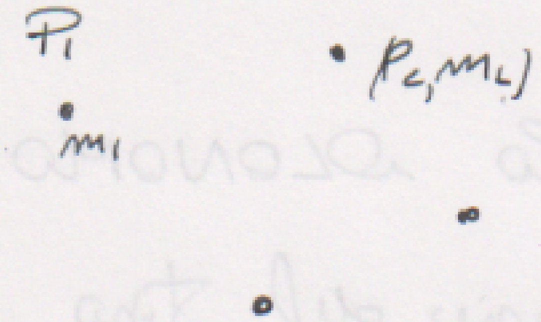
Sistemi meccanici con vincoli: vincoli olonomi

Sistema discreto S con n. pt. materiali



Immaginiamo che i Pt siano liberi di muoversi in $\mathbb{R}^3$

Configurazione del sistema libero S:

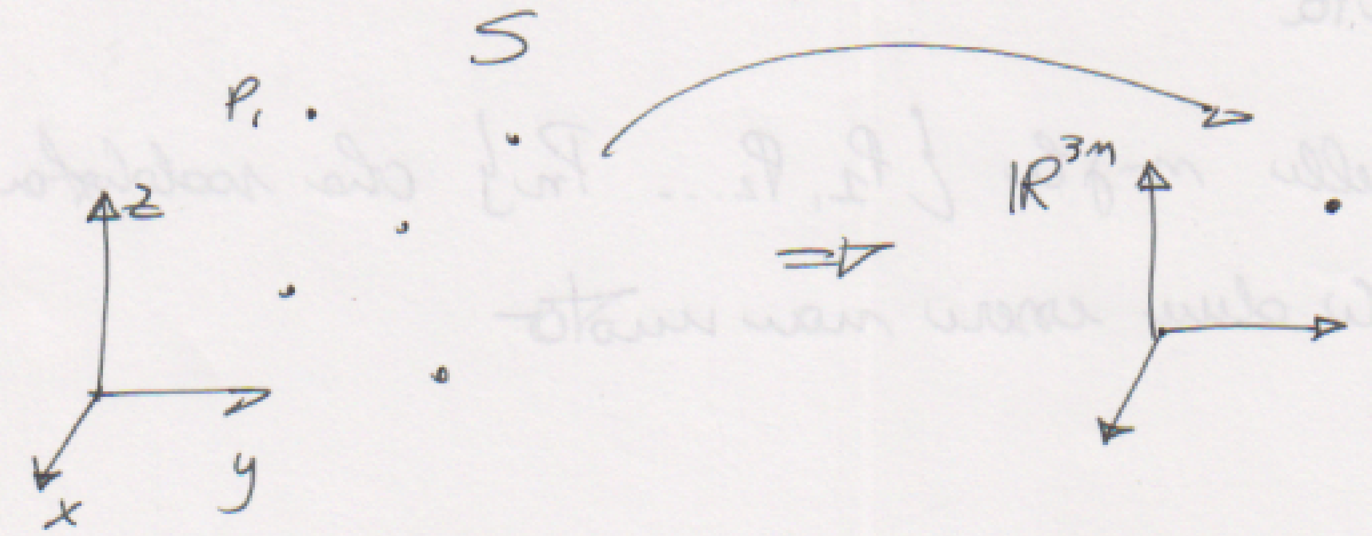
Insieme delle posizioni $\{P_1, P_2, \dots P_n\} \in \mathbb{R}^{3n}$

$P_1 = (x_1, y_1, z_1)$; $P_2 = (x_2, y_2, z_2) \dots$

Abbiamo introdotto uno spazio di dimensione $3n$

con coord. n-pla $(\underbrace{x_1, y_1, z_1}_{P_1}, \underbrace{x_2 \dots}_{P_2} \quad \underbrace{z_n}_{P_n}) \in \mathbb{R}^n$

Il moto di un punto in $\mathbb{R}^n$ corrisponde al moto dell'intero sistema



Vantaggio dell'introduz. di $\mathbb{R}^{3n}$ → moto di n.T. con vincolo olonomo viene trattato come il moto di un punto materiale

Vincolo OLONOMO

Relazione del tipo $f(x_1, y_1, z_1, x_2, \dots z_n) = 0$

Rapp l'equaz. (implicita di una sup. in $\mathbb{R}^{3n}$)

Nota: f dip. solo dalla configurazione del sistema, non dalle velocità dei punti

Sistema di vincoli olonomi: imponiamo m vincoli della forma precedente

$$f_j(x_1, y_1, \dots z_n, t) = 0 \qquad j = 1 \dots m$$

I vincoli devono soddisfare le seguenti proprietà

1) Compatibilità

L'insieme delle n-ple $\{P_1, P_2 \dots P_n\}$ che soddisfano tutti i vincoli deve essere non vuoto

2) Indipendenza

I vettori $\nabla_{3n} f_j$ devono essere indipendenti

$\vec{\nabla} f_j \in \mathbb{R}^n \qquad \vec{\nabla} f_j = \sum \vec{e}_i \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}$

$\vec{e}_i = \overbrace{(0, 0 \ldots, \underset{i}{1}, 0 \ldots 0)}^{3n}$

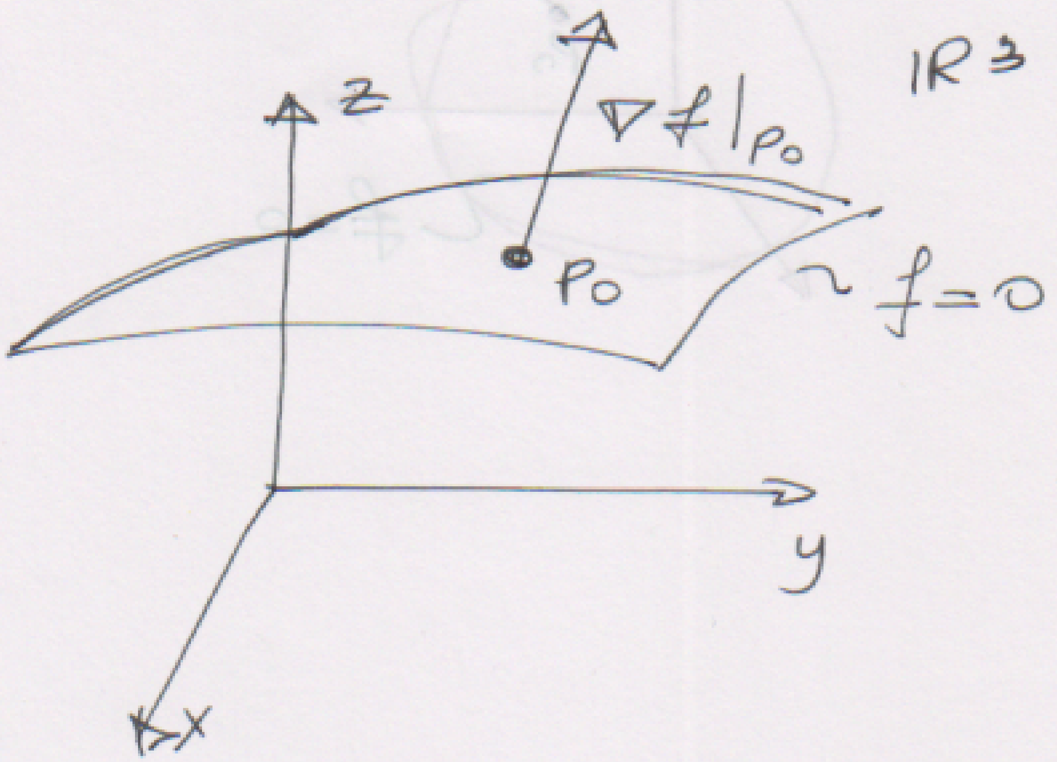
$\vec{e}_1 = (1, 0, 0 \ldots \quad 0) \in \mathbb{R}^n$

