

GIACOMO POGGI

ESPERIMENTI
DI
ELETTRICITÀ E MAGNETISMO



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FIRENZE
DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA

Copyright © 1988
Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Fisica

Edizione elettronica:
Copyright © 2016
Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Fisica e Astronomia

INTRODUZIONE

Un po' meno di venti anni fa, quando iniziai a frequentare le lezioni del corso di Esperimentazioni di Fisica II, anche allora meglio noto col più cordiale nome di Fisichetta 2, e venni a conoscenza della mancanza di un libro di testo, fui colto da un certo senso di smarrimento: non riuscivo infatti a immaginare come fosse possibile preparare un esame senza un così fondamentale supporto. Il timore di questo "salto nel buio" andò poi via via dissolvendosi, man mano che il corso procedeva: le lezioni del Prof. Maurenzig erano serrate, ma chiarissime e gli appunti presi, e poi diligentemente trascritti in bella copia, divenivano di giorno in giorno sempre di più quel testo di cui tanto sentivo la mancanza. Per l'esame bastarono quegli appunti, la consultazione di qualche pagina del *Terman* e tornare una o due mattine in laboratorio (di più allora non era concesso) per rivedere qualche strumento e rifare qualche misura. Ovviamente, come me facevano molti altri e quasi tutti uscivamo da quella esperienza (o almeno quelli che superavano l'esame non indegnamente) con il convincimento che un libro di testo non era davvero necessario e che -quasi quasi- era proprio meglio che non ci fosse, perché in questo modo per superare l'esame bastava seguire attentamente le lezioni, prendere appunti e pensare un po' con la propria testa. Unico rimpianto, successivo rispetto alla data dell'esame, il non aver approfondito alcuni argomenti e l'essermi limitato a studiare lo stretto necessario, ovvero gli argomenti trattati a lezione e niente più. Due o tre anni dopo vennero le Dispense redatte dal titolare; non coprivano tutto il programma del corso, ma sono state di sicuro apprezzate dagli studenti per la loro precisione e chiarezza.

Quando è toccato a me svolgere il corso di Fisichetta 2, il mio primo impegno è stato quello di aggiornare alcuni degli argomenti, poiché ero e sono ancora convinto che un corso di laboratorio per il secondo anno di Fisica deve non solo avvicinare gli studenti ai principii generali delle misure, ma anche insegnar loro a utilizzare alcuni strumenti normalmente impiegati nelle moderne misure di fisica e farne comprendere, possibilmente a fondo, il funzionamento. Assolvere a questo impegno ha purtroppo significato espandere il programma e pertanto mi sono convinto che predisporre un testo da affiancare al corso sarebbe stato, quanto meno, opportuno. In questa decisione ha pesato, in vario modo, il ricordo delle mie esperienze passate: da una parte, il disagio che avevo provato da studente per la mancanza del libro di testo mi ha spinto ad affrontare l'impresa, da un'altra, il ricordo di come avevo preparato il mio esame di Fisichetta 2 mi ha convinto che non dovevo redigere delle dispense che ricalcassero pedestremente il corso, perché a questo scopo si prestano forse meglio dei buoni appunti personalmente presi da ogni studente: è nato così il progetto di redigere un testo che servisse sì da riferimento, ma ancor più da guida e stimolo per approfondire quegli argomenti che molto difficilmente si possono trattare in dettaglio durante le normali ore di lezione e, meno che mai, durante le affollate sedute in laboratorio. L'impresa ha richiesto uno sforzo e un tempo considerevole. Del tempo impiegato sanno anche gli studenti, che forse si aspettavano il libro già un anno o due or sono; spero che nessuno di loro abbia rimandato l'esame nell'attesa del testo, perché potrebbe ora rimanere assai deluso nell'apprendere che esso non è un ausilio per abbreviare i tempi della preparazione, casomai uno stimolo per approfondirla. Ora, a opera terminata, non so proprio se sono riuscito nello scopo che mi ero prefisso e purtroppo per la risposta occorrerà aspettare qualche anno di utilizzo del testo da parte degli studenti, sempre che esso non abbia una vita ancor più effimera. Comunque, la mia parte è oramai fatta e non mi resta che augurare buon lavoro agli studenti. A essi raccomando di dare anche un'occhiata alla bibliografia in fondo a ogni capitolo e li invito a consultare i testi suggeriti e a leggerne altri ancora; li invito con ancora maggior calore a cercare di trarre dal testo stimoli per porsi problemi e progettare misure, diverse da quelle standard; approfittino per questo dei periodi nei quali il laboratorio è a loro disposizione prima delle sessioni di esame.

