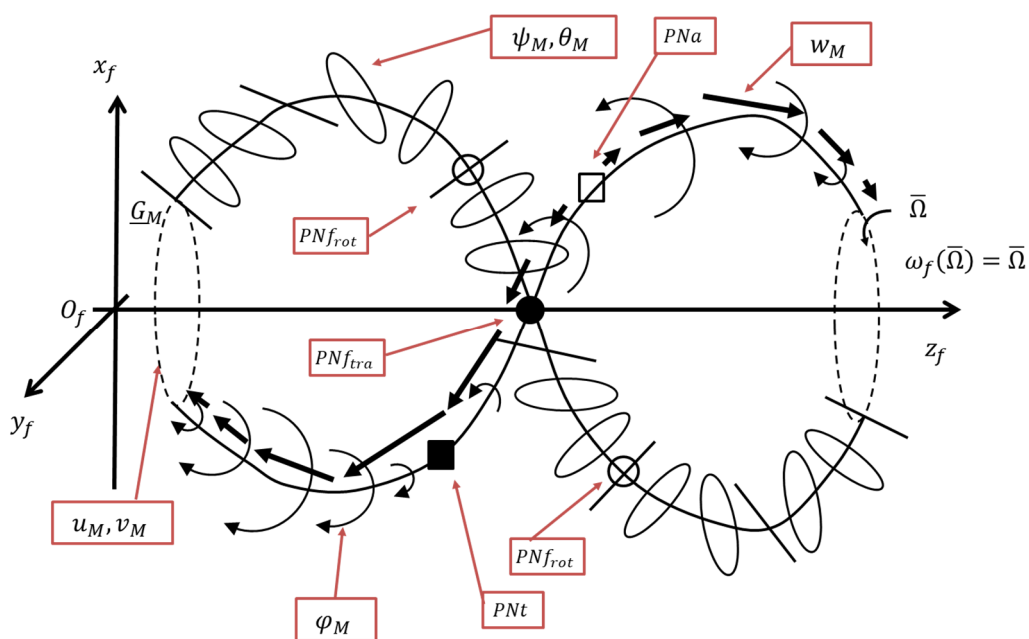


Figura 176bis Esempio di deformata modale per rotorii elastici

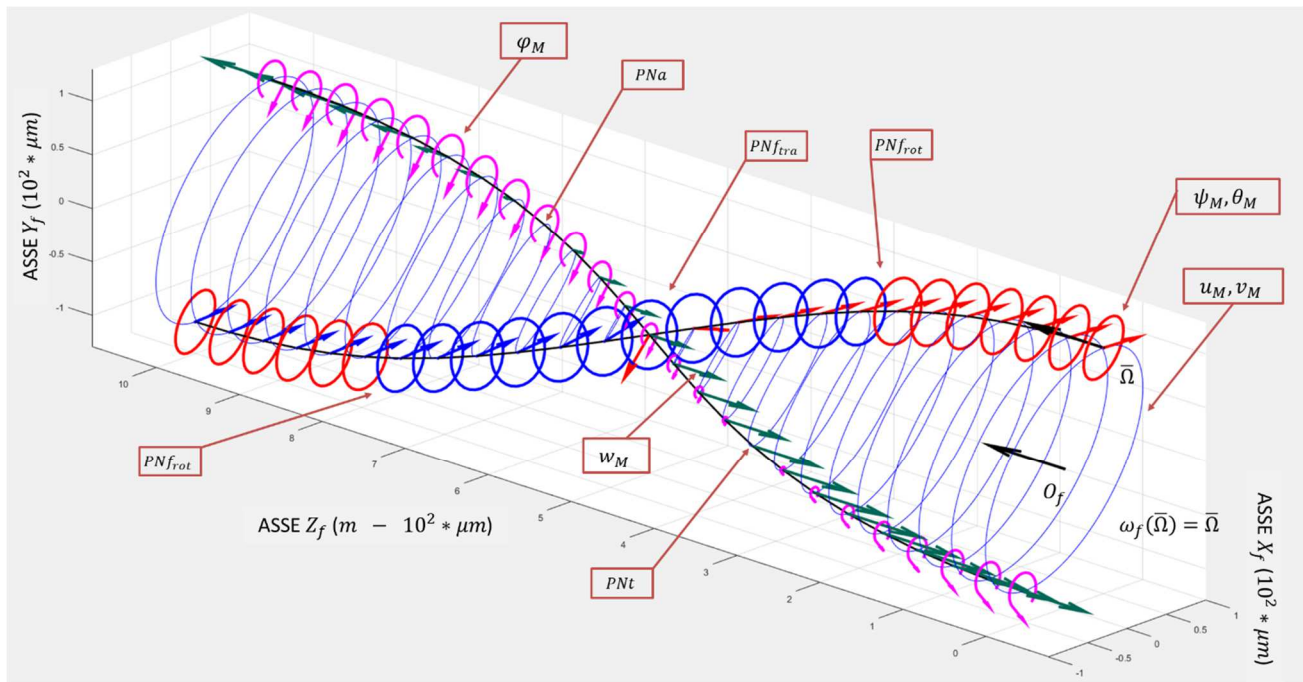


Figura 176ter Rappresentazione di deformata forzata tipo software per rotori elastici

ELENCO RIASSUNTIVO DELLE VARIE DEFORMATE FORZATE (IN TEORIA TUTTE LE COMBINAZIONE FLESSIONALI – TORSIONALI – ASSIALI SONO POSSIBILI):

- 1) FLESSIONALE
  - FORMA: IDF
  - CARATTERISTICA: BW, FW
  - FORMA: IIDF
  - CARETTERISTICA: BW, FW, M1PI
  - FORMA: IIIDF
  - CARETTERISTICA: BW, FW, M1PI, M2PI
  - FORMA: IVDF
  - CARETTERISTICA: BW, FW, M1PI, M2PI, M3PI
  - ... ..
- 2) TORSIONALE
  - FORMA: IDF
  - CARATTERISTICA: OPI
  - FORMA: IIDF
  - CARETTERISTICA: OPI, 1PI
  - FORMA: IIIDF
  - CARETTERISTICA: OPI, 1PI, 2PI
  - FORMA: IVDF

CARETTERISTICA: OPI, 1PI, 2PI, 3PI

... ..

3) ASSIALE

- FORMA: IDF

CARATTERISTICA: OPI

- FORMA: IIDF

CARETTERISTICA: OPI, 1PI

- FORMA: IIIDF

CARETTERISTICA: OPI, 1PI, 2PI

- FORMA: IDF

CARETTERISTICA: OPI, 1PI, 2PI, 3PI

... ..

2) FORZANTE ARMONICA SUPER /SUB-SINCRONA:

$$M\ddot{\underline{q}} + (\Omega G + C)\dot{\underline{q}} + K\underline{q} = \underline{Q}(t) = \text{Re} \left[ \underline{Q}_0(\Omega) e^{jn\Omega t} \right]. \quad (10.9.19)$$

$$\underline{Q}(t) = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{Q}_h(t) \\ \dots \end{pmatrix}, \quad \underline{Q}_0(\Omega) = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{Q}_{0h} \\ \dots \end{pmatrix}.$$

La soluzione del moto forzato del sistema può essere facilmente determinata grazie agli strumenti matematici introdotti nel capitolo 1 e si ha:

$$\underline{q}_f(t) = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{q}_h(t) \\ \dots \end{pmatrix} = \text{Re} \left[ \underline{q}_0 e^{jn\Omega t} \right], \quad \underline{q}_h(t) = \begin{pmatrix} u_h(t) \\ v_h(t) \\ w_h(t) \end{pmatrix} \quad (10.9.20)$$

$$\underline{q}_0 = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{q}_{0h} \\ \dots \end{pmatrix} = \alpha(n\Omega, \Omega) \underline{Q}_0(\Omega) = [-n^2\Omega^2 M + jn\Omega(C + \Omega G) + K]^{-1} \underline{Q}_0(\Omega), \quad \underline{q}_{0h} = \begin{pmatrix} u_{0h} \\ v_{0h} \\ w_{0h} \end{pmatrix}$$

dove in questi casi è utile distinguere nella ricettanza  $\alpha(n\Omega, \Omega)$  la doppia dipendenza dalla pulsazione della forzante e dalla velocità di rotazione della macchina.

Applicando il teorema di sovrapposizione modale in questo caso abbiamo:

$$\underline{q}_0 = \alpha(n\Omega, \Omega) \underline{Q}_0(\Omega) = \sum_{k=1}^{2N} \frac{(q_{Rk} q_{Lk}^H)}{jn\Omega - s_k} \underline{Q}_0(\Omega) = \sum_{k=1}^{2N} \left( \frac{q_{Lk}^H \underline{Q}_0}{jn\Omega - s_k} \right) \underline{q}_{Rk} \quad (10.9.21)$$

da cui possiamo dedurre che i modi che maggiormente contribuiscono alla soluzione sono quelli in cui  $\left( \frac{q_{Lk}^H \underline{Q}_0}{jn\Omega - s_k} \right)$  è grande, ovvero quando  $n\Omega$  è vicina a una delle pulsazioni proprie del sistema  $\omega_{Pk}$  contenuta in  $s_k$  (corrispondenti alle risonanze del sistema) o quando  $q_{Lk}^H \underline{Q}_0$  è grande (forzanti ortogonali al corrispondente autovettore).

Il diagramma di Campbell associato a questo caso è riportato in Fig. 177. Rispetto allo studio nel moto libero abbiamo aggiunto la curva del carico  $\omega_f(\Omega) = n\Omega$  sul diagramma relativo alle pulsazioni proprie  $\omega_{pi}$ . Le intersezioni della curva del carico con i rami del diagramma  $\Omega_c$  sono ancora una volta le pulsazioni critiche. E' utile osservare come il caso di forzante armonica super-sincrona sia più problematico del caso di forzante armonica sub-sincrona in quanto una retta di carico più inclinata genera un maggior numero di pulsazioni critiche all'interno del range di velocità di lavoro della macchina (ovvero di intersezioni tra la retta di carico e i rami del diagramma). Il valore di smorzamento modale associato alle varie pulsazioni critiche  $\zeta_c$  può essere facilmente trovato riportando la pulsazione critica in questione  $\Omega_c$  sul diagramma dello smorzamento.

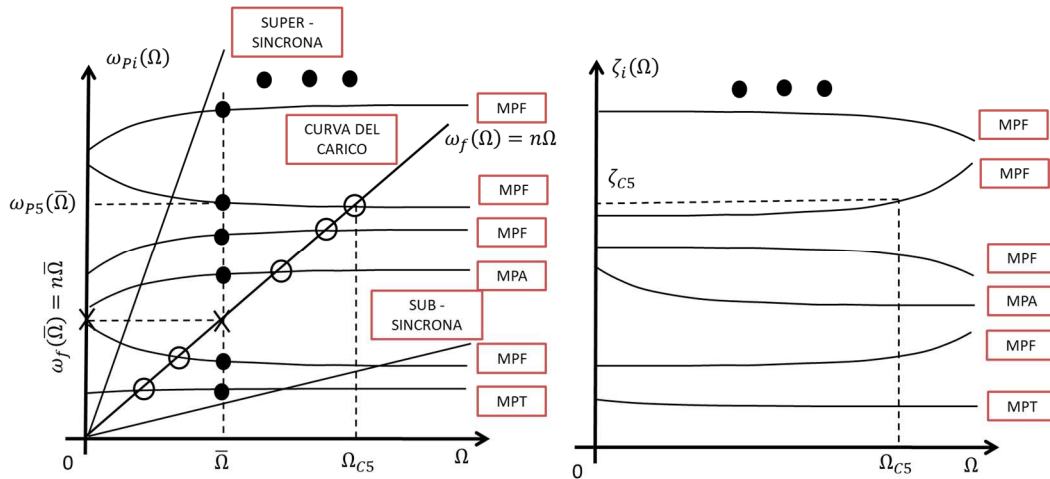


Figura 177 Diagramma di Campbell per rotore elastico con forzante armonica sub/super-sincrona

Per capire quanto effettivamente vibra il sistema dobbiamo fare uso nuovamente dei diagrammi di Bode. A tale fine dobbiamo prima specificare una velocità di lavoro della macchina  $\bar{\Omega}$  alla quale studiare il sistema. Riporto quindi tale velocità  $\bar{\Omega}$  sul diagramma di Campbell; le intersezioni tra la retta verticale passante per  $\bar{\Omega}$  e i  $3 * NN$  rami del diagramma delle pulsazioni proprie  $\omega_{pi}$  rappresentano le  $3 * NN$  pulsazioni proprie del sistema coincidenti, a loro volta, le pulsazioni di risonanza del sistema. A questo punto, supponendo di voler trovare quanto vale lo spostamento lungo  $x$  del nodo  $h$ -esimo  $u_{0h}$  o della generica sezione media  $u_{M0}$  (nel dominio della frequenza), posso tracciare i rispettivi diagrammi (Fig. 178). Per determinare il modulo e la fase dello spostamento  $u_{0h}$  (o  $u_{M0}$ ) devo determinare sul diagramma di Bode il punto in cui agisce la forzante. Ma questo può essere dedotto dal diagramma di Campbell intersecando la curva del carico con la sezione verticale passante per  $\bar{\Omega}$  (si vedano sempre la Fig. 177 e la Fig. 178).



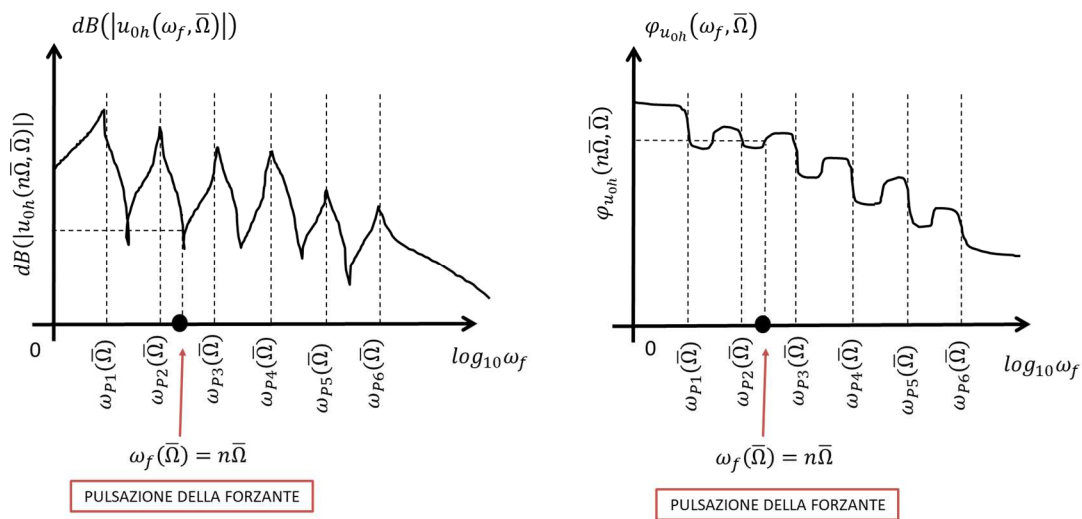


Figura 178 Diagramma di Bode per rotore elastico con forzante armonica sub/super-sincrona

Guardando ai diagrammi di Campbell e di Bode, risulta chiaro il significato di pulsazione critica  $\Omega_c$ . Qualora infatti la pulsazione di lavoro della macchina  $\bar{\Omega}$  (la speed) si trovasse in corrispondenza di una critica  $\Omega_c$ , la pulsazione in cui la forzante agirebbe sulla macchina  $\omega_f(\bar{\Omega}) = n\bar{\Omega}$  si troverebbe proprio in corrispondenza di una pulsazione propria  $\omega_{P_i}(\bar{\Omega})$  e quindi di una pulsazione di risonanza. Ci troveremmo quindi necessariamente in condizioni di massima amplificazione.

Per quanto riguarda lo studio delle deformate forzate e del whirl forzato, come detto a inizio paragrafo, tramite semplici operazioni di media, a partire dalla (10.9.20) è possibile ricostruire il comportamento medio della generica sezione  $A(z_f)$  del rotore 3D:

$$\underline{G}_M(t) = \begin{pmatrix} u_M(t) \\ v_M(t) \\ w_M(t) \end{pmatrix}, \quad \underline{\Phi}_M(t) = \begin{pmatrix} \theta_M(t) \\ \psi_M(t) \end{pmatrix}, \quad \underline{q}_M(t) = \text{Re}(\underline{q}_{M0}e^{jn\Omega t}) = \begin{pmatrix} u_M(t) \\ v_M(t) \\ w_M(t) \\ \theta_M(t) \\ \psi_M(t) \\ \varphi_M(t) \end{pmatrix} = \text{Re} \left( \begin{pmatrix} u_{M0} \\ v_{M0} \\ w_{M0} \\ \theta_{M0} \\ \psi_{M0} \\ \varphi_{M0} \end{pmatrix} e^{jn\Omega t} \right). \quad (10.9.22)$$

Il comportamento del moto di whirl forzato può essere quindi approssimativamente pensato come la “composizione” della parte flessionale del moto di whirl forzato, di quella torsionale e di quella assiale (Fig. 179):

$$\underline{q}_{Mf}(t) = \begin{pmatrix} u_M(t) \\ v_M(t) \\ \theta_M(t) \\ \psi_M(t) \end{pmatrix} = \text{Re}(\underline{q}_{Mf0}e^{jn\Omega t}) = \text{Re} \left( \begin{pmatrix} u_{M0} \\ v_{M0} \\ \theta_{M0} \\ \psi_{M0} \end{pmatrix} e^{jn\Omega t} \right) \quad (10.9.23)$$

$$q_{Ma}(t) = w_M(t) = \text{Re}(w_{M0}e^{jn\Omega t}).$$

$$q_{Mt}(t) = \varphi_M(t) = \text{Re}(\varphi_{M0}e^{jn\Omega t}).$$

Naturalmente se tenderà a prevalere la parte flessionale avremo un moto di whirl forzato prevalentemente flessionale (DFPF), altrimenti ne avremo uno prevalentemente torsionale (DFPT) o prevalentemente assiale (DFPA). Dal momento che, grazie a quanto visto nei capitoli precedenti, già sappiamo come sono fatte le parti flessionali, torsionali e assiali del moto di whirl forzato, potremo rappresentare la loro composizione come riportato in Fig. 179.

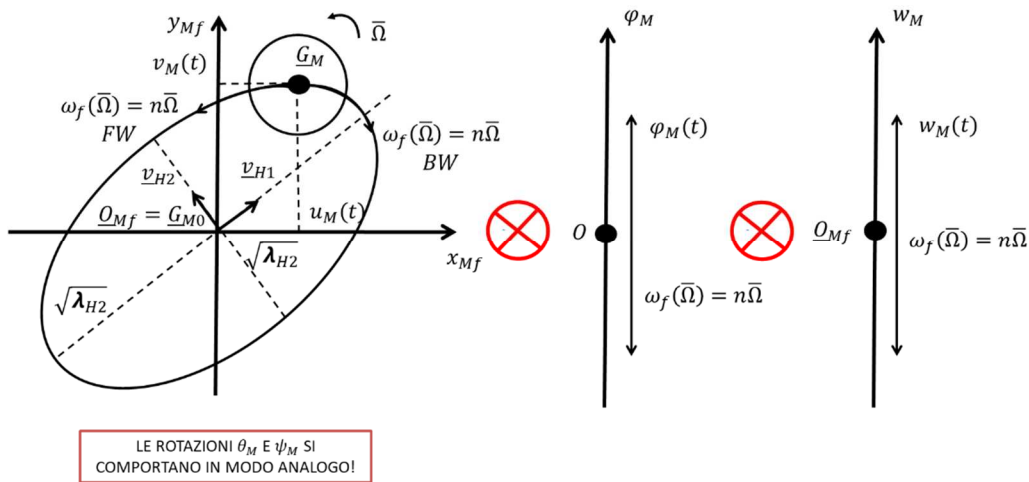


Figura 179 Whirl forzato per la generica sezione (le componenti angolari  $\psi_M(t)$  e  $\theta_M(t)$  si comportano in modo analogo)

La rotazione del rotore avviene chiaramente alla pulsazione  $\Omega$  (la speed della macchina) mentre il moto di rivoluzione ellittico della sezione media  $\underline{G}_M$  attorno all'asse  $z_{Mf}$  avviene sempre alla pulsazione della forzante in questione  $\omega_f(\bar{\Omega}) = n\bar{\Omega}$ .

Come sempre le fasi  $\varphi_{u_{M0}}$ ,  $\varphi_{v_{M0}}$  di  $u_{M0}$  e  $v_{M0}$  permettono di determinare se l'ellisse è percorsa in senso BW o FW. Se infatti vale la condizione

$$0 < \varphi_{v_{M0}} - \varphi_{u_{M0}} < \pi, \quad (10.9.24)$$

allora il modo è BW e l'ellisse sarà percorsa in senso BW. Se invece

$$-\pi < \varphi_{v_{M0}} - \varphi_{u_{M0}} < 0, \quad (10.9.25)$$

l'ellissi sarà percorsa in senso FW.

Si noti come, al contrario del moto libero, non essendo presente il termine esponenziale dovuto allo smorzamento, la traiettoria sarà sempre un'oscillazione pura a prescindere dal valore dello smorzamento stesso (ovvero non si esaurirà mai). Se sono vicino a una risonanza e/o lo smorzamento modale è in generale piccolo, allora le dimensioni di tale oscillazione saranno più grandi, altrimenti saranno più piccole.

Per quanto concerne infine la deformata forzata, essa può essere nuovamente pensata come la composizione delle deformate forzate associate alla parte flessionale del modo, a quella torsionale e a quella assiale. Se tenderà a prevalere la parte flessionale avremo un deformata forzata prevalentemente flessionale (MPF), altrimenti ne avremo una prevalentemente torsionale (MPT) o prevalentemente assiale (MPA).

Poiché anche in questo caso, grazie a quanto visto nei capitoli precedenti, già sappiamo come sono fatte le deformate forzate associate alle parti flessionali, torsionali e assiali del modo, e poiché le varie sezioni equivalenti del rotore 3D sono comunque soggette alla principio di coerenza modale (l'albero non è di gomma!), potremo rappresentare la loro composizione come riportato in Fig.180.

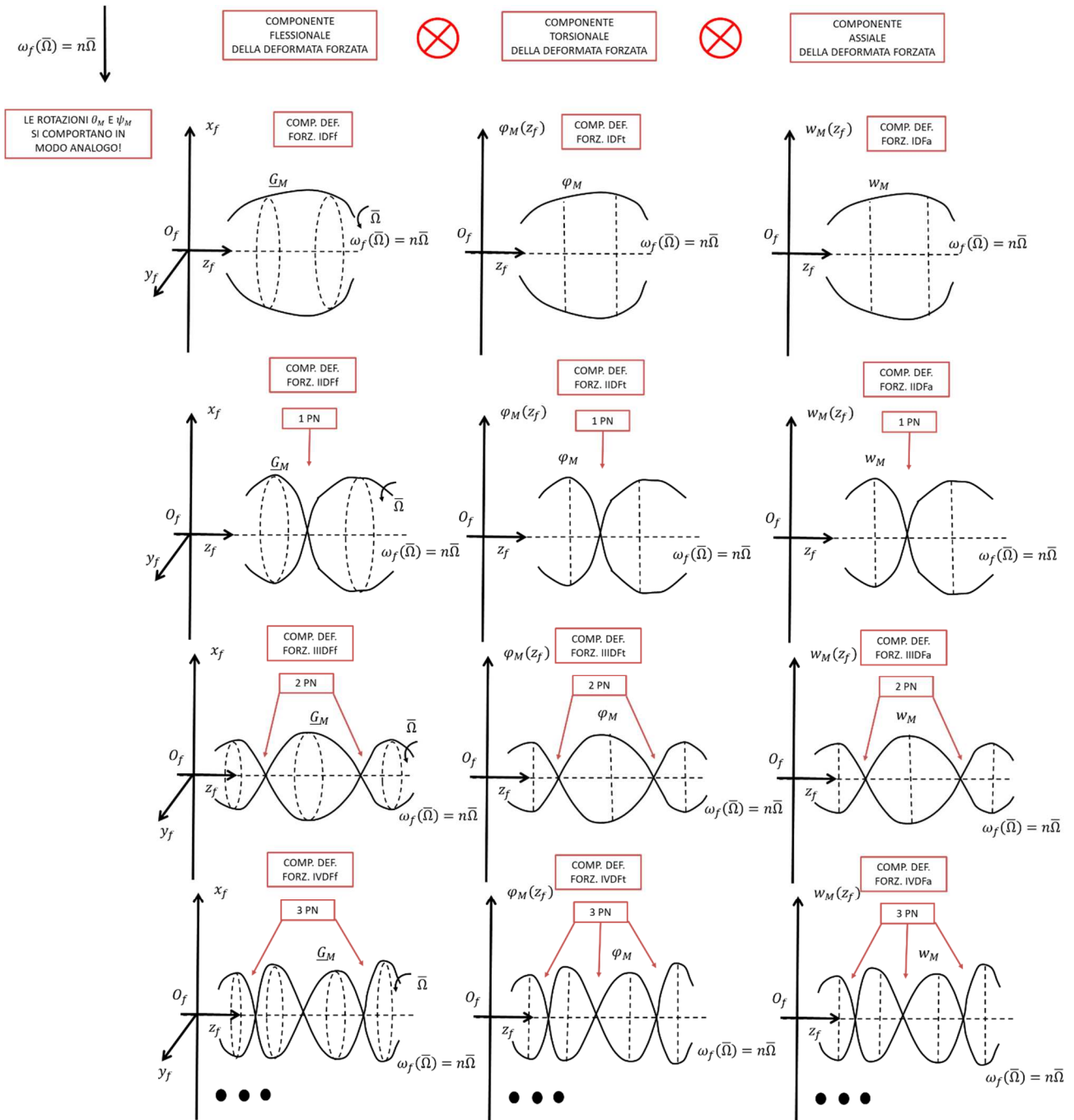


Figura 180 Deformate forzate per rotori elastici (le componenti angolari  $\psi_M(t)$  e  $\theta_M(t)$  si comportano in modo analogo)

Come si può notare dalla Fig. 180, ricordando quanto detto nei capitoli precedenti su vibrazioni flessionali torsionali e assiali, le deformate forzate di un rotore 3D possono essere piuttosto complesse e assumere molteplici forme. In generale in ogni deformata forzata potrà essere individuata (anche se spesso è tutt'altro che evidente, soprattutto a colpo d'occhio!):

- una componente flessionale di tipo IDff, IIDff, IIIDff, etc. (a seconda dei punti nodali PN) avente a sua volta una caratteristica BW, FW, M1PI, M2PI, M3PI, etc. (a seconda dei punti di inversione PI);
- una componente torsionale di tipo IDft, IIDft, IIIDft, etc. (a seconda dei punti nodali PN) avente a sua volta una caratteristica OPI, 1PI, 2PI, 3PI, etc. (a seconda dei punti di inversione PI);
- una componente assiale di tipo IDFa, IIDFa, IIIDFa, etc. (a seconda dei punti nodali PN) avente a sua volta una caratteristica OPI, 1PI, 2PI, 3PI, etc. (a seconda dei punti di inversione PI).

Dal momento che, in teoria, ogni combinazione è possibile, le possibili deformate forzate sono tantissime. Solitamente al crescere della pulsazione della forzante  $\omega_f(\bar{\Omega}) = n\bar{\Omega}$  crescono anche i punti nodali PN e i punti di inversione PI e quindi tendono a comparire deformate forzate sempre più complesse.

Come detto in precedenza, la rotazione del rotore avviene chiaramente alla pulsazione  $\Omega$  (la speed della macchina) mentre i vari moti di oscillazione associati alle deformate forzate (il moto di rivoluzione attorno all'asse  $z_f$  per la componente flessionale, il moto di rotazione attorno all'asse  $z_f$  per la componente torsionale e il moto di traslazione lungo l'asse  $z_f$  per la componente assiale) avvengono sempre alla pulsazione della forzante  $\omega_f(\bar{\Omega}) = n\bar{\Omega}$  per tutte le sezioni medie equivalenti  $\underline{G}_M$  considerate. Ciò è coerente col fatto che la pulsazione associata al modo di vibrare in questione è sempre una e una sola, ovvero,  $\omega_f(\bar{\Omega}) = n\bar{\Omega}$ .

Nella rappresentazione delle deformate forzate riportata in Fig. 180, al contrario del moto libero, i vari moti di oscillazione saranno sempre delle oscillazioni pure a prescindere dal valore dello smorzamento stesso (ovvero non si esauriranno mai). Se sono vicino a una risonanza e/o lo smorzamento modale è in generale piccolo, allora le dimensioni di tali oscillazioni saranno più grandi, altrimenti saranno più piccole.

Riportiamo per completezza in Fig. 180bis/ter un esempio di deformata forzata completa includendo sia le componenti angolari  $\psi_M(t)$  e  $\theta_M(t)$  di basculamento della sezione media per la parte flessionale (prima non considerate esplicitamente perché meno importanti a livello ingegneristico e perché il loro comportamento qualitativo è identico a quello delle componenti spaziali  $u_M(t)$  e  $v_M(t)$ ) sia le componenti torsionali  $\varphi_M$  e assiali  $w_M$  medie della sezione. Nel caso dell'esempio abbiamo una deformata forzata flessionale IIDff spaziale (con 1PNftra e che potrà avere caratteristica BW, FW o M1PI) associata a una deformata forzata flessionale IIIDff rotazionale (con 2PNfrot e che potrà avere caratteristica BW, FW, M1PI, M2PI), associata a sua volta a una deformata forzata torsionale IIDft (con 1PNt che potrà avere caratteristica OPI, 1PI), associato infine a una deformata forzata assiale IIDft (con 1PNa che potrà avere caratteristica OPI, 1PI).

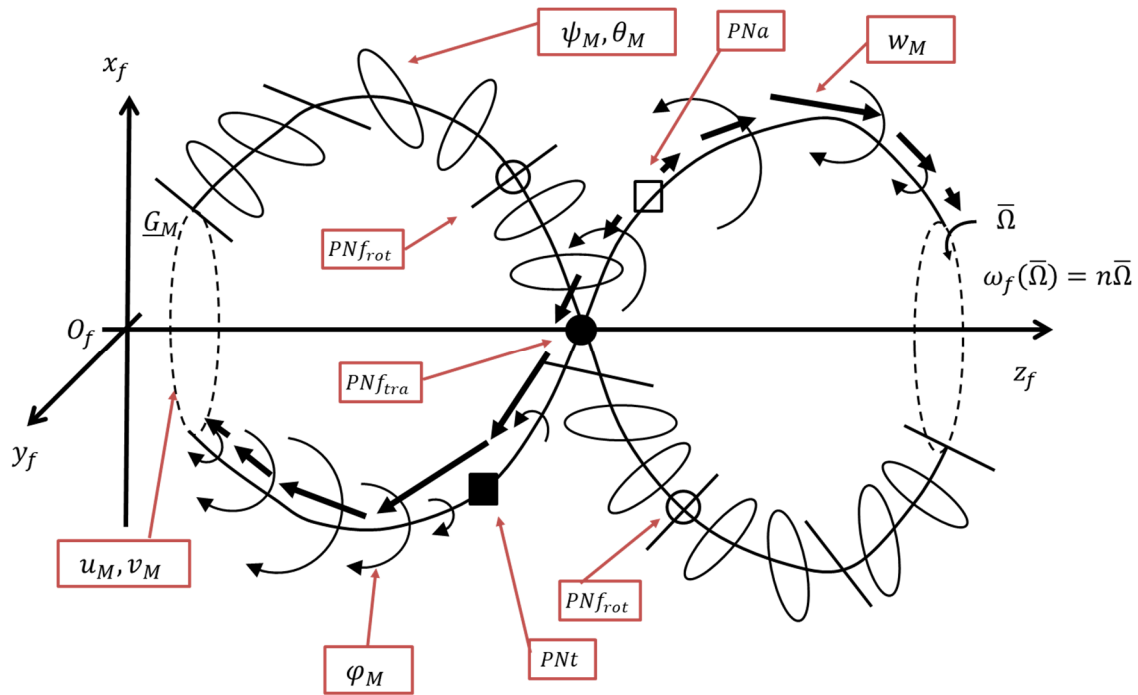


Figura 180bis Esempio di deformata modale per rotorii elastici

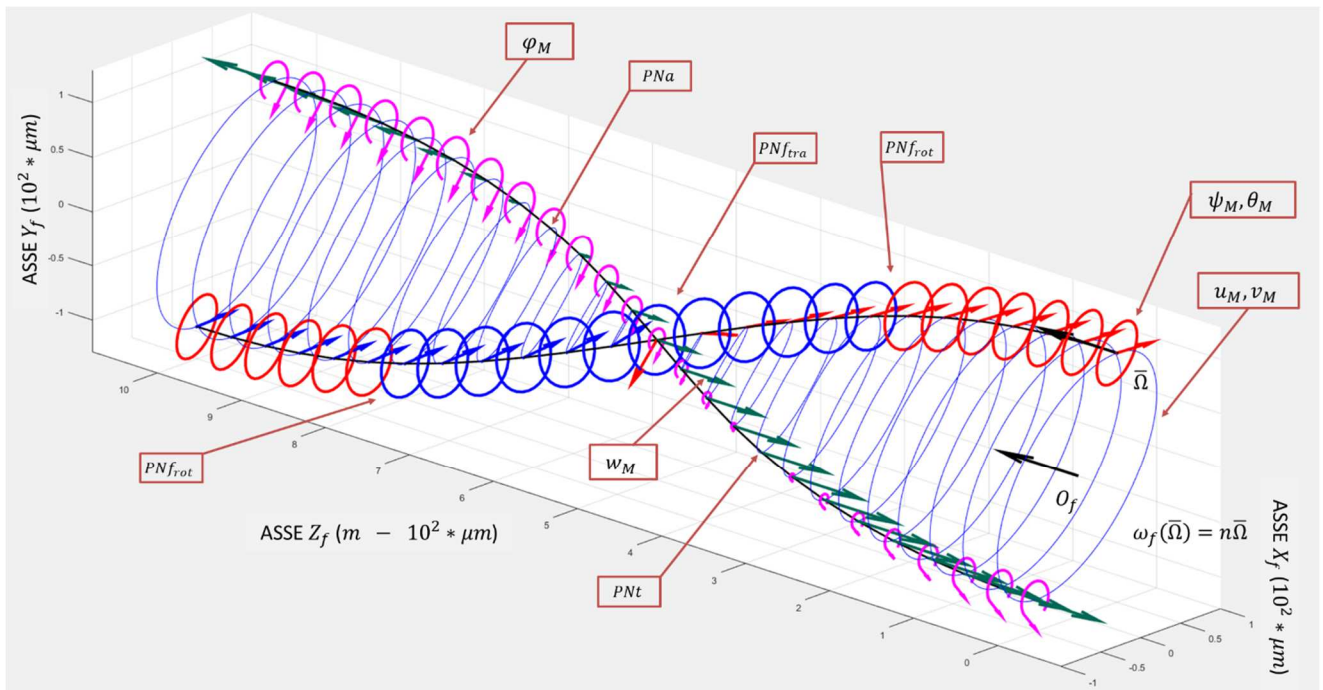


Figura 180ter Rappresentazione tipo software di deformata forzata per rotorii elastici

ELENCO RIASSUNTIVO DELLE VARIE DEFORMATE FORZATE (IN TEORIA TUTTE LE COMBINAZIONE FLESSIONALI – TORSIONALI – ASSIALI SONO POSSIBILI):

- 1) FLESSIONALE
- FORMA: IDF

CARATTERISTICA: BW, FW

- FORMA: IIDF

CARETTERISTICA: BW, FW, M1PI

- FORMA: IIIDF

CARETTERISTICA: BW, FW, M1PI, M2PI

- FORMA: IVDF

CARETTERISTICA: BW, FW, M1PI, M2PI, M3PI

... ..