$\vec{e}_2 = (0, 1, 0 \ldots \quad 0)$

$\vec{r} \in \mathbb{R}^n = (\underbrace{x_1, x_2, x_3}_{(x_1, y_1, z_1)\ P_1}\ \underbrace{x_4\, x_5\, x_6}_{(x_2, y_2, z_2)\ P_2} \ldots \ldots, \underbrace{x_{3n-2}, x_{3n-1}, x_{3n}}_{(x_n, y_n, z_n)\ P_n})$

$f_j = f_j(x_1\, x_2\, x_3, x_4 \ldots x_{3n})$

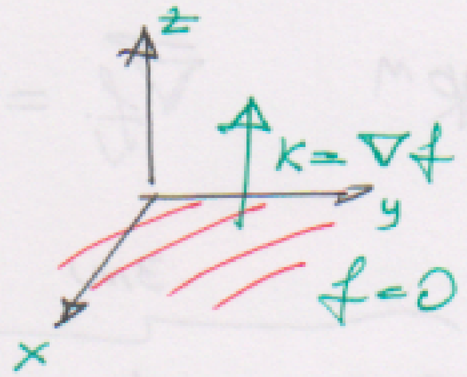
Il vettore ∇f è ortogonale a $f = 0$



Esempi in $\mathbb{R}^3$

- $f(x,y,z) = z \Rightarrow f=0 \Rightarrow z=0$

$$\nabla f = \hat{k}$$



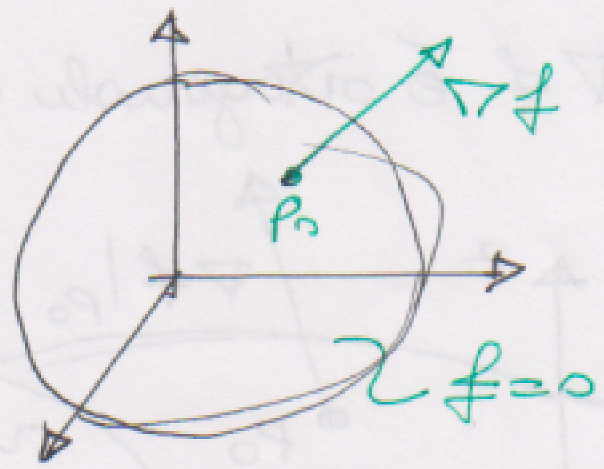
$$f = x^2+y^2+z^2-R^2 \quad \Rightarrow \quad f=0$$

$$x^2+y^2+z^2 = R^2$$

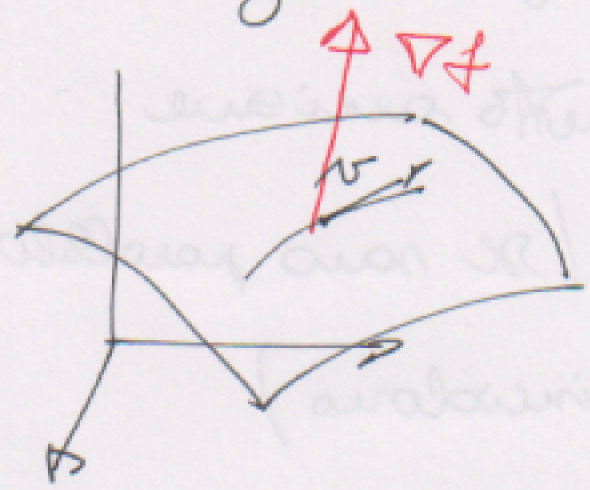
Sfera centro origine raggio R

$$\nabla f = \left(\hat{i}\,\partial_x + \hat{j}\,\partial_y + \hat{k}\,\partial_z\right)\left(x^2+y^2+z^2-R^2\right)$$

$$= 2\left(\hat{i}\,x + \hat{j}\,y + z\,\hat{k}\right) = 2\vec{r}$$



Come si generalizza il concetto di ortogonal. a $\mathbb{R}^{3n}$?



Curva che si muove nella sup. $f(x(t), y(t), z(t)) = 0$

oppure in $\mathbb{R}^{3n}$ $f(x_1(t), x_2(t) \dots x_{3n}(t)) = 0$

deriv. risp. tempo

$$0 = \frac{d}{dt} f(x(t), y(t), z(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\dot{z} =$$

$$(\vec{\nabla} f) \cdot \vec{v} = 0$$

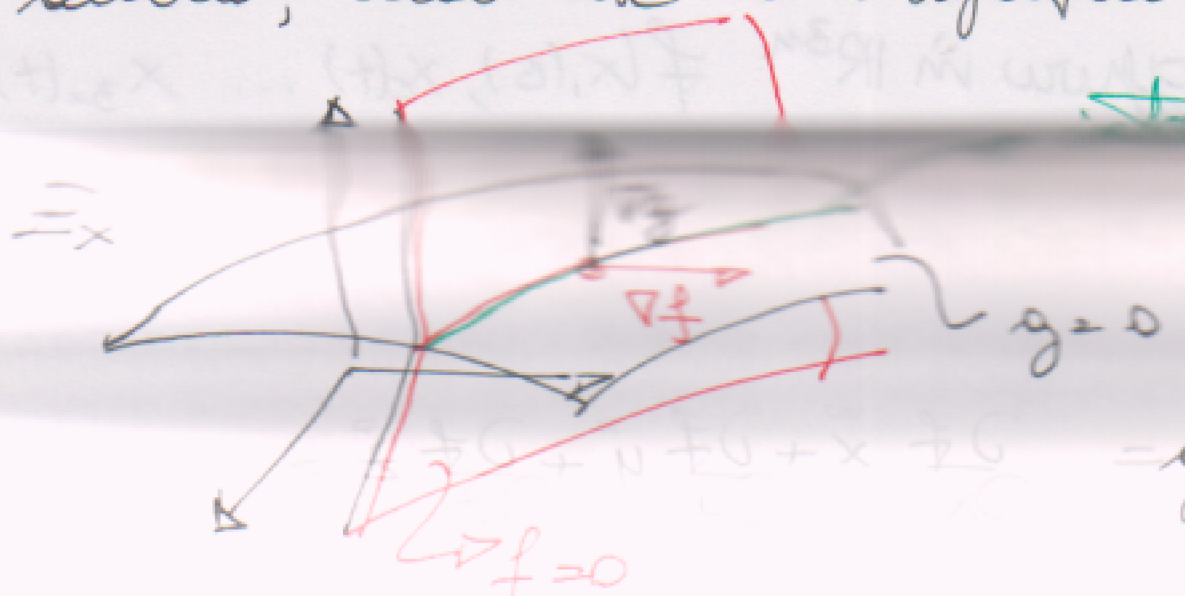
il gradiente è $\perp$ alla velocità di ogni pt. che si muove rispettando il vincolo $f = 0$.