Se in questo testo c'è qualcosa di buono o almeno non troppe imprecisioni (delle quali, ovviamente, sono l'unico responsabile), questo è anche merito di chi ha avuto la pazienza di discutere con me sugli argomenti del testo e addirittura di rileggerne criticamente vaste parti e suggerire miglioramenti: fra questi devo ringraziare in particolare T. Fazzini, A. Stefanini e N. Taccetti. Un

ringraziamento va anche ai colleghi che, impegnati con me nella ricerca, hanno tollerato alcune mie temporanee latitanze, motivate dal desiderio di porre fine all'opera intrapresa; fra questi desidero menzionare M. Bini e P. Sona.

La stesura di questo testo ha richiesto anche l'impegno di altre persone che hanno battuto il non sempre leggibilissimo manoscritto (M. Bruschi e M. Nuti), fatto i disegni a china (G. Cappelli) e i disegni con l'ausilio del calcolatore (G. Giarrizzo). A quest'ultimo va in particolare il mio ringraziamento, sia per la qualità del lavoro svolto che per la estrema gentilezza dimostrata nel fare reiterate modifiche su disegni ogni volta da me gabellati (in buona fede, s'intende) come definitivi.

Concludo con una riflessione alla quale spesso invito gli studenti: una misura di fisica che non sia una semplice ripetizione "preconfezionata" di un esperimento già fatto da altri comincia a essere istruttiva e anche divertente (a mio parere almeno) quando non torna; intendo dire quando essa fa vedere che il modello che abbiamo adottato per descrivere il fenomeno fisico in studio mostra i suoi limiti. Certamente non è sempre per questo nobile motivo che in laboratorio una esperienza non torna; più spesso la causa di una apparente discrepanza fra esperimento e teoria è riconducibile a un circuito montato male o a uno strumento disfunzionante. Le esercitazioni in laboratorio dovrebbero, fra l'altro, insegnare a evitare questi errori e a diagnosticare certi difetti, in altre parole a far acquisire una discreta padronanza di alcune tecniche di misura; la funzione di un laboratorio di fisica però non si esaurisce qui, anzi questa è soltanto una fase propedeutica di un programma assai più ambizioso che comincia a realizzarsi proprio quando lo studente, divenuto familiare con il metodo di misura e la strumentazione, è finalmente in grado, sfruttando la precisione e la sensibilità degli apparati sperimentali, di accorgersi dei limiti delle schematizzazioni introdotte nel modello che tenta di descrivere i fatti sperimentali. Tanto per citare un esempio, la dipendenza dalla frequenza e le non linearità dei resistori, dei condensatori e delle induttanze e l'influenza sull'equilibrio dei ponti in alternata dell'assetto geometrico del circuito sono fenomeni che con un accorto utilizzo della strumentazione disponibile in laboratorio possono essere messi chiaramente in evidenza e confermano che non appena il metodo di misura è sufficientemente preciso e sensibile, l'accordo fra esperimento e teoria tende a divenire sempre meno soddisfacente e che occorre, come minimo, introdurre modifiche al modello adottato. Questo è il vero momento educativo di un corso di laboratorio, ovvero il contatto con il Metodo Sperimentale, che è un continuo e stringente confronto fra i risultati delle misure e i modelli che cercano, con alterno successo, di interpretarli.

Firenze, aprile 1988

G.P.

NOTA ALL'EDIZIONE ELETTRONICA (2012)

Questa edizione in forma di documento PDF è, a meno di qualche minima differenza di natura tipografica, una copia conforme di quella cartacea del 1988. Anche le figure sono quelle dell'originale, riprodotte digitalmente.