2) TORSIONALE

- FORMA: IDF

CARATTERISTICA: OPI

- FORMA: IIDF

CARETTERISTICA: OPI, 1PI

- FORMA: IIIDF

CARETTERISTICA: OPI, 1PI, 2PI

- FORMA: IVDF

CARETTERISTICA: OPI, 1PI, 2PI, 3PI

... ..

3) ASSIALE

- FORMA: IDF

CARATTERISTICA: OPI

- FORMA: IIDF

CARETTERISTICA: OPI, 1PI

- FORMA: IIIDF

CARETTERISTICA: OPI, 1PI, 2PI

- FORMA: IDF

CARETTERISTICA: OPI, 1PI, 2PI, 3PI

... ..

3) FORZANTE ARMONICA ASINCRONA:

$$M\ddot{\underline{q}} + (\Omega G + C)\dot{\underline{q}} + K\underline{q} = \underline{Q}(t) = \text{Re} \left[ \underline{Q}_0(\Omega) e^{j\omega_f t} \right]. \quad (10.9.26)$$

$$\underline{Q}(t) = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{Q}_h(t) \\ \dots \end{pmatrix}, \quad \underline{Q}_0(\Omega) = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{Q}_{0h} \\ \dots \end{pmatrix}.$$

La soluzione del moto forzato del sistema può essere facilmente determinata grazie agli strumenti matematici introdotti nel capitolo 1 e si ha:

$$\underline{q}_f(t) = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{q}_h(t) \\ \dots \end{pmatrix} = \text{Re} \left[ \underline{q}_0 e^{j\omega_f t} \right], \quad \underline{q}_h(t) = \begin{pmatrix} u_h(t) \\ v_h(t) \\ w_h(t) \end{pmatrix} \quad (10.9.27)$$

$$\underline{q}_o = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{q}_{oh} \\ \dots \end{pmatrix} = \alpha(\omega_f, \Omega) \underline{Q}_o(\Omega) = [-\omega_f^2 M + j\omega_f(C + \Omega G) + K]^{-1} \underline{Q}_o(\Omega), \quad \underline{q}_{oh} = \begin{pmatrix} u_{h0} \\ v_{h0} \\ w_{h0} \end{pmatrix}$$

dove in questi casi è utile distinguere nella ricettanza  $\alpha(\omega_f, \Omega)$  la doppia dipendenza dalla pulsazione della forzante e della velocità di rotazione della macchina.

Applicando il teorema di sovrapposizione modale in questo caso abbiamo:

$$\underline{q}_o = \alpha(\omega_f, \Omega) \underline{Q}_o(\Omega) = \sum_{k=1}^{2N} \frac{(q_{Rk} q_{Lk}^H)}{j\omega_f - s_k} \underline{Q}_o(\Omega) = \sum_{k=1}^{2N} \left( \frac{q_{Lk}^H Q_o}{j\omega_f - s_k} \right) \underline{q}_{Rk} \quad (10.9.28)$$

da cui possiamo dedurre che i modi che maggiormente contribuiscono alla soluzione sono quelli in cui  $\left( \frac{q_{Lk}^H Q_o}{j\omega_f - s_k} \right)$  è grande, ovvero quando  $\omega_f$  è vicina a una delle pulsazioni proprie del sistema  $\omega_{Pk}$  contenuta in  $s_k$  (corrispondenti alle risonanze del sistema) o quando  $q_{Lk}^H Q_o$  è grande (forzanti ortogonali al corrispondente autovettore).

Il diagramma di Campbell associato a questo caso è riportato in Fig. 182. Rispetto allo studio nel moto libero abbiamo aggiunto la curva del carico  $\omega_f(\Omega) = \omega_f = \text{cost}$  sul diagramma relativo alle pulsazioni proprie  $\omega_{Pi}$ . Le intersezioni della curva del carico con i rami del diagramma  $\Omega_c$  sono ancora una volta le pulsazioni critiche. E' utile osservare come il caso di forzante armonica asincrona sia particolarmente favorevole in quanto una retta di carico orizzontale genera al massimo una pulsazione critica all'interno del range di velocità di lavoro della macchina (ovvero al massimo una intersezione tra la retta di carico e i rami del diagramma). Il valore di smorzamento modale associato alle varie pulsazioni critiche  $\zeta_c$  può essere facilmente trovato riportando la pulsazione critica in questione  $\Omega_c$  sul diagramma dello smorzamento.

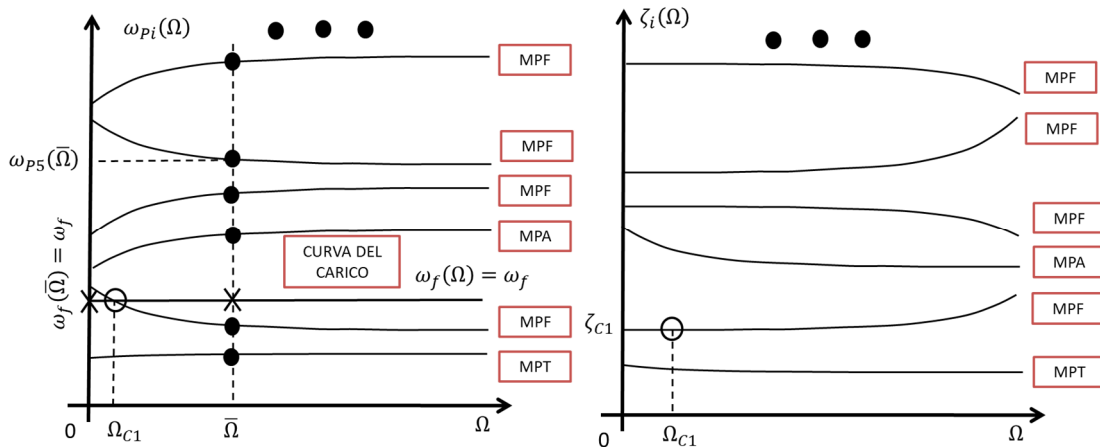


Figura 181 Diagramma di Campbell per rotore elastico con forzante armonica asincrona

Per capire quanto effettivamente vibra il sistema dobbiamo fare uso nuovamente dei diagrammi di Bode. A tale fine dobbiamo prima specificare una velocità di lavoro della macchina  $\bar{\Omega}$  alla quale studiare il sistema. Riporto quindi tale velocità  $\bar{\Omega}$  sul diagramma di Campbell; le intersezioni tra la retta verticale passante per  $\bar{\Omega}$  e i  $3 * NN$  rami del diagramma delle pulsazioni proprie  $\omega_{Pi}$  rappresentano le  $3 * NN$  pulsazioni proprie del sistema coincidenti, a loro volta, le pulsazioni di risonanza del sistema. A questo punto, supponendo di voler trovare

quanto vale lo spostamento lungo  $x$  del nodo  $h$ -esimo  $u_{0h}$  o della generica sezione media  $u_{M0}$  (nel dominio della frequenza), posso tracciare i rispettivi diagrammi (Fig. 182). Per determinare il modulo e la fase dello spostamento  $u_{0h}$  (o  $u_{M0}$ ) devo determinare sul diagramma di Bode il punto in cui agisce la forzante. Ma questo può essere dedotto dal diagramma di Campbell intersecando la curva del carico con la sezione verticale passante per  $\bar{\Omega}$  (si vedano sempre la Fig. 181 e la Fig. 182).

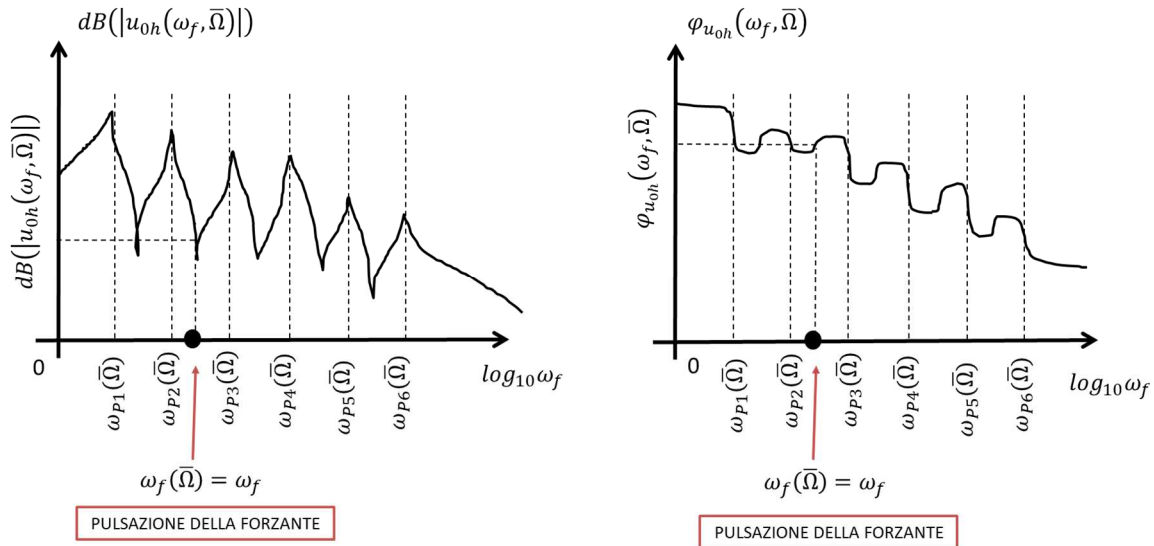


Figura 182 Diagramma di Bode per rotore elastico con forzante armonica asincrona

Guardando ai diagrammi di Campbell e di Bode, risulta chiaro il significato di pulsazione critica  $\Omega_c$ . Qualora infatti la pulsazione di lavoro della macchina  $\bar{\Omega}$  (la speed) si trovasse in corrispondenza di una critica  $\Omega_c$ , la pulsazione in cui la forzante agirebbe sulla macchina  $\omega_f(\bar{\Omega}) = \omega_f$  si troverebbe proprio in corrispondenza di una pulsazione propria  $\omega_{Pi}(\bar{\Omega})$  e quindi di una pulsazione di risonanza. Ci troveremmo quindi necessariamente in condizioni di massima amplificazione.

Per quanto riguarda lo studio delle deformate forzate e del whirl forzato, come detto a inizio paragrafo, tramite semplici operazioni di media, a partire dalla (10.9.27) è possibile ricostruire il comportamento medio della generica sezione  $A(z_f)$  del rotore 3D:

$$\underline{G}_M(t) = \begin{pmatrix} u_M(t) \\ v_M(t) \\ w_M(t) \end{pmatrix}, \quad \underline{\Phi}_M(t) = \begin{pmatrix} \theta_M(t) \\ \psi_M(t) \\ \varphi_M(t) \end{pmatrix}, \quad \underline{q}_M(t) = \text{Re}(\underline{q}_{M0} e^{j\omega_f t}) = \begin{pmatrix} u_M(t) \\ v_M(t) \\ w_M(t) \\ \theta_M(t) \\ \psi_M(t) \\ \varphi_M(t) \end{pmatrix} = \text{Re} \left( \begin{pmatrix} u_{M0} \\ v_{M0} \\ w_{M0} \\ \theta_{M0} \\ \psi_{M0} \\ \varphi_{M0} \end{pmatrix} e^{j\omega_f t} \right). \quad (10.9.29)$$

Il comportamento del moto di whirl forzato può essere quindi approssimativamente pensato come la “composizione” della parte flessionale del moto di whirl forzato, di quella torsionale e di quella assiale (Fig. 183):

$$\underline{q}_{Mf}(t) = \begin{pmatrix} u_M(t) \\ v_M(t) \\ \theta_M(t) \\ \psi_M(t) \end{pmatrix} = \text{Re}(\underline{q}_{Mf0} e^{j\omega_f t}) = \text{Re} \left( \begin{pmatrix} u_{M0} \\ v_{M0} \\ \theta_{M0} \\ \psi_{M0} \end{pmatrix} e^{j\omega_f t} \right) \quad (10.9.30)$$



$$q_{Ma}(t) = w_M(t) = \text{Re}(w_{M0}e^{j\omega_f t}).$$

$$q_{Mt}(t) = \varphi_M(t) = \text{Re}(\varphi_{M0}e^{j\omega_f t}).$$

Naturalmente se tenderà a prevalere la parte flessionale avremo un moto di whirl forzato prevalentemente flessionale (DFPF), altrimenti ne avremo uno prevalentemente torsionale (DFPT) o prevalentemente assiale (DFPA). Dal momento che, grazie a quanto visto nei capitoli precedenti, già sappiamo come sono fatte le parti flessionali, torsionali e assiali del moto di whirl forzato, potremo rappresentare la loro composizione come riportato in Fig. 183.

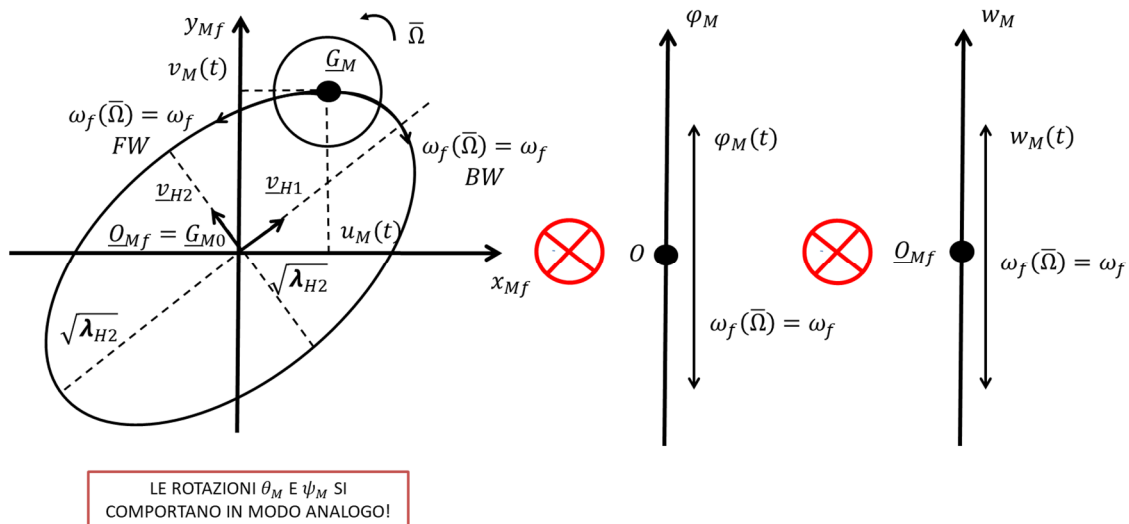


Figura 183 Whirl forzato per la generica sezione (le componenti angolari  $\psi_M(t)$  e  $\theta_M(t)$  si comportano in modo analogo)

La rotazione del rotore avviene chiaramente alla pulsazione  $\Omega$  (la speed della macchina) mentre il moto di rivoluzione ellittico della sezione media  $\underline{G}_M$  attorno all'asse  $z_{Mf}$  avviene sempre alla pulsazione della forzante in questione  $\omega_f(\bar{\Omega}) = \omega_f$ .

Come sempre le fasi  $\varphi_{u_{M0}}, \varphi_{v_{M0}}$  di  $u_{M0}$  e  $v_{M0}$  permettono di determinare se l'ellisse è percorsa in senso BW o FW. Se infatti vale la condizione

$$0 < \varphi_{v_{M0}} - \varphi_{u_{M0}} < \pi, \quad (10.9.31)$$

allora il modo è BW e l'ellisse sarà percorsa in senso BW. Se invece

$$-\pi < \varphi_{v_{M0}} - \varphi_{u_{M0}} < 0, \quad (10.9.32)$$

l'ellissi sarà percorsa in senso FW.

Si noti come, al contrario del moto libero, non essendo presente il termine esponenziale dovuto allo smorzamento, la traiettoria sarà sempre un'oscillazione pura a prescindere dal valore dello smorzamento stesso (ovvero non si esaurirà mai). Se sono vicino a una risonanza e/o lo smorzamento modale è in generale piccolo, allora le dimensioni di tale oscillazione saranno più grandi, altrimenti saranno più piccole.

Per quanto concerne infine la deformata forzata, essa può essere nuovamente pensata come la composizione delle deformate forzate associate alla parte flessionale del modo, a quella torsionale e a quella assiale. Se tenderà Prof. Enrico Meli, Dipartimento di Ingegneria Industriale, Università di Firenze

a prevalere la parte flessionale avremo una deformata forzata prevalentemente flessionale (MPF), altrimenti ne avremo una prevalentemente torsionale (MPT) o prevalentemente assiale (MPA).

Poiché anche in questo caso, grazie a quanto visto nei capitoli precedenti, già sappiamo come sono fatte le deformate forzate associate alle parti flessionali, torsionali e assiali del modo, e poiché le varie sezioni equivalenti del rotore 3D sono comunque soggette al principio di coerenza modale (l'albero non è di gomma!), potremo rappresentare la loro composizione come riportato in Fig.184.

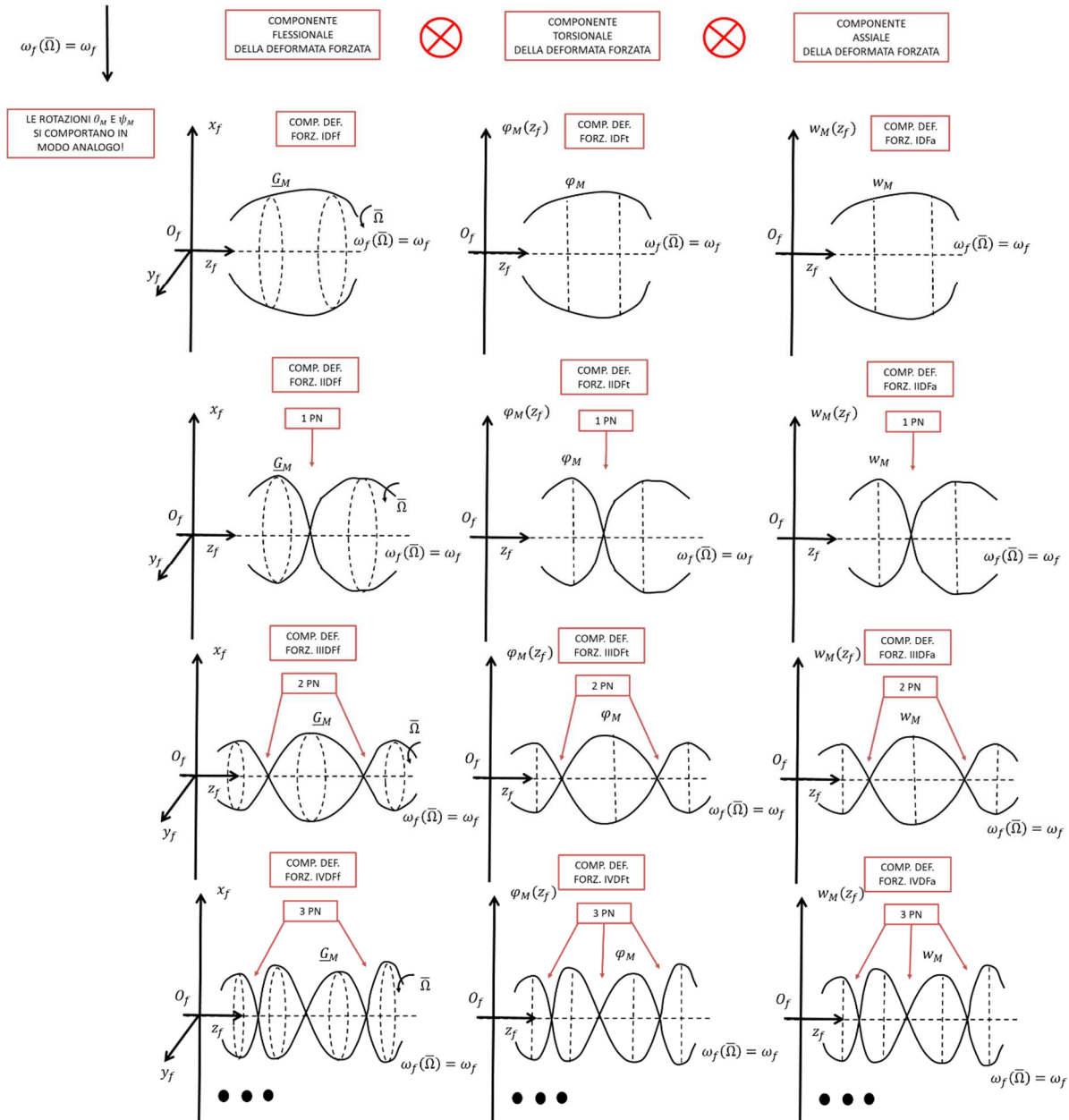


Figura 184 Deformate forzate per rotori elastici (le componenti angolari  $\psi_M(t)$  e  $\theta_M(t)$  si comportano in modo analogo)

Come si può notare dalla Fig. 184, ricordando quanto detto nei capitoli precedenti su vibrazioni flessionali torsionali e assiali, le deformate forzate di un rotore 3D possono essere piuttosto complesse e assumere molteplici forme. In generale in ogni deformata forzata potrà essere individuata (anche se spesso è tutt'altro che evidente, soprattutto a colpo d'occhio!):

- una componente flessionale di tipo IDFF, IIDFF, IIIDFF, etc. (a seconda dei punti nodali PN) avente a sua volta una caratteristica BW, FW, M1PI, M2PI, M3PI, etc. (a seconda dei punti di inversione PI);
- una componente torsionale di tipo IDFT, IIDFT, IIIDFT, etc. (a seconda dei punti nodali PN) avente a sua volta una caratteristica OPI, 1PI, 2PI, 3PI, etc. (a seconda dei punti di inversione PI);
- una componente assiale di tipo IDFa, IIDFa, IIIDFa, etc. (a seconda dei punti nodali PN) avente a sua volta una caratteristica OPI, 1PI, 2PI, 3PI, etc. (a seconda dei punti di inversione PI).

Dal momento che, in teoria, ogni combinazione è possibile, le possibili deformate forzate sono tantissime. Solitamente al crescere della pulsazione della forzante  $\omega_f(\bar{\Omega}) = \omega_f$  crescono anche i punti nodali PN e i punti di inversione PI e quindi tendono a comparire deformate forzate sempre più complesse.

Come detto in precedenza, la rotazione del rotore avviene chiaramente alla pulsazione  $\Omega$  (la speed della macchina) mentre i vari moti di oscillazione associati alle deformate forzate (il moto di rivoluzione attorno all'asse  $z_f$  per la componente flessionale, il moto di rotazione attorno all'asse  $z_f$  per la componente torsionale e il moto di traslazione lungo l'asse  $z_f$  per la componente assiale) avvengono sempre alla pulsazione della forzante  $\omega_f(\bar{\Omega}) = \omega_f$  per tutte le sezioni medie equivalenti  $\underline{G}_M$  considerate. Ciò è coerente col fatto che la pulsazione associata al modo di vibrare in questione è sempre una e una sola, ovvero,  $\omega_f(\bar{\Omega}) = \omega_f$ .

Nella rappresentazione delle deformate forzate riportata in Fig. 184, al contrario del moto libero, i vari moti di oscillazione saranno sempre delle oscillazioni pure a prescindere dal valore dello smorzamento stesso (ovvero non si esauriranno mai). Se sono vicino a una risonanza e/o lo smorzamento modale è in generale piccolo, allora le dimensioni di tali oscillazioni saranno più grandi, altrimenti saranno più piccole.

Riportiamo per completezza in Fig. 184bis/ter un esempio di deformata forzata completa includendo sia le componenti angolari  $\psi_M(t)$  e  $\theta_M(t)$  di basculamento della sezione media per la parte flessionale (prima non considerate esplicitamente perché meno importanti a livello ingegneristico e perché il loro comportamento qualitativo è identico a quello delle componenti spaziali  $u_M(t)$  e  $v_M(t)$ ) sia le componenti torsionali  $\varphi_M$  e assiali  $w_M$  medie della sezione. Nel caso dell'esempio abbiamo una deformata forzata flessionale IIDFF spaziale (con 1PNftra e che potrà avere caratteristica BW, FW o M1PI) associata a una deformata forzata flessionale IIIDFF rotazionale (con 2PNfrot e che potrà avere caratteristica BW, FW, M1PI, M2PI), associata a sua volta a una deformata forzata torsionale IIDFT (con 1PNt che potrà avere caratteristica OPI, 1PI), associato infine a una deformata forzata assiale IIDFT (con 1PNa che potrà avere caratteristica OPI, 1PI).

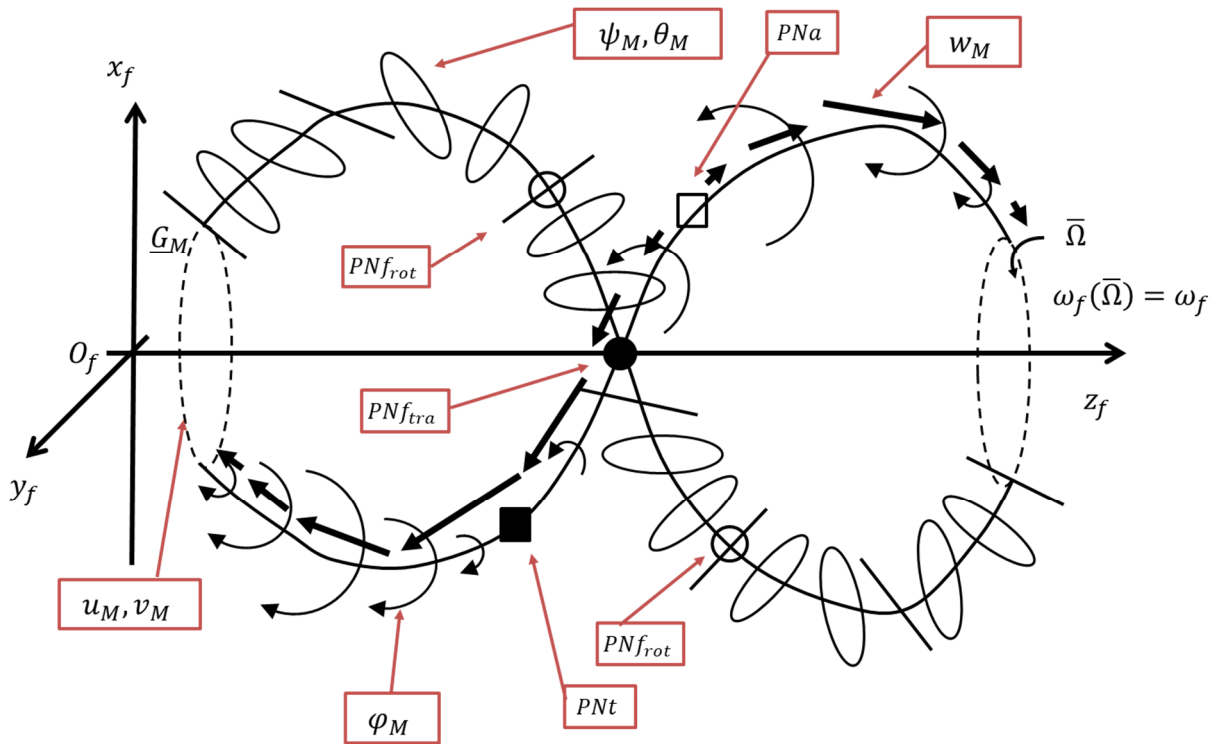


Figura 184bis Esempio di deformata modale per rotori elastici

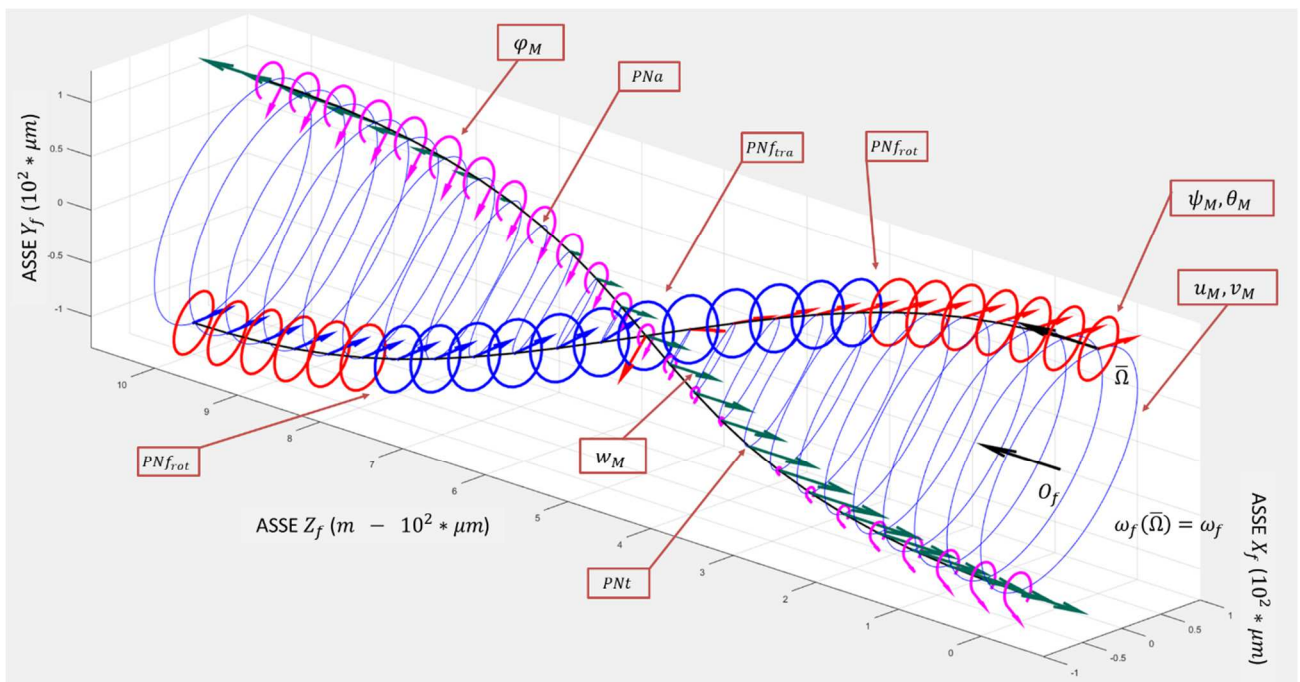


Figura 184ter Rappresentazione tipo software di deformata forzata per rotori elastici

ELENCO RIASSUNTIVO DELLE VARIE DEFORMATE FORZATE (IN TEORIA TUTTE LE COMBINAZIONE FLESSIONALI – TORSIONALI – ASSIALI SONO POSSIBILI):

- 1) FLESSIONALE
- FORMA: IDF

- CARATTERISTICA: BW, FW
- FORMA: IIDF
- CARETTERISTICA: BW, FW, M1PI
- FORMA: IIIDF
- CARETTERISTICA: BW, FW, M1PI, M2PI
- FORMA: IVDF
- CARETTERISTICA: BW, FW, M1PI, M2PI, M3PI
- ... ..
- 2) TORSIONALE
- FORMA: IDF
- CARATTERISTICA: OPI
- FORMA: IIDF
- CARETTERISTICA: OPI, 1PI
- FORMA: IIIDF
- CARETTERISTICA: OPI, 1PI, 2PI
- FORMA: IVDF
- CARETTERISTICA: OPI, 1PI, 2PI, 3PI
- ... ..
- 3) ASSIALE
- FORMA: IDF
- CARATTERISTICA: OPI
- FORMA: IIDF
- CARETTERISTICA: OPI, 1PI
- FORMA: IIIDF
- CARETTERISTICA: OPI, 1PI, 2PI
- FORMA: IDF
- CARETTERISTICA: OPI, 1PI, 2PI, 3PI

... ..