in $\mathbb{R}^{3n}$

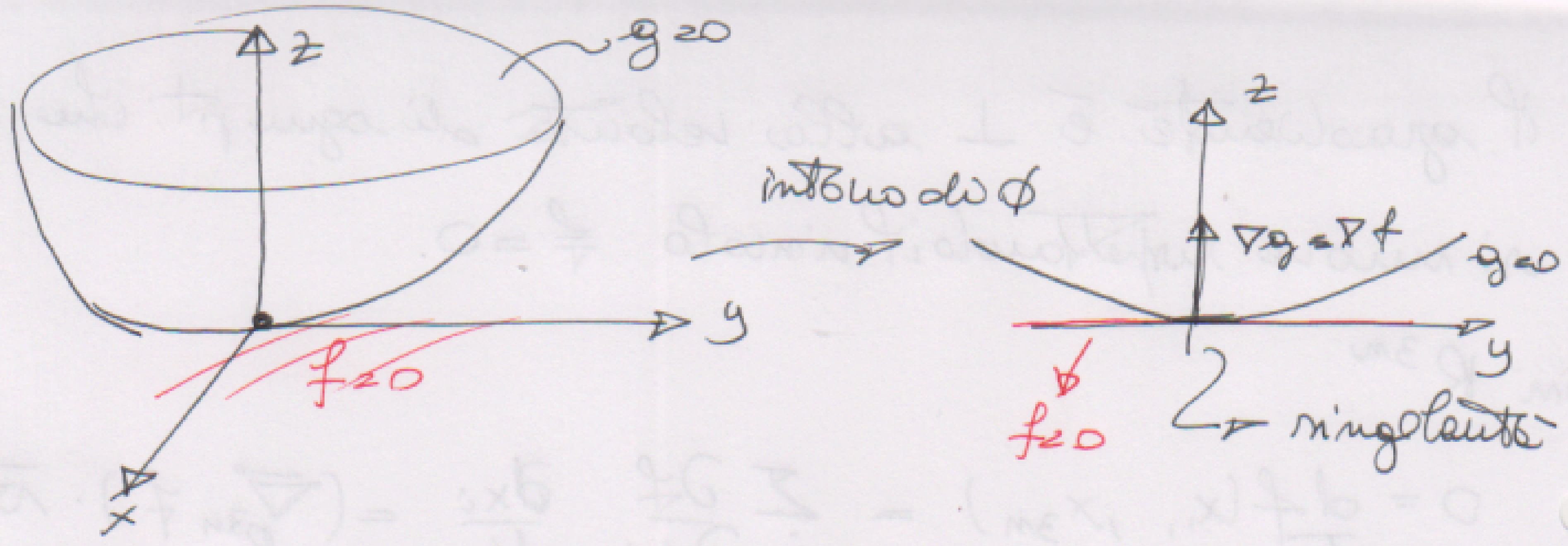
$$0 = \frac{d f(x_1, \dots, x_{3n})}{dt} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \underbrace{\frac{d x_i}{dt}}_{\text{componente velocità in } \mathbb{R}^{3n}} = (\vec{\nabla}_{\mathbb{R}^{3n}} f) \cdot \vec{v}$$

$$\vec{v} = (\underbrace{\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3}_{\underbrace{(\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1)}_{v_1}}, \underbrace{\dot{x}_4 \quad \dots}_{\vec{v}_2} \quad \underbrace{\dot{x}_{3n}}_{\vec{v}_n}) = \sum \vec{e}_i \, x_i$$

Condizione di indipendenza ⇒ ogni vincolo deve togliere un g.d.l. al sistema, questo avviene se i gradienti non sono paralleli (se sono paralleli allora, localmente le 2 superfici coincidono).



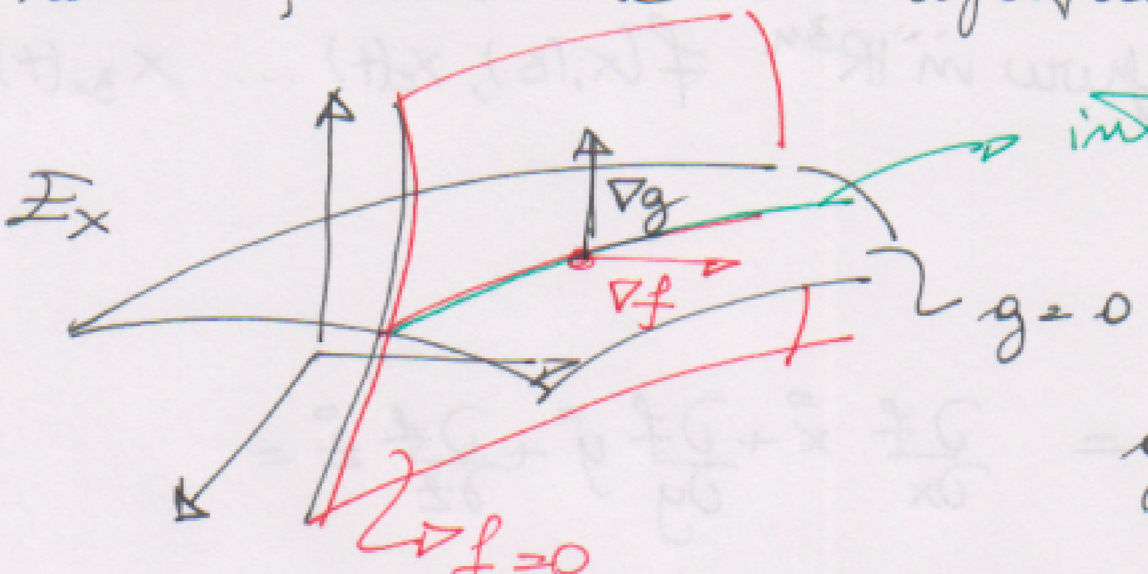
g.d.l $= 3-2 = 1$



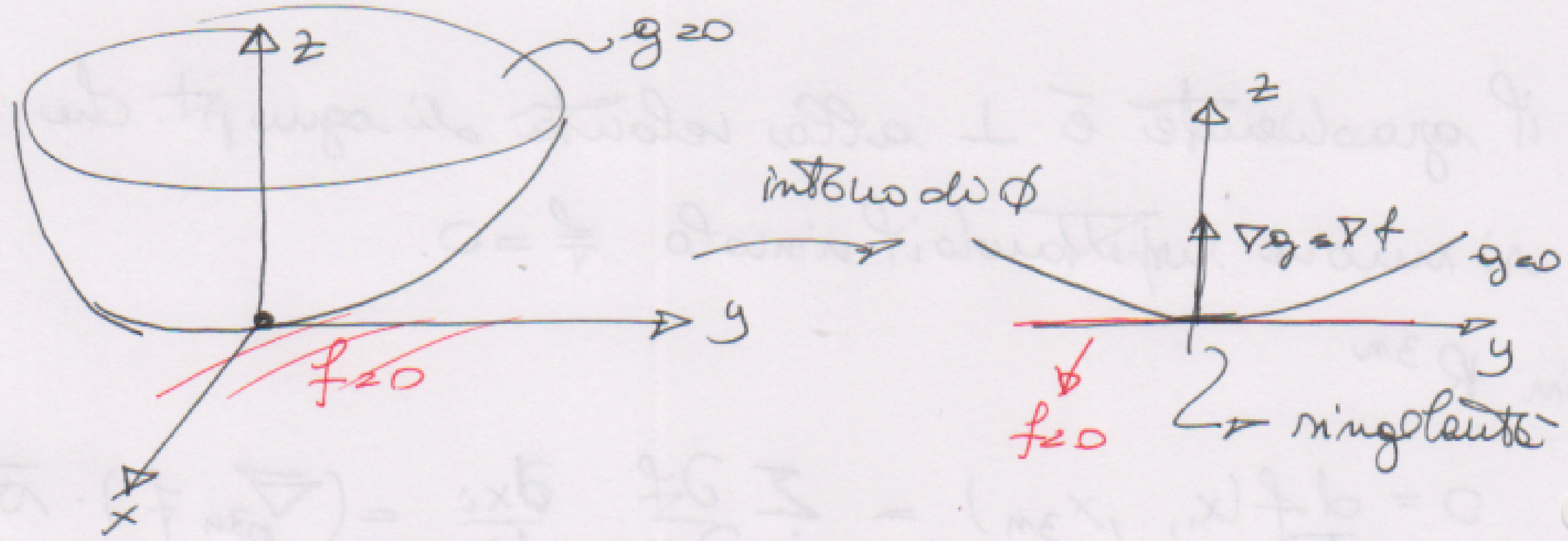
La condizione di compatibilità può essere verificata calcolando la matrice Jacobiana

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{3n}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & & & \frac{\partial f_2}{\partial x_{3n}} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & & & \frac{\partial f_m}{\partial x_{3n}} \end{pmatrix} : m \times 3n$$

Condizione di indipendenza ⟹ Ogni vincolo deve togliere un g.d.l. al sistema, questo avviene se i gradienti non sono paralleli (se sono paralleli allora, localmente le 2 superfici coincidono)



$$g.d.l = 3-2 = 1$$



La condizione di compatibilità può essere verificata calcolando la matrice Jacobiana.