BIBLIOGRAFIA

Riportiamo l'elenco dei libri che sono stati più ampiamente consultati per la stesura di questo testo.

- | | | |
|--------------|------------------------------|--|
| AL 60 | Alberigi Quaranta, Rispoli | <i>Elettronica</i>
Zanichelli (1960) |
| BE 82 | Benetazzo | <i>Misure elettroniche (Strumentazione analogica)</i>
CLEUP (Padova) (1982) |
| BE 84 | Benetazzo | <i>Misure elettroniche (Strumentazione numerica)</i>
CLEUP (1984) |
| CO 83 | Costanzini, Guernelli | <i>Strumentazione e misure elettroniche</i>
Zanichelli (1983) |
| CO 85 | Cooper, Helfrick | <i>Electronic instrumentation
and measurement techniques</i>
Prentice Hall Int. (1985) |
| DA 75 | Dall'Aquila, Gallesi, Savino | <i>Guida al laboratorio di misure elettriche</i>
Tamburini (1975) |
| DE 69 | Desoer, Kuth | <i>Basic circuit theory</i>
International Student Ed. (1969) |
| FA 60 | Fano, Chu, Adler | <i>Electromagnetic fields, energy and forces</i>
Wiley (1960) |
| FE 63 | Feynman, Leighton, Sands | <i>The Feynman lectures on physics</i>
Addison Wesley (1963) |
| FL 63 | Fleury, Mathieu | <i>Fisica generale e sperimentale</i>
Zanichelli (1963) |
| FR 59 | Franck | <i>Electrical Measurements</i>
Mc Graw-Hill (1959) |
| FR 71 | Franchetti | <i>Lezioni di elettricità e magnetismo
con elementi di relatività ristretta</i>
Dispense (1971) |
| JA 75 | Jackson | <i>Classical Electrodynamics</i>
Wiley (1975) |
| KI 76 | Kittel | <i>Introduction to solid state physics</i>
Wiley (1976) |

KR 84	Krans	<i>Electromagnetics</i> International Student Ed. (1984)
LA 38	Laws	<i>Electrical Measurements</i> Mc Graw-Hill (1938)
LA 57	Landee, Davis, Albrecht	<i>Electronic Designers Handbook</i> Mc Graw-Hill (1957)
MA 72	Maurenzig	<i>Appunti alle lezioni di sperimentazione fisica II</i> Dispense (1972)
MA 78	Mangiavacchi, Zanini	<i>Misure elettroniche</i> CEDAM (1978)
MI 72	Millman, Halkias	<i>Integrated electronics</i> International Student Ed. (1972)
MI 79	Millman	<i>Microelectronics</i> International Student Ed. (1979)
PA 62	Panofsky,Phillips	<i>Classical electricity and magnetism</i> Addison Wesley (1982)
TA 86	Taylor	<i>Introduzione all'analisi degli errori</i> Zanichelli (1986)
TE 50	Terman	<i>Radio engineering's handbook</i> Mc Graw-Hill (1950)
TE 57	Terman	<i>Electronic and radio engineering</i> International Student Ed. (1957)
ZI 86	Zingales	<i>Metodi e strumenti per le misure elettriche</i> UTET (1986)

Allo scopo di stimolare lo studente ad approfondire gli argomenti esposti nel testo, alla fine di ogni capitolo è aggiunta una nota bibliografica che da una parte rimanda ai testi qui sopra elencati, da un'altra consiglia altri titoli, non di rado articoli originali. Quando il rinvio a un testo particolare è molto specifico e non facilmente ritrovabile sulla base degli indici del testo medesimo, è data anche un'indicazione del capitolo e del paragrafo.

La scelta degli argomenti di cui è suggerito l'approfondimento deriva quasi esclusivamente dai miei gusti e dalle mie esperienze; in parte anche dalla reperibilità del materiale. In ogni caso tali suggerimenti non vogliono minimamente essere esclusivi e oltretutto costituiscono solo l'avvio a un'eventuale e più approfondita ricerca che lo studente è invitato a svolgere per proprio conto.