4) FORZANTE ARMONICA GENERICA:

$$M\ddot{\underline{q}} + (\Omega G + C)\dot{\underline{q}} + K\underline{q} = \underline{Q}(t) = \text{Re} \left[ \underline{Q}_0(\Omega) e^{j\omega_f(\Omega)t} \right]. \quad (10.9.33)$$

$$\underline{Q}(t) = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{q}_h(t) \\ \dots \end{pmatrix}, \quad \underline{Q}_0(\Omega) = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{Q}_{0h} \\ \dots \end{pmatrix}.$$

La soluzione del moto forzato del sistema può essere facilmente determinata grazie agli strumenti matematici introdotti nel capitolo 1 e si ha:

$$\underline{q}_f(t) = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{q}_h(t) \\ \dots \end{pmatrix} = \text{Re} \left[ \underline{q}_0 e^{j\omega_f(\Omega)t} \right], \quad \underline{q}_h(t) = \begin{pmatrix} u_h(t) \\ v_h(t) \\ w_h(t) \end{pmatrix} \quad (10.9.34)$$

$$\underline{q}_0 = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{q}_{0h} \\ \dots \end{pmatrix} = \alpha(\omega_f(\Omega), \Omega) \underline{Q}_0(\Omega) = [-\omega_f(\Omega)^2 M + j\omega_f(\Omega)(C + \Omega G) + K]^{-1} \underline{Q}_0(\Omega), \quad \underline{q}_{0h} = \begin{pmatrix} u_{h0} \\ v_{h0} \\ w_{h0} \end{pmatrix}$$

dove in questi casi è utile distinguere nella ricettanza  $\alpha(\omega_f(\Omega), \Omega)$  la doppia dipendenza dalla pulsazione della forzante e della velocità di rotazione della macchina.

Applicando il teorema di sovrapposizione modale in questo caso abbiamo:

$$\underline{q}_0 = \alpha(\omega_f(\Omega), \Omega) \underline{Q}_0(\Omega) = \sum_{k=1}^{2N} \frac{(q_{Rk} q_{Lk}^H)}{j\omega_f(\Omega) - s_k} \underline{Q}_0(\Omega) = \sum_{k=1}^{2N} \left( \frac{q_{Lk}^H Q_0}{j\omega_f(\Omega) - s_k} \right) \underline{q}_{Rk} \quad (10.9.35)$$

da cui possiamo dedurre che i modi che maggiormente contribuiscono alla soluzione sono quelli in cui  $\left( \frac{q_{Lk}^H Q_0}{j\omega_f(\Omega) - s_k} \right)$  è grande, ovvero quando  $\omega_f(\Omega)$  è vicina a una delle pulsazioni proprie del sistema  $\omega_{pk}$  contenuta in  $s_k$  (corrispondenti alle risonanze del sistema) o quando  $q_{Lk}^H Q_0$  è grande (forzanti ortogonali al corrispondente autovettore).

Il diagramma di Campbell associato a questo caso è riportato in Fig. 185. Rispetto allo studio nel moto libero abbiamo aggiunto la curva del carico  $\omega_f(\Omega)$  sul diagramma relativo alle pulsazioni proprie  $\omega_{pi}$ . Le intersezioni della curva del carico con i rami del diagramma  $\Omega_c$  sono ancora una volta le pulsazioni critiche. Il valore di smorzamento modale associato alle varie pulsazioni critiche  $\zeta_c$  può essere facilmente trovato riportando la pulsazione critica in questione  $\Omega_c$  sul diagramma dello smorzamento.

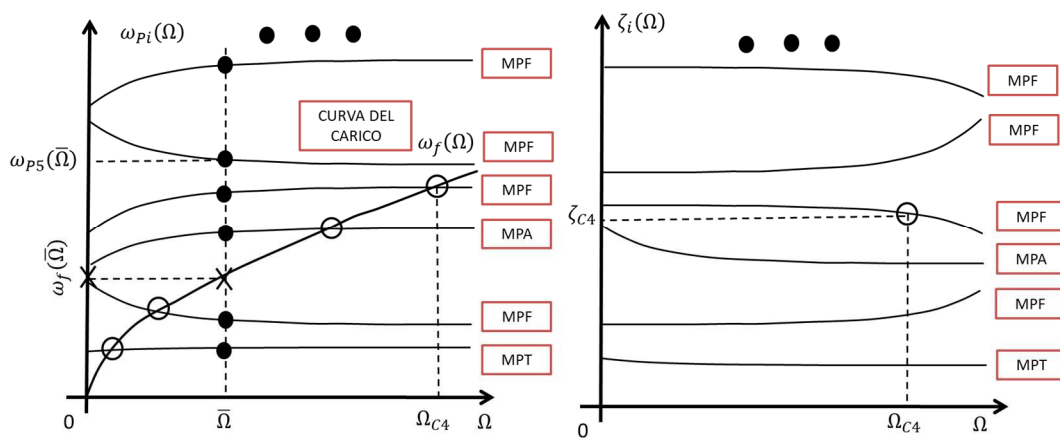


Figura 185 Diagramma di Campbell per rotore elastico con forzante armonica generica

Per capire quanto effettivamente vibra il sistema dobbiamo fare uso nuovamente dei diagrammi di Bode. A tale fine dobbiamo prima specificare una velocità di lavoro della macchina  $\bar{\Omega}$  alla quale studiare il sistema. Riporto quindi tale velocità  $\bar{\Omega}$  sul diagramma di Campbell; le intersezioni tra la retta verticale passante per  $\bar{\Omega}$  e i  $3 * NN$  rami del diagramma delle pulsazioni proprie  $\omega_{pi}$  rappresentano le  $3 * NN$  pulsazioni proprie del sistema coincidenti, a loro volta, le pulsazioni di risonanza del sistema. A questo punto, supponendo di voler trovare quanto vale lo spostamento lungo  $x$  del nodo  $h$ -esimo  $u_{0h}$  o della generica sezione media  $u_{M0}$  (nel dominio della frequenza), posso tracciare i rispettivi diagrammi (Fig. 186). Per determinare il modulo e la fase dello spostamento  $u_{0h}$  (o  $u_{M0}$ ) devo determinare sul diagramma di Bode il punto in cui agisce la forzante. Ma questo può essere

dedotto dal diagramma di Campbell intersecando la curva del carico con la sezione verticale passante per  $\bar{\Omega}$  (si vedano sempre la Fig. 185 e la Fig. 186).

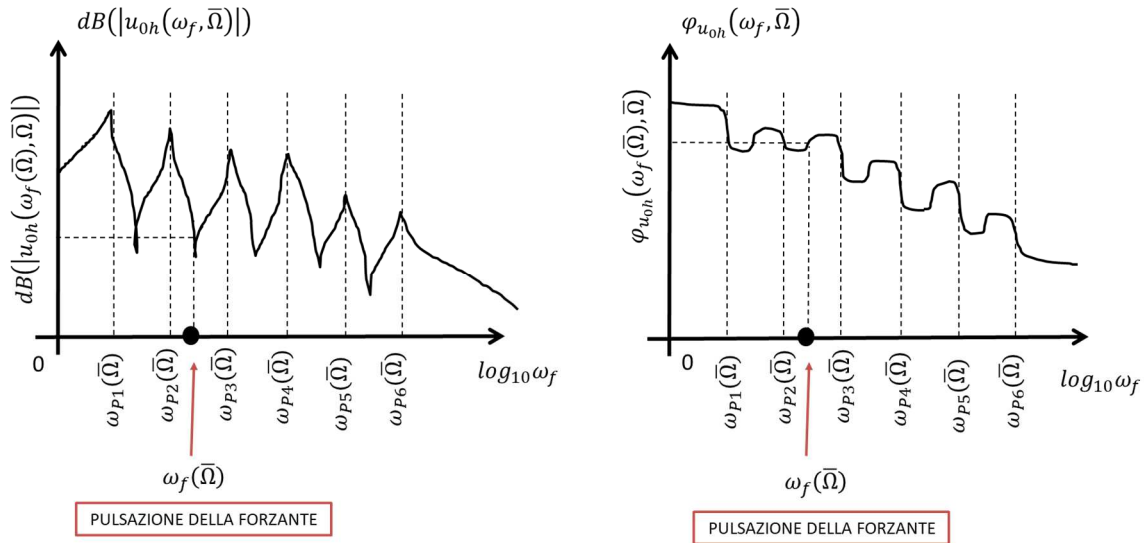


Figura 186 Diagramma di Bode per rotore elastico con forzante armonica generica

Guardando ai diagrammi di Campbell e di Bode, risulta chiaro il significato di pulsazione critica  $\Omega_c$ . Qualora infatti la pulsazione di lavoro della macchina  $\bar{\Omega}$  (la speed) si trovasse in corrispondenza di una critica  $\Omega_c$ , la pulsazione in cui la forzante agirebbe sulla macchina  $\omega_f(\bar{\Omega})$  si troverebbe proprio in corrispondenza di una pulsazione propria  $\omega_{p_i}(\bar{\Omega})$  e quindi di una pulsazione di risonanza. Ci troveremmo quindi necessariamente in condizioni di massima amplificazione.

Per quanto riguarda lo studio delle deformate forzate e del whirl forzato, come detto a inizio paragrafo, tramite semplici operazioni di media, a partire dalla (10.9.34) è possibile ricostruire il comportamento medio della generica sezione  $A(z_f)$  del rotore 3D:

$$\underline{G}_M(t) = \begin{pmatrix} u_M(t) \\ v_M(t) \\ w_M(t) \end{pmatrix}, \quad \underline{\Phi}_M(t) = \begin{pmatrix} \theta_M(t) \\ \psi_M(t) \\ \varphi_M(t) \end{pmatrix},$$

$$\underline{q}_M(t) = \text{Re} \left( \underline{q}_{M0} e^{j\omega_f(\Omega)t} \right) = \begin{pmatrix} u_M(t) \\ v_M(t) \\ w_M(t) \\ \theta_M(t) \\ \psi_M(t) \\ \varphi_M(t) \end{pmatrix} = \text{Re} \left( \begin{pmatrix} u_{M0} \\ v_{M0} \\ w_{M0} \\ \theta_{M0} \\ \psi_{M0} \\ \varphi_{M0} \end{pmatrix} e^{j\omega_f(\Omega)t} \right). \quad (10.9.36)$$

Il comportamento del moto di whirl forzato può essere quindi approssimativamente pensato come la “composizione” della parte flessionale del moto di whirl forzato, di quella torsionale e di quella assiale (Fig. 187):

$$\underline{q}_{Mf}(t) = \begin{pmatrix} u_M(t) \\ v_M(t) \\ \theta_M(t) \\ \psi_M(t) \end{pmatrix} = \text{Re} \left( \underline{q}_{Mf0} e^{j\omega_f(\Omega)t} \right) = \text{Re} \left( \begin{pmatrix} u_{M0} \\ v_{M0} \\ \theta_{M0} \\ \psi_{M0} \end{pmatrix} e^{j\omega_f(\Omega)t} \right) \quad (10.9.37)$$

$$q_{Ma}(t) = w_M(t) = \text{Re}(w_{M0} e^{j\omega_f(\Omega)t}).$$

$$q_{Mt}(t) = \varphi_M(t) = \text{Re}(\varphi_{M0} e^{j\omega_f(\Omega)t}).$$

Naturalmente se tenderà a prevalere la parte flessionale avremo un moto di whirl forzato prevalentemente flessionale (DFPF), altrimenti ne avremo uno prevalentemente torsionale (DFPT) o prevalentemente assiale (DFPA). Dal momento che, grazie a quanto visto nei capitoli precedenti, già sappiamo come sono fatte le parti flessionali, torsionali e assiali del moto di whirl forzato, potremo rappresentare la loro composizione come riportato in Fig. 187.

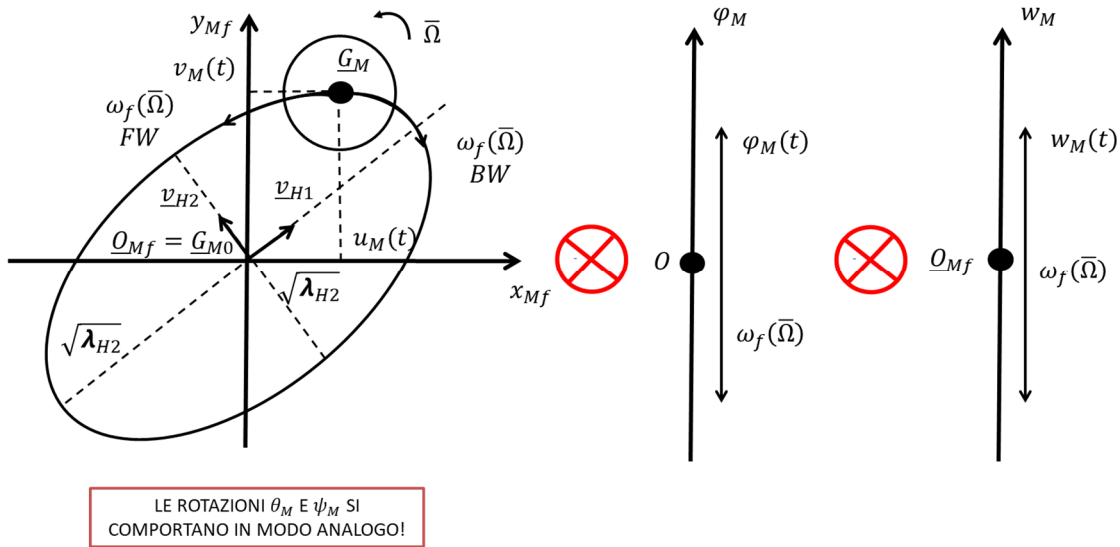


Figura 187 Whirl forzato per la generica sezione (le componenti angolari  $\psi_M(t)$  e  $\theta_M(t)$  si comportano in modo analogo)

La rotazione del rotore avviene chiaramente alla pulsazione  $\Omega$  (la speed della macchina) mentre il moto di rivoluzione ellittico della sezione media  $\underline{G}_M$  attorno all'asse  $z_{Mf}$  avviene sempre alla pulsazione della forzante in questione  $\omega_f(\bar{\Omega})$ .

Come sempre le fasi  $\varphi_{u_{M0}}$ ,  $\varphi_{v_{M0}}$  di  $u_{M0}$  e  $v_{M0}$  permettono di determinare se l'ellisse è percorsa in senso BW o FW. Se infatti vale la condizione

$$0 < \varphi_{v_{M0}} - \varphi_{u_{M0}} < \pi, \quad (10.9.38)$$

allora il modo è BW e l'ellisse sarà percorsa in senso BW. Se invece

$$-\pi < \varphi_{v_{M0}} - \varphi_{u_{M0}} < 0, \quad (10.9.39)$$

l'ellissi sarà percorsa in senso FW.

Si noti come, al contrario del moto libero, non essendo presente il termine esponenziale dovuto allo smorzamento, la traiettoria sarà sempre un'oscillazione pura a prescindere dal valore dello smorzamento stesso (ovvero non si esaurirà mai). Se sono vicino a una risonanza e/o lo smorzamento modale è in generale piccolo, allora le dimensioni di tale oscillazione saranno più grandi, altrimenti saranno più piccole.



Per quanto concerne infine la deformata forzata, essa può essere nuovamente pensata come la composizione delle deformate forzate associate alla parte flessionale del modo, a quella torsionale e a quella assiale. Se tenderà a prevalere la parte flessionale avremo un deformata forzata prevalentemente flessionale (MPF), altrimenti ne avremo una prevalentemente torsionale (MPT) o prevalentemente assiale (MPA).

Poiché anche in questo caso, grazie a quanto visto nei capitoli precedenti, già sappiamo come sono fatte le deformate forzate associate alle parti flessionali, torsionali e assiali del modo, e poiché le varie sezioni equivalenti del rotore 3D sono comunque soggette alla principio di coerenza modale (l'albero non è di gomma!), potremo rappresentare la loro composizione come riportato in Fig. 188.

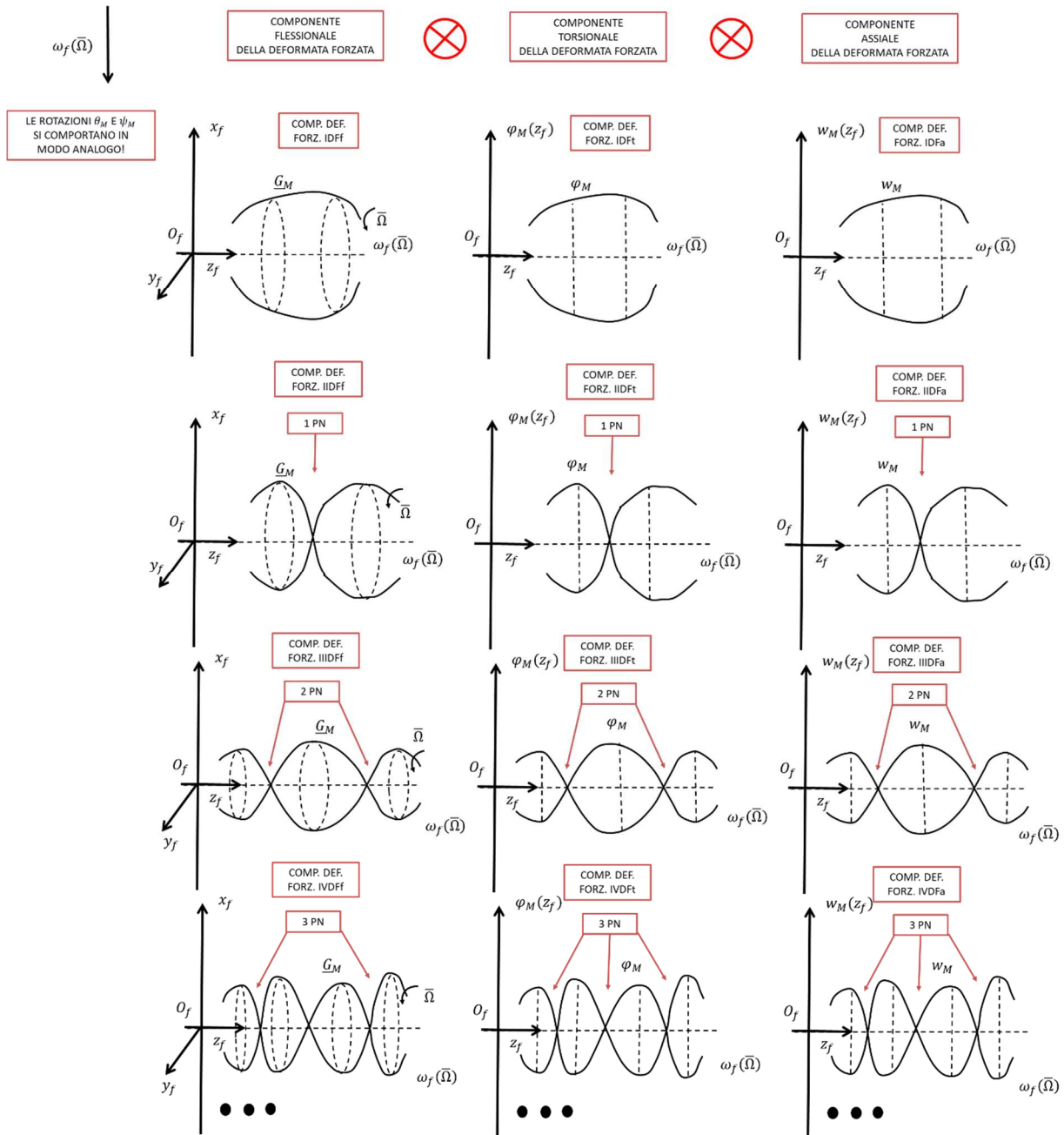


Figura 188 Deformate forzate per rotori elastici (le componenti angolari  $\psi_M(t)$  e  $\theta_M(t)$  si comportano in modo analogo)

Come si può notare dalla Fig. 188, ricordando quanto detto nei capitoli precedenti su vibrazioni flessionali torsionali e assiali, le deformate forzate di un rotore 3D possono essere piuttosto complesse e assumere molteplici forme. In generale in ogni deformata forzata potrà essere individuata (anche se spesso è tutt'altro che evidente, soprattutto a colpo d'occhio!):

- una componente flessionale di tipo IDff, IIDff, IIIDff, etc. (a seconda dei punti nodali PN) avente a sua volta una caratteristica BW, FW, M1PI, M2PI, M3PI, etc. (a seconda dei punti di inversione PI);
- una componente torsionale di tipo IDft, IIDft, IIIDft, etc. (a seconda dei punti nodali PN) avente a sua volta una caratteristica OPI, 1PI, 2PI, 3PI, etc. (a seconda dei punti di inversione PI);
- una componente assiale di tipo IDFa, IIDFa, IIIDFa, etc. (a seconda dei punti nodali PN) avente a sua volta una caratteristica OPI, 1PI, 2PI, 3PI, etc. (a seconda dei punti di inversione PI).

Dal momento che, in teoria, ogni combinazione è possibile, le possibili deformate forzate sono tantissime. Solitamente al crescere della pulsazione della forzante  $\omega_f(\bar{\Omega})$  crescono anche i punti nodali PN e i punti di inversione PI e quindi tendono a comparire deformate forzate sempre più complesse.

Come detto in precedenza, la rotazione del rotore avviene chiaramente alla pulsazione  $\Omega$  (la speed della macchina) mentre i vari moti di oscillazione associati alle deformate forzate (il moto di rivoluzione attorno all'asse  $z_f$  per la componente flessionale, il moto di rotazione attorno all'asse  $z_f$  per la componente torsionale e il moto di traslazione lungo l'asse  $z_f$  per la componente assiale) avvengono sempre alla pulsazione della forzante  $\omega_f(\bar{\Omega})$  per tutte le sezioni medie equivalenti  $\underline{G}_M$  considerate. Ciò è coerente col fatto che la pulsazione associata al modo di vibrare in questione è sempre una e una sola, ovvero,  $\omega_f(\bar{\Omega})$ .

Nella rappresentazione delle deformate forzate riportata in Fig. 188, al contrario del moto libero, i vari moti di oscillazione saranno sempre delle oscillazioni pure a prescindere dal valore dello smorzamento stesso (ovvero non si esauriranno mai). Se sono vicino a una risonanza e/o lo smorzamento modale è in generale piccolo, allora le dimensioni di tali oscillazioni saranno più grandi, altrimenti saranno più piccole.

Riportiamo per completezza in Fig. 188bis/ter un esempio di deformata forzata completa includendo sia le componenti angolari  $\psi_M(t)$  e  $\theta_M(t)$  di basculamento della sezione media per la parte flessionale (prima non considerate esplicitamente perché meno importanti a livello ingegneristico e perché il loro comportamento qualitativo è identico a quello delle componenti spaziali  $u_M(t)$  e  $v_M(t)$ ) sia le componenti torsionali  $\varphi_M$  e assiali  $w_M$  medie della sezione. Nel caso dell'esempio abbiamo una deformata forzata flessionale IIDff spaziale (con 1PNftra e che potrà avere caratteristica BW, FW o M1PI) associata a una deformata forzata flessionale IIIDff rotazionale (con 2PNfrot e che potrà avere caratteristica BW, FW, M1PI, M2PI), associata a sua volta a una deformata forzata torsionale IIDft (con 1PNt che potrà avere caratteristica OPI, 1PI), associato infine a una deformata forzata assiale IIDft (con 1PNa che potrà avere caratteristica OPI, 1PI).

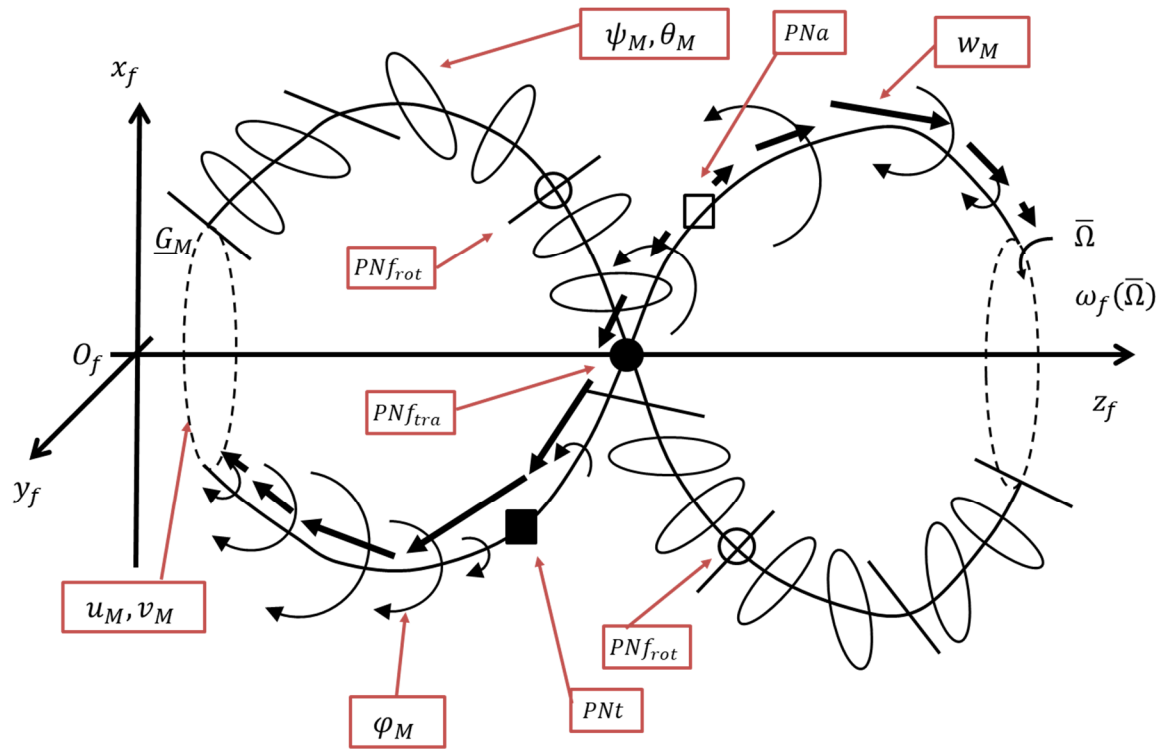


Figura 188bis Esempio di deformata modale per rotori elastici

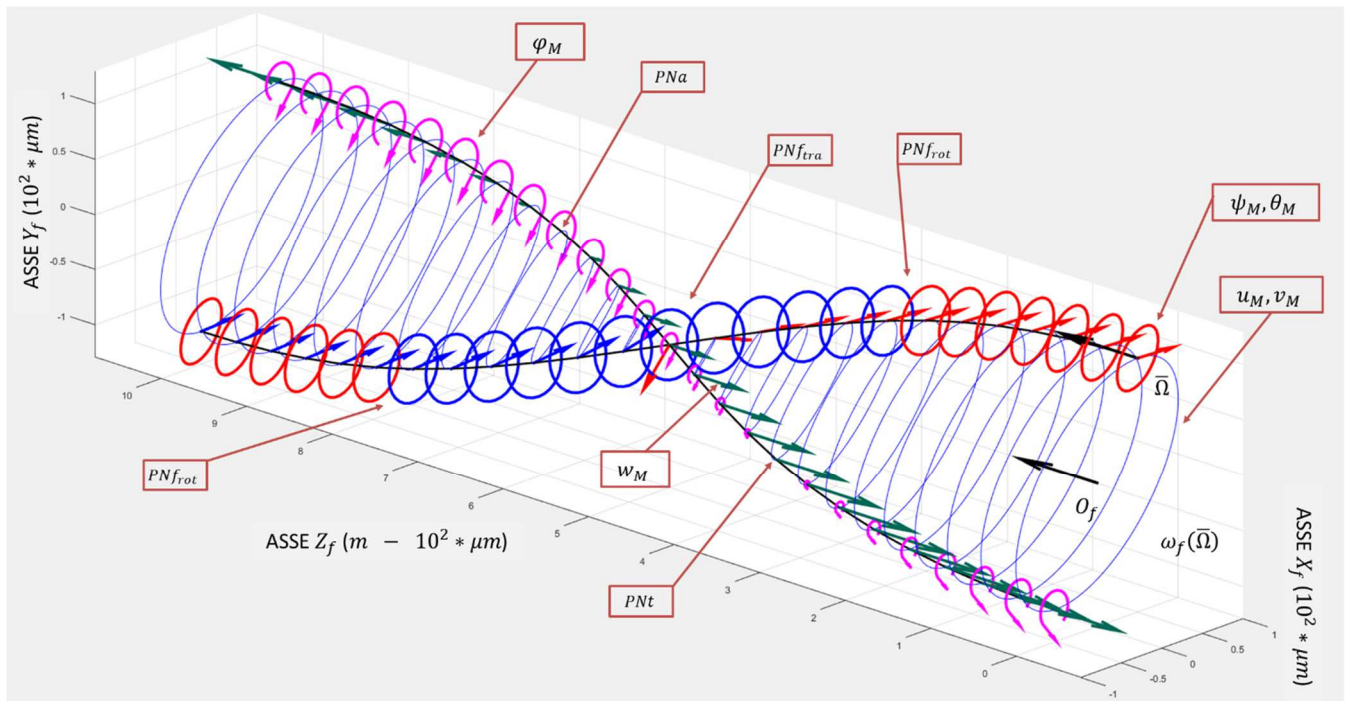


Figura 188ter Rappresentazione tipo software di deformata forzata per rotori elastici

ELENCO RIASSUNTIVO DELLE VARIE DEFORMATE FORZATE (IN TEORIA TUTTE LE COMBINAZIONE FLESSIONALI – TORSIONALI – ASSIALI SONO POSSIBILI):

- 1) FLESSIONALE

- FORMA: IDF  
CARATTERISTICA: BW, FW
- FORMA: IIDF  
CARATTERISTICA: BW, FW, M1PI
- FORMA: IIIDF  
CARATTERISTICA: BW, FW, M1PI, M2PI
- FORMA: IVDF  
CARATTERISTICA: BW, FW, M1PI, M2PI, M3PI

... ..

2) TORSIONALE

- FORMA: IDF  
CARATTERISTICA: OPI
- FORMA: IIDF  
CARATTERISTICA: OPI, 1PI
- FORMA: IIIDF  
CARATTERISTICA: OPI, 1PI, 2PI
- FORMA: IVDF  
CARATTERISTICA: OPI, 1PI, 2PI, 3PI

... ..

3) ASSIALE

- FORMA: IDF  
CARATTERISTICA: OPI
- FORMA: IIDF  
CARATTERISTICA: OPI, 1PI
- FORMA: IIIDF  
CARATTERISTICA: OPI, 1PI, 2PI
- FORMA: IVDF  
CARATTERISTICA: OPI, 1PI, 2PI, 3PI

... ..

5) FORZANTE PERIODICA:

$$M\ddot{\underline{q}} + (\Omega G + C)\dot{\underline{q}} + K\underline{q} = \underline{Q}(t) = \operatorname{Re}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \underline{c}_k(\Omega)e^{j\omega_0(\Omega)kt}\right]. \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}. \quad (10.9.40)$$

$$\underline{Q}(t) = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{Q}_h(t) \\ \dots \end{pmatrix}, \quad \underline{c}_k(\Omega) = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{c}_{kh} \\ \dots \end{pmatrix}.$$

La soluzione del moto forzato del sistema può essere facilmente determinata grazie agli strumenti matematici introdotti nel capitolo 1 e si ha:

$$\underline{q}_f(t) = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{q}_h(t) \\ \dots \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} \underline{q}_k(t) = Re \left[ \sum_{k=0}^{\infty} [\alpha(k\omega_0, \Omega) \underline{c}_k(\Omega) e^{j\omega_0(\Omega)kt}] \right] \quad (10.9.41)$$

$$\underline{q}_k(t) = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{q}_{kh}(t) \\ \dots \end{pmatrix} = Re [\alpha(k\omega_0, \Omega) \underline{c}_k(\Omega) e^{j\omega_0(\Omega)kt}], \quad \underline{q}_{kh}(t) = \begin{pmatrix} u_{kh}(t) \\ v_{kh}(t) \\ w_{kh}(t) \end{pmatrix}$$

$$\underline{q}_{k0} = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{q}_{kh0} \\ \dots \end{pmatrix} = \alpha(k\omega_0(\Omega), \Omega) \underline{c}_k(\Omega) = [-k^2\omega_0(\Omega)^2 M + jk\omega_0(\Omega)(C + \Omega G) + K]^{-1} \underline{c}_k(\Omega)$$

$$\underline{q}_{kh0} = \begin{pmatrix} u_{kh0} \\ v_{kh0} \\ w_{kh0} \end{pmatrix}$$

dove in questi casi è utile distinguere nella ricettanza  $\alpha(k\omega_0(\Omega), \Omega)$  la doppia dipendenza dalla pulsazione della forzante e della velocità di rotazione della macchina.

Applicando il teorema di sovrapposizione modale in questo caso abbiamo:

$$\begin{aligned} \underline{q}_k(t) &= Re [\alpha(k\omega_0(\Omega), \Omega) \underline{c}_k(\Omega) e^{j\omega_0(\Omega)kt}] = Re \left[ \sum_{m=1}^{2N} \frac{(q_{Rm} q_{Lm}^H)}{j\omega_0(\Omega)k - s_m} \underline{c}_k(\Omega) e^{j\omega_0(\Omega)kt} \right] = \\ &= Re \left[ \sum_{m=1}^{2N} \left( \frac{q_{Lm}^H \underline{c}_k}{j\omega_0(\Omega)k - s_m} \right) q_{Rm} e^{j\omega_0(\Omega)kt} \right], \end{aligned} \quad (10.9.42)$$

da cui possiamo dedurre che i modi che maggiormente contribuiscono alle singole armoniche della soluzione sono quelli in cui  $\left( \frac{q_{Lm}^H \underline{c}_k}{j\omega_0(\Omega)k - s_m} \right)$  è grande, ovvero quando  $\omega_0(\Omega)k$  è vicina a una delle pulsazioni proprie del sistema  $\omega_{Pk}$  contenuta in  $s_k$  (corrispondenti alle risonanze del sistema) o quando  $\underline{q}_{Lk}^H \underline{c}_k$  è grande (forzanti ortogonali al corrispondente autovettore).