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{3n}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & & & \frac{\partial f_2}{\partial x_{3n}} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & & & \frac{\partial f_m}{\partial x_{3n}} \end{pmatrix} : m \times 3n$$

Indipendente $\Leftrightarrow$ J rango massimo

Ex sfera e piano

$$f = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$$

$$g = z - R$$

Il punto $P = (0,0,1) \in \{f=0\} \cap \{g=0\}$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{P=(0,0,1)}$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango } J = 1 < 2$$

Coordinate Lagrangiane

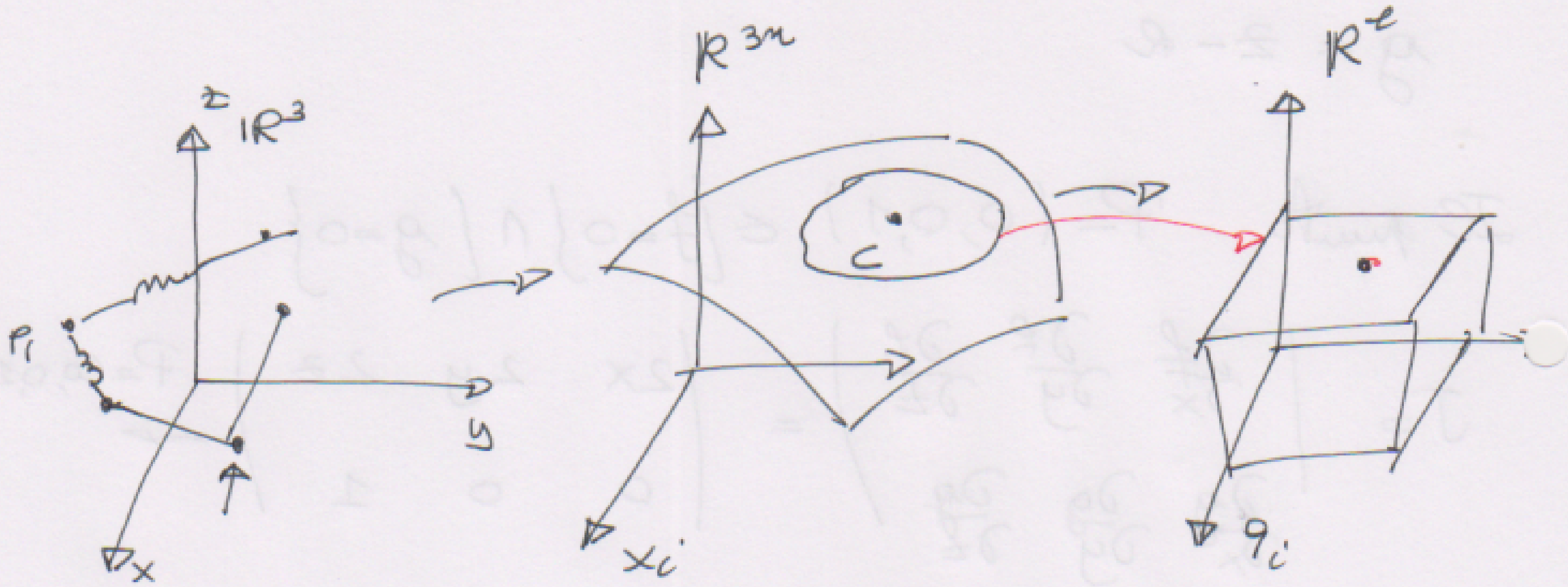
Se la matrice Jacobiana dei vincoli $f_j = 0$ ha rango massimo, allora per il teorema del Dini, tutte le $3n$ coordinate del sistema possono essere espresse tramite un numero $l = 3n - m$ di parametri indipendenti $q_1, \dots q_l$ (coord. lag.)

$$\begin{cases} x_1 = x_1(q_1 \dots q_l) \\ x_2 = x_2(q_1 \quad q_l) \\ \vdots \\ x_{3n} = x_{3n}(q_1 \dots q_l) \end{cases}$$

In generale le variab. Lagrang. variano in un insieme $K \subset \mathbb{R}^l$ $\quad K = I_1 \times I_2 \dots \times I_l$

$\downarrow$ prod. cartesiano di intervalli

$\downarrow$ Ipercubo

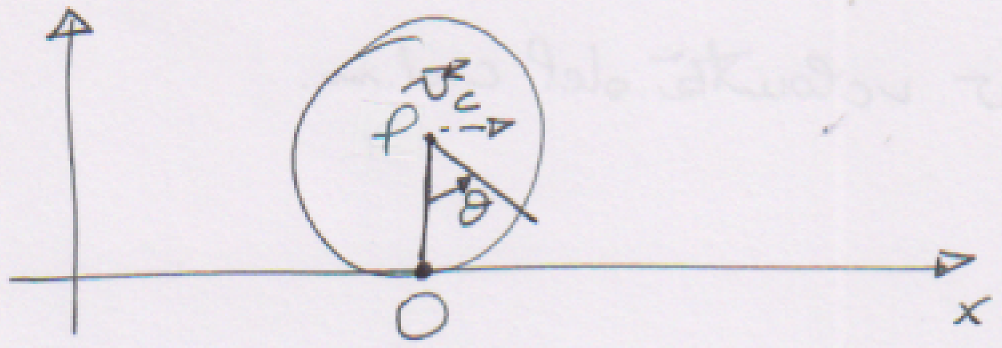


Spazio fisico — Spa. delle conf. — Spa. Lagrang.

Nota: in alcuni casi si definiscono in maniera analoga dei vincoli nello spazio delle coord. Lagrang.