INDICE

Introduzione	i
---------------------------	---

Bibliografia	iii
---------------------------	-----

Capitolo I: LE RETI LINEARI

I.1	La legge di Ohm	1
I.2	Il generatore di forza elettromotrice	9
I.3	Collegamento dei resistori; circuiti equivalenti	13
I.4	Le leggi di Kirchhoff	18
I.5	Il Principio di Sovrapposizione	24
I.6	Altri teoremi delle reti lineari	27
I.7	Generatori di tensione e generatori di corrente. Teorema di Norton	33
I.8	Il teorema di Miller	36
I.9	Potenza nei circuiti elettrici	37
I.10	Un esempio di massimizzazione di trasferimento di potenza	40

Capitolo II: IL GALVANOMETRO DI DEPREZ - D'ARSONVAL

II.1	Interazione fra corrente elettrica e campo di induzione magnetica	44
II.2	Principio di funzionamento del galvanometro: Statica	45
II.3	Principio di funzionamento del galvanometro: Dinamica	49
II.4	Resistenza interna e costante reometrica Sensibilità amperometrica e voltmetrica.	53

Capitolo III: GLI STRUMENTI A BOBINA MOBILE

III.1	Strumenti ad ago	60
III.2	Classe di uno strumento ad ago	60
III.3	Amperometri. Shunt	62
III.4	Campo di correnti misurabili. Errori di misura	66
III.5	Voltmetri. Ohm per Volt	69
III.6	Campi di tensioni misurabili. Errori di misura	71
III.7	Ohmetri realizzati con strumenti a bobina mobile	71
III.8	Rivelatori di zero a bobina mobile	74
III.9	Strumenti universali a bobina mobile	76

Capitolo IV: I PONTI PER LA MISURA DI RESISTENZE

IV.1	Resistori e campioni di resistenza	79
IV.2	Principio di misura di resistenza col Ponte di Wheatstone	83
IV.3	Procedure di azzeramento del Ponte ed errori di misura dovuti alla precisione dei campioni	84

IV.4	Sensibilità del Ponte di Wheatstone: misura sperimentale.....	85
IV.5	Sensibilità del Ponte con un galvanometro come rivelatore di zero.Valutazione teorica.....	87
IV.6	Sensibilità del Ponte con un microvoltmetro come rivelatore di zero.....	91
IV.7	Misure della resistenza interna di un galvanometro	93
IV.8	Fem parassite e azzeramento del rivelatore di zero	95
IV.9	Misure di piccole resistenze. Doppio ponte di Thomson.....	96
IV.10	Misura di resistenze di isolamento.....	99

Capitolo V: IL METODO POTENZIOMETRICO

V.1	Principio di misura	101
V.2	Campioni di forza elettromotrice e taratura di un potenziometro	103
V.3	Linearità di un potenziometro.....	105
V.4	Un esempio di potenziometro	108
V.5	Il divisore di tensione di Kelvin-Varley	110
V.6	L'errore di sensibilità e il rivelatore di zero	114
V.7	Misure di fem e resistenze equivalenti di Thévenin fra due terminali.....	117
V.8	Taratura di voltmetri e amperometri	119
V.9	Misura di resistenze.....	120

Capitolo VI: MISURE COL GALVANOMETRO BALISTICO

VI.1	Concetto di capacità, condensatori	124
VI.2	Circuiti R-C serie	126
VI.3	Il galvanometro in regime balistico; il caso di smorzamento nullo.....	129
VI.4	Il galvanometro balistico nel caso di smorzamento finito.....	132
VI.5	Il decremento logaritmico	134
VI.6	Resistenza interna del generatore e risposta del galvanometro balistico	136
VI.7	L'approssimazione balistica e gli accorgimenti per rispettarla	140
VI.8	Taratura di un galvanometro balistico Misura di capacità	141
VI.9	Misura di resistenze di valore elevato Resistenza di fuga	145
VI.10	Misure di forza elettromotrice con grosse resistenze in serie	149
VI.11	Misura assoluta del campo di induzione magnetica.....	150
VI.12	Determinazione dei parametri di un galvanometro	151