Il diagramma di Campbell associato a questo caso è riportato in Fig. 189. Rispetto allo studio nel moto libero abbiamo aggiunto la curva del carico  $\omega_0(\Omega)k$  sul diagramma relativo alle pulsazioni proprie  $\omega_{Pi}$ . Le intersezioni della curva del carico con i rami del diagramma  $\Omega_c$  sono ancora una volta le pulsazioni critiche. Il valore di smorzamento modale associato alle varie pulsazioni critiche  $\zeta_c$  può essere facilmente trovato riportando la pulsazione critica in questione  $\Omega_c$  sul diagramma dello smorzamento.

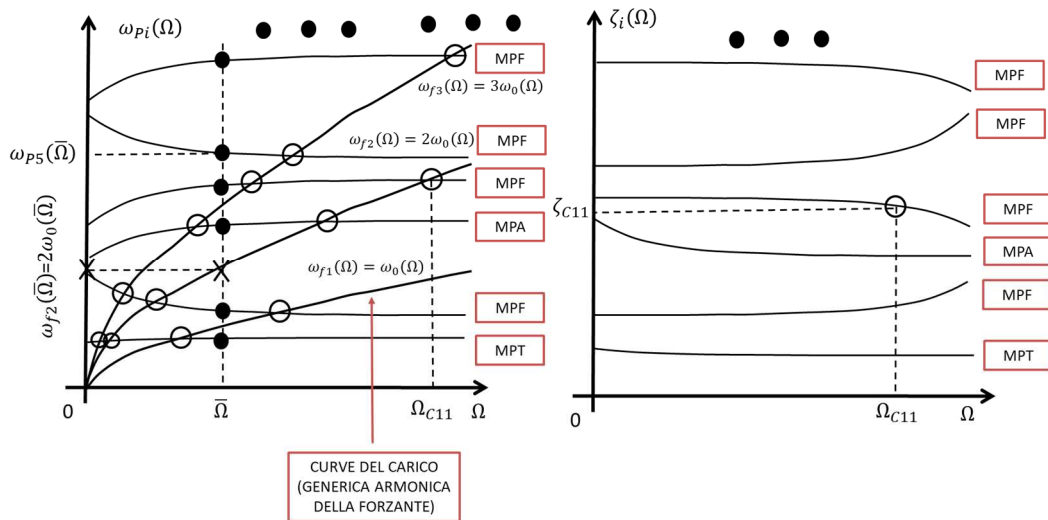


Figura 189 Diagramma di Campbell per rotore elastico con forzante periodica

Per capire quanto effettivamente vibra il sistema dobbiamo fare uso nuovamente dei diagrammi di Bode. A tale fine dobbiamo prima specificare una velocità di lavoro della macchina  $\bar{\Omega}$  alla quale studiare il sistema. Riporto quindi tale velocità  $\bar{\Omega}$  sul diagramma di Campbell; le intersezioni tra la retta verticale passante per  $\bar{\Omega}$  e i  $3 \cdot NN$  rami del diagramma delle pulsazioni proprie  $\omega_{pi}$  rappresentano le  $3 \cdot NN$  pulsazioni proprie del sistema coincidenti, a loro volta, le pulsazioni di risonanza del sistema. A questo punto, supponendo di voler trovare quanto vale lo spostamento lungo  $x$  del nodo  $h$ -esimo  $u_{0kh}$  o della generica sezione media  $u_{Mk0}$  (nel dominio della frequenza), posso tracciare i rispettivi diagrammi (Fig. 190). Per determinare il modulo e la fase dello spostamento  $u_{0kh}$  (o  $u_{Mk0}$ ) devo determinare sul diagramma di Bode il punto in cui agisce la forzante. Ma questo può essere dedotto dal diagramma di Campbell intersecando la curva del carico con la sezione verticale passante per  $\bar{\Omega}$  (si vedano sempre la Fig. 189 e la Fig. 191).

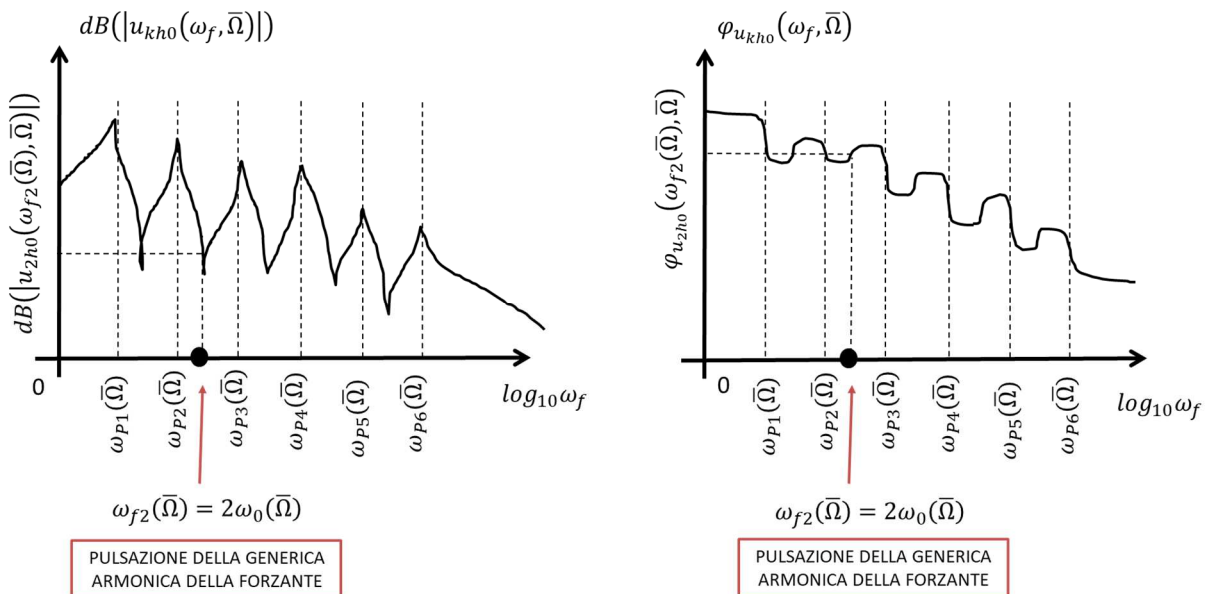


Figura 190 Diagramma di Bode per rotore elastico con forzante periodica

Guardando ai diagrammi di Campbell e di Bode, risulta chiaro il significato di pulsazione critica  $\Omega_c$ . Qualora infatti la pulsazione di lavoro della macchina  $\bar{\Omega}$  (la speed) si trovasse in corrispondenza di una critica  $\Omega_c$ , la pulsazione in cui la forzante agirebbe sulla macchina  $k\omega_0(\bar{\Omega})$  si troverebbe proprio in corrispondenza di una pulsazione propria  $\omega_{pi}(\bar{\Omega})$  e quindi di una pulsazione di risonanza. Ci troveremmo quindi necessariamente in condizioni di massima amplificazione.

Per quanto riguarda lo studio delle deformate forzate e del whirl forzato, come detto a inizio paragrafo, tramite semplici operazioni di media, a partire dalla (10.9.41) è possibile ricostruire il comportamento medio della generica sezione  $A(z_f)$  del rotore 3D (per la generica armonica!):

$$\underline{G}_{Mk}(t) = \begin{pmatrix} u_{Mk}(t) \\ v_{Mk}(t) \\ w_{Mk}(t) \end{pmatrix}, \quad \underline{\Phi}_{Mk}(t) = \begin{pmatrix} \theta_{Mk}(t) \\ \psi_{Mk}(t) \\ \varphi_{Mk}(t) \end{pmatrix},$$

$$\underline{q}_{Mk}(t) = Re \left( \underline{q}_{M0k} e^{j\omega_0(\Omega)kt} \right) = \begin{pmatrix} u_{Mk}(t) \\ v_{Mk}(t) \\ w_{Mk}(t) \\ \theta_{Mk}(t) \\ \psi_{Mk}(t) \\ \varphi_{Mk}(t) \end{pmatrix} = Re \left( \begin{pmatrix} u_{M0k} \\ v_{M0k} \\ w_{M0k} \\ \theta_{M0k} \\ \psi_{M0k} \\ \varphi_{M0k} \end{pmatrix} e^{j\omega_0(\Omega)kt} \right). \quad (10.9.43)$$

Il comportamento del moto di whirl forzato può essere quindi approssimativamente pensato come la “composizione” della parte flessionale del moto di whirl forzato, di quella torsionale e di quella assiale (Fig. 18g7):

$$\underline{q}_{Mkf}(t) = \begin{pmatrix} u_{Mk}(t) \\ v_{Mk}(t) \\ \theta_{Mk}(t) \\ \psi_{Mk}(t) \end{pmatrix} = Re \left( \underline{q}_{Mkfo} e^{j\omega_0(\Omega)kt} \right) = Re \left( \begin{pmatrix} u_{Mk0} \\ v_{Mk0} \\ \theta_{Mk0} \\ \psi_{Mk0} \end{pmatrix} e^{j\omega_0(\Omega)kt} \right) \quad (10.9.44)$$

$$q_{Mka}(t) = w_{Mk}(t) = Re(w_{Mk0} e^{j\omega_0(\Omega)kt}).$$

$$q_{Mkt}(t) = \varphi_{Mk}(t) = Re(\varphi_{Mk0} e^{j\omega_0(\Omega)kt}).$$

Naturalmente se tenderà a prevalere la parte flessionale avremo un moto di whirl forzato prevalentemente flessionale (DFPF), altrimenti ne avremo uno prevalentemente torsionale (DFPT) o prevalentemente assiale (DFPA). Dal momento che, grazie a quanto visto nei capitoli precedenti, già sappiamo come sono fatte le parti flessionali, torsionali e assiali del moto di whirl forzato, potremo rappresentare la loro composizione come riportato in Fig. 191 (per la generica armonica!).

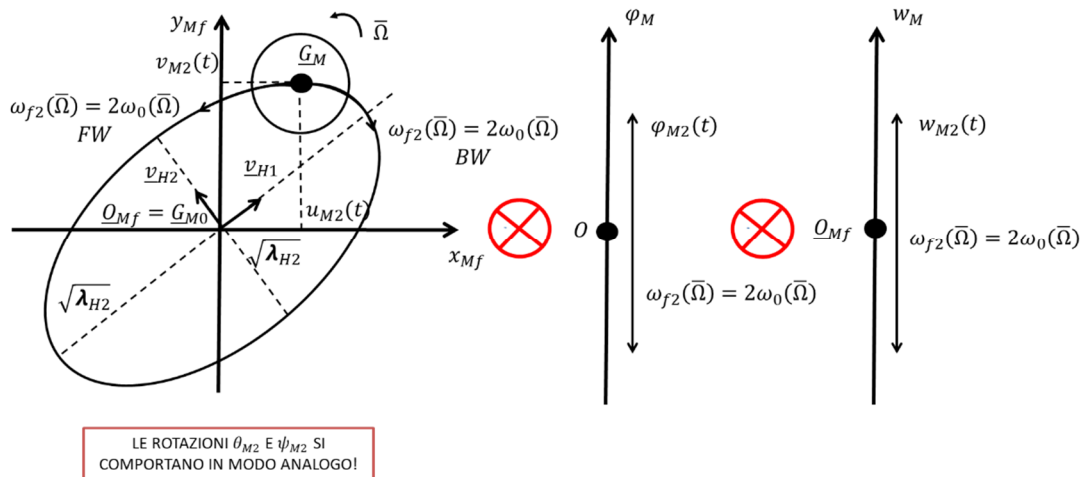


Figura 191 Whirl forzato per la generica sezione (le componenti angolari  $\psi_{M3}(t)$  e  $\theta_{M3}(t)$  si comportano in modo analogo)

La rotazione del rotore avviene chiaramente alla pulsazione  $\Omega$  (la speed della macchina) mentre il moto di rivoluzione ellittico della sezione media  $\underline{G}_M$  attorno all'asse  $z_{Mf}$  avviene sempre alla pulsazione della forzante in questione  $k\omega_f(\bar{\Omega})$ .

Come sempre le fasi  $\varphi_{u_{M0k}}$ ,  $\varphi_{v_{M0k}}$  di  $u_{M0k}$  e  $v_{M0k}$  permettono di determinare se l'ellisse è percorsa in senso BW o FW. Se infatti vale la condizione

$$0 < \varphi_{v_{M0k}} - \varphi_{u_{M0k}} < \pi, \quad (10.9.45)$$

allora il modo è BW e l'ellisse sarà percorsa in senso BW. Se invece

$$-\pi < \varphi_{v_{M0k}} - \varphi_{u_{M0k}} < 0, \quad (10.9.46)$$

l'ellissi sarà percorsa in senso FW.

Si noti come, al contrario del moto libero, non essendo presente il termine esponenziale dovuto allo smorzamento, la traiettoria sarà sempre un'oscillazione pura a prescindere dal valore dello smorzamento stesso (ovvero non si esaurirà mai). Se sono vicino a una risonanza e/o lo smorzamento modale è in generale piccolo, allora le dimensioni di tale oscillazione saranno più grandi, altrimenti saranno più piccole.



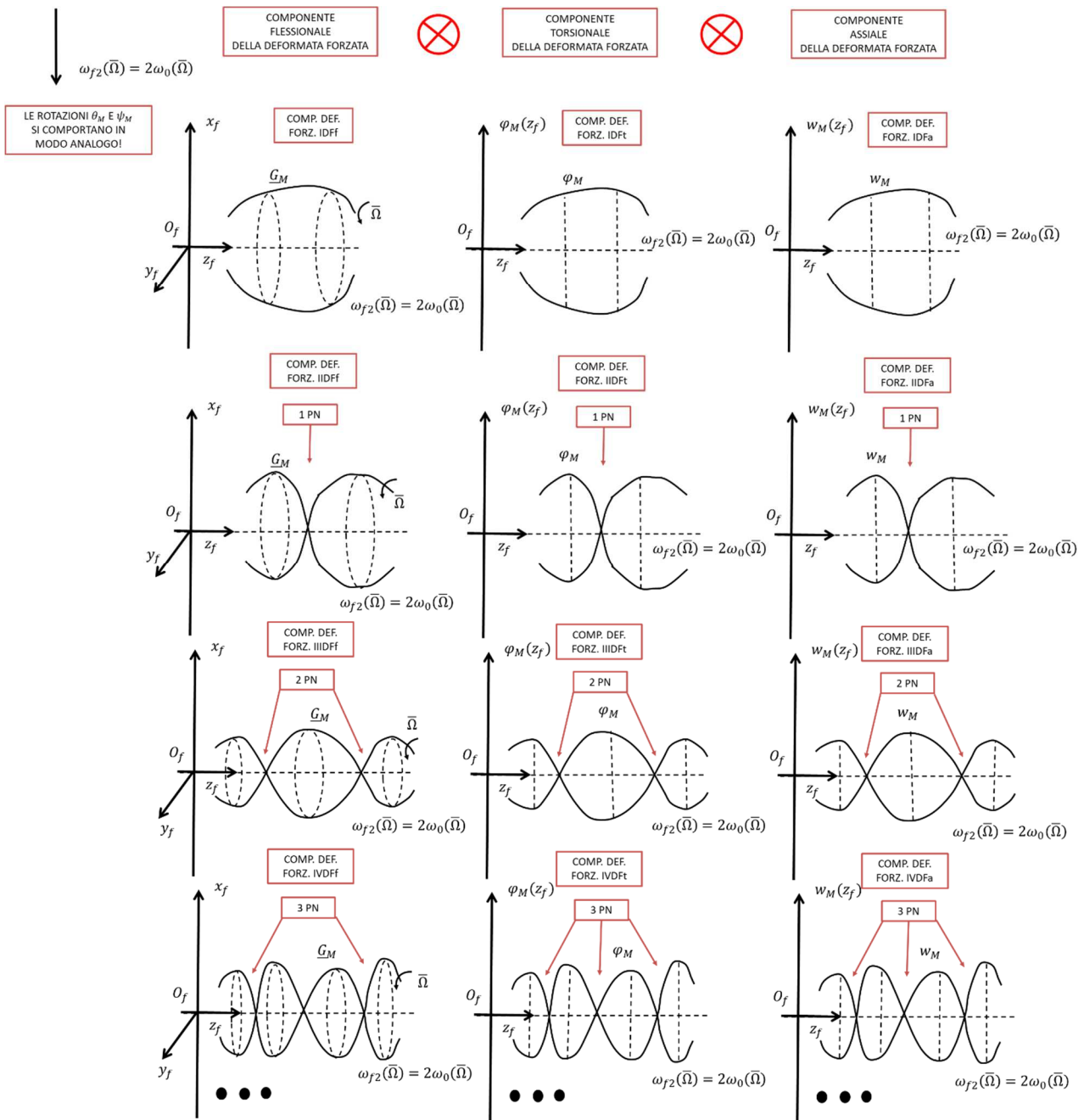


Figura 192 Deformate forzate per rotori elastici (le componenti angolari  $\psi_{M3}(t)$  e  $\theta_{M3}(t)$  si comportano in modo analogo)

Per quanto concerne infine la deformata forzata, essa può essere nuovamente pensata come la composizione delle deformate forzate associate alla parte flessionale del modo, a quella torsionale e a quella assiale (per la generica armonica!). Se tenderà a prevalere la parte flessionale avremo un deformata forzata prevalentemente flessionale (MPF), altrimenti ne avremo una prevalentemente torsionale (MPT) o prevalentemente assiale (MPA).

Poiché anche in questo caso, grazie a quanto visto nei capitoli precedenti, già sappiamo come sono fatte le deformate forzate associate alle parti flessionali, torsionali e assiali del modo, e poiché le varie sezioni equivalenti del rotore 3D sono comunque soggette alla principio di coerenza modale (l'albero non è di gomma!), potremo rappresentare la loro composizione come riportato in Fig. 192 (per la generica armonica!).

Come si può notare dalla Fig. 192, ricordando quanto detto nei capitoli precedenti su vibrazioni flessionali torsionali e assiali, le deformate forzate di un rotore 3D possono essere piuttosto complesse e assumere molteplici forme. In generale in ogni deformata forzata potrà essere individuata (anche se spesso è tutt'altro che evidente, soprattutto a colpo d'occhio!):

- una componente flessionale di tipo IDFF, IIDFF, IIIDFF, etc. (a seconda dei punti nodali PN) avente a sua volta una caratteristica BW, FW, M1PI, M2PI, M3PI, etc. (a seconda dei punti di inversione PI);
- una componente torsionale di tipo IDFT, IIDFT, IIIDFT, etc. (a seconda dei punti nodali PN) avente a sua volta una caratteristica OPI, 1PI, 2PI, 3PI, etc. (a seconda dei punti di inversione PI);
- una componente assiale di tipo IDFa, IIDFa, IIIDFa, etc. (a seconda dei punti nodali PN) avente a sua volta una caratteristica OPI, 1PI, 2PI, 3PI, etc. (a seconda dei punti di inversione PI).

Dal momento che, in teoria, ogni combinazione è possibile, le possibili deformate forzate sono tantissime. Solitamente al crescere della pulsazione della forzante  $k\omega_f(\bar{\Omega})$  crescono anche i punti nodali PN e i punti di inversione PI e quindi tendono a comparire deformate forzate sempre più complesse.

Come detto in precedenza, la rotazione del rotore avviene chiaramente alla pulsazione  $\Omega$  (la speed della macchina) mentre i vari moti di oscillazione associati alle deformate forzate (il moto di rivoluzione attorno all'asse  $z_f$  per la componente flessionale, il moto di rotazione attorno all'asse  $z_f$  per la componente torsionale e il moto di traslazione lungo l'asse  $z_f$  per la componente assiale) avvengono sempre alla pulsazione della forzante  $k\omega_f(\bar{\Omega})$  per tutte le sezioni medie equivalenti  $\underline{G}_M$  considerate. Ciò è coerente col fatto che la pulsazione associata al modo di vibrare in questione è sempre una e una sola, ovvero,  $k\omega_f(\bar{\Omega})$ .

Nella rappresentazione delle deformate forzate riportata in Fig. 192, al contrario del moto libero, i vari moti di oscillazione saranno sempre delle oscillazioni pure a prescindere dal valore dello smorzamento stesso (ovvero non si esauriranno mai). Se sono vicino a una risonanza e/o lo smorzamento modale è in generale piccolo, allora le dimensioni di tali oscillazioni saranno più grandi, altrimenti saranno più piccole.

Riportiamo per completezza in Fig. 192bis/ter un esempio di deformata forzata completa includendo sia le componenti angolari  $\psi_{M2}(t)$  e  $\theta_{M2}(t)$  di basculamento della sezione media per la parte flessionale (prima non considerate esplicitamente perché meno importanti a livello ingegneristico e perché il loro comportamento qualitativo è identico a quello delle componenti spaziali  $u_{M2}(t)$  e  $v_{M2}(t)$ ) sia le componenti torsionali  $\varphi_{M2}$  e assiali  $w_{M2}$  medie della sezione (per una generica armonica!). Nel caso dell'esempio abbiamo una deformata forzata flessionale IIDFF spaziale (con 1PNftra e che potrà avere caratteristica BW, FW o M1PI) associata a una deformata forzata flessionale IIIDFF rotazionale (con 2PNfrot e che potrà avere caratteristica BW, FW, M1PI, M2PI), associata a sua volta a una deformata forzata torsionale IIDFT (con 1PNt che potrà avere caratteristica OPI, 1PI), associato infine a una deformata forzata assiale IIDFT (con 1PNa che potrà avere caratteristica OPI, 1PI).

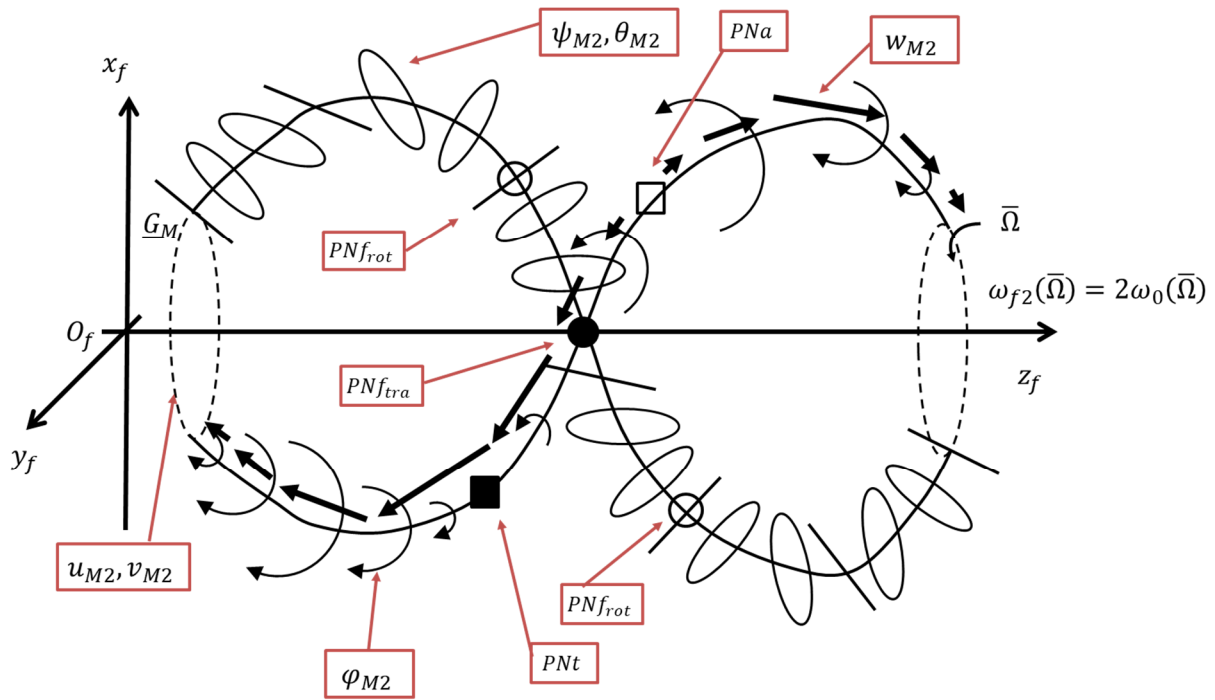


Figura 192bis Esempio di deformata modale per rotori elastici

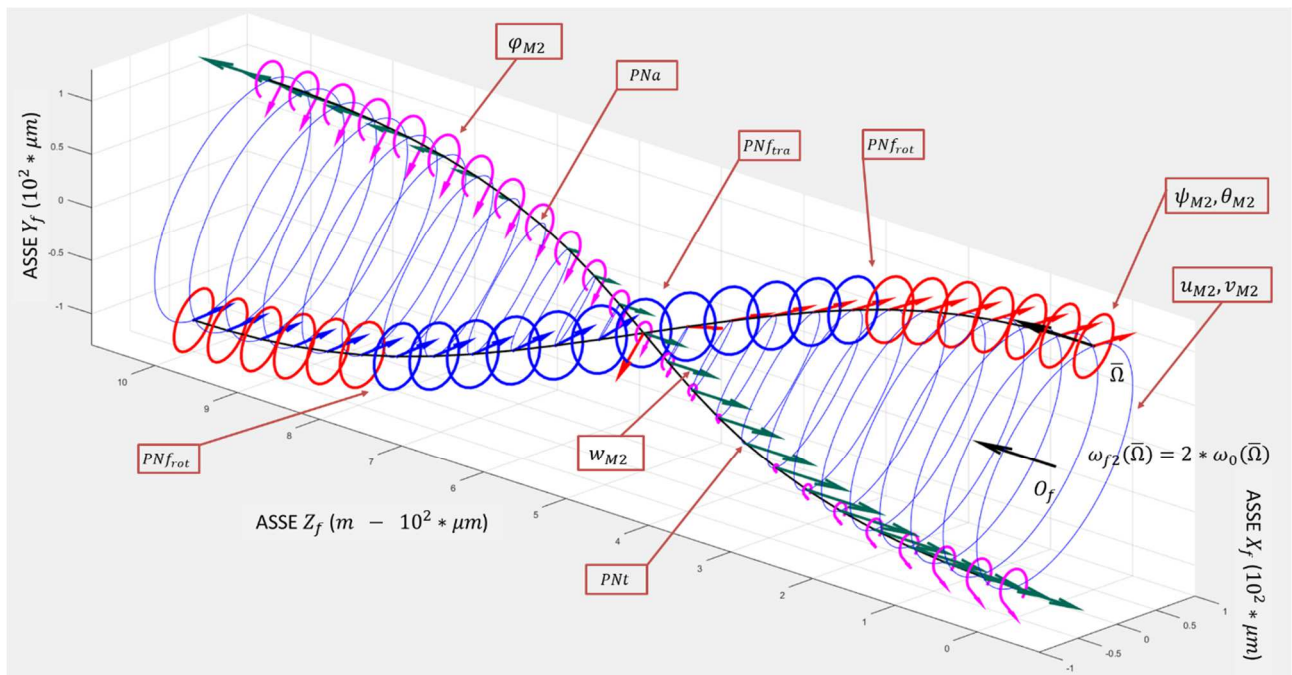


Figura 192ter Rappresentazione tipo software di deformata forzata per rotori elastici

ELENCO RIASSUNTIVO DELLE VARIE DEFORMATE FORZATE (IN TEORIA TUTTE LE COMBINAZIONE FLESSIONALI – TORSIONALI – ASSIALI SONO POSSIBILI):

- 1) FLESSIONALE
  - FORMA: IDF
  - CARATTERISTICA: BW, FW
  - FORMA: IIDF

CARETTERISTICA: BW, FW, M1PI

- FORMA: IIIDF

CARETTERISTICA: BW, FW, M1PI, M2PI

- FORMA: IVDF

CARETTERISTICA: BW, FW, M1PI, M2PI, M3PI

... ..

2) TORSIONALE

- FORMA: IDF

CARETTERISTICA: OPI

- FORMA: IIDF

CARETTERISTICA: OPI, 1PI

- FORMA: IIIDF

CARETTERISTICA: OPI, 1PI, 2PI

- FORMA: IVDF

CARETTERISTICA: OPI, 1PI, 2PI, 3PI

... ..

3) ASSIALE

- FORMA: IDF

CARETTERISTICA: OPI

- FORMA: IIDF

CARETTERISTICA: OPI, 1PI

- FORMA: IIIDF

CARETTERISTICA: OPI, 1PI, 2PI

- FORMA: IDF

CARETTERISTICA: OPI, 1PI, 2PI, 3PI

... ..

6) FORZANTE GENERICA:

$$M\ddot{\underline{q}} + (\Omega G + C)\dot{\underline{q}} + K\underline{q} = \underline{Q}(t, \Omega) \quad (10.9.46)$$

$$\underline{Q}(t, \Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\underline{Q}}(\omega, \Omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad \tilde{\underline{Q}}(\omega, \Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{Q}(t, \Omega) e^{-j\omega t} dt. \quad (10.9.47)$$

$$\underline{Q}(t, \Omega) = \begin{pmatrix} \underline{Q}_h(t, \Omega) \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}, \quad \tilde{\underline{Q}}(\omega, \Omega) = \begin{pmatrix} \tilde{\underline{Q}}_h(\omega, \Omega) \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

La soluzione del moto forzato del sistema può essere facilmente determinata grazie agli strumenti matematici introdotti nel capitolo 1 e si ha:

$$\underline{q}_f(t, \Omega) = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{q}_h(t, \Omega) \\ \dots \end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{\tilde{q}}(\omega, \Omega) e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(\omega, \Omega) \underline{\tilde{Q}}(\omega, \Omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (10.9.48)$$

$$\underline{\tilde{q}}(\omega, \Omega) = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{\tilde{q}}_h(\omega, \Omega) \\ \dots \end{pmatrix} = \alpha(\omega, \Omega) \underline{\tilde{Q}}(\omega, \Omega) = [-\omega^2 M + j\omega(C + \Omega G) + K]^{-1} \underline{\tilde{Q}}(\omega, \Omega)$$

$$\underline{\tilde{q}}_h(\omega, \Omega) = \begin{pmatrix} u_{\omega h} \\ v_{\omega h} \\ w_{\omega h} \end{pmatrix}$$

$$\underline{q}_{\omega h}(t, \Omega) = \begin{pmatrix} u_{\omega h}(t) \\ v_{\omega h}(t) \\ w_{\omega h}(t) \end{pmatrix} = \text{Re} \left[ \underline{\tilde{q}}_h(\omega, \Omega) e^{j\omega t} \right] = \text{Re} \left[ \begin{pmatrix} u_{\omega h} \\ v_{\omega h} \\ w_{\omega h} \end{pmatrix} e^{j\omega t} \right]$$

dove in questi casi è utile distinguere nella ricettanza  $\alpha(\omega, \Omega)$  la doppia dipendenza dalla pulsazione della forzante e della velocità di rotazione della macchina.

Applicando il teorema di sovrapposizione modale in questo caso abbiamo:

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{q}}(\omega, \Omega) &= \alpha(\omega, \Omega) \underline{\tilde{Q}}(\omega, \Omega) = \sum_{k=1}^{2N} \frac{(q_{Rk} \underline{q}_{Lk}^H)}{j\omega - s_k} \underline{\tilde{Q}}(\omega, \Omega) = \\ &= \sum_{k=1}^{2N} \left( \frac{q_{Lk}^H \underline{\tilde{Q}}(\omega, \Omega)}{j\omega - s_k} \right) \underline{q}_{Rk}, \end{aligned} \quad (10.9.49)$$

da cui possiamo dedurre che i modi che maggiormente contribuiscono alle singole armoniche della soluzione sono quelli in cui  $\left( \frac{q_{Lk}^H \underline{\tilde{Q}}(\omega, \Omega)}{j\omega - s_k} \right)$  è grande, ovvero quando  $\omega$  è vicina a una delle pulsazioni proprie del sistema  $\omega_{pk}$  contenuta in  $s_k$  (corrispondenti alle risonanze del sistema) o quando  $q_{Lk}^H \underline{\tilde{Q}}(\omega, \Omega)$  è grande (forzanti ortogonali al corrispondente autovettore).

Consideriamo a titolo di pure esempio una forzante generica come quella in Fig. 193 (un tipico segnale passabanda con frequenza portante  $\omega_f(\Omega)$ , ovvero come nella realtà appare un segnale puramente armonico). In questo caso  $\delta(\Omega)$  e  $\Delta(\Omega)$  sono le soglie di sensibilità del segnale, utili per determinare in quale range dello spettro il contributo in frequenza del segnale sia realmente apprezzabile. Per semplicità supporremo che, come spesso accade in questo caso,  $\delta(\Omega)$ ,  $\Delta(\Omega)$  e la frequenza portante del segnale  $\omega_f(\Omega)$  siano le stesse per ogni componente della forzante  $\underline{\tilde{Q}}(\omega, \Omega)$ .