$f(q_1, q_2 \dots q_l) = 0$ → spazio da n gdl $l-1$

NOTA : Vincolo di rotolamento



Il vincolo di rotolamento puro si esprime imponendo che la velocità del pt. di contatto col terreno sia nulla

$$\vec{v}_O = \vec{v}_C + \dot{\theta}\,\hat{x} \wedge (C-O) = 0$$

nulla direz. x. $\Rightarrow$ $\dot{x}_C = -\dot{\theta} R$

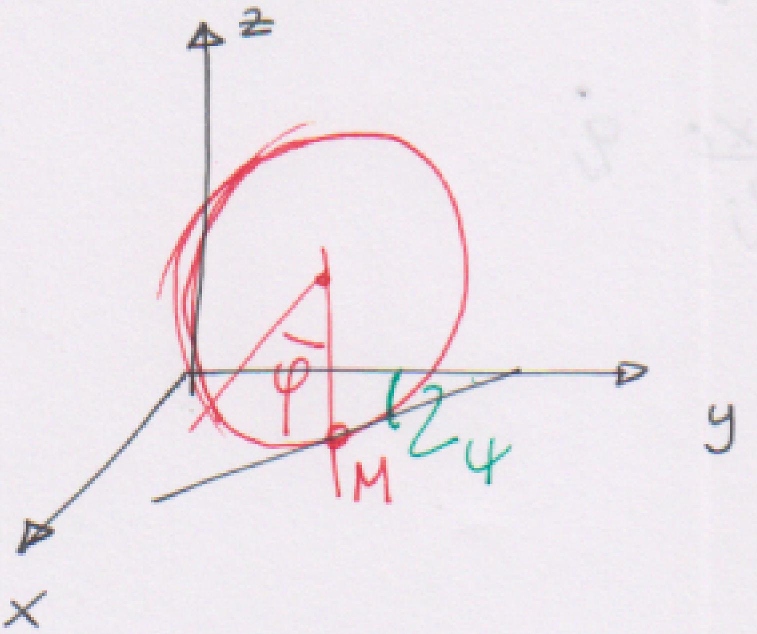
ovvero, integrando $x_C = -\theta R$

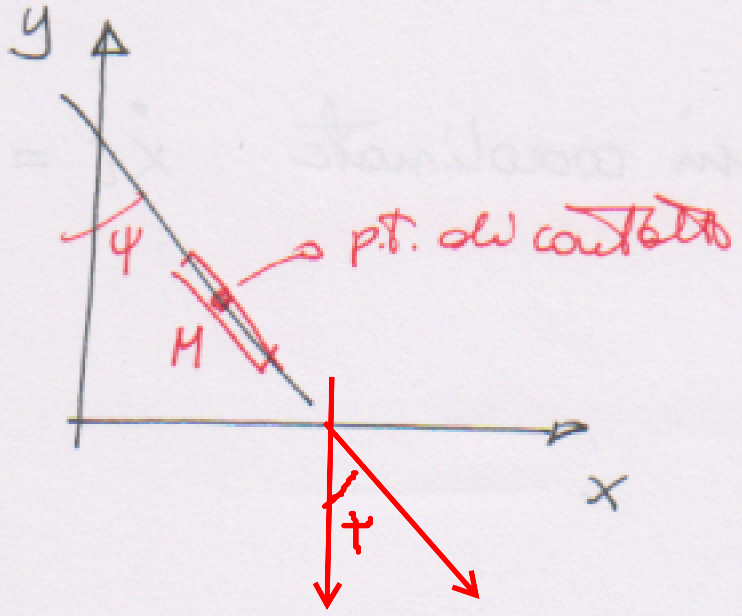
vincolo olonomo

in questa forma il vincolo non è olonomo

non si esprime $f(x_C, \theta) = 0$

Il vincolo di rot. è olonomo solo nel caso piano, più in generale





Ho 4 g.d.l. $(x_M, y_M, \varphi, \psi)$ + 2 vincoli

$\dot{x}_M = +v \sin\psi$ $\quad$ v velocità del c.d.m.

$\dot{y}_M = -v \cos\psi$

$v = R\dot{\varphi}$

$$\begin{cases} \dot{x}_M = +R\dot{\varphi}\sin\psi \\ \dot{y}_M = -R\dot{\varphi}\cos\psi \end{cases}$$

Non è possibile integrare banalmente

Alcuni richiami di dinamica Lagrangiana

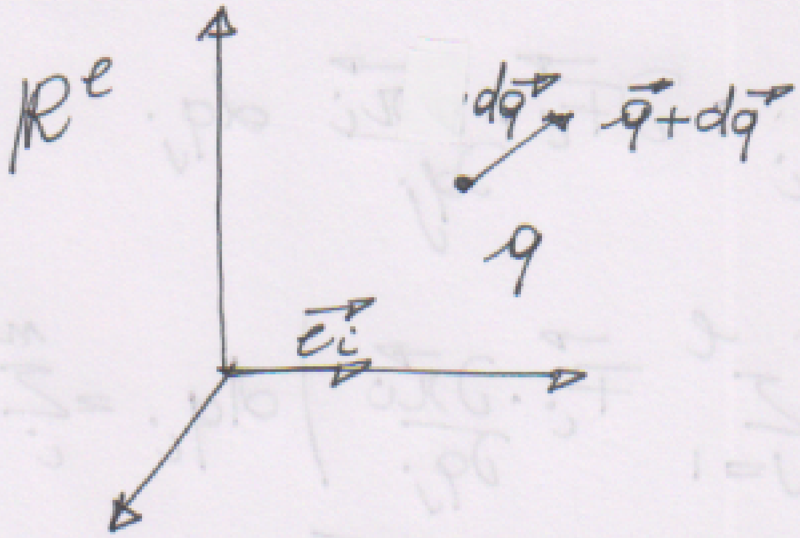
L'uso delle coord. gen. $(q_1, \dots q_e)$ permette di scrivere la posiz. di i-esima massa come

$\vec{r}_i = \vec{r}_i (q_1, \dots q_e)$

Velocità: $\frac{d}{dt}\vec{r}_i = \vec{v}_i = \sum \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\frac{dq_j}{dt}$

in coordinate $\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{e} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\dot{q}_j$

Introduciamo il concetto di spostamento infinitesimo



$d\vec{q}$: spostamento infinitesimo nello spazio dei parametri

$d\vec{q} = \sum_{i=1}^{l} \vec{e_i}\, dq_i$

↳ componente di spost. lungo ciascun asse

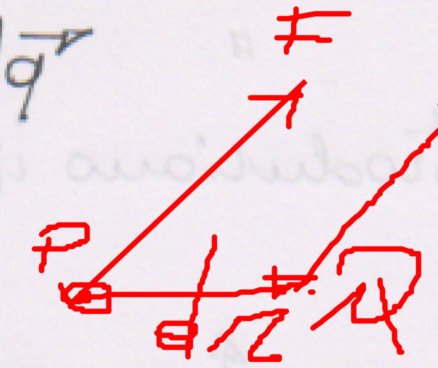
data una generica $f(q)$ definiamo df = variazione di f (al primo ordine) a seguito di una variaz. di q

$$df = f(q+dq) - f(q) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} dq_i.$$

Nel caso della posizione $d\vec{r_i} = \sum_j \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j} dq_j$

Formalmente come nella formula precedente, moltiplicando per dt.

Se ho un sistema di n pt materiali ~~a~~ su cui sono applicate delle forze, è interessante calcolare il lavoro prodotto dalle forze, associato ad un piccolo spostamento del sistema descritto da $d\vec{q}$



Lavoro = Forza · spostamento

$$dW = \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \sum_{j=1,i} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \, dq_j$$

↓

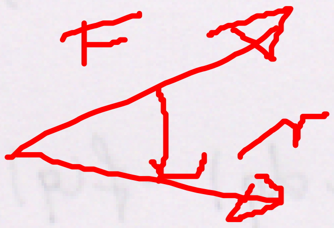
lav. infinit.

$$= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{\ell} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right)}_{Q_i} dq_i = \sum_i Q_i \, dq_i$$

↳ Forza generalizzata

dW : lav. infinitesimo x uno spost di dq.