Capitolo VII: I COEFFICIENTI DI AUTO E MUTUA INDUZIONE

VII.1	Definizioni	155
VII.2	Le induttanze e le induttanze mutue	156
VII.3	Il regime transitorio delle correnti e delle tensioni in presenza di coefficienti di auto e mutua induzione.....	160
VII.4	Misura di un coefficiente di mutua induzione mediante un galvanometro balistico	165
VII.5	Misura di un coefficiente di mutua induzione mediante un integratore di Miller...	167
VII.6	Altri metodi per la misura di coefficienti di mutua induzione.....	169

Capitolo VIII: L'OSCILLOGRAFO

VIII.1	Introduzione.....	170
VIII.2	Il tubo a raggi catodici.....	171
VIII.3	Gli stadi di ingresso e gli amplificatori delle placchette deflettrici.....	187
VIII.4	La base dei tempi e il circuito di trigger.....	189
VIII.5	I comandi dell'oscillografo.....	191
VIII.6	L'oscillografo digitalizzatore.....	192

Capitolo IX: LE CORRENTI ALTERNATE

IX.1	Definizioni.....	194
IX.2	Le leggi di Kirchhoff e le correnti alternate.....	195
IX.3	Rappresentazione delle grandezze alternate tramite vettori rotanti e numeri complessi.....	197
IX.4	Le impedenze complesse.....	200
IX.5	I componenti fisici reali: resistori, induttori, condensatori.....	207
IX.6	Il trasformatore.....	211

Capitolo X: I PONTI IN ALTERNATA

X.1	Campioni di impedenza.....	216
X.2	Campioni di resistenze.....	218
X.3	Campioni di capacità.....	219
X.4	Campioni di induttanza.....	221
X.5	Ponti in alternata.....	222
X.6	Sensibilità nei ponti in alternata.....	230
X.7	Il rivelatore di zero.....	233
X.8	Accorgimenti per migliorare la qualità delle misure.....	235

Capitolo XI: MISURE DI POTENZA IN ALTERNATA E MISURA DI VALORI EFFICACI

XI.1	Definizioni.....	241
XI.2	Misure di potenza in alternata con strumenti elettrodinamici.....	245
XI.3	Strumenti di misura in alternata.....	252

Capitolo XII: MISURE DI BANDA PASSANTE

XII.1	Il decibel.....	256
XII.2	Filtri passa alto, passa basso, passa banda.....	257
XII.3	Misure del diagramma di ampiezza e fase.....	264
XII.4	Accorgimenti nell'utilizzo dell'oscillografo. Sonde e partitori compensati.....	267

Capitolo XIII: I CIRCUITI RISONANTI

XIII.1	Il circuito risonante serie.....	271
--------	----------------------------------	-----

XIII.2	Il circuito risonante parallelo	276
XIII.3	Rivelazione della frequenza di risonanza mediante un oscillografo	280
XIII.4	Misure con un circuito risonante serie	282
XIII.5	Misure con un circuito risonante parallelo	283
XIII.6	Errori nella misura di L e C con un circuito risonante	284
XIII.7	Un circuito oscillante eccitato con un gradino di tensione	287
XIII.8	Misuratore vettoriale di impedenza	289
XIII.9	Misure di coefficienti di mutua induzione in alternata	291

Capitolo XIV: I MULTIMETRI ELETTRONICI

XIV.1	Strumenti elettronici e presentazione digitale	294
XIV.2	Schema a blocchi di un multimetro digitale	295
XIV.3	Il condizionatore di segnale	296
XIV.4	Precisione delle misure	300
XIV.5	Misure con multimetri digitali	303

Capitolo XV: L'AMPLIFICATORE OPERAZIONALE

XV.1	Amplificatore ideale e amplificatore reale di tensione	307
XV.2	Circuiti amplificatori integrati	311
XV.3	Un esempio di reazione negativa: l'amplificatore operazionale	312
XV.4	Alcune configurazioni dell'amplificatore operazionale	318
XV.5	Le applicazioni nel campo della strumentazione	322
XV.6	Tensione di offset e corrente di bias	326
XV.7	Il ripetitore di tensione come un potenziometro ad azzeramento automatico	340