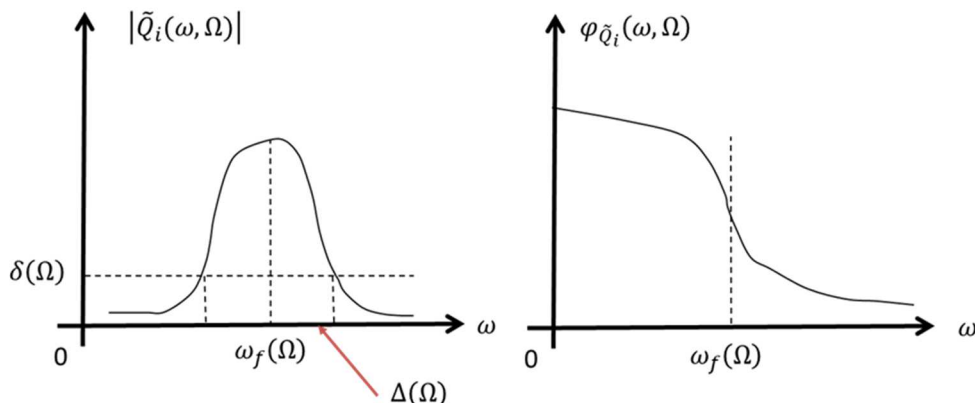


Figura 193 Forzante generica del sistema

Il diagramma di Campbell associato a questo caso è riportato in Fig. 194. Rispetto allo studio nel moto libero abbiamo aggiunto la banda del carico ( $\omega_f(\Omega), \Delta(\Omega)$ ) sul diagramma relativo alle pulsazioni proprie  $\omega_{pi}$ . Le intersezioni della banda del carico con i rami del diagramma  $I\Omega_c$  rappresentano le bande critiche. Il valore di smorzamento modale (banda di smorzamento) associato alle bande critiche  $I\zeta_c$  può essere facilmente trovato riportando la banda critica in questione  $I\Omega_c$  sul diagramma dello smorzamento.

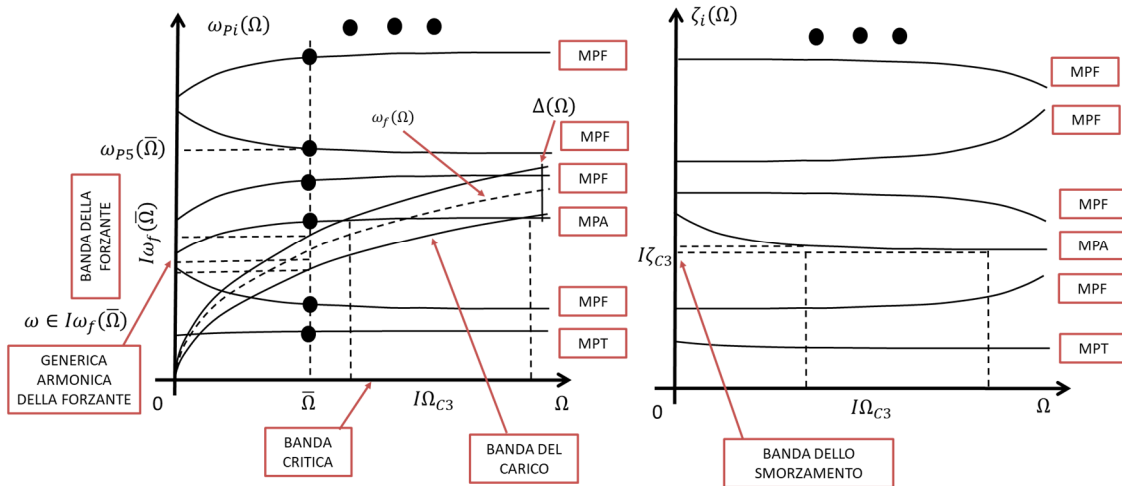


Figura 194 Diagramma di Campbell per rotore elastico con forzante generica

Per capire quanto effettivamente vibra il sistema dobbiamo fare uso nuovamente dei diagrammi di Bode. A tale fine dobbiamo prima specificare una velocità di lavoro della macchina  $\bar{\Omega}$  alla quale studiare il sistema. Riporto quindi tale velocità  $\bar{\Omega}$  sul diagramma di Campbell; le intersezioni tra la retta verticale passante per  $\bar{\Omega}$  e i  $3 * NN$  rami del diagramma delle pulsazioni proprie  $\omega_{pi}$  rappresentano le  $3 * NN$  pulsazioni proprie del sistema coincidenti, a loro volta, le pulsazioni di risonanza del sistema. A questo punto, supponendo di voler trovare quanto vale lo spostamento lungo  $x$  del nodo  $h$ -esimo  $u_{\omega h}$  o della generica sezione media  $u_{M\omega}$  (nel dominio della frequenza), posso tracciare i rispettivi diagrammi (Fig. 195). Per determinare le bande del modulo e della fase dello spostamento  $u_{\omega h}$  (o  $u_{M\omega}$ ) devo determinare sul diagramma di Bode il punto la banda in cui agisce la forzante. Ma questo può essere dedotto dal diagramma di Campbell intersecando la banda del carico con la sezione verticale passante per  $\bar{\Omega}$  (si vedano sempre la Fig. 194 e la Fig. 195). Lo stesso ragionamento può essere effettuato per la generica componente armonica a pulsazione  $\omega \in I\omega_f(\bar{\Omega})$  appartenente alla banda  $I\omega_f(\bar{\Omega})$  in cui agisce la forzante (Fig. 194 e la Fig. 195).

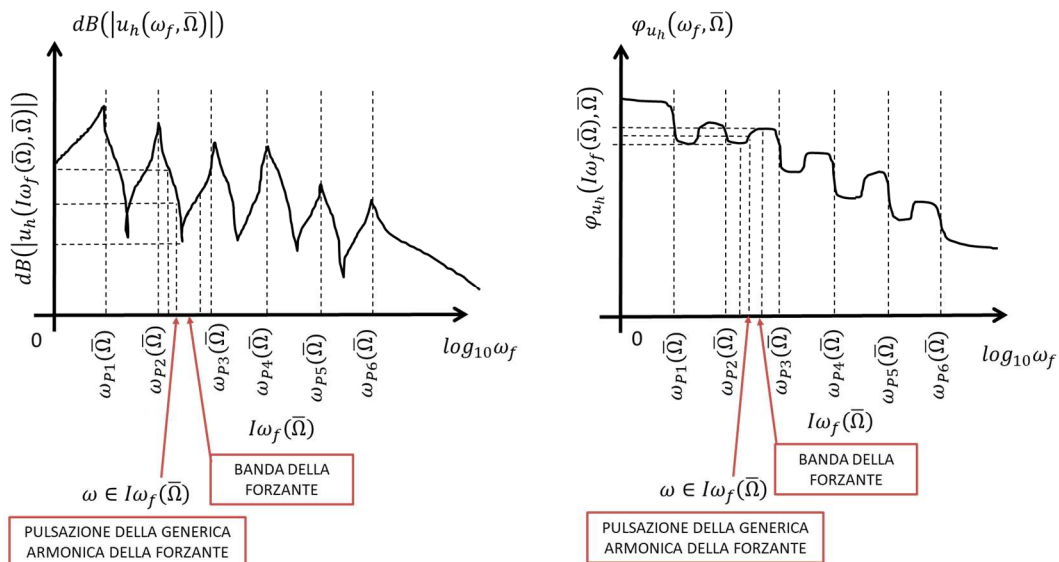


Figura 195 Diagramma di Bode per rotore elastico con forzante generica

Guardando ai diagrammi di Campbell e di Bode, risulta chiaro il significato di banda critica  $I\Omega_c$ . Qualora infatti la pulsazione di lavoro della macchina  $\bar{\Omega}$  (la speed) si trovasse in corrispondenza di una banda critica  $I\Omega_c$ , la banda in cui la forzante agirebbe sulla macchina  $I\omega_f(\bar{\Omega})$  includerebbe proprio una pulsazione propria  $\omega_{pi}(\bar{\Omega})$  e quindi una pulsazione di risonanza. Ci troveremmo quindi necessariamente in condizioni di massima amplificazione.

Per quanto riguarda lo studio delle deformate forzate e del whirl forzato, come detto a inizio paragrafo, tramite semplici operazioni di media, a partire dalla (10.9.48) è possibile ricostruire il comportamento medio della generica sezione  $A(z_f)$  del rotore 3D (per la generica armonica a pulsazione  $\omega \in I\omega_f(\bar{\Omega})$ ):

$$\underline{G}_{M\omega}(t) = \begin{pmatrix} u_{M\omega}(t) \\ v_{M\omega}(t) \\ w_{M\omega}(t) \end{pmatrix}, \quad \underline{\Phi}_{M\omega}(t) = \begin{pmatrix} \theta_{M\omega}(t) \\ \psi_{M\omega}(t) \\ \varphi_{M\omega}(t) \end{pmatrix},$$

$$\underline{q}_{M\omega}(t) = \text{Re} \left( \underline{q}_{M0\omega} e^{j\omega t} \right) = \begin{pmatrix} u_{M0\omega}(t) \\ v_{M0\omega}(t) \\ w_{M0\omega}(t) \\ \theta_{M0\omega}(t) \\ \psi_{M0\omega}(t) \\ \varphi_{M0\omega}(t) \end{pmatrix} = \text{Re} \left( \begin{pmatrix} u_{M0\omega} \\ v_{M0\omega} \\ w_{M0\omega} \\ \theta_{M0\omega} \\ \psi_{M0\omega} \\ \varphi_{M0\omega} \end{pmatrix} e^{j\omega t} \right). \quad (10.9.50)$$

Il comportamento del moto di whirl forzato può essere quindi approssimativamente pensato come la "composizione" della parte flessionale del moto di whirl forzato, di quella torsionale e di quella assiale (Fig. 196):

$$\underline{q}_{M\omega f}(t) = \begin{pmatrix} u_{M\omega}(t) \\ v_{M\omega}(t) \\ \theta_{M\omega}(t) \\ \psi_{M\omega}(t) \end{pmatrix} = \text{Re} \left( \underline{q}_{M\omega f0} e^{j\omega t} \right) = \text{Re} \left( \begin{pmatrix} u_{M\omega0} \\ v_{M\omega0} \\ \theta_{M\omega0} \\ \psi_{M\omega0} \end{pmatrix} e^{j\omega t} \right) \quad (10.9.51)$$

$$q_{M\omega a}(t) = w_{M\omega}(t) = \text{Re}(w_{M\omega0} e^{j\omega t}).$$

$$q_{M\omega t}(t) = \varphi_{M\omega}(t) = \text{Re}(\varphi_{M\omega0} e^{j\omega t}).$$

Naturalmente se tenderà a prevalere la parte flessionale avremo un moto di whirl forzato prevalentemente flessionale (DFPF), altrimenti ne avremo uno prevalentemente torsionale (DFPT) o prevalentemente assiale (DFPA). Dal momento che, grazie a quanto visto nei capitoli precedenti, già sappiamo come sono fatte le parti flessionali, torsionali e assiali del moto di whirl forzato, potremo rappresentare la loro composizione come riportato in Fig. 196 (per la generica armonica  $\omega \in I\omega_f(\bar{\Omega})!$ ).

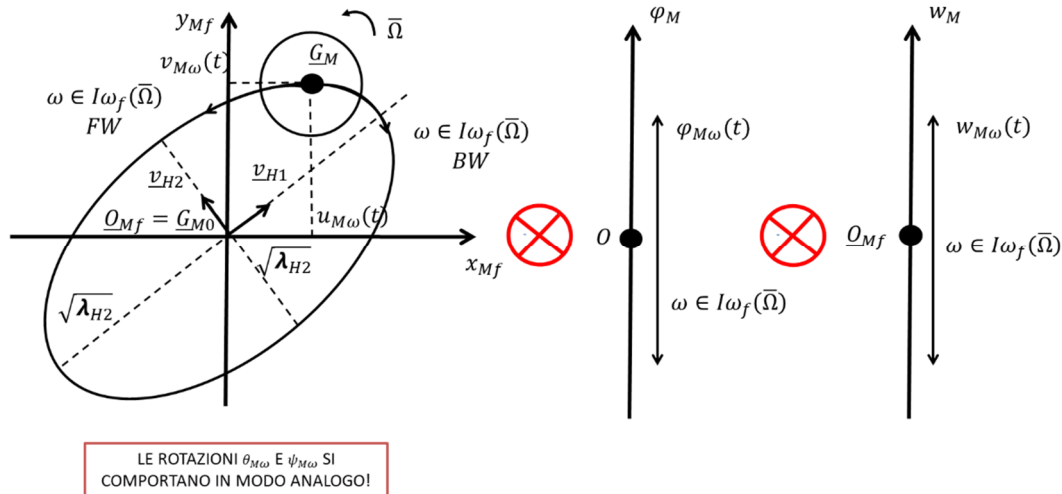


Figura 196 Whirl forzato per la generica sezione (le componenti angolari  $\psi_{M\omega}(t)$  e  $\theta_{M\omega}(t)$  si comportano in modo analogo)

La rotazione del rotore avviene chiaramente alla pulsazione  $\Omega$  (la speed della macchina) mentre il moto di rivoluzione ellittico della sezione media  $\underline{G}_M$  attorno all'asse  $z_{Mf}$  avviene sempre alla pulsazione della forzante in questione  $\omega \in I\omega_f(\bar{\Omega})$ .

Come sempre le fasi  $\varphi_{u_{M0\omega}}$ ,  $\varphi_{v_{M0\omega}}$  di  $u_{M0\omega}$  e  $v_{M0\omega}$  permettono di determinare se l'ellisse è percorsa in senso BW o FW. Se infatti vale la condizione

$$0 < \varphi_{v_{M0\omega}} - \varphi_{u_{M0\omega}} < \pi, \quad (10.9.52)$$

allora il modo è BW e l'ellisse sarà percorsa in senso BW. Se invece

$$-\pi < \varphi_{v_{M0\omega}} - \varphi_{u_{M0\omega}} < 0, \quad (10.9.53)$$

l'ellissi sarà percorsa in senso FW.

Si noti come, al contrario del moto libero, non essendo presente il termine esponenziale dovuto allo smorzamento, la traiettoria sarà sempre un'oscillazione pura a prescindere dal valore dello smorzamento stesso (ovvero non si esaurirà mai). Se sono vicino a una risonanza e/o lo smorzamento modale è in generale piccolo, allora le dimensioni di tale oscillazione saranno più grandi, altrimenti saranno più piccole.

Per quanto concerne infine la deformata forzata, essa può essere nuovamente pensata come la composizione delle deformate forzate associate alla parte flessionale del modo, a quella torsionale e a quella assiale (per la generica armonica  $\omega \in I\omega_f(\bar{\Omega})!$ ). Se tenderà a prevalere la parte flessionale avremo una deformata forzata prevalentemente flessionale (MPF), altrimenti ne avremo una prevalentemente torsionale (MPT) o prevalentemente assiale (MPA).



Poiché anche in questo caso, grazie a quanto visto nei capitoli precedenti, già sappiamo come sono fatte le deformate forzate associate alle parti flessionali, torsionali e assiali del modo, e poiché le varie sezioni equivalenti del rotore 3D sono comunque soggette alla principio di coerenza modale (l'albero non è di gomma!), potremo rappresentare la loro composizione come riportato in Fig. 197 (per la generica armonica  $\omega \in I\omega_f(\bar{\Omega})$ !).

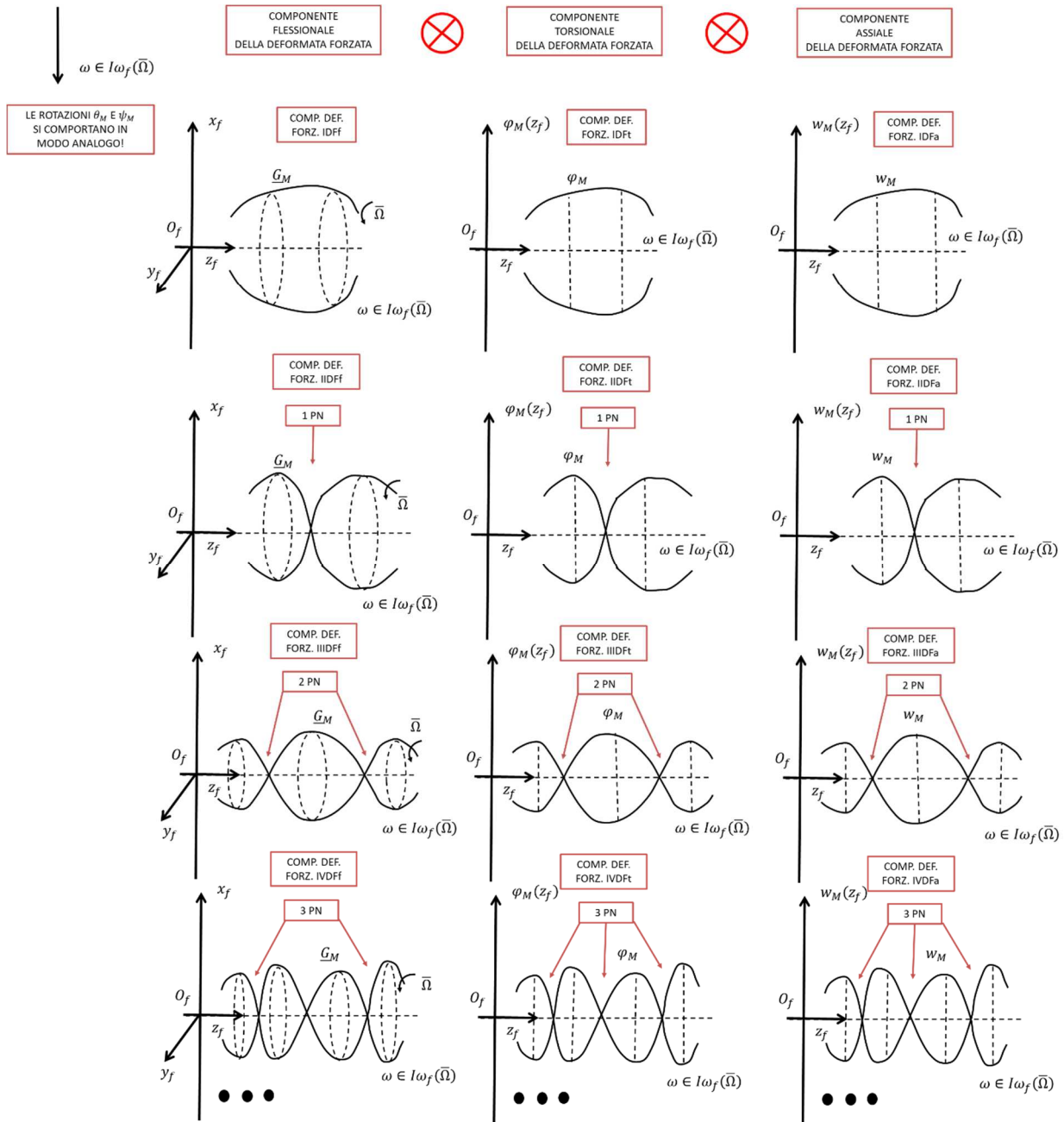


Figura 197 Deformate forzate per rotori elastici (le componenti angolari  $\psi_{M\omega}(t)$  e  $\theta_{M\omega}(t)$  si comportano in modo analogo)

Come si può notare dalla Fig. 197, ricordando quanto detto nei capitoli precedenti su vibrazioni flessionali torsionali e assiali, le deformate forzate di un rotore 3D possono essere piuttosto complesse e assumere molteplici forme. In generale in ogni deformata forzata potrà essere individuata (anche se spesso è tutt'altro che evidente, soprattutto a colpo d'occhio!):

- una componente flessionale di tipo IDFF, IIDFF, IIIDFF, etc. (a seconda dei punti nodali PN) avente a sua volta una caratteristica BW, FW, M1PI, M2PI, M3PI, etc. (a seconda dei punti di inversione PI);
- una componente torsionale di tipo IDFT, IIDFT, IIIDFT, etc. (a seconda dei punti nodali PN) avente a sua volta una caratteristica OPI, 1PI, 2PI, 3PI, etc. (a seconda dei punti di inversione PI);
- una componente assiale di tipo IDFa, IIDFa, IIIDFa, etc. (a seconda dei punti nodali PN) avente a sua volta una caratteristica OPI, 1PI, 2PI, 3PI, etc. (a seconda dei punti di inversione PI).

Dal momento che, in teoria, ogni combinazione è possibile, le possibili deformate forzate sono tantissime. Solitamente al crescere della pulsazione della forzante  $\omega \in I\omega_f(\bar{\Omega})$  crescono anche i punti nodali PN e i punti di inversione PI e quindi tendono a comparire deformate forzate sempre più complesse.

Come detto in precedenza, la rotazione del rotore avviene chiaramente alla pulsazione  $\Omega$  (la speed della macchina) mentre i vari moti di oscillazione associati alle deformate forzate (il moto di rivoluzione attorno all'asse  $z_f$  per la componente flessionale, il moto di rotazione attorno all'asse  $z_f$  per la componente torsionale e il moto di traslazione lungo l'asse  $z_f$  per la componente assiale) avvengono sempre alla pulsazione della forzante  $\omega \in I\omega_f(\bar{\Omega})$  per tutte le sezioni medie equivalenti  $\underline{G}_M$  considerate. Ciò è coerente col fatto che la pulsazione associata al modo di vibrare in questione è sempre una e una sola, ovvero,  $\omega \in I\omega_f(\bar{\Omega})$ .

Nella rappresentazione delle deformate forzate riportata in Fig. 197, al contrario del moto libero, i vari moti di oscillazione saranno sempre delle oscillazioni pure a prescindere dal valore dello smorzamento stesso (ovvero non si esauriranno mai). Se sono vicino a una risonanza e/o lo smorzamento modale è in generale piccolo, allora le dimensioni di tali oscillazioni saranno più grandi, altrimenti saranno più piccole.

Riportiamo per completezza in Fig. 197bis/ter un esempio di deformata forzata completa includendo sia le componenti angolari  $\psi_{M\omega}(t)$  e  $\theta_{M\omega}(t)$  di basculamento della sezione media per la parte flessionale (prima non considerate esplicitamente perché meno importanti a livello ingegneristico e perché il loro comportamento qualitativo è identico a quello delle componenti spaziali  $u_{M\omega}(t)$  e  $v_{M\omega}(t)$ ) sia le componenti torsionali  $\varphi_{M\omega}$  e assiali  $w_{M\omega}$  medie della sezione (per una generica armonica  $\omega \in I\omega_f(\bar{\Omega})$ !). Nel caso dell'esempio abbiamo una deformata forzata flessionale IIDFF spaziale (con 1PNftra e che potrà avere caratteristica BW, FW o M1PI) associata a una deformata forzata flessionale IIIDFF rotazionale (con 2PNfrot e che potrà avere caratteristica BW, FW, M1PI, M2PI), associata a sua volta a una deformata forzata torsionale IIDFT (con 1PNt che potrà avere caratteristica OPI, 1PI), associato infine a una deformata forzata assiale IIDFa (con 1PNa che potrà avere caratteristica OPI, 1PI).

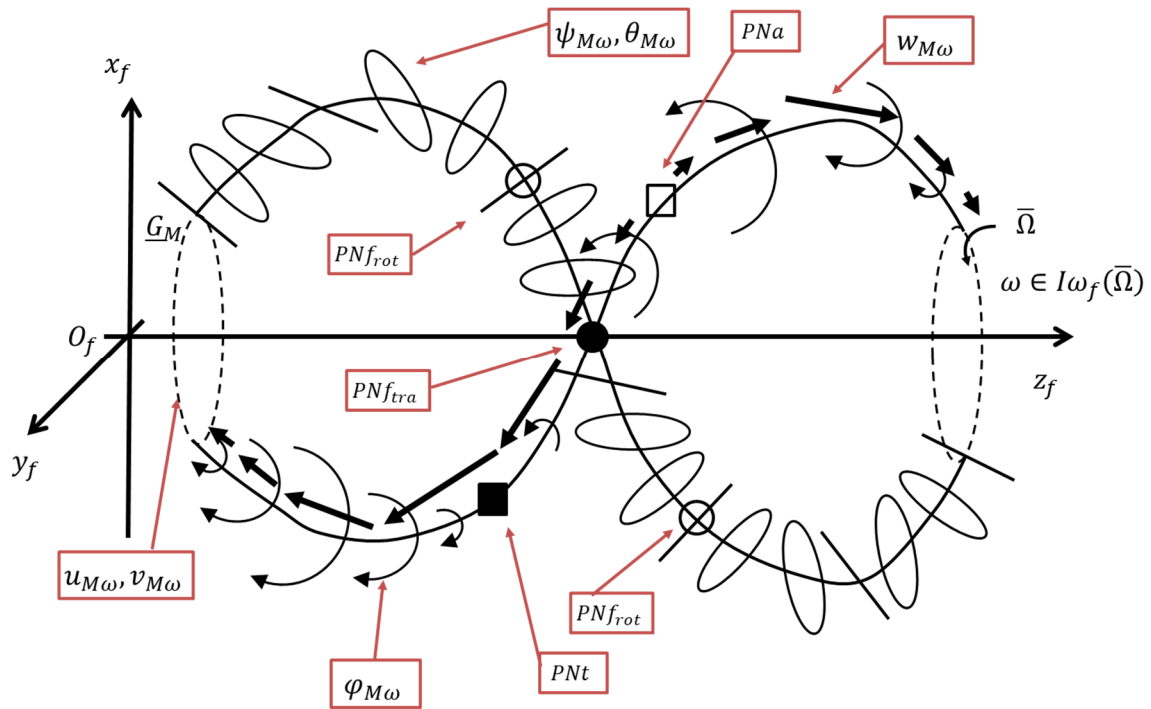


Figura 197bis Esempio di deformata modale per rotor elastici

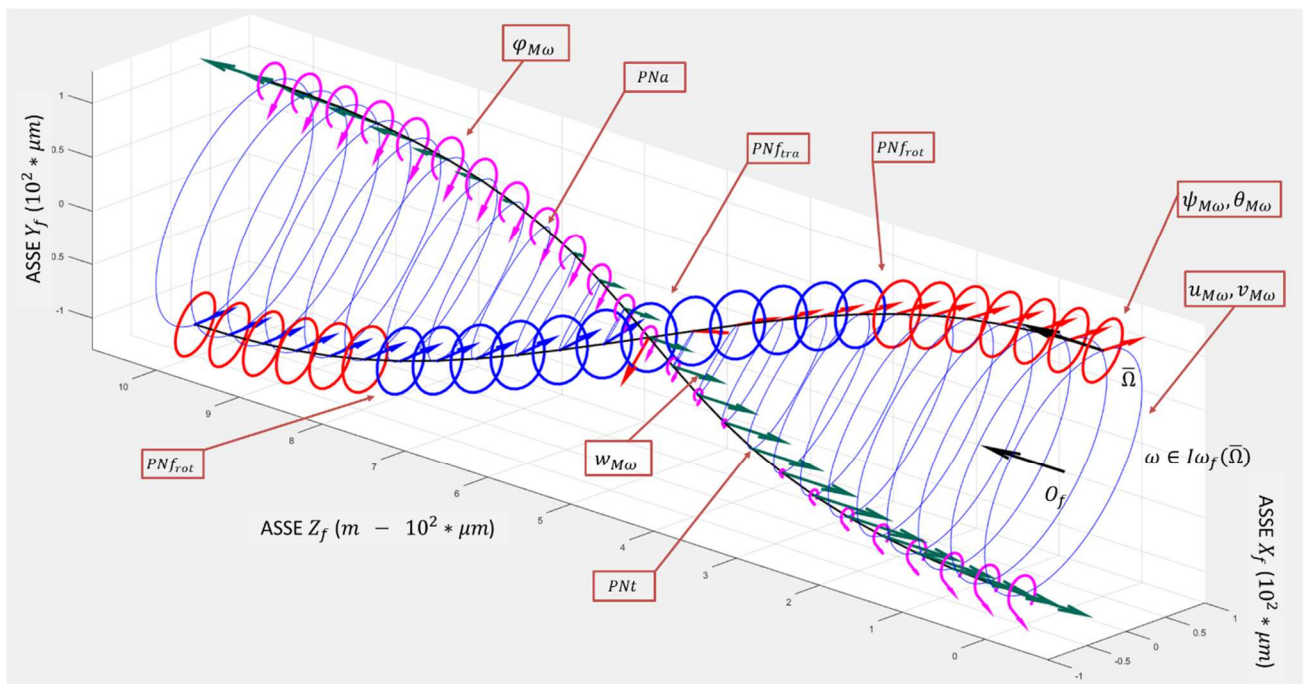


Figura 197ter Rappresentazione tipo software di deformata forzata per rotor elastici (si osservi solo la parte flessionale della deformata)

ELENCO RIASSUNTIVO DELLE VARIE DEFORMATE FORZATE (IN TEORIA TUTTE LE COMBINAZIONE FLESSIONALI – TORSIONALI – ASSIALI SONO POSSIBILI):

- 1) FLESSIONALE

- FORMA: IDF  
CARATTERISTICA: BW, FW
- FORMA: IIDF  
CARATTERISTICA: BW, FW, M1PI
- FORMA: IIIDF  
CARATTERISTICA: BW, FW, M1PI, M2PI
- FORMA: IVDF  
CARATTERISTICA: BW, FW, M1PI, M2PI, M3PI

... ..

2) TORSIONALE

- FORMA: IDF  
CARATTERISTICA: OPI
- FORMA: IIDF  
CARATTERISTICA: OPI, 1PI
- FORMA: IIIDF  
CARATTERISTICA: OPI, 1PI, 2PI
- FORMA: IVDF  
CARATTERISTICA: OPI, 1PI, 2PI, 3PI

... ..

3) ASSIALE

- FORMA: IDF  
CARATTERISTICA: OPI
- FORMA: IIDF  
CARATTERISTICA: OPI, 1PI
- FORMA: IIIDF  
CARATTERISTICA: OPI, 1PI, 2PI
- FORMA: IDF  
CARATTERISTICA: OPI, 1PI, 2PI, 3PI

... ..

## 10.10 Effetto della gravità

E' abbastanza utile discutere brevemente quali sia l'effetto di azioni esterne costanti su sistemi meccanici lineari e, nello specifico, della gravità. Partiamo cercando di capire come un'azione esterna possa essere applicata nei nodi di un modello FEM come quello considerato finora (nel caso in cui siano presenti elementi concentrati!):

$$\underline{Q}_{gk} = \begin{pmatrix} 0 \\ -m_{dk}g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10.10.1)$$

dove  $g$  è l'accelerazione di gravità. Il contributo complessivo dell'azione di gravità sarà di conseguenza:

$$\underline{Q}_{dg} = \sum_{k=1}^{NN} J_k^T \underline{Q}_{bk}. \quad (10.10.2)$$

In cui  $J_k$  è la matrice di connessione. Nel caso in cui invece l'azione costanza (in questo caso la gravità) sia applicata a un elemento del nostro modello FEM, sfruttando il Principio dei Lavori virtuali avremo

$$\delta \underline{q}_j^T \underline{Q}_g^j = \delta L_g^j. \quad (10.10.3)$$

dove  $\delta L_g^j$  è il lavoro virtuale effettuato sul sistema e scritto nello spazio fisico. Si ha perciò

$$\delta L_g^e = \int_{V_e} \delta \underline{P}_f^T \rho \underline{g} dV, \quad \underline{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (10.10.4)$$

in cui  $\underline{P}_f$  come sempre è il generico punto del volumetto  $V_j$  associato all'elemento.

Ricordando la (10.2.5), questa volta si ha

$$\delta \underline{P}_f = \delta G_j(\underline{x}_j, t) \quad (10.10.5)$$

$$G_j(\underline{x}_j, t) = \underline{q}_j(\underline{x}_j, t) = \begin{pmatrix} u_j(\underline{x}_j, t) \\ v_j(\underline{x}_j, t) \\ w_j(\underline{x}_j, t) \end{pmatrix} \cong N_j(\underline{x}_j) \underline{q}_j(t)$$

da cui

$$\delta L_g^j = - \int_{V_j} \rho g \delta v_j(\underline{x}_j, t) dV. \quad (10.10.6)$$

Introducendo le quindi funzioni di forma, si ottiene direttamente

$$\delta L_g^e = \int_{V_j} \rho \delta \underline{q}_j^T N_j^T g dV = - \delta \underline{q}_j^T \int_{V_j} \rho N_j^T g dV = \delta \underline{q}_j^T \underline{G}_j. \quad (10.10.7)$$

Essendo infine gli spostamenti virtuali arbitrari, purché ammissibili con i vincoli, si ottiene

$$\begin{aligned} \underline{Q}_g^j &= \underline{G}_j \\ \underline{Q}_g &= \sum_{j=1}^{NE} H_j^T \underline{Q}_g^j. \end{aligned} \quad (10.10.8)$$

Analizziamo quindi l'equazione:

$$M \ddot{\underline{q}} + (\Omega G + C) \dot{\underline{q}} + K \underline{q} = \underline{Q}_{cost} + \underline{Q}(t), \quad \underline{q} = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{q}_h \\ \dots \end{pmatrix}, \quad \underline{Q}_{cost} = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{Q}_{cost,h} \\ \dots \end{pmatrix}, \quad \underline{Q}(t) = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{Q}_h(t) \\ \dots \end{pmatrix} \quad (10.10.9)$$

dove  $\underline{Q}_{cost}$  è una qualunque azione costante (in questo caso  $\underline{Q}_{cost} = \underline{Q}_{dg} + \underline{Q}_g$ ) e  $\underline{Q}(t)$  è una forzante generica (per semplicità possiamo supporre che  $\underline{Q}(t)$  non abbia un componente costante oppure, se essa è presente, possiamo inglobarla dentro  $\underline{Q}_{cost}$ ). Il punto di equilibrio del sistema sarà chiaramente

$$\underline{q}^{eq} = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{q}_h^{eq} \\ \dots \end{pmatrix} = K^{-1} \underline{Q}_{cost}. \quad (10.10.10)$$

Descrivendo ora la dinamica del problema rispetto alla posizione di equilibrio  $\underline{q}^{eq}$

$$\underline{q} = \underline{q}^{eq} + \underline{\tilde{q}}, \quad \underline{\tilde{q}} = \begin{pmatrix} \dots \\ \tilde{q}_h \\ \dots \end{pmatrix} \quad (10.10.11)$$

e sostituendo la (10.10.11) nella (10.10.9), si ha

$$M\ddot{\underline{\tilde{q}}} + (\Omega G + C)\dot{\underline{\tilde{q}}} + K\underline{\tilde{q}} = \underline{Q}(t). \quad (10.10.12)$$

Si nota dunque come, con questo semplice cambio di variabili, la dinamica del sistema sia stata ricondotta a quella sempre studiata fino ad ora. L'effetto di una qualunque forzante costante su un sistema meccanico lineare è semplicemente quello di spostare il punto di equilibrio (si veda la Fig. 198 dove è rappresentata una sezione media di interesse).