Se consideriamo che lo sp. dq si esegua in un tempo infinitesimo dt

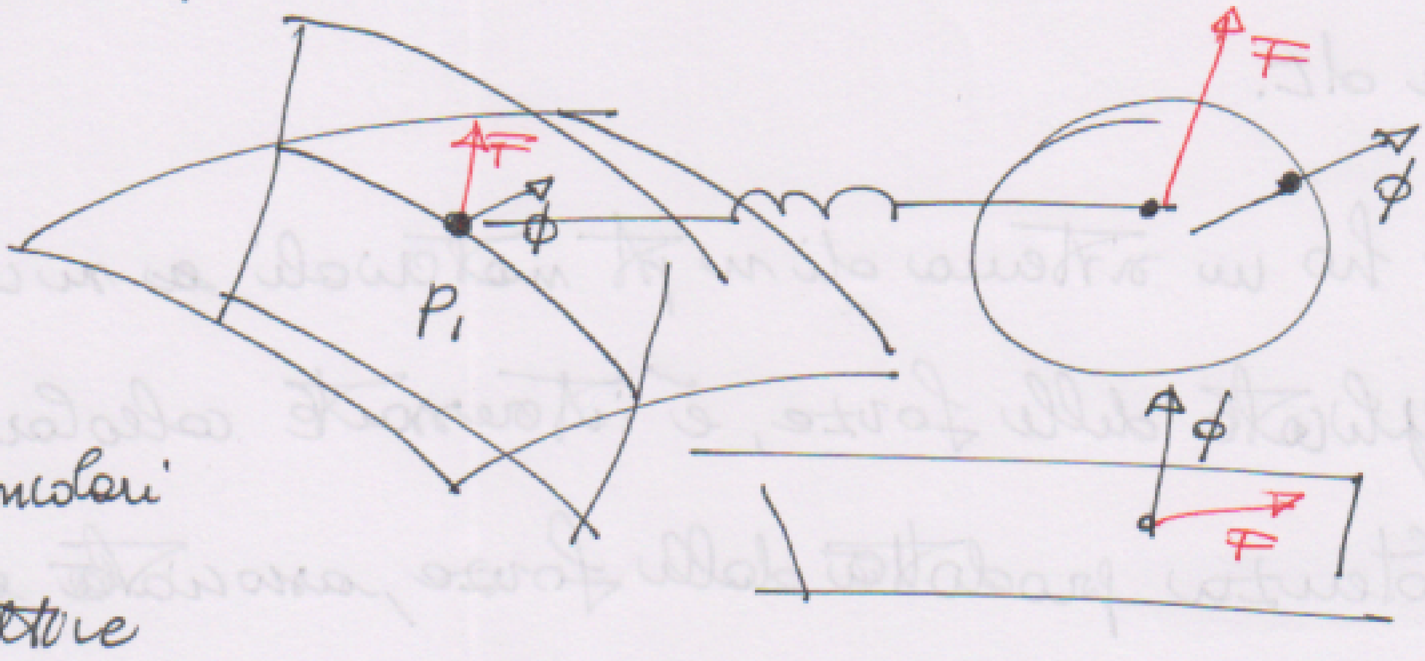


$\frac{dW}{dt}$ = potenza

Formalmente $\frac{dW}{dt} = \sum_i Q_i \frac{dq_i}{dt} = \sum Q_i \dot{q}_i$

Risolviamo questo punto in maniera meno formale

Sistema di n pt



ϕ : reaz. vincolari

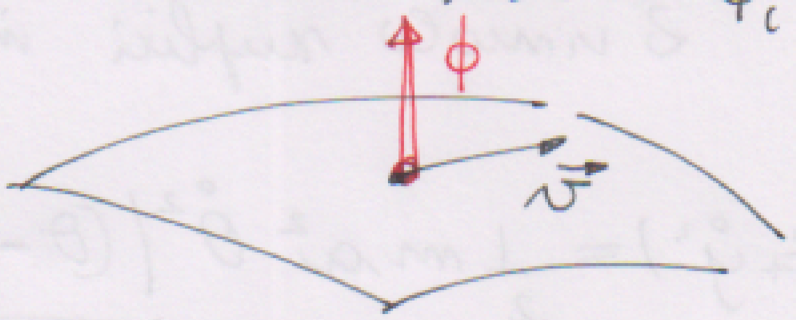
F: Forze attive

Calcoliamo la potenza del sistema di forze

$$K = K_F + K_\phi = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{\phi}_i \cdot \vec{v}_i$$

Vincolo LISCIO : $\underbrace{\vec{\phi}_i \cdot \vec{v}_i = 0}$

la reaz. vincolare non genera potenza per nessuna velocità del punto compatibile col vincolo stesso $\Rightarrow \vec{\phi}_i$ è $\perp \vec{v}$



La potenza quindi si riduce alla potenza delle sole forze attive

$$K = K_F = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_i \sum_j \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j = \sum_j Q_j \dot{q}_j$$

con $Q_j = \sum_i F_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$

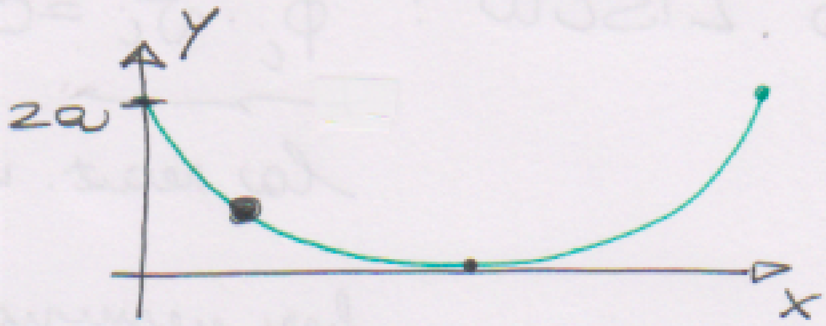
In coerenza con la formula precedente

Esempio di dinamica Lagrangiana

Moto di un punto lungo una cicloide (brachistocrona)

$x = a(\theta - \sin\theta)$

$y = a(1 + \cos\theta)$



con $0 \leq \theta \leq 2\pi$ → eq. parametrica della cicloide

2 vincoli semplici in (x, y, θ)

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m a^2 \dot{\theta}^2 \underbrace{\left[(-\sin\theta)^2 + (1-\cos\theta)^2\right]}_{2(1-\cos\theta)}$$

$$\dot{x} = a(\dot{\theta} - \cos\theta\,\dot{\theta}) = a\dot{\theta}(1 - \cos\theta)$$

$$\dot{y} = -a \sin\theta\, \dot{\theta}$$

En pot $\quad U = mg\, y = mga(1 + \cos\theta)$

$$L = T - U = m a^2 \dot{\theta}^2 (1 - \cos\theta) - mga(1 + \cos\theta)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta}$$

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\left[2 m a^2 \dot{\theta}(1 - \cos\theta)\right]}_{2ma^2\left(\ddot{\theta}(1-\cos\theta) + \dot{\theta}^2 \sin\theta\right)} = m a^2 \dot{\theta}^2 \sin\theta + mga \sin\theta$$

$$(1-\cos\theta)\,\ddot{\theta}+\frac{1}{2}\sin\theta\,\dot{\theta}^2-\frac{g}{2a}\sin\theta=0 \qquad (1)$$

poniamo $u=\cos(\theta/2)$

$$\dot{u}=-\frac{1}{2}\sin(\theta/2)\,\dot{\theta}$$

$$\ddot{u}=-\frac{1}{2}\sin(\theta/2)\,\ddot{\theta}-\frac{1}{4}\cos(\theta/2)\,\dot{\theta}^2$$

usando $\cot(\theta/2)=\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=\dfrac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$

Scriviamo (1) come

$$\ddot{\theta}+\frac{1}{2}\cot g(\theta/2)\,\dot{\theta}^2-\frac{g}{2a}\cot(\theta/2)=0$$

$$\underbrace{-\sin(\theta/2)\frac{\ddot{\theta}}{2}+\frac{1}{4}\cos(\theta/2)\,\dot{\theta}^2}_{-\frac{d^2u}{dt^2}}-\frac{g}{2a}\underbrace{\cos(\theta/2)}_{u}=0$$

$\ddot{u}+\dfrac{g}{4a}u=0 \Rightarrow$ eq. oscillat. armonico

$$u=\cos(\theta/2)=c_1\cos\left(\sqrt{\frac{g}{4a}}\,t\right)+c_2\sin\left(\sqrt{\frac{g}{4a}}\,t\right)$$

Vincoli anolonomi

Vincoli dati nelle coord. Lag. che non possono essere espressi nella forma $f(q_1, \dots q_e) = 0$

Ci interessiamo alla seguente classe di vincoli

$$\sum a_i(q_1, \dots q_e)\, \dot{q}_i = 0 \quad \Rightarrow \text{Singolo vincolo}$$

$$\sum_{i=1}^{e} a_{ji}(q_1 \dots q_e)\, \dot{q}_i = 0 \quad \overset{j=1 \dots p}{\Rightarrow} \text{sequenza di vincoli}$$

Equiv. i vincoli vengano espressi nella forma

$$\sum a_i(\bar{q})\, dq_i = 0$$

$\hookrightarrow$ spost. infinitesimo

Ricaveremo l'Eq. E-L nel caso di v. anolonomi.

Esempio v. anol. : rotolamento

$$\dot{x} = -R\dot{\varphi} \sin\psi \quad \Rightarrow \quad \sum a_i \dot{q}_i \Rightarrow \begin{cases} a_x = 1 \\ a_\varphi = R\sin\psi \\ a_\psi = 0 \quad a_y = 0 \end{cases}$$

$$\dot{y} = +R\dot{\varphi}\cos\psi$$

Nota: un vincolo olonomo può essere sempre espresso nella forma prec.

$$f(q_1 \dots q_e) = 0 \overset{d/dt}{\Rightarrow} \sum_i \underbrace{\frac{\partial f}{\partial q_i}(\bar{q})}_{a_i(\bar{q})} \dot{q}_i = 0$$

Ricordiamo la deriv. delle eq. E-L caso v. olon.
e poi ne vediamo l'estensione x i vincoli anolonomi

Sistema di n punti con coord $\vec{r}_i(\bar{q})$
descritto da l coord lagrang. $(q_1, \dots, q_l)$

Risultati preliminari

1) Vale $\dfrac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \dfrac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$

Verifica $\dot{\vec{r}}_i = \sum_j \dfrac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j$ *

$\Rightarrow \dfrac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_k} = \dfrac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \sum_j \dfrac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j = \dfrac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$

2) Vale $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) = \dfrac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j}$

$* \Rightarrow \dfrac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j} = \sum_k \dfrac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k$

$\parallel$

$\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}(\bar{q})\right) = \sum_k \dfrac{\partial}{\partial q_k} \dfrac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_k = \sum_k \dfrac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k$

$\dfrac{d}{dt} f(q, \dot{q}) = \dfrac{\partial f}{\partial q_k} \dot{q}_k + \dfrac{\partial f}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k$

Sia $\vec{F}_i$ la risultante delle forze agenti su P_i.

II legge Newton

$$m\,\ddot{r}_i = \vec{F}_i \Rightarrow m\left(\ddot{\vec{r}}_i\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) = \vec{F}_i\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

calcoliamo $\frac{d}{dt}\left(\dot{r}_i\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) = \ddot{\vec{r}}_i\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} + \dot{\vec{r}}_i\,\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$

2)
$$= \ddot{\vec{r}}_i\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} + \dot{\vec{r}}_i\cdot\frac{\partial}{\partial q_j}\,\dot{\vec{r}}_i$$

Quindi $\frac{d}{dt}\left(m\,\dot{r}_i\,\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) - m\,\dot{\vec{r}}_i\,\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j} = \vec{F}_i\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$

Sommo sull'indice j

$$\frac{d}{dt}\left(m\sum_i \dot{\vec{r}}_i\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) - \sum_i m\,\dot{\vec{r}}_i\,\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j} = \sum_i \vec{F}_i\,\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

Ricordiamo la def. dell'energia cinetica

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m(\dot{r}_i)^2 = \frac{1}{2}\sum m(\dot{\vec{r}}_i\cdot\dot{\vec{r}}_i)$$

calcoliamo $\frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_i m\,\dot{\vec{r}}_i\,\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j}$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum m\left(\dot{\vec{r}}_i\cdot\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}\right) \overset{1}{=} \sum m\,\dot{\vec{r}}_i\,\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

Otteniamo

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

dove $Q_j = \sum_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \vec{F}_i$

Forze generalizzate : $\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\circ} + \vec{F}_i'$

t.c. $\vec{F}_i' = - \frac{\partial U}{\partial r_i}(r_1 \dots r_n)$

$$\Rightarrow Q_j = \sum_i \vec{F}_i^{\circ} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} + \underbrace{\sum_i F_i' \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}}_{= - \sum_i \frac{\partial U}{\partial r_i}\frac{\partial r_i}{\partial q_j} = - \frac{\partial U}{\partial q_j}}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial}{\partial q_j}(T - U) = Q_j$$

↳ contiene solo le forze non ricavabili da pot. esterno

$\mathcal{L} = T - U$ e usando $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} = 0$

$$E\text{-}L \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = Q_j \qquad j = 1, \dots, l$$

Come calcolare la forza generalizz. Q_i!

Immag. di conoscere l'espressione del lavoro W compiuto da una forza (non necess. conservativa)

$$dW = \sum \frac{\partial W}{\partial q_i} dq_i$$ ricordando che $dW = \sum Q_i dq_i$

$\hookrightarrow$ moto

otteniamo $Q_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}$

Vincoli anolonomi

Immaginiamo che il sistema sia vincolato a soddisf. s equaz. aggiuntive della forma di v. anolonomo

$$\sum a_{ij} \dot{q}_j = 0 \quad i=1\dots s \quad \rightarrow \quad \sum_{j=1}^{\ell} a_{ij}\, dq_j = 0 \quad i=1\dots s$$ *

dove gli dq_i vanno intesi come spostamenti infinitesimi compatibili con i vincoli dati. Riscrivo eq. E-L moltip. per dq_i e sommando

$$\sum_{i=1}^{\ell}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} - Q_i\right) dq_i = 0$$

Ho riscritto l'eq. in una forma simile a * consideriamo $\sum_{j=1}^{l} a_{ij}\, dq_j = 0^{*} \quad i=1,\dots,s$

moltip. per $\lambda_i(q,\dot q)$: s funzioni da determinare

dette Moltiplicatori di Lagrange

$$\sum_{i=1}^{s} \lambda_i \sum_{j=1}^{l} a_{ij}\, dq_j = 0$$

Sottraiamo a Eq. E-L e otteniamo

$$\sum_{j=1}^{l} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} - Q_j - \sum_{i}^{s} \lambda_i a_{ij} \right) dq_j = 0 \quad (1)$$

qui dq_i vanno considerati come parametri arbitrari

ECCETTO le s eq. vincolari

Fissiamo i λ_i. Le eq. * sono s relazioni per gli incrementi dq_j : solo $l-s$ sono indipendenti.

: Fissato $l-s$ incrementi q_i gli altri s possono essere ottenuti tramite le eq. *.