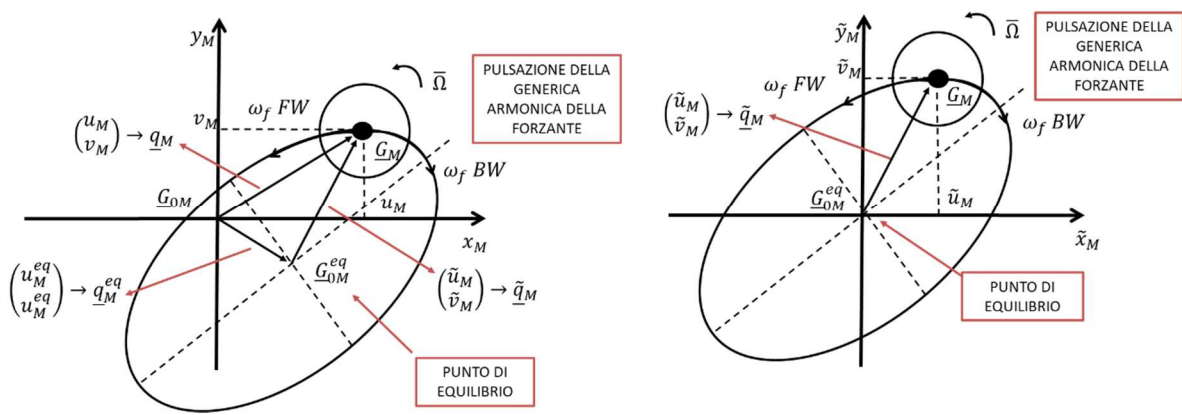


Figura 198 Effetto delle azioni esterne costanti e della gravità su una sezione media

L'effetto di forzanti costanti come la gravità può di conseguenza essere inizialmente ignorato in tutte le analisi studiate finora (se il sistema meccanico è lineare!) a patto poi di traslare alla fine i risultati di una quantità  $\underline{q}^{eq}$ . Nel caso di turbomacchine e motori, viste le alte sollecitazioni in gioco, tale quantità è spesso piccola rispetto alle orbite compiute dai nodi  $\underline{G}_j$  del rotore e può quindi essere trascurata.

## 11. OTTIMIZZAZIONE STRUTTURALE

Negli ultimissimi anno l'applicazione di "processi" di Additive Manufacturing (AM) all'acciaio e alle leghe ad alta resistenza (nichel, titanio, etc.) ha riportato alla ribalta l'ottimizzazione strutturale di componenti meccanici in ambito turbomacchinistico e motoristico. Ciò è dovuto principalmente allo sviluppo di laser con densità di potenza sufficientemente alte da "fondere" le polveri delle leghe in questione.

In questo contesto l'ottimizzazione strutturale topologica è probabilmente la tipologia di ottimizzazione di maggior successo. Diversamente dall'ottimizzazione di forma, l'ottimizzazione topologica permette di modificare sia la forma che la topologia del componente al fine di ridurre i pesi e di migliorarne il comportamento statico e dinamico. Nell'ambito dell'ottimizzazione strutturale topologica si usa distinguere tra ottimizzazione statica e dinamica (a seconda che vengano considerati solamente il comportamento statico del componente o anche quello dinamico).

Si usa inoltre distinguere tra ottimizzazione strutturale, termo-strutturale e fluido-strutturale a seconda dei fenomeni fisici considerati (elasticità nel primo caso, aggiunta dei fenomeni termici nel secondo e ulteriore aggiunta dei fenomeni fluidodinamici nel terzo), L'ottimizzazione fluido-strutturale si divide inoltre tra ottimizzazione a frontiera fissa (se la superficie di separazione solido-fluido è fissa o "poco variabili") e ottimizzazione a frontiera mobile (se invece la superficie di separazione può variare).

Da un punto di vista fisica, possono poi essere introdotto nella strategia di ottimizzazione molti altri fenomeni fisici di interesse ingegneristico come la fatica, l'usura, l'ossidazione, possibilità di frattura, urti, la presenza di strutture spugnose / reticolari in aggiunta alle classiche strutture continue, etc.. In questa breve introduzione non tratteremo chiaramente questi aspetti.

In questo capitolo chiaramente non entreremo nei dettagli delle complicate procedure numeriche necessarie per risolvere tali problemi di ottimizzazione ma daremo solamente qualche cenno sulle varie fasi del "processo" e sull'impostazione di tali problemi.

### 11.1 La varie fasi del "processo"

La varie fasi di un "processo" di ottimizzazione strutturale topologica di un componente sono riassunte brevemente in Fig. 199 (in un'ottica di futura realizzazione via Additive Manufacturing, AM):

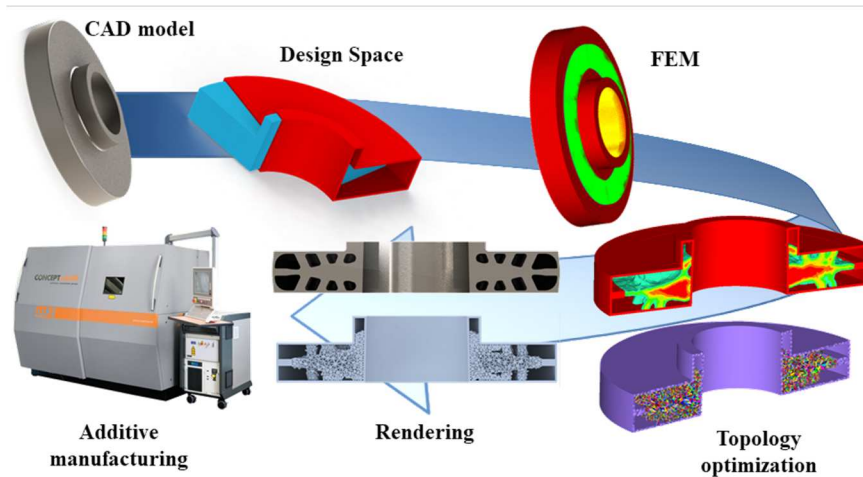


Figura 199 Fasi del "processo"

- 1) realizzazione di un opportuno modello CAD.
- 2) individuazione di design space (dominio dove l'ottimizzazione può modificare la distribuzione di massa del pezzo) e non design space (dominio dove l'ottimizzazione non può modificare la distribuzione di massa del pezzo).
- 3) creazione della mesh e del modello FEM / CFD; realizzazione della "prova zero", ovvero della simulazione del pezzo nel suo design standard di riferimento (da usare come riferimento per le future versioni ottimizzate).
- 4) scelta dei vincoli meccanici e dei carichi esterni (per quanto possibile è opportuno ottimizzare il pezzo in condizioni simili a quelle operative);
- 5) scelta della funzione obiettivo da ottimizzare (solitamente una funzione definita sul dominio di design space: l'energia elastica, il volume complessivo del pezzo ottimizzato, etc.).
- 6) scelta dei vincoli di ottimizzazione: sulla frazione di volume da asportare, sugli stress, sugli autovalori (frequenze proprie del componente ottimizzato), sugli autovettori (deformate modali), sulle deformate forzate / funzioni di trasferimento FDT (per limitare ad esempio gli spostamenti o altre grandezze dinamiche durante la vibrazione del pezzo), sulle grandezze termiche (per gestire temperature e flussi termici), sulle grandezza fluidodinamiche (per gestire i flussi), etc..
- 7) scelta dei vincoli di processo: in un'ottica di "desing for additive" ai vincoli di ottimizzazione classici possono aggiungersi dei vincoli di ottimizzazione legati al "processo" con cui il pezzo verrà realizzato (per l'AM possono essere presenti vincoli di ottimizzazione sui supporti del pezzo durante la stampa, su stress / deformazioni termiche residue dovute al "processo" di AM, sulle cavità , sui raccordi, sugli sbalzi, etc.).
- 8) ottimizzazione topologica strutturale del componente mediante opportuni algoritmi numerici;
- 9) rendering e smoothing delle superfici del pezzo ottimizzato per eliminare il rumore numerico e semplificare eventuali geometrie ottimizzate troppo complicate per la successiva lavorazione; in questo modo il pezzo può essere nuovamente gestito da software CAD e FEM/CFD.
- 10) simulazioni di verifica FEM/CFD per valutare le performance del pezzo ottimizzato e confrontarle con quelle del pezzo nel suo design standard.
- 11) verifica della stampabilità del pezzo via AM mediante opportuni software.



- 12) stampa 3D del pezzo mediante stampanti AM per acciaio e leghe; solitamente i pezzi sono prima realizzati in materiali poveri (alluminio) per opportune verifiche / test di stampabilità e successivamente sono realizzati in acciaio e lega ad alta resistenza.

## 11.2 Ottimizzazione topologica strutturale

Imposteremo qui a titolo di esempio il problema di ottimizzazione strutturale (considerando cioè solamente l'elasticità dei corpi) basandoci sulla strategia a "densità fittizia" (Fig. 200).

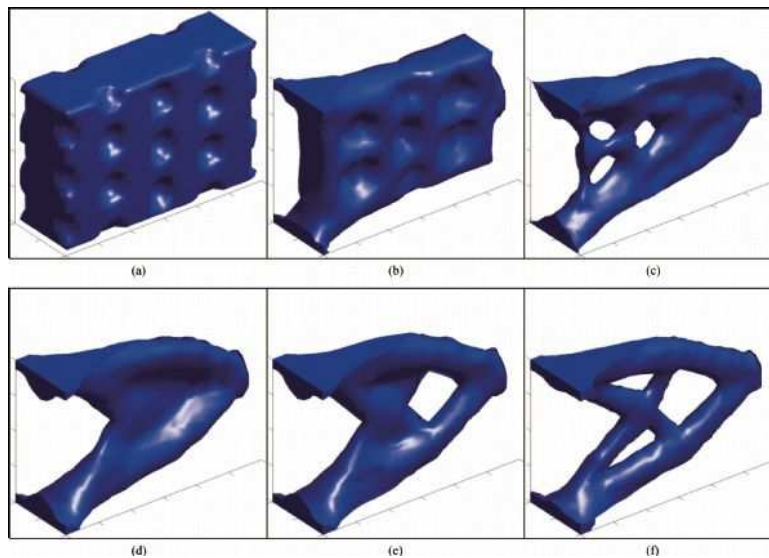


Figura 200 Esempio di ottimizzazione strutturale

I metodi a densità fittizia sono piuttosto diffuso in questo ambito (anche se non sono certo gli unici!) e fanno uso, per permettere all'ottimizzatore di ottimizzare la geometria del componente, di una densità fittizia  $\rho_f$  definita su tutto il dominio di interesse  $V$  (di frontiera  $S$ ). Tale densità è pari a zero in assenza di materia (quando cioè l'ottimizzatore toglie materiale da una determinata regione) ed è pari a  $\rho$  nelle zone in cui il materiale è presente (o pari a 1 se si sceglie una versione normalizzata della strategia). Può invece assumer valori intermedi nelle regioni che separano pieno e vuoto. Tali regione dovranno essere ridotte il più possibile dall'ottimizzatore (per evitare zone spugnose non realizzabili) e saranno poi rimosse in fase di rendering delle superfici. Solitamente le varie proprietà del materiale sono fatte dipendere secondo leggi opportune da tale densità (in questo caso il tensore elastico di Hooke):

$$\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{C}}(\rho_f) \quad (11.2.1)$$

in modo tale che le proprietà delle zone vuote (densità fittizia  $\rho_f$  pari a zero) non contribuiscano alla performance del componente (e siano quindi nulle) e che le proprietà delle zone di pieno (densità fittizia  $\rho_f$  pari al valore nominale  $\rho$ ) siano invece pari a quelle nominali del materiale.

La principali funzioni obiettivo da minimizzare sono definite sul dominio  $V$ . Riportiamo in questo caso a titolo di esempio l'energia elastica e il volume complessivo del pezzo ottimizzato:

$$\Sigma(\rho_f) = \frac{1}{2} \int_V \left( \rho_f \left\| \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} \right\|^2 + \sigma : \varepsilon \right) dV, \quad V(\rho_f) = \int_V \rho_f dV \quad (11.2.2)$$

con naturalmente

$$\sigma = \bar{C}(\rho_f) \varepsilon, \quad \varepsilon(\underline{u}) = \varepsilon = \frac{J_{\underline{u}} + J_{\underline{u}}}{2} \quad (11.2.3)$$

dove  $\underline{u}$  è lo spostamento elastico. Si ha dunque un problema di minimo nella variabile  $\rho_f$  (valutata nei nodi della mesh)

$$\min_{\rho_f} \Sigma(\rho_f), \quad \min_{\rho_f} V(\rho_f) \quad (11.2.4)$$

soggetto ovviamente al vincolo che siano soddisfatte le equazioni della fisica (dell'elasticità in questo caso, incluse naturalmente le condizioni iniziali IC e quelle al bordo BC su  $V$  ed  $S!$ ):

$$\rho_f \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} = \rho_f \underline{f}_e + \text{div}(\sigma). \quad (11.2.5)$$

I principali vincoli di natura strutturale statica che possono essere imposti a tale problema sono ad esempio sul volume  $V(\rho_f)$  del pezzo ottimizzato, sugli spostamenti  $\underline{u}(\rho_f)$  e sugli stress  $\sigma(\rho_f)$ :

- vincolo sulla frazione di volume

$$V_{min} < V(\rho_f) < V_{max}; \quad (11.2.6)$$

- vincolo sullo spostamenti

$$u_i(\rho_f) < u_{i \max} \text{ su regioni opportune di } V \text{ e di } S. \quad (11.2.7)$$

- vincolo sullo stress

$$\sigma_{ij}(\rho_f) < \sigma_{ij \max} \text{ su regioni opportune di } V \text{ e di } S. \quad (11.2.8)$$

Per quanto riguarda invece i principali vincoli di natura strutturale dinamica posso essere dati vincoli sulle pulsazioni proprie del sistema  $\omega_{pi}(\rho_f)$ , sulle deformate modali  $q_i(\rho_f)$  e sulle deformate forzate  $q_0(\omega, \rho_f)$  (o, in generale, sulle funzioni di trasferimento, FDT):

- vincoli sulle pulsazioni proprie:

$$\omega_{pi \min} < \omega_{pi}(\rho_f) < \omega_{pi \max}; \quad (11.2.9)$$

- vincoli sulle deformate modali (ad esempio sugli spostamenti):

$$q_{ij \min} < q_{ij}(\rho_f) < q_{ij \max} \text{ su nodi opportuni del sistema } V; \quad (11.2.10)$$

- vincoli sulle deformate forzate (ad esempio sugli spostamenti):

$$q_{0j \min}(\omega) < q_{0j}(\omega, \rho_f) < q_{0j \max}(\omega) \text{ sui nodi opportuni di } V \text{ e su un certo range di } \omega. \quad (11.2.11)$$

## 11.3 Ottimizzazione topologica termo - strutturale

Imposteremo anche in questo caso, a titolo di esempio, il problema di ottimizzazione termo-strutturale (considerando cioè sia l'elasticità dei corpi che i fenomeni termici) basandoci sulla strategia a "densità fittizia" (Fig. 201).

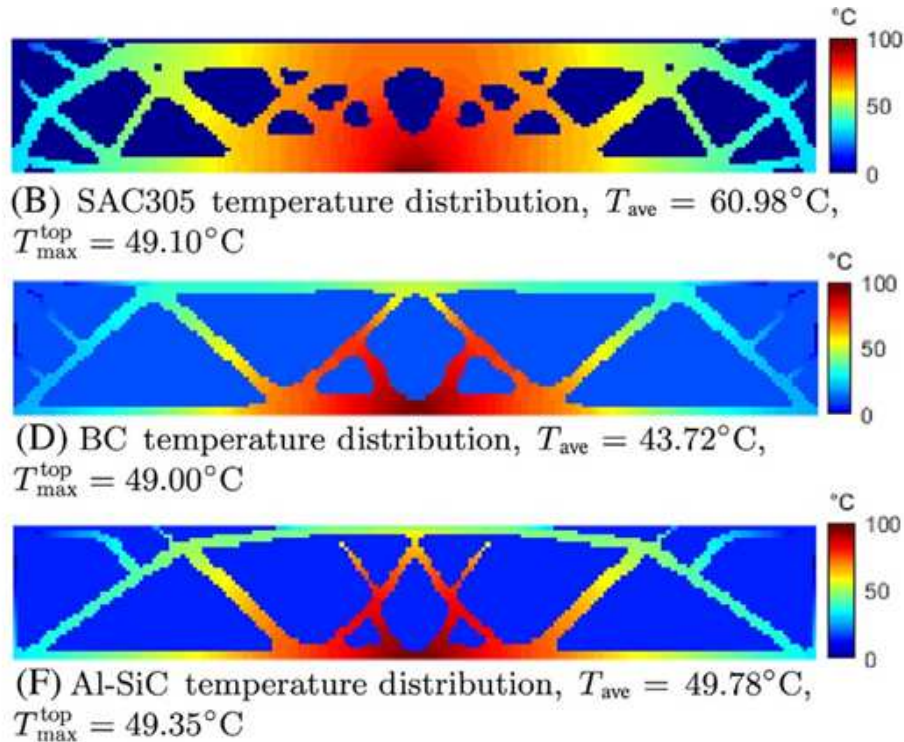


Figura 201 Esempio di ottimizzazione termo-strutturale

I metodi a densità fittizia sono piuttosto diffusi anche per l'ottimizzazione termo-strutturale (anche se non sono certo gli unici!) e fanno sempre uso, per permettere all'ottimizzatore di ottimizzare la geometria del componente, di una densità fittizia  $\rho_f$  definita su tutto il dominio di interesse  $V$  (di frontiera  $S$ ). Tale densità è pari a zero in assenza di materia (quando cioè l'ottimizzatore toglie materiale da una determinata regione) ed è pari a  $\rho$  nelle zone in cui il materiale è presente (o pari a 1 se si sceglie una versione normalizzata della strategia). Può invece assumere valori intermedi nelle regioni che separano pieno e vuoto. Tali regioni dovranno essere ridotte il più possibile dall'ottimizzatore (per evitare zone spugnose non realizzabili) e saranno poi rimosse in fase di rendering delle superfici. Solitamente le varie proprietà del materiale sono fatte dipendere secondo leggi opportune da tale densità, incluse naturalmente le proprietà termiche (in questo caso il tensore elastico di Hooke, il tensore degli sforzi termici, l'energia interna e la legge di transizione del calore):

$$\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{C}}(T, \rho_f), \quad \bar{\mathbf{C}}_T(T, \rho_f), \quad \mathbf{u}(T, \rho_f), \quad \underline{\mathbf{q}} = \underline{\mathbf{q}}(T, \nabla T, \rho_f) \quad (11.3.1)$$

in modo tale che le proprietà delle zone vuote (densità fittizia  $\rho_f$  pari a zero) non contribuiscano alla performance del componente (e siano quindi nulle) e che le proprietà delle zone di pieno (densità fittizia  $\rho_f$  pari al valore nominale  $\rho$ ) siano invece pari a quelle nominali del materiale.

Le principali funzioni obiettivo da minimizzare sono definite sul dominio  $V$ . Riportiamo in questo caso a titolo di esempio l'energia elastica e il volume complessivo del pezzo ottimizzato:

$$\Sigma(\rho_f) = \int_V \left( \frac{1}{2} \rho_f \left\| \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} \right\|^2 + \rho_f u(T, \rho_f) + \frac{1}{2} \sigma : \varepsilon \right) dV, \quad V(\rho_f) = \int_V \rho_f dV \quad (11.3.2)$$

con naturalmente

$$\sigma = \bar{C}(T, \rho_f) \varepsilon + \bar{C}_T(T, \rho_f) \varepsilon_T (T - T_0), \quad \varepsilon(\underline{u}) = \frac{J_{\underline{u}} + J_{\underline{u}}}{2} \quad (11.3.3)$$

dove  $\underline{u}$  è lo spostamento elastico. Si ha dunque un problema di minimo nella variabile  $\rho_f$  (valutata nei nodi della mesh)

$$\min_{\rho_f} \Sigma(\rho_f), \quad \min_{\rho_f} V(\rho_f) \quad (11.3.4)$$

soggetto ovviamente al vincolo che siano soddisfatte le equazioni della fisica (della termo-elasticità in questo caso, incluse naturalmente le condizioni iniziali IC e quelle al bordo BC su  $V$  ed  $S$ ):

$$\rho_f \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} = \rho_f \underline{f}_e + \text{div}(\sigma) \quad (11.3.5)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \text{div}(\underline{e} \underline{v}) = \underline{v}^T \cdot \rho_f \underline{f}_e + \underline{v}^T \text{div}(\sigma) - \underline{f}_q - \text{div} \underline{q}$$

$$\underline{v} = \frac{\partial \underline{u}}{\partial t}, \quad e = \rho_f \left( \frac{1}{2} \|\underline{v}\|^2 + u(T, \rho_f) \right)$$

$$u = u(T, \rho_f), \quad f(\rho_f, T) = 0, \quad \underline{q} = \underline{q}(T, \nabla T, \rho_f).$$

I principali vincoli di natura strutturale statica che possono essere imposti a tale problema sono ad esempio sul volume  $V(\rho_f)$  del pezzo ottimizzato, sugli spostamenti  $\underline{u}(\rho_f)$  e sugli stress  $\sigma(\rho_f)$ :

- vincolo sulla frazione di volume

$$V_{min} < V(\rho_f) < V_{max}; \quad (11.3.6)$$

- vincolo sullo spostamenti

$$u_i(\rho_f) < u_{i \max} \text{ su regioni opportune di } V \text{ e di } S. \quad (11.3.7)$$

- vincolo sullo stress

$$\sigma_{ij}(\rho_f) < \sigma_{ij \max} \text{ su regioni opportune di } V \text{ e di } S. \quad (11.3.8)$$

Per quanto riguarda invece i principali vincoli di natura strutturale dinamica possono essere dati vincoli sulle pulsazioni proprie del sistema  $\omega_{Pi}(\rho_f)$ , sulle deformate modali  $\underline{q}_i(\rho_f)$  e sulle deformate forzate  $\underline{q}_0(\omega, \rho_f)$  (o, in generale, sulle funzioni di trasferimento, FDT):

- vincoli sulle pulsazioni proprie:

$$\omega_{Pi \min} < \omega_{Pi}(\rho_f) < \omega_{Pi \max}; \quad (11.3.9)$$

- vincoli sulle deformate modali (ad esempio sugli spostamenti):

$$q_{ij\ min} < q_{ij}(\rho_f) < q_{ij\ max} \quad \text{su nodi opportuni del sistema } V; \quad (11.3.10)$$

- vincoli sulle deformate forzate (ad esempio sugli spostamenti):

$$q_{0j\ min}(\omega) < q_{0j}(\omega, \rho_f) < q_{0j\ max}(\omega) \quad \text{sui nodi opportuni di } V \text{ e su un certo range di } \omega. \quad (11.3.11)$$

Per quanto riguarda infine i principali vincoli di natura termica possono essere dati vincoli sulla temperatura  $T(\rho_f)$ , sul flusso termico  $\underline{q}(\rho_f)$  e sugli stress termici  $\sigma_T(\rho_f) = \bar{\bar{C}}_T(T, \rho_f)\varepsilon_T(T - T_0)$ :

- vincoli sulla temperatura:

$$T_{min} < T(\rho_f) < T_{max} \quad \text{su regioni opportune di } V \text{ e di } S; \quad (11.3.12)$$

- vincoli sul flusso termico:

$$q_{i\ min} < q_i(\rho_f) < q_{i\ max} \quad \text{su regioni opportune di } V \text{ e di } S; \quad (11.3.13)$$

- vincoli sugli stress termici:

$$\sigma_{T\ ij}(\rho_f) < \sigma_{T\ ij\ max} \quad \text{su regioni opportune di } V \text{ e di } S. \quad (11.3.14)$$

## 11.4 Ottimizzazione topologica fluido - (termo - )strutturale

Anche in questo ultimo caso, imposteremo il problema di ottimizzazione fluido - (termo-)strutturale (considerando cioè l'elasticità dei corpi, i fenomeni termici e il moto del fluido) basandoci sulla strategia a "densità fittizia" (Fig. 201). In questa circostanza, come visibile dalla Fig. 202, sono presenti un dominio solido  $V_S$  (di frontiera  $S_S$ ) e un dominio fluido  $V_F$  (di frontiera  $S_F$ ) accoppiati tra loro da una frontiera di interazione  $S_I$ . In Fig. 202 sono riportati sia un caso di ottimizzazione fluido-strutturale a frontiera di separazione  $S_I$  fissa o "poco variabile" che un caso a frontiera di separazione  $S_I$  completamente variabili.

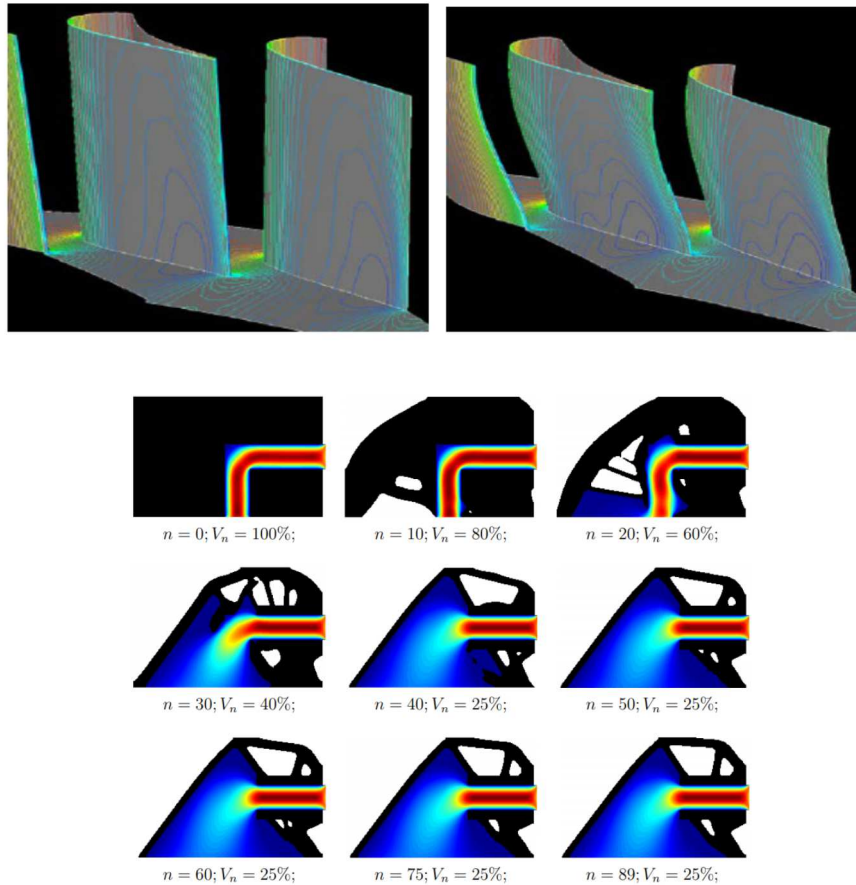


Figura 202 Esempio di ottimizzazione fluido-termo-strutturale (nel primo caso a frontiera fissa o “poco variabile” e nel secondo a frontiera variabile)

I metodi a densità fittizia sono piuttosto diffuso anche per l’ottimizzazione fluido-strutturale (anche se non sono certo gli unici!) e fanno sempre uso, per permettere all’ottimizzatore di ottimizzare la geometria del componente, di una densità fittizia  $\rho_{fS}$  definita su tutto il dominio solido di interesse  $V_S$ . Tale densità è pari a zero in assenza di materia (quando cioè l’ottimizzatore toglie materiale da una determinata regione) ed è pari a  $\rho_S$  (la densità del solido!) nelle zone in cui il materiale è presente (o pari a 1 se si sceglie una versione normalizzata della strategia). Può invece assumere valori intermedi nelle regioni che separano pieno e vuoto. Tali regioni dovranno essere ridotte il più possibile dall’ottimizzatore (per evitare zone spugnose non realizzabili) e saranno poi rimosse in fase di rendering delle superfici. Le regioni del dominio solido  $V_S$  lasciate prive di materia dall’ottimizzatore possono essere lasciate vuote oppure possono essere riempite dal fluido, entrando quindi a far parte del dominio fluido  $V_F$ . Naturalmente questo comporterà una variazione della frontiera di accoppiamento  $S_I$ . Solitamente le varie proprietà del materiale sono fatte dipendere secondo leggi opportune da tale densità, incluse naturalmente le proprietà termiche (in questo caso il tensore elastico di Hooke, il tensore degli sforzi termici, l’energia interna del solido e la legge di transizione del calore nel solido):

$$\bar{C} = \bar{C}(T_S, \rho_{fS}), \quad \bar{C}_T = \bar{C}_T(T_S, \rho_{fS}), \quad u_S = u_S(T_S, \rho_{fS}), \quad \underline{q}_S = \underline{q}_S(T_S, \nabla T_S, \rho_{fS}) \quad (11.4.1)$$

in modo tale che le proprietà delle zone vuote (densità fittizia  $\rho_{fS}$  pari a zero) non contribuiscano alla performance del componente (e siano quindi nulle) e che le proprietà delle zone di pieno (densità fittizia  $\rho_{fS}$  pari al valore nominale  $\rho$ ) siano invece pari a quelle nominali del materiale.

La principali funzioni obiettivo da minimizzare sono definite su entrambi i domini  $V_S$  e  $V_F$ . Riportiamo in questo caso a titolo di esempio l'energia elastica e fluida, e il volume complessivo del pezzo ottimizzato:

$$\begin{aligned} \Sigma(\rho_{fS}, S_I) &= \int_{V_S} \left( \frac{1}{2} \rho_{fS} \left\| \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} \right\|^2 + \rho_{fS} u_S(T_S, \rho_{fS}) + \frac{1}{2} \sigma_S : \varepsilon_S \right) dV + \\ &+ \int_{V_F} \left( \frac{1}{2} \rho_F \left\| \underline{v} \right\|^2 + \rho_F u_F(T_F, p) \right) dV + \int_{t_0}^t \int_{V(\xi)} D : \sigma_F dV dt', \\ V_S(\rho_{fS}, S_I) &= \int_{V_S} \rho_{fS} dV \end{aligned} \quad (11.4.2)$$

con, naturalmente,

$$\begin{aligned} \sigma_S &= \bar{C}(T_S, \rho_{fS}) \varepsilon_S + \bar{C}_T(T_S, \rho_f) \varepsilon_T(T_S - T_0), \quad \varepsilon_S(\underline{u}) = \frac{J_{\underline{u}} + J_{\underline{u}}}{2} \\ \sigma_F &= -p I_{3 \times 3} + \mu (J_v + J_v^T) + \lambda \operatorname{div} \underline{v} I_{3 \times 3}, \quad D = (J_v + J_v^T) \end{aligned} \quad (11.4.3)$$

dove  $\underline{u}$  è lo spostamento elastico e  $\underline{v}$  è il campo di velocità del fluido.

Si noti la comparsa di  $S_I$  dentro  $\Sigma(\rho_{fS}, S_I)$   $V_S(\rho_{fS}, S_I)$  dato che sia l'energia complessiva del sistema che il volume del dominio solido  $V_S$  dipendono in generale dalla forma della frontiera di accoppiamento  $S_I$ . Questo è vero soprattutto nel caso di ottimizzazione fluido-strutturale a frontiera completamente variabile. Nel caso di ottimizzazione fluido-strutturale a frontiera fissa o "poco variabile" questo problema non sussiste o può essere aggirato e affrontato in modo più semplice.