Scegliamo i primi s incrementi come dipendenti

$$\underbrace{q_1, \dots q_s}_{\text{dipendenti}},\ \underbrace{q_{s+1}, q_{s+2} \dots, q_l}_{\text{indipendenti}}$$

considero le prime s equazioni e pongo uguale a 0

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} - Q_j - \Sigma \lambda_i a_{ji} = 0 \qquad j = 1, \dots, s$$ #

fissiamo λ_i in modo che le precedenti s eq. siano soddisfatte

$$\Sigma \lambda_i a_{ij} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} - Q_j$$

Adesso Eq. (1) diventa

$$\sum_{\underset{\sim}{j=s+1}}^{\ell} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} - Q_j - \Sigma \lambda_i a_{ij} \right) dq_j = 0$$

Nota estremi somma

adesso le dq_j sono indip. => affinché la prec. eq. sia soddisfatta si devono annullare tutti i termini.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} - Q_j - \Sigma \lambda_j a_{ij} = 0 \qquad j = s+1, \dots, \ell$$

che hanno la stessa forma di #

Equazioni lagrangiane per vincoli anolonomi

Consideriamo $l + s$ quantità incognite da det.

$l : \bar{q} : (q_1, \dots q_l)$

$s : \lambda_i \quad i = 1 \dots s$

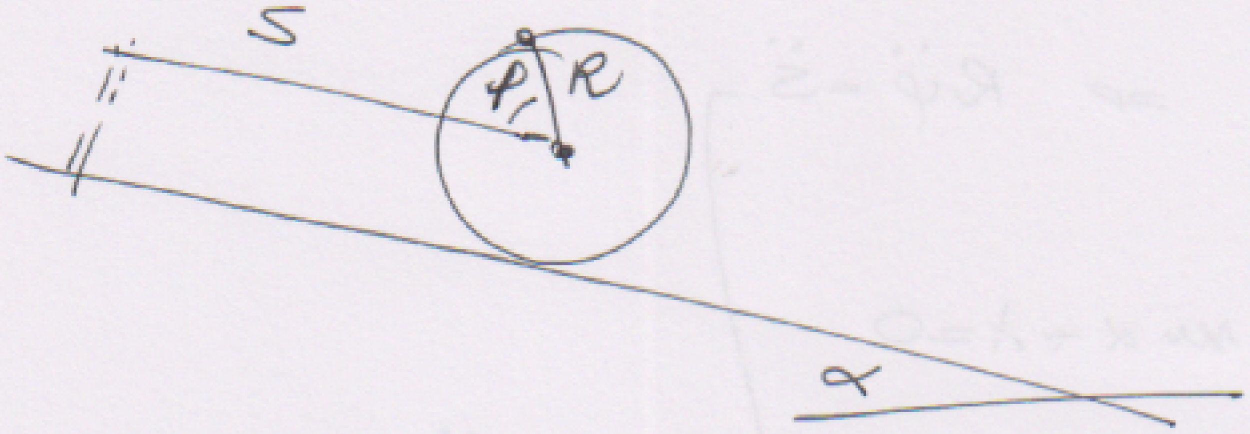
Che possono essere det. dalle seguenti l eq. E-L

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum \lambda_i a_{ij} + Q_j = 0$$

$+ s$ vincoli $\quad \sum_{j=1}^{l} a_{ij} \dot{q}_j = 0 \quad i = 1 \dots s.$

Es.

Cilindro che rotola lungo un piano inclinato



Vincolo di non strisciamento $R\dot{\varphi} = \dot{s}$

mantenendolo in forma di vincolo anolon. $R\,d\varphi = ds$

2 g.d.l. (φ, s) 1 vincolo $R\,d\varphi - ds = 0$

$a_s = -1$ $a_\varphi = R$ $\Rightarrow \sum a_j\, dq_j = 0$

E. cinetica

$$T = \frac{1}{2} m \dot{s}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 = \frac{m}{2}\left(\dot{s}^2 + \frac{R^2}{2}\dot{\varphi}^2\right)$$

Pot $U = -mgs\sin\alpha$

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{s}^2 + \frac{R^2}{2}\dot{\varphi}^2\right) + mgs\sin\alpha$$

Eq. E-L $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \lambda a_j = 0$ $j = 1 \Rightarrow q_1 = s, a_s = -1$

$j = 2 \Rightarrow q_2 = \varphi$ $a_\varphi = R$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial L}{\partial s} + \lambda = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} - R\lambda = 0$$

$$R\dot{\varphi} = \dot{s} \quad \Rightarrow \quad R\ddot{\varphi} = \ddot{s}$$

$$m\ddot{s} - mg \sin\alpha + \lambda = 0$$

$$\frac{m}{2} R^2 \ddot{\varphi} - \lambda R = 0 \longrightarrow m\ddot{s} = 2\lambda$$

sostituisco sopra

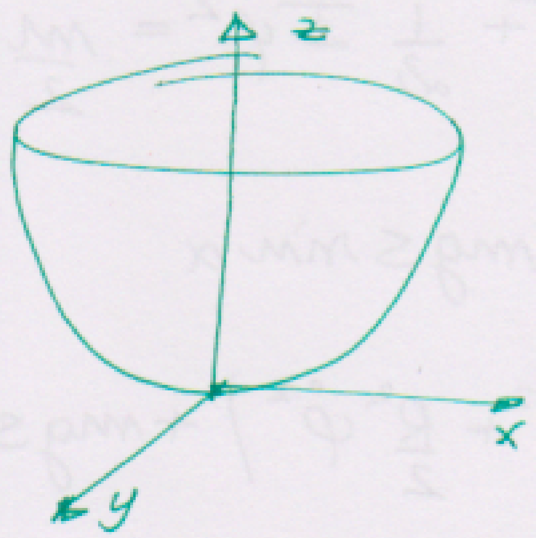
$$\lambda = \frac{1}{3} mg \sin\alpha$$

Sostituisco e ottengo l'eq. per $\ddot{s}$

$$\ddot{s} = \frac{2}{3} g \sin\alpha$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{2}{3} \frac{g}{R} \sin\alpha$$

Moto di un punto sulla sup. di un paraboloide

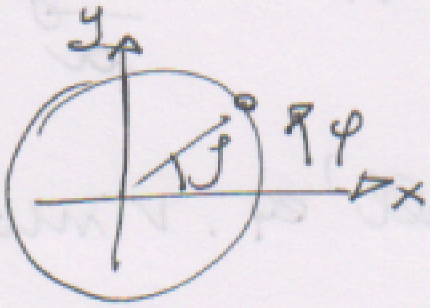


Eq. del paraboloide $x^2 + y^2 = az$

Utilizziamo le coord. cilindriche (ρ, φ, z)

La lagrang. in assenza del vincolo si scrive

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \left(\dot\rho^2 + \rho^2 \dot\varphi^2 + \dot z^2 \right) - m g z$$



Notando $x^2 + y^2 = \rho^2$

il vincolo si scrive $\rho^2 - a z = 0$

differenziando $\underbrace{2\rho\, d\rho - a\, dz = 0}_{\text{vincolo anolonomo x sist 3 g.l.}}$

(ρ, φ, z)

$a_\rho = 2\rho \qquad a_z = -a \qquad a_\varphi = 0$

Eq. E-L. $\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\rho} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} = 2\lambda\rho$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\varphi} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot z} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = -a\lambda$$

Otteniamo

$m(\ddot\rho - \rho\dot\varphi^2) = 2\lambda\rho$

$\frac{d}{dt}(\rho^2\dot\varphi^2) = 0$

$m\ddot z = -mg - \lambda a$

più eq. vincolo $2\rho\dot\rho - a\dot z = 0 \Rightarrow 4$ inc. $(\rho, \varphi, z, \lambda)$

Soluzione: $z(t) = h$ costante

$\Rightarrow \lambda = -\frac{mg}{a}$

dall'eq. vincolare $\rho = \sqrt{ah}$

Cons. mom. ang. $\frac{d}{dt}\dot\varphi^2 = 0 \Rightarrow \dot\varphi$ cost $\dot\varphi = \omega$

dalla prima eq. $\omega = \sqrt{2g/a}$