Si ha dunque un problema di minimo nelle variabili  $\rho_{Sf}, S_I$  (valutate entrambe nei nodi della mesh)

$$\min_{\rho_{Sf}, S_I} \Sigma(\rho_{Sf}, S_I), \quad \min_{\rho_{Sf}, S_I} V(\rho_{Sf}, S_I) \quad (11.4.4)$$

Soggetto ovviamente al vincolo che siano soddisfatte le equazioni della fisica (della termo-elasticità e detta termo-fluidodinamica in questo caso, incluse naturalmente le condizioni iniziali IC e quelle al bordo BC su  $V_S, S_S, V_F, S_F$  ed  $S_I$ ):

$$\rho_{Sf} \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} = \rho_{Sf} \underline{f}_{eS} + \operatorname{div}(\sigma_S) \quad (11.4.5)$$

$$\frac{\partial e_S}{\partial t} + \operatorname{div}(e_S \underline{v}_S) = \underline{v}_S^T \cdot \rho_{Sf} \underline{f}_{eS} + \underline{v}_S^T \operatorname{div}(\sigma_S) + \underline{f}_{qS} - \operatorname{div} \underline{q}_S$$

$$\underline{v}_S = \frac{\partial \underline{u}}{\partial t}, \quad e_S = \rho_{Sf} \left( \frac{1}{2} \left\| \underline{v}_S \right\|^2 + u_S(T_S, \rho_{Sf}) \right)$$

$$u_S = u_S(T_S, \rho_{Sf}), \quad f(\rho_{Sf}, T_S) = 0, \quad \underline{q}_S = \underline{q}_S(T_S, \nabla T_S, \rho_{Sf}).$$

$$\frac{\partial \rho_F}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_F \underline{v}) = 0 \quad (11.4.6)$$

$$\rho_F \left( \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + J_v \underline{v} \right) = \rho_F \underline{f}_{eF} + \operatorname{div}(\sigma_F)$$

$$\frac{\partial e_F}{\partial t} + \operatorname{div}(e_F \underline{v}) = \underline{v}^T \cdot \rho_F \underline{f}_{eF} + \underline{v}_F^T \operatorname{div}(\sigma_F) + \underline{f}_{qF} - \operatorname{div} \underline{q}_F$$

$$e_F = \rho_F \left( \frac{1}{2} \|\underline{v}_F\|^2 + u_F(p, T_F, \dots) \right)$$

$$u_F = u_F(p, T_F), \quad f(\rho_F, p, T_F) = 0, \quad \underline{q}_F = \underline{q}_F(p, T_F, \nabla T_F)$$

I principali vincoli di natura strutturale statica che possono essere imposti a tale problema sono ad esempio sul volume del dominio solido  $V_S(\rho_{fS}, S_I)$  del pezzo ottimizzato, sugli spostamenti nel dominio solido  $\underline{u}(\rho_{fS}, S_I)$  e sugli stress nel dominio solido  $\sigma_S(\rho_{fS}, S_I)$ :

- vincolo sulla frazione di volume

$$V_{min} < V_S(\rho_{fS}, S_I) < V_{max}; \quad (11.4.7)$$

- vincolo sullo spostamenti

$$u_i(\rho_{fS}, S_I) < u_{i\ max} \text{ su regioni opportune di } V_S \text{ e di } S_S; \quad (11.4.8)$$

- vincolo sullo stress

$$\sigma_{ijs}(\rho_{fS}, S_I) < \sigma_{ijs\ max} \text{ su regioni opportune di } V_S \text{ e di } S_S. \quad (11.4.9)$$

Per quanto riguarda invece i principali vincoli di natura strutturale dinamica possono essere dati vincoli sulle pulsazioni proprie del sistema solido  $\omega_{pi}(\rho_{fS}, S_I)$ , sulle deformate modali del sistema solido  $\underline{q}_i(\rho_{fS}, S_I)$  e sulle deformate forzate del sistema solido  $\underline{q}_0(\omega, \rho_{fS}, S_I)$  (o, in generale, sulle funzioni di trasferimento, FDT):

- vincoli sulle pulsazioni proprie:

$$\omega_{pi\ min} < \omega_{pi}(\rho_{fS}, S_I) < \omega_{pi\ max}; \quad (11.4.10)$$

- vincoli sulle deformate modali (ad esempio sugli spostamenti):

$$q_{ij\ min} < q_{ij}(\rho_{fS}, S_I) < q_{ij\ max} \text{ su nodi opportuni del sistema } V_S; \quad (11.4.11)$$

- vincoli sulle deformate forzate (ad esempio sugli spostamenti):

$$q_{0j\ min}(\omega) < q_{0j}(\omega, \rho_{fS}, S_I) < q_{0j\ max}(\omega) \text{ sui nodi opportuni di } V_S \text{ e su un certo range di } \omega. \quad (11.4.12)$$

Per quanto concerne i principali vincoli di natura termica possono essere dati vincoli sulla temperatura  $T_S(\rho_{fS}, S_I)$ ,  $T_F(\rho_{fS}, S_I)$  di fluido e solido, sul flusso termico  $\underline{q}_S(\rho_{fS}, S_I)$ ,  $\underline{q}_F(\rho_{fS}, S_I)$  nel fluido e nel solido, e sugli stress termici del solido  $\sigma_{TS}(\rho_{fS}, S_I) = \bar{C}_T(T_S, \rho_{fS}) \varepsilon_T(T_S - T_0)$ :

- vincoli sulla temperatura:

$$T_{minS} < T_S(\rho_{fS}, S_I) < T_{maxS} \text{ su regioni opportune di } V_S \text{ e di } S_S; \quad (11.4.13)$$

$$- \quad T_{minF} < T_F(\rho_{fS}, S_I) < T_{maxF} \text{ su regioni opportune di } V_F \text{ e di } S_F; \quad (11.4.14)$$



- vincoli sul flusso termico:

$$q_{i\ minS} < q_{iS}(\rho_{fS}, S_I) < q_{i\ maxS} \quad \text{su regioni opportune di } V_S \text{ e di } S_S; \quad (11.4.15)$$

$$q_{i\ minF} < q_{iF}(\rho_{fS}, S_I) < q_{i\ maxF} \quad \text{su regioni opportune di } V_F \text{ e di } S_F; \quad (11.4.16)$$

- vincoli sugli stress termici:

$$\sigma_{TS\ ij}(\rho_{fS}, S_I) < \sigma_{TS\ ij\ max} \quad \text{su regioni opportune di } V_S \text{ e di } S_S. \quad (11.4.17)$$

Per quanto riguarda infine i principali vincoli di natura fluidodinamica possono essere ad esempio assegnati vincoli sulla pressione  $p(\rho_{fS}, S_I)$ , e sulla portata  $Q_F(\rho_{fS}, S_I)$  attraverso sezioni generiche:

- vincolo sulla pressione:

$$p_{min} < p(\rho_{fS}, S_I) < p_{max} \quad \text{su regioni opportune di } V_F \text{ e di } S_F; \quad (11.4.18)$$

- vincolo sulla portata:

$$Q_{min} < Q_F(\rho_{fS}, S_I) < Q_{max} \quad \text{su regioni opportune di } V_F \text{ e di } S_F. \quad (11.4.19)$$

Si noti come possano essere imposti vincoli anche sulla superficie stessa di interazione  $S_I$  (sulla quale sono naturalmente già imposte le relative condizioni al bordo CB di interazione, descritte nei capitoli precedenti!). Si possono ad esempio avere vincoli riguardanti le curvature  $k_{S_I}(\rho_{fS}, S_I)$  della superficie  $S_I$  (o altri vincoli di forma per non ottenere forme eccessivamente complesse e quindi irrealizzabili), così come possono esserci vincoli legati a fenomeni fisici superficiali (ad esempio vincoli sui flussi termici  $\underline{q}_S(\rho_{fS}, S_I)$ ,  $\underline{q}_F(\rho_{fS}, S_I)$  che attraversano la frontiera  $S_I$ ):

- vincolo sulla curvatura di  $S_I$ :

$$k_{S_I\ min} < k_{S_I}(\rho_{fS}, S_I) < k_{S_I\ max} \quad \text{su regioni opportune di } S_I. \quad (11.4.20)$$

- vincoli sul flusso termico:

$$q_{i\ minSI} < q_{iS}(\rho_{fS}, S_I) < q_{i\ maxSI} \quad \text{su regioni opportune } S_I; \quad (11.4.21)$$

$$q_{i\ minFI} < q_{iF}(\rho_{fS}, S_I) < q_{i\ maxFI} \quad \text{su regioni opportune di } S_I. \quad (11.4.22)$$

## 12. BILANCIAMENTO

In questo capitolo descriveremo per sommi capi due delle tecniche maggiormente usate per bilanciare le macchine rotanti: il metodo dei coefficienti di influenza (ICM) e il bilanciamento modale (MB). L'ICM è generalmente più robusto e richiede una minor conoscenza del sistema da bilanciare; di conseguenza è più adatto al bilanciamento delle macchine sul campo. Il MB è più accurato dell'ICM ma richiede una maggiore conoscenza del sistema, quindi solitamente è maggiormente usato al banco prova durante lo sviluppo dei componenti.

### 12.1 Metodo dei coefficienti di influenza (ICM)

Consideriamo un rotore elastico come quello rappresentato in Fig. 203 e supponiamo di considerare il moto flessionale di tale rotore mediante la classica teoria flessionale della trave 1D nello spazio. Per la nomenclatura faremo perciò riferimento al modello FEM a 2 nodi per elemento e a 4 DOF per nodo descritto nel capitolo 4. Naturalmente, se le ipotesi di disaccoppiamento tra le dinamiche flessionale, torsionale e assiale non verificate (solitamente per rotor di geometria più complessa), il problema andrà affrontato usando la teoria generale della trave 1D a 6 DOF o direttamente modelli elastici 3D.

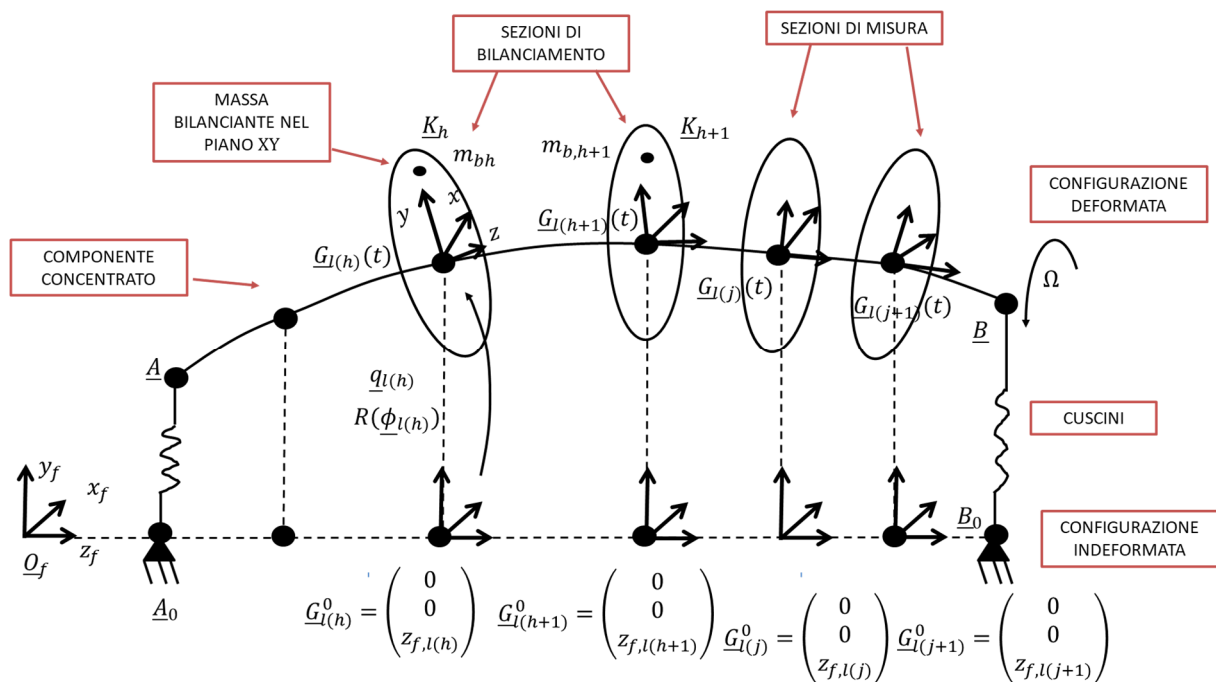


Figura 203 Sezioni di bilanciamento e sezioni di misura

Supponiamo che sul rotore della macchina siano presenti dei piani di bilanciamento in corrispondenza dei nodi  $\underline{G}_{I(h)}$  ( $h = 1 \dots NB$ ), ovvero sezioni della macchina in cui verranno posizionate delle masse  $m_{bh}$  (nel punto  $\underline{K}_h$  solidale alla terna di riferimento associata al nodo in questione) al fine di bilanciare il rotore. Supponiamo inoltre che sulla macchine siano presenti delle sezioni di misura in corrispondenza dei nodi  $\underline{G}_{I(j)}$  ( $j = 1 \dots NM$ ), ovvero sezioni della macchina dove vengono effettuare della misure (di posizione dell'albero, di accelerazione su albero e/o supporti, etc.) al fine di comprendere il moto del rotore e di verificare se esso sia ben bilanciato o meno.

Naturalmente con  $l(h), l(j), l = 1 \dots NN$ , inten

diamo la numerazione assoluta all'interno della mesh del modello FEM degli  $NB$  nodi associati alle sezioni di bilanciamento e degli  $NM$  nodi associati alle sezioni di misura (devo sapere dove si trovano nel modello FEM!).

Come già visto nel capitolo 6, l'effetto in termini di forze centrifughe della masse bilancianti  $m_{bh}$  posizionate sul rotore ha la forma (se si trascurano gli effetti dovuti all'inerzia rotazionale di tali masse, qui non considerati!):

$$\begin{aligned} \underline{Q}_b(t) &= \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{Q}_{bl(h)}(t) \\ \dots \end{pmatrix} = Re \left[ \underline{Q}_b(\Omega) e^{j\Omega t} \right] = Re \left[ \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{Q}_{bl(h)}(\Omega) \\ \dots \end{pmatrix} e^{j\Omega t} \right] = \\ &= Re \left[ \Omega^2 \underline{b} e^{j\Omega t} \right] = Re \left[ \begin{pmatrix} \dots \\ \Omega^2 \underline{b}_{l(h)} \\ \dots \end{pmatrix} e^{j\Omega t} \right] \end{aligned} \quad (12.1.1)$$

$$\underline{Q}_{bl(h)}(t) = \begin{pmatrix} F_{xbh}(t) \\ F_{ybh}(t) \\ M_{xbh}(t) \\ M_{ybh}(t) \end{pmatrix}, \quad \underline{Q}_{bl(h)}(\Omega) = \Omega^2 \underline{b}_{l(h)}, \quad \underline{b}_{l(h)} = \begin{pmatrix} m_{bh} \varepsilon_h e^{j\delta_h} \\ -j m_{bh} \varepsilon_h e^{j\delta_h} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove  $\varepsilon_h$  è la distanza del punto  $\underline{K}_h$  (e quindi della massa  $m_{bh}$ ) dall'asse di rotazione del rotore e  $\delta_h$  è la sua fase, ovvero la sua posizione circonferenziale. Si ricordi che il punto  $\underline{K}_h$  è posizionato nel piano  $xy$  della terna solidale al nodo  $\underline{G}_{l(h)}$ .

Costruiamo ora il "vettore dei bilanciamenti" come segue:

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} \dots \\ m_{bh} \varepsilon_h e^{j\delta_h} \\ \dots \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^{NB} \quad (12.2.2)$$

contenente tutti i bilanciamenti di entità  $m_{bh} \varepsilon_h$  (in  $\text{kg} \cdot \text{m}$  o, solitamente, in  $\text{g} \cdot \text{mm}$ ) e di fase  $\delta_h$ .

Nell'ipotesi che la macchina non sia sottoposta ad altre forzanti che non siano quelle dovute a masse bilancianti (note!) e masse sbilanciati (incognite e il cui effetto vogliamo eliminare!), supponiamo infine per convenzione di impilare tutte le misure effettuate sulle sezioni di misura  $\underline{G}_{l(j)}$  dentro un unico vettore:

$$\underline{\tilde{M}}(t) = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{\tilde{M}}_j(t) \\ \dots \end{pmatrix} = Re \left[ \underline{M} e^{j\Omega t} \right] = Re \left[ \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{M}_j(\Omega) \\ \dots \end{pmatrix} e^{j\Omega t} \right] \in \mathcal{R}^{NM}. \quad (12.1.3)$$

Si noti come tutte le misure in questione sia funzioni armoniche sincrone perché rappresentano la risposta misurata della macchina (e quindi di un sistema supposto lineare!) sottoposta a forzanti dovute solamente a masse bilancianti (note!) e masse sbilanciati (non note!) e quindi sottoposta solamente a forzanti armoniche sincrone.

## BILANCIAMENTO CON NB SEZIONI DI BILANCIAMENTO, NM SEZIONI DI MISURA, P TEST SULLA MACCHINA E 1 SPEED PER TEST

Consideriamo ora il caso in cui sulla macchina da bilanciare siano disponibili  $NB$  sezioni di bilanciamento e  $NM$  sezioni di misura. Supponiamo poi di poter effettuare  $P$  test sulla macchina per poterla bilanciare e che, in ogni test, la macchina viaggi sempre alla solita velocità  $\Omega$ .

La procedura di bilanciamento basata sul metodo dei coefficienti di influenza sfrutta pesantemente la supposta linearità del sistema e si articola nei seguenti step:

- 1) PROVA "A VUOTO": si esegue un test preliminare sulla macchina facendola girare a vuoto e senza alcuna massa di bilanciamento aggiuntiva. Otterremo dunque le misure di riferimento prodotte solamente dallo sbilanciamento già presente sulla macchina e che noi vogliamo eliminare (consideriamo già il contributo in frequenza, ovvero lo spettro della misura):

$$\underline{M}_0 \in C^{NM}. \quad (12.1.4)$$

- 2) PROVE CON SET DI MASSE BILANCIANTI E STIMA DI  $R(\Omega)$ : si eseguono sulla macchina  $P$  test usando ogni volta un diverso set di bilanciamenti  $\underline{B}_k \in C^{NB}, k = 1 \dots P$ , applicando cioè ogni volta alla macchina un numero  $NB$  di masse bilancianti note in posizioni note (una su ogni sezione di bilanciamento). Naturalmente ogni volta andranno sempre rimosse le masse bilancianti della prova precedente. Ad esempio, grazie alla linearità del sistema, dopo la prima prova otterremo una relazione del tipo:

$$\underline{M}_1 = \underline{M}_0 + R(\Omega)\underline{B}_1 \quad (12.1.5)$$

dove la matrice  $R(\Omega) \in C^{NM \times NB}$  è la così detta "matrice dei coefficienti di influenza" (da non confondersi con la matrice di ricettanza e le altre funzioni di trasferimento, FDT!). Tale matrice è a priori incognita e dovrà essere stimata mediante i test effettuati in questa parte della procedura.

Eseguendo tutte le  $P$  prove si ottiene (togliendo le masse di prova precedentemente introdotte!):

$$\begin{aligned} \underline{M}_1 &= \underline{M}_0 + R(\Omega)\underline{B}_1 \\ &\dots \\ \underline{M}_P &= \underline{M}_0 + R(\Omega)\underline{B}_P \end{aligned} \quad (12.1.6)$$

che, introducendo per semplicità i segnali differenza  $\underline{M}_{dk} = \underline{M}_k - \underline{M}_0, k = 1 \dots P$ , diventano

$$\begin{aligned} \underline{M}_{d1} &= R(\Omega)\underline{B}_1 \\ &\dots \\ \underline{M}_{dP} &= R(\Omega)\underline{B}_P \end{aligned} \quad (12.1.7)$$

Le equazioni (12.1.7) possono essere compattate come:

$$[\underline{M}_{d1} \quad \dots \quad \underline{M}_{dP}] = R(\Omega)[\underline{B}_1 \quad \dots \quad \underline{B}_P] \quad (12.1.8)$$

$$M = R(\Omega)B$$

dove  $M \in C^{NM \times P}, B \in C^{NB \times P}$ . Dal momento che solitamente il numero di test è più grande del numero di sezioni di bilanciamento ( $P \geq NB$ ), la stima di  $R(\Omega)$  può essere ottenuta a partire dalla (12.1.8) mediante la pseudo-inversa destra che minimizza l'errore quadratico medio in tale equazione:

$$R(\Omega) \cong MB^{+d}, \quad B^{+d} = B^H(BB^H)^{-1}. \quad (12.1.9)$$

- 3) BILANCIAMENTO DELLA MACCHINA: una volta calcolata una stima della matrice dei coefficienti di influenza  $R(\Omega)$ , è possibile determinare il set di masse bilancianti  $\underline{B}_B \in C^{NB}$  che bilancerà la macchina. A tal fine dobbiamo determinare un set di masse bilancianti  $\underline{B}_B$  tale che, in un'ipotetica prova sperimentale, produrrebbe sulla macchina delle misure null (assenza di vibrazioni):

$$\underline{M}_0 + R(\Omega)\underline{B}_B = \underline{M}_B \cong 0. \quad (12.1.10)$$

Si noti ovviamente che il richiedere l'annullarsi delle vibrazioni misurate sulla macchina  $\underline{M}_B \cong 0$  non implica il perfetto bilanciamento del rotore. Potrebbero benissimo esserci ancora delle vibrazioni che non riusciamo a misurare! Considerando che solitamente le sezioni di misura sono di più delle sezioni di bilanciamento  $NM \geq NB$ , la (12.1.10) può essere risolta mediante la pseudo-inversa sinistra che minimizza l'errore quadratico medio in tale equazione:

$$\underline{B}_B \cong -R(\Omega)^{+s}\underline{M}_0, \quad B^{+s} = (R(\Omega)^H R(\Omega))^{-1} R(\Omega)^H. \quad (12.1.11)$$

Abbiamo dunque trovato il set di masse bilancianti che andavamo cercando (da posizionare nelle posizioni opportune sulle  $NB$  sezioni di bilanciamento):

$$\underline{B}_B = \begin{pmatrix} \dots \\ m_{bh}\varepsilon_h e^{j\delta_h} \\ \dots \end{pmatrix}, \quad h = 1 \dots NB. \quad (12.1.12)$$

### BILANCIAMENTO CON NB SEZIONI DI BILANCIAMENTO, NM SEZIONI DI MISURA, P TEST SULLA MACCHINA E NS SPEED PER TEST

Consideriamo come prima che sulla macchina da bilanciare siano disponibili  $NB$  sezioni di bilanciamento e  $NM$  sezioni di misura. Supponiamo poi di poter effettuare  $P$  test sulla macchina per poterla bilanciare e che questa volta, per ogni test, la macchina possa viaggiare a varie velocità angolari:  $\Omega_1, \Omega_2 \dots \Omega_{NS}$  ( $\Omega_m, m = 1 \dots NS$ ).

La procedura di bilanciamento basata sul metodo dei coefficienti di influenza, analoga alla precedente, sfrutta pesantemente la supposta linearità del sistema e si articola nei seguenti step:

- 1) PROVA "A VUOTO": si esegue un test preliminare sulla macchina facendola girare a vuoto e senza alcuna massa di bilanciamento aggiuntiva. Otterremo dunque le misure di riferimento prodotte solamente dallo sbilanciamento già presente sulla macchina e che noi vogliamo eliminare (consideriamo già il contributo in frequenza, ovvero lo spettro della misura):

$$\underline{M}_0(\Omega_1), \underline{M}_0(\Omega_2) \dots \underline{M}_0(\Omega_{NS}) \in C^{NM}. \quad (12.1.13)$$

Impilando per semplicità tutte le misure a vuoto alle varie velocità ( $\Omega_m, m = 1 \dots NS$ ) si ha:

$$\underline{S}_0 = \begin{bmatrix} \underline{M}_0(\Omega_1) \\ \dots \\ \underline{M}_0(\Omega_{NS}) \end{bmatrix} \in C^{NM*NS}. \quad (12.1.14)$$

- 2) PROVE CON SET DI MASSE BILANCIANTI E STIMA DI  $S$ : si eseguono sulla macchina  $P$  test usando ogni volta un diverso set di bilanciamenti  $\underline{B}_k \in C^{NB}$ ,  $k = 1 \dots P$ , applicando cioè ogni volta alla macchina un numero  $NB$  di masse bilancianti note in posizioni note (una su ogni sezione di bilanciamento). Naturalmente ogni volta andranno sempre rimosse le masse bilancianti della prova precedente. Ad esempio, grazie alla linearità del sistema, dopo la prima prova otterremo delle relazioni del tipo (si noti come ad ogni prova la macchina venga fatta girare a tutte le velocità previste  $\Omega_m$ ,  $m = 1 \dots NS$ ):

$$\begin{aligned} \underline{M}_1(\Omega_1) &= \underline{M}_0(\Omega_1) + R(\Omega_1)\underline{B}_1 \\ &\dots \\ \underline{M}_P(\Omega_{NS}) &= \underline{M}_0(\Omega_{NS}) + R(\Omega_{NS})\underline{B}_1 \end{aligned} \quad (12.1.15)$$

che possono essere scritte in modo più compatto come:

$$\underline{S}_1 = \underline{S}_0 + S\underline{B}_1, \quad \underline{S}_1 = \begin{bmatrix} \underline{M}_1(\Omega_1) \\ \dots \\ \underline{M}_1(\Omega_{NS}) \end{bmatrix} \in C^{NM*NS}, \quad S = \begin{bmatrix} R(\Omega_1) \\ \dots \\ R(\Omega_{NS}) \end{bmatrix} \in C^{(NM*NS)XNB} \quad (12.1.16)$$

dove la matrice  $S \in C^{(NM*NS)XNB}$  è la nuova “matrice dei coefficienti di influenza” (da non confondersi con la matrice di ricettanza e le altre funzioni di trasferimento, FDT!). Tale matrice è a priori incognita e dovrà essere stimata mediante i test effettuati in questa parte della procedura.

Eseguendo tutte le  $P$  prove si ottiene:

$$\begin{aligned} \underline{S}_1 &= \underline{S}_0 + S\underline{B}_1 \\ &\dots \\ \underline{S}_P &= \underline{S}_0 + S\underline{B}_P \end{aligned} \quad (12.1.17)$$

che, introducendo per semplicità i segnali differenza  $\underline{S}_{dk} = \underline{S}_k - \underline{S}_0$ ,  $k = 1 \dots P$ , diventano

$$\begin{aligned} \underline{S}_{d1} &= S\underline{B}_1 \\ &\dots \\ \underline{S}_{dP} &= S\underline{B}_P \end{aligned} \quad (12.1.18)$$

Le equazioni (12.1.18) possono essere compattate come:

$$[\underline{S}_{d1} \quad \dots \quad \underline{S}_{dP}] = S[\underline{B}_1 \quad \dots \quad \underline{B}_P] \quad (12.1.19)$$

$$S_d = SB$$

dove  $M \in C^{(NM*NS)XP}$ ,  $B \in C^{NBXP}$ . Dal momento che solitamente il numero di test è più grande nel numero di sezioni di bilanciamento ( $P \geq NB$ ), la stima di  $S$  può essere ottenuta a partire dalla (12.1.19) mediante la pseudo-inversa destra che minimizza l'errore quadratico medio in tale equazione:

$$S \cong S_d B^{+d}, \quad B^{+d} = B^H (BB^H)^{-1}. \quad (12.1.20)$$

- 3) BILANCIAMENTO DELLA MACCHINA: una volta calcolata una stima della matrice dei coefficienti di influenza  $S$ , è possibile determinare il set di masse bilancianti  $\underline{B}_B \in C^{NB}$  che bilancerà la macchina. A tal fine dobbiamo determinare un set di masse bilancianti  $\underline{B}_B$  tale che, in un'ipotetica prova sperimentale, produrrebbe sulla macchina delle misure nulle (assenza di vibrazioni):

$$\underline{S}_0 + S\underline{B}_B = \underline{S}_B \cong 0. \quad (12.1.21)$$

Si noti ovviamente che il richiedere l'annullarsi delle vibrazioni misurate sulla macchina  $\underline{S}_B \cong 0$  non implica il perfetto bilanciamento del rotore. Potrebbero benissimo esserci ancora delle vibrazioni che non riusciamo a misurare! Considerando che solitamente le sezioni di misura sono di più delle sezioni di bilanciamento  $NM * NS \geq NB$ , la (12.1.21) può essere risolta mediante la pseudo-inversa sinistra che minimizza l'errore quadratico medio in tale equazione:

$$\underline{B}_B \cong -S^{+s}\underline{S}_0, \quad S^{+s} = (S^H S)^{-1} S^H. \quad (12.1.22)$$

Abbiamo dunque trovato il set di masse bilancianti che andavamo cercando (da posizionare nelle posizioni opportune sulle  $NB$  sezioni di bilanciamento):

$$\underline{B}_B = \begin{pmatrix} \dots \\ m_{bh} \varepsilon_h e^{j\delta_h} \\ \dots \end{pmatrix}, \quad h = 1 \dots NB. \quad (12.1.23)$$

### MATRICI PSEUDO-INVERSE E "SOLUZIONE" DI SISTEMI LINEARI SOVRADETERMINATI

Supponiamo di considerare un sistema lineare sovradeterminato

$$A\underline{x} = \underline{b}, \quad A \in C^{N \times M}, \quad \underline{x} \in C^M, \quad \underline{b} \in C^N \quad (12.1.24)$$

dove  $A$  ha rango massimo e  $N > M$ . Tale sistema in generale non ha chiaramente soluzioni. Tuttavia è possibile chiedersi quale sia il vettore  $\underline{x}$  che minimizza il quadrato della norma dell'errore commesso (l'errore quadratico medio):

$$A\underline{x} = \underline{b} + \underline{e}, \quad \underline{e} \in C^N. \quad (12.1.25)$$

Dobbiamo dunque minimizzare rispetto a  $\underline{x}$  la quantità:

$$\min_{\underline{x}} \frac{1}{2} \|\underline{e}\|^2 = \min_{\underline{x}} \frac{1}{2} \|A\underline{x} - \underline{b}\|^2. \quad (12.1.26)$$

Poiché si ha

$$\|A\underline{x} - \underline{b}\|^2 = \underline{x}^H A^H A \underline{x} - \underline{b}^H A \underline{x} - \underline{x}^H A^H \underline{b} + \underline{b}^H \underline{b}, \quad (12.1.27)$$

possiamo facilmente calcolarne il gradiente e azzerarlo:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \|\underline{e}\|^2}{\partial \underline{x}} = \underline{x}^H A^H A - \underline{b}^H A = 0 \quad (12.1.28)$$

da cui

$$\underline{x} = (A^H A)^{-1} A^H \underline{b} = A^{+s} \underline{b}. \quad (12.1.29)$$

In modo del tutto analogo si può dimostrare che un sistema sovradeterminato del tipo

$$\underline{x}^H A = \underline{b}^H, \quad A \in C^{M \times N}, \quad \underline{x} \in C^M, \quad \underline{b} \in C^N, \quad N > M \quad (12.1.30)$$

può essere “risolto” grazie alla matrice pseudo-inversa destra:

$$\underline{x}^H = \underline{b}^H A^H (A A^H)^{-1} = \underline{b}^H A^{+d}. \quad (12.1.31)$$

Quanto appena detto ci consente anche di risolvere sistemi matriciali sovradeterminati:

$$A X = B, \quad A \in C^{N \times M}, \quad \underline{x} \in C^{M \times P}, \quad B \in C^{N \times P}, \quad N > M \quad (12.1.32)$$

dove possiamo porre

$$X = [\underline{x}_1 \quad \dots \quad \underline{x}_P], \quad B = [\underline{b}_1 \quad \dots \quad \underline{b}_P]. \quad (12.1.33)$$

La (12.1.32) è dunque equivalente alla soluzione di  $P$  sistemi lineari

$$A \underline{x}_i = \underline{b}_i, \quad i = 1 \dots P \quad (12.1.34)$$

$$\underline{x}_i = A^{+s} \underline{b}_i$$

dalla quali otteniamo il risultato cercato:

$$[\underline{x}_1 \quad \dots \quad \underline{x}_P] = A^{+s} [\underline{b}_1 \quad \dots \quad \underline{b}_P] \quad (12.1.35)$$

$$X = A^{+s} B. \quad (12.1.36)$$

In modo simile si può mostrare che un sistema sovradeterminato del tipo

$$X^H A = B^H, \quad A \in C^{M \times N}, \quad X \in C^{M \times P}, \quad B \in C^{N \times P}, \quad N > M \quad (12.1.37)$$

può essere “risolto” grazie alla matrice pseudo-inversa destra:

$$X^H = B^H A^H (A A^H)^{-1} = B^H A^{+d}. \quad (12.1.38)$$

## 12.2 Bilanciamento modale (MB)

Consideriamo come sempre rotore elastico come quello rappresentato in Fig. 204 e supponiamo di considerare il moto flessionale di tale rotore mediante la classica teoria flessionale della trave 1D nello spazio. Per la nomenclatura faremo perciò riferimento al modello FEM a 2 nodi per elemento e a 4 DOF per nodo descritto nel capitolo 4. Naturalmente, se le ipotesi di disaccoppiamento tra le dinamiche flessionale, torsionale e assiale non verificate (solitamente per rotor di geometria più complessa), il problema andrà affrontato usando la teoria generale della trave 1D a 6 DOF o direttamente modelli elastici 3D.



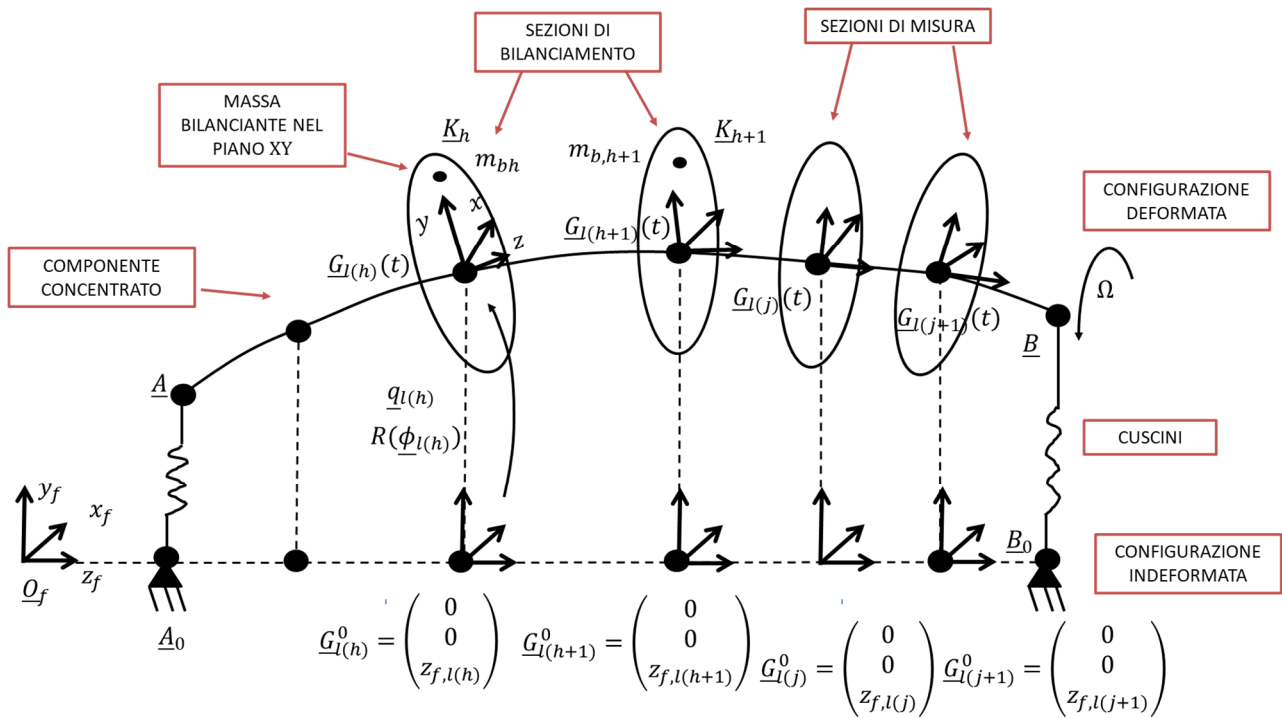


Figura 204 Sezioni di bilanciamento e sezioni di misura

La generica equazione di moto del sistema sarà di conseguenza:

$$M\ddot{\underline{q}} + (\Omega G + C)\dot{\underline{q}} + K\underline{q} = \underline{Q}_s(t) + \underline{Q}_b(t) \quad (12.2.1)$$

dove  $\underline{Q}_s(t)$  è la forzante associata agli sbilanciamenti residui presenti sulla macchina (chiaramente armonica sincrona!), in generale non è nota e il cui effetto vogliamo eliminare):

$$\underline{Q}_s(t) = Re \left[ \underline{Q}_s(\Omega) e^{j\Omega t} \right] = Re \left[ \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{Q}_{sl}(\Omega) \\ \dots \end{pmatrix} e^{j\Omega t} \right], l = 1 \dots NN \quad (12.2.2)$$

e  $\underline{Q}_b(t)$  è la forzante associata alle masse bilancianti applicate al rotore (vedremo secondo quale criterio!).

Supponendo di applicare al sistema (vedremo come!)  $NSET$  set di masse bilancianti nelle solite sezioni di bilanciamento individuate dai nodi  $\underline{G}_{I(h)}$  ( $l = 1 \dots NN$  e  $h = 1 \dots NB$ ), avremo che

$$\begin{aligned} \underline{Q}_b(t) &= \sum_{m=1}^{NSET} \underline{Q}_{bm}(t) = \sum_{m=1}^{NSET} Re \left[ \underline{Q}_{bm}(\Omega) e^{j\Omega t} \right] = \sum_{m=1}^{NSET} Re \left[ \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{Q}_{bl(h),m}(\Omega) \\ \dots \end{pmatrix} e^{j\Omega t} \right] = \quad (12.2.3) \\ &= \sum_{m=1}^{NSET} Re \left[ \Omega^2 \underline{b}_m e^{j\Omega t} \right] = \sum_{m=1}^{NSET} Re \left[ \begin{pmatrix} \dots \\ \Omega^2 \underline{b}_{l(h),m} \\ \dots \end{pmatrix} e^{j\Omega t} \right] \\ \underline{Q}_{bl(h),m}(t) &= \begin{pmatrix} F_{xbh,m}(t) \\ F_{ybh,m}(t) \\ M_{xbh,m}(t) \\ M_{ybh,m}(t) \end{pmatrix}, \quad \underline{Q}_{bl(h)}(\Omega) = \Omega^2 \underline{b}_{l(h)}, \quad \underline{b}_{l(h),m} = \begin{pmatrix} m_{bhm} \varepsilon_h e^{j\delta_{hm}} \\ -j m_{bhm} \varepsilon_h e^{j\delta_{hm}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dove  $\varepsilon_{hm}$  è la distanza del punto  $\underline{K}_h$  (e quindi della massa  $m_{bhm}$ ) dall'asse di rotazione del rotore e  $\delta_{hm}$  è la sua fase, ovvero la sua posizione circonferenziale. Si ricorda che il punto  $\underline{K}_h$  è posizionato nel piano  $xy$  della terna solidale al nodo  $\underline{G}_{J(h)}$ .

Nel dominio della frequenza (dopo aver applicato la trasformata di Fourier e aver determinato il moto forzato come nei capitoli precedenti), otterremo dunque:

$$\begin{aligned} \underline{q}_0(\Omega, \Omega) &= \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{q}_{0l}(\Omega, \Omega) \\ \dots \end{pmatrix} = \alpha(\Omega, \Omega) \left[ \underline{Q}_s(\Omega) + \sum_{m=1}^{NSET} \Omega^2 \underline{b}_m \right] = \\ &= [-\Omega^2 M + j\Omega(C + \Omega G) + K]^{-1} \left[ \underline{Q}_s(\Omega) + \sum_{m=1}^{NSET} \Omega^2 \underline{b}_m \right]. \end{aligned} \quad (12.2.4)$$

Applicando infine il Teorema di Sovrapposizione Modale alle (12.2.4) si ha infine:

$$\begin{aligned} \underline{q}_0(\Omega, \Omega) &= \sum_{n=1}^{2N} \frac{(q_{Rn} q_{Ln}^H)}{j\Omega - s_n} \left[ \underline{Q}_s(\Omega) + \sum_{m=1}^{NSET} \Omega^2 \underline{b}_m \right] = \quad N = 4 * NN \\ &= \sum_{n=1}^{2N} \frac{q_{Rn}}{j\Omega - s_n} \left[ \underline{q}_{Ln}^H \left( \underline{Q}_s(\Omega) + \sum_{m=1}^{NSET} \Omega^2 \underline{b}_m \right) \right]. \end{aligned} \quad (12.2.5)$$

Il principale obiettivo del Modal Balancing (MB) è riuscire ad "azzerare" la risposta forzata della macchina  $\underline{q}_0(\Omega, \Omega)$  (assenza quindi di vibrazioni) andando ad azzerare i contributi associati ai vari modi di vibrare  $\underline{q}_{Ln}$ , ovvero azzerando i coefficienti scalari della combinazione lineare (12.2.5) mediante un'opportuna scelta dei set di masse bilancianti  $\underline{b}_m \in C^{N=4*NN}$ ,  $m = 1 \dots NSET$ :

$$\underline{q}_{Ln}^H \left( \underline{Q}_s(\Omega) + \sum_{m=1}^{NSET} \Omega^2 \underline{b}_m \right) = 0, \quad n = 1 \dots 2N. \quad (12.2.6)$$

### DETERMINAZIONE DELLA PARTE VETTORIALE DI $\underline{b}_m$

Per determinare i set di masse bilancianti necessari per azzerare i contributi alla dinamica forzata dei vari modi di vibrare, si procede "di modo in modo". Si sfrutta cioè l' $m$ -esimo set di masse bilancianti  $\underline{b}_m$  per eliminare il contributo del  $m$ -esimo nodo di vibrare, richiedendo che l'azione di  $\underline{b}_m$  non abbia effetto sui modi di vibrare precedenti (per non rovinare il lavoro fatto in precedenza!):

$$\underline{q}_{Ln}^H \underline{b}_m = 0, \quad n < m. \quad (12.2.7)$$

La (12.2.6) diventa dunque

$$\underline{q}_{Ln}^H \left( \underline{Q}_s(\Omega) + \sum_{m=1}^n \Omega^2 \underline{b}_m \right) = 0, \quad n = 1 \dots 2N. \quad (12.2.8)$$

Le equazioni (12.2.8), come vedremo, andranno risolte non per tutti i  $2N$  modi vibrare (anche perché sarebbero un numero enorme!) ma solamente per i primi modi di vibrare della macchina, ovvero quelli normalmente più energetici e di maggior interesse.

Le equazioni (12.2.8) ci permettono intanto di trovare la parte vettoriale del generico set di masse bilancianti  $\underline{b}_m$ :

$$\underline{b}_m = \alpha_m \underline{e}_m \quad (12.2.9)$$

$$\underline{e}_m = \begin{pmatrix} \dots \\ \underline{e}_{l(h),m} \\ \dots \end{pmatrix}, \quad \underline{e}_{l(h),m} = \begin{pmatrix} |e_{hm}|e^{j\varphi_{ehm}} \\ -j|e_{hm}|e^{j\varphi_{ehm}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ovvero il vettore  $\underline{e}_m$ . Si noti che  $\underline{e}_m$  non è il versore associato a  $\underline{b}_m$  ma semplicemente una versione di  $\underline{b}_m$  opportunamente scalata che contiene al suo interno informazioni sulla “direzione dello sbilanciamento”, ovvero sui rapporti relativi tra le varie masse bilancianti contenute in  $\underline{b}_m$  e tra le loro posizioni.  $\underline{e}_m$  definisce quello che di solito prende il nome di “profilo dello sbilanciamento” o “grafico dello sbilanciamento” (in analogia con il concetto di deformata modale e deformata forzata).

Sostituendo le equazioni (12.2.9) nelle (12.2.7) si ottiene:

$$\underline{q}_{Ln}^H \underline{e}_m = 0, \quad n < m. \quad (12.2.10)$$

che, una volta compattate, danno:

$$\begin{pmatrix} \underline{q}_{L1}^H \\ \underline{q}_{L2}^H \\ \vdots \\ \underline{q}_{Lm}^H \end{pmatrix} \underline{e}_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\gamma}_m, \quad A_m \underline{E}_m = \underline{\gamma}_m, \quad \underline{E}_m = \begin{pmatrix} \dots \\ |e_{hm}|e^{j\varphi_{ehm}} \\ \dots \end{pmatrix} \quad (12.2.11)$$

in cui  $A_m \in C^{m \times NB}$ ,  $\underline{E}_m \in C^{NB}$ ,  $\underline{\gamma}_m \in C^m$  e dove l’ultima equazione è puramente formale (il coefficiente “1” al termine noto potrebbe anche essere diverso, tanto l’eventuale differente scalatura di  $\underline{E}_m$  (e quindi di  $\underline{e}_m$ ) verrebbe comunque riassorbita dalla componente scalare  $\alpha_m$  di  $\underline{b}_m$ , come vedremo). Il sistema di equazioni (12.2.11) è sottodeterminato ( $m < NB$  essendo comunque  $m$  minore anche del numero di sezioni di bilanciamento  $NB$ ) ma può comunque essere risolto mediante la matrice pseudo-inversa destra se per convenzione, tra le infinite soluzioni, prendiamo quella di norma minima:

$$\underline{E}_m = A_m^{+d} \underline{\gamma}_m, \quad A_m^{+d} = A_m^H (A_m A_m^H)^{-1}. \quad (12.2.12)$$

Dalla conoscenza di  $\underline{E}_m$  posso infine facilmente riassemble il vettore  $\underline{e}_m$  corrispondente alla parte vettoriale di  $\underline{b}_m$ . Si noti, prima di procedere, come la strategia di MB richieda, per determinare la parte vettoriale  $\underline{e}_m$  di  $\underline{b}_m$ , la conoscenza dei primi modi di vibrare della macchina  $\underline{q}_{Rn}$  che devono essere naturalmente calcolati o mediante un modello affidabile della macchina stessa o mediante tecniche di ricostruzione basate di misure sperimentali opportune.

### DETERMINAZIONE DELLA PARTE SCALARE DI $\underline{b}_m$

La parte scalare di  $\underline{b}_m$  può essere determinata mediante due diverse strategia: la prima, come vedremo, richiederà una minor conoscenza del sistema ed è più robusta mentre la seconda, più accurata richiederà una conoscenza maggiore del sistema.

#### PRIMO METODO PER IL CALCOLO DELLA PARTE SCALARE DI $\underline{b}_m$

Il primo metodo per il calcolo della parte scalare di  $\underline{b}_m$  è completamente su base sperimentale. Si effettua innanzitutto un test sulla macchina senza aver aggiunto le masse bilancianti  $\underline{b}_m$  (che, d’altronde, devo ancora

calcolare!) ottenendo le misure sperimentali (consideriamo già il contributo in frequenza, ovvero lo spettro della misura):

$$\underline{M}_{0m} \in C^{NM}. \quad (12.2.13)$$

Chiaramente sulla macchine saranno ancora presenti i set di masse bilancianti  $\underline{b}_q$ ,  $q = 1 \dots m - 1$  usati per eliminare i contributi alla risposta forzata dei modi precedenti. Si suppone come sempre di effettuare le misure sulle sezioni di misura associate ai nodi  $\underline{G}_{l(j)}$ ,  $l = 1 \dots NN$ ,  $j = 1 \dots NM$ .

Si effettuano poi nuovamente delle misure di prova dopo aver applicato sulla macchina set di masse bilancianti di prova note ( $\underline{E}_m$  è noto, trovato prima, e  $\delta_{m,pr}$  è scelto da me):

$$\underline{B}_{m,pr} = \delta_{m,pr} \underline{E}_m, \quad pr = 1 \dots NP \quad (12.2.14)$$

$$\underline{B}_{m,pr} = \begin{pmatrix} m_{bh,pr} \varepsilon_{h,pr} e^{j\delta_{h,pr}} \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \delta_{m,pr} \begin{pmatrix} |e_{hm}| e^{j\varphi_{e_{hm}}} \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} \in C^{NB}, \quad h = 1 \dots NB$$

ottenendo, dal momento che si suppone il sistema lineare,

$$\underline{M}_{m,pr} = \underline{M}_{0m} + R_m(\Omega) \underline{B}_{m,pr} \quad (12.2.15)$$

$$\underline{M}_{m,pr} = \underline{M}_{0m} + \delta_{m,pr} R_m(\Omega) \underline{E}_m$$

$$\underline{M}_{dm,pr} = R_m(\Omega) \underline{B}_{m,pr} = \delta_{m,pr} R_m(\Omega) \underline{E}_m, \quad \underline{M}_{dm,pr} = \underline{M}_{m,pr} - \underline{M}_{0m}$$

dove  $R(\Omega) \in C^{NM \times NB}$  è la solita matrice dei coefficienti di influenza. Naturalmente anche in questo caso ad ogni test devono essere rimosse le masse di prova precedentemente introdotte. Tali equazioni possono essere impilate come

$$[\underline{M}_{dm,1} \quad \dots \quad \underline{M}_{dm,NP}] = R_m(\Omega) [\underline{B}_{m,1} \quad \dots \quad \underline{B}_{m,NP}] \quad (12.2.16)$$

$$\underline{M}_m = R_m(\Omega) \underline{B}_m$$

dove  $\underline{B}_m \in C^{NM \times NP}$ ,  $\underline{B}_m \in C^{NB \times NP}$ . Dal momento che solitamente il numero di test è più grande nel numero di sezioni di bilanciamento ( $NP \geq NB$ ), la stima di  $R_m(\Omega)$  può essere ottenuta a partire dalla (12.2.16) mediante la pseudo-inversa destra che minimizza l'errore quadratico medio in tale equazione:

$$R_m(\Omega) \cong \underline{M}_m \underline{B}_m^{+d}, \quad \underline{B}_m^{+d} = \underline{B}_m^H (\underline{B}_m \underline{B}_m^H)^{-1}. \quad (12.2.17)$$

Se a questo punto inseriamo sulla macchina il vero set di masse bilancianti  $\underline{b}_m = \alpha_m \underline{e}_m$  per l' $m$ -esimo modo di vibrare (o, in altri termini,  $\underline{B}_m = \alpha_m \underline{E}_m$ ), è lecito per linearità del sistema aspettarsi una risposta del tipo

$$\underline{M}_m = \underline{M}_{0m} + R_m(\Omega) \underline{B}_m \quad (12.2.18)$$

$$\underline{M}_m = \underline{M}_{0m} + \alpha_m R_m(\Omega) \underline{E}_m.$$

Il parametro  $\alpha_m$ , ovvero la parte scalare di  $\underline{b}_m$ , può essere ad esempio trovata imponendo il minimizzarsi della norma della risposta  $\underline{M}_m$ , ovvero

$$\min_{\alpha_m} \frac{1}{2} \|\underline{M}_m\|^2 = \min_{\alpha_m} \frac{1}{2} \|\underline{M}_{0m} + \alpha_m \underline{R}_m \underline{E}_m\|^2. \quad (12.2.19)$$

Imponendo l'annullamento del gradiente, si ottiene per l'incognita  $\alpha_m$ :

$$\alpha_m = -(\underline{E}_m^H \underline{R}_m^H \underline{R}_m \underline{E}_m)^{-1} \underline{E}_m^H \underline{R}_m^H \underline{M}_{0m}. \quad (12.2.20)$$

Una volta noto  $\alpha_m$ , conosciamo dunque anche  $\underline{b}_m = \alpha_m \underline{e}_m$  è possiamo dunque applicare sulla macchine il set di masse bilancianti per l'  $m$ -esimo modo (dopo aver chiaramente tolto quelle di prova).

## SECONDO METODO PER IL CALCOLO DELLA PARTE SCALARE DI $\underline{b}_m$

Il secondo metodo per il calcolo di  $\underline{b}_m$  fa uso di una maggiore conoscenza del sistema ma, allo stesso tempo è più accurato e molto più utile per comprendere le idee alla base della strategia di MB. L'idea di base è quella di ripartire dalla (12.2.6)

$$\underline{q}_{Ln}^H (\underline{Q}_s(\Omega) + \sum_{m=1}^n \Omega^2 \underline{b}_m) = 0, \quad n = 1 \dots 2N. \quad (12.2.21)$$

e risolvere tale equazione per  $n = 1, 2, 3 \dots$  in modo da eliminare, uno alla volta, tutti i contributi alla soluzione forzata (e quindi alla vibrazione della macchina) associati ai primi modi di vibrare (si veda la soluzione forzata nella forma (12.2.5)). Naturalmente, come già osservato, la (12.2.21) non viene risolta per tutti i modi di vibrare  $n = 1 \dots 2N$ , anche perché sarebbero un numero enorme. Solitamente essa viene risolta solo per i primi modi di vibrare, cioè quelli più energetici e significativi, che maggiormente influiscono sulla risposta forzata.

La soluzione iterativa della (12.2.21) è piuttosto semplice. Si parta da  $n = 1$ . In questo caso avremo:

$$\underline{q}_{L1}^H \underline{Q}_s(\Omega) + \Omega^2 \underline{q}_{L1}^H \underline{b}_1 = 0 \quad (12.2.22).$$

$$\underline{q}_{L1}^H \underline{Q}_s(\Omega) + \Omega^2 \underline{q}_{L1}^H \underline{e}_1 \alpha_1 = 0$$

$$\alpha_1 = -\frac{\underline{q}_{L1}^H \underline{Q}_s(\Omega)}{\Omega^2 \underline{q}_{L1}^H \underline{e}_1}, \quad \underline{b}_1 = \alpha_1 \underline{e}_1.$$

Una volta trovato  $\underline{b}_1$ , per  $n = 2$  avremo

$$\underline{q}_{L2}^H \underline{Q}_s(\Omega) + \Omega^2 \underline{q}_{L2}^H \underline{b}_1 + \Omega^2 \underline{q}_{L2}^H \underline{b}_2 = 0 \quad (12.2.23)$$

$$\underline{q}_{L2}^H \underline{Q}_s(\Omega) + \Omega^2 \underline{q}_{L2}^H \underline{b}_1 + \Omega^2 \underline{q}_{L2}^H \underline{e}_2 \alpha_2 = 0$$

$$\alpha_2 = -\frac{\underline{q}_{L2}^H \underline{Q}_s(\Omega) + \Omega^2 \underline{q}_{L2}^H \underline{b}_1}{\Omega^2 \underline{q}_{L2}^H \underline{e}_2}, \quad \underline{b}_2 = \alpha_2 \underline{e}_2.$$

Una volta trovato anche  $\underline{b}_2$ , per  $n = 3$  avremo (e poi ci fermiamo perché ormai la procedura iterativa è chiara!)

$$\underline{q}_{L3}^H \underline{Q}_s(\Omega) + \Omega^2 \underline{q}_{L3}^H \underline{b}_1 + \Omega^2 \underline{q}_{L3}^H \underline{b}_2 + \Omega^2 \underline{q}_{L3}^H \underline{b}_3 = 0 \quad (12.2.24)$$

$$\underline{q}_{L3}^H \underline{Q}_s(\Omega) + \Omega^2 \underline{q}_{L3}^H \underline{b}_1 + \Omega^2 \underline{q}_{L3}^H \underline{b}_2 + \Omega^2 \underline{q}_{L3}^H \underline{e}_3 \alpha_3 = 0$$

$$\alpha_3 = -\frac{\underline{q}_{L3}^H \underline{Q}_s(\Omega) + \Omega^2 \underline{q}_{L3}^H \underline{b}_1 + \Omega^2 \underline{q}_{L3}^H \underline{b}_2}{\Omega^2 \underline{q}_{L3}^H \underline{e}_3}, \quad \underline{b}_3 = \alpha_3 \underline{e}_3.$$

E' importante chiaramente notare come tale procedura richieda la conoscenza dei primi modi di vibrare della macchina  $\underline{q}_{Ln}$  che dovranno essere calcolati mediante un opportuno modello o dovranno essere stimati con opportune prove sperimentali. Allo stesso tempo, dal momento che sbilanciamento originario  $\underline{Q}_s(\Omega)$  è incognito, esso dovrà a sua volta essere stimato per altra via  $\underline{Q}_s^{stim}(\Omega)$ , ad esempio mediante un opportuno modello fisico:

$$\underline{q}_0^{meas}(\Omega, \Omega) = \alpha(\Omega, \Omega)\underline{Q}_s^{stim}(\Omega), \quad \underline{Q}_s^{stim}(\Omega) = \alpha(\Omega, \Omega)^{-1}\underline{q}_0^{meas}(\Omega, \Omega) \quad (12.2.25)$$

dove  $\underline{q}_0^{meas}(\Omega, \Omega)$  è un'opportuna misura (o ricostruzione a partire da misure) della deformata forzata del rotore.

## MATRICI PSEUDO-INVERSE E "SOLUZIONE" DI SISTEMI LINEARI SOTTODETERMINATI

Supponiamo di considerare un sistema lineare sottodeterminato

$$A\underline{x} = \underline{b}, \quad A \in \mathbb{C}^{N \times M}, \quad \underline{x} \in \mathbb{C}^M, \quad \underline{b} \in \mathbb{C}^N \quad (12.2.26)$$

dove  $A$  ha rango massimo e  $N < M$ . Tale sistema in generale ha chiaramente infinite soluzioni. Tuttavia è possibile chiedersi quale sia il vettore  $\underline{x}$ , tra le infinite soluzioni, avente norma minima.

Dobbiamo dunque risolvere il seguente problema di minimo vincolato:

$$\min_{\underline{x}} \frac{1}{2} \|\underline{x}\|^2, \quad A\underline{x} - \underline{b} = \underline{0}. \quad (12.2.27)$$

Se introduciamo i moltiplicatori di Lagrange  $\underline{\lambda} \in \mathbb{C}^N$ , come è noto tale problema è equivalente al problema di minimo senza vincoli:

$$\min_{\underline{x}, \underline{\lambda}} \left( \frac{1}{2} \|\underline{x}\|^2 + \underline{\lambda}^H (A\underline{x} - \underline{b}) \right). \quad (12.2.28)$$

Calcolando i gradienti della quantità da minimizzare rispetto a  $\underline{x}$  e  $\underline{\lambda}$  e imponendo il loro annullamento, si ottiene:

$$\begin{aligned} \underline{x}^H + \underline{\lambda}^H A &= \underline{0} \\ \underline{x}^H A^H - \underline{b}^H &= \underline{0}. \end{aligned} \quad (12.2.29)$$

Dalla prima si ha

$$\begin{aligned} \underline{x}^H A^H + \underline{\lambda}^H A A^H &= \underline{0} \\ A A^H \underline{\lambda} &= -A \underline{x} = -\underline{b} \\ \underline{\lambda} &= -(A A^H)^{-1} \underline{b}. \end{aligned} \quad (12.2.30)$$

Dalla prima delle (12.2.29) si ha infine:

$$\begin{aligned} \underline{x} &= -A^H \underline{\lambda} \\ \underline{x} &= A^H (A A^H)^{-1} \underline{b} = A^{+d} \underline{b}. \end{aligned} \quad (12.2.31)$$

A questo punto le soluzione generale del sistema (12.2.26) può essere scritta come

$$\underline{x} = \underline{x}_{pno} + \underline{x}_{go} = A^{+d}\underline{b} + N\underline{\alpha} = A^{+d}\underline{b} + [I - A^{+d}A]\underline{x}_n, \quad \underline{\alpha} \in C^{M-N}, \quad \underline{x}_n \in C^M \quad (12.2.32)$$

dove  $N \in C^{NX(M-N)}$  è una matrice le cui colonne sono una base del nucleo di  $A$  e dove  $P = [I - A^{+d}A] \in C^{NXN}$  è il cosiddetto proiettore nel nucleo di  $A$ .

In maniera del tutto analoga si può dimostrare che la soluzione a norma minima del problema sottodeterminato

$$\underline{x}^H A = \underline{b}^H, \quad A \in C^{MXN}, \quad \underline{x} \in C^M, \quad \underline{b} \in C^N, \quad N < M \quad (12.2.33)$$

può essere "risolto" grazie alla matrice pseudo-inversa sinistra:

$$\underline{x}^H = \underline{b}^H (A^H A)^{-1} A^H = \underline{b}^H A^{+s}, \quad (12.2.34)$$

$$\underline{x}^H = \underline{x}_{pno}^H + \underline{x}_{go}^H = \underline{b}^H A^{+s} + \underline{\alpha}^H N^H = \underline{b}^H A^{+s} + \underline{x}_n^H [I - AA^{+s}]$$

dove questa volta le colonne di  $N$  sono una base del nullo di  $A^H$ .

Quanto appena detto ci consente anche di risolvere sistemi matriciali sottodeterminati:

$$AX = B, \quad A \in C^{NXM}, \quad \underline{x} \in C^{MXP}, \quad B \in C^{NXP}, \quad N < M \quad (12.2.35)$$

dove possiamo porre

$$X = [\underline{x}_1 \quad \dots \quad \underline{x}_P], \quad B = [\underline{b}_1 \quad \dots \quad \underline{b}_P]. \quad (12.2.36)$$

La (12.2.35) è dunque equivalente alla soluzione di  $P$  sistemi lineari

$$A\underline{x}_i = \underline{b}_i, \quad i = 1 \dots P \quad (12.2.37)$$

$$\underline{x}_i = A^{+d}\underline{b}_i$$

dalla quali otteniamo il risultato cercato:

$$[\underline{x}_1 \quad \dots \quad \underline{x}_P] = A^{+d}[\underline{b}_1 \quad \dots \quad \underline{b}_P] \quad (12.2.38)$$

$$X = A^{+d}B. \quad (12.2.39)$$

A questo punto le soluzione generale del sistema (12.2.35) può essere scritta come

$$X = X_{pno} + X_{go} = A^{+d}B + N\underline{\beta} = A^{+d}B + [I - A^{+d}A]X_n, \quad \underline{\alpha} \in C^{(M-N)XP}, \quad \underline{x}_n \in C^{MXP} \quad (12.2.40)$$

dove  $\underline{\beta} = [\underline{\alpha}_1 \quad \dots \quad \underline{\alpha}_P]$  e  $X_n = [\underline{x}_{n1} \quad \dots \quad \underline{x}_{nP}]$ .

In modo simile si può mostrare che un sistema sottodeterminato del tipo

$$X^H A = B^H, \quad A \in C^{MXN}, \quad X \in C^{MXP}, \quad B \in C^{NXP}, \quad N < M \quad (12.2.41)$$

può essere "risolto" grazie alla matrice pseudo-inversa sinistra:

$$X^H = B^H A^{+s}, \quad (12.2.42)$$

$$X^H = X_{pno}^H + X_{go}^H = B^H A^{+s} + \underline{\beta}^H N^H = B^H A^{+s} + X_n^H [I - AA^{+s}]$$

dove questa volta le colonne di  $N$  sono una base del nullo di  $A^H$ .

## 13. PRINCIPALI NORMATIVE E SITI UTILI

Si riportano qui per completezza i link dei siti contenenti le principali normative in ambito rotordinamico, turbomacchinistico e motoristico:

- 1) SITO API (AMERICAN PETROLEUM INSTITUTE) E NORME API

<https://www.api.org/>

- 2) SITO ISO (INTERNATIONAL ORGANIZATION FOR STANDARDIZATION) E NORME ISO

<https://www.iso.org/standards.html>

- 3) SITO CEN (EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION) E NORME EN

<https://www.cen.eu/Pages/default.aspx>

- 4) SITO UNI (ENTE ITALIANO DI NORMAZIONE) E NORME UNI

<https://www.uni.com/>

- 5) SITO ASME E RIVISTE ASME (AMERICAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERING)

<http://asmedigitalcollection.asme.org/Solr/advancedSearch.aspx>

- 6) SITO IEEE E RIVISTE IEEE (INSTITUTE OF ELECTRICAL AND ELECTRONICS ENGINEERS)

<http://ieeexplore.ieee.org/Xplore/home.jsp>

- 7) MOTORE DI RICERCA SCIENCEDIRECT

<http://ieeexplore.ieee.org/Xplore/home.jsp>

- 8) MOTORE DI RICERCA GOOGLE SCHOLAR

<https://scholar.google.it/>



## 14. BIBLIOGRAFIA

### ROTORDINAMICA

- [1] Dynamics of Rotating Machines, Michael I. Friswell and John E. T. Penny, Cambridge Aerospace Series, 2010.
- [2] Rotating machinery vibration, M. L. Adams, Marcel Dekker Ed., 2001.
- [3] Dara W. Childs, Turbomachinery Rotordynamics with Case Studies, Mintel Spring Ed., 2013.
- [4] Agnieszka Muszynska, Rotordynamics, CRC Press, 2005.
- [5] Michel Lalanne and Guy Ferraris, Rotordynamics Prediction in Engineering, Wiley, 1998.
- [6] Giancarlo Genta. Dynamics of Rotating Systems, Springer, 2005.
- [6] <http://www.api.org/>

### MECCANICA DELLE VIBRAZIONI

- [7] Giancarlo Genta, Vibration Dynamics and Control, Springer, 2009.
- [8] D. J. Ewans, Modal testing, Research Studies Press, 2000.
- [9] C. M. Harris, Shock and Vibration Handbook, Mc Graw-Hill, 2009.

### SISTEMI MECCANICI, TRASFORMATA DI LAPLACE E TRASFORMATA DI FOURIER

- [10] Bolzern, Scattolini e Schiavoni, Fondamenti di controlli automatici, Mc Graw-Hill Italia, 2008.
- [11] G. Marro, Controlli automatici, Zanichelli, 2004.
- [12] Joel L. Schiff, The Laplace Transform: Theory and Applications, Springer-Verlag, 2013.
- [13] J. F. James, A Student's Guide to Fourier Transforms: With Applications in Physics and Engineering Cambridge University Press, 2011.
- [14] Eric W. Hansen, Fourier Transforms: Principles and Applications, John Wiley & Sons, 2014.
- [15] Hassan K. Khalil , Nonlinear Systems, Prentice Hall, 2002.

### LUBRIFICAZIONE E CUSCINI

- [16] B. J. Hamrock, Fundamentals of fluid film lubrication, Mc Graw Hill, 2012.
- [17] A. Z. Szeri, Fluid Film Lubrication: Theory and Design, Cambridge Press, 2008.
- [18] E. Meli, Dispense del corso di Meccanica Applicata: teoria della lubrificazione, 2012.

CORPI RIGIDI E SISTEMI MULTIBODY

- [19] L. Sciavicco, B. Siciliano, Robotica industriale, Mc Graw Hill, 2008.
- [20] F. Cheli, E. Pennestrì, Cinematica e dinamica dei sistemi multibody, Casa Editrice Ambrosiana, 2010.
- [21] E. Pennestrì, Meccanica applicata alle macchine, Casa Editrice Ambrosiana, 2010.
- [22] E. Meli, Dispense del corso di Meccanica Applicata: richiami di dinamica, 2012.

CORPI ELASTICI, SISTEMI FLEXIBLE-MULTIBODY E MECCANICA DEL CONTINUO

- [23] Scienza delle costruzioni, Vol .1 e Vol. 2, R. Baldacci, UTET, 1984.
- [24] Dynamics of multibody systems, A. A. Shabana, Cambridge Press, 2005.
- [25] Computational continuum mechanics, A. A. Shabana, Cambridge Press, 2008.
- [26] A. Chorin, J. E. Marsden, A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics, Springer-Verlag, 1993.
- [27] J. E. Marsden, T. J.R. Hughes, Mathematical Foundations of Elasticity, Prentice Hall (1983).

ELEMENTI FINITI (FEM)

- [28] G. Dhatt, G. Touzot, The finite element method displayed, Wiley & Sons, 1985.
- [29] G. Dhatt, G. Touzot, The finite element method, Wiley & Sons, 2012.
- [30] O. C. Zienkiewicz, The finite element method, Butterwoth & Heinemann, 2000.