Capitolo XVI: IL CONVERTITORE ANALOGICO-DIGITALE

XVI.1	Introduzione	342
XVI.2	Il Convertitore analogico-digitale basato sulla conversione tensione-frequenza	346
XVI.3	Il Convertitore a pendenza duale o a doppia rampa	347
XVI.4	Il Convertitore ad approssimazioni successive	350

Capitolo XVII: IL DIODO A GIUNZIONE P-N

XVII.1	Semiconduttori	353
XVII.2	Giunzione p-n non polarizzata	359
XVII.3	Il Diodo a giunzione	362
XVII.4	Larghezza della zona di svuotamento e capacità di transizione	365
XVII.5	Il Diodo Zener	369
XVII.6	Il diodo come elemento circuitale La retta di carico	370
XVII.7	Il "piecewise model" Un esempio di applicazione	373
XVII.8	Il diodo come raddrizzatore Un esempio di generatore elettronico di fem continua	376
XVII.9	Un regolatore di tensione a diodo Zener	382
XVII.10	Cenni al transistor bipolare	386
XVII.11	Determinazione della caratteristica statica di un diodo a semiconduttore	388

XVII.12	Un diodo di precisione	389
---------	------------------------------	-----

Capitolo XVIII: IL TRANSISTORE A EFFETTO DI CAMPO

XVIII.1	Introduzione.....	393
XVIII.2	Comportamento di un Fet per piccoli valori della tensione Source-Drain.....	394
XVIII.3	La caratteristica statica di un Fet	397
XVIII.4	Il Fet come interruttore	404
XVIII.5	Il Fet come amplificatore Metodo di risoluzione.....	407
XVIII.6	Il Fet come amplificatore: dipendenza dei parametri dal punto di lavoro e dalla temperatura	414
XVIII.7	Un altro esempio di applicazione del Fet: il "Source follower"	416
XVIII.8	Il Fet in alta frequenza: un esame più accurato dell'amplificatore	418
XVIII.9	Un'altra applicazione del Fet: un generatore di corrente	423
XVIII.10	Altri tipi di transistori a effetto di campo	425
XVIII.11	Misura delle caratteristiche a Source comune	426

Capitolo XIX: MISURA DI CAMPI MAGNETICI TRAMITE UNA SONDA A EFFETTO HALL

XIX.1	La sonda a effetto Hall.....	428
XIX.2	Taratura di una sonda di Hall La tensione di offset	433
XIX.3	Circuito per l'utilizzo della sonda di Hall nella misura di campi di induzione magnetica.....	437
XIX.4	Misura della curva di magnetizzazione di un elettromagnete.....	438
XIX.5	Schermo magnetico	445
XIX.6	Un'altra applicazione della sonda di Hall: un wattmetro a stato solido	447

Capitolo XX: LA CONVERSIONE DI ENERGIA ELETTROMAGNETICA E MECCANICA

XX.1	Introduzione.....	450
XX.2	Energia accumulata in un condensatore	450
XX.3	Energia di un sistema di correnti	457
XX.4	Un esempio di conversione di energia elettromagnetica - meccanica.....	467
XX.5	Un generatore di tensione alternata	471
XX.6	Galvanometro e bilancio energetico.....	474
XX.7	Un motore in continua	478
XX.8	Un esempio di motore a induzione	485

APPENDICE A

L'approssimazione balistica	499
-----------------------------------	-----

APPENDICE B

Il regime transitorio in due circuiti accoppiati induttivamente	507
---	-----

APPENDICE C

L'equazione di moto di uno strumento elettrodinamico, nel caso di eccitazione periodica.	516
--	-----

APPENDICE D

Calcolo dell'efficacia di uno schermo magnetico	519
---	-----

Indice analitico	527
-------------------------------	------------

LE RETI LINEARI

1.— *La legge di Ohm*

Ammettiamo che siano noti allo studente i concetti e le definizioni di carica elettrica, campo e potenziale elettrico, vettore densità di corrente e intensità di corrente, nonché le relative unità di misura, e richiamiamo brevemente alcuni fatti fondamentali dell'elettrostatica necessari per raccordarsi con l'argomento specifico di questo paragrafo, ovvero la legge di Ohm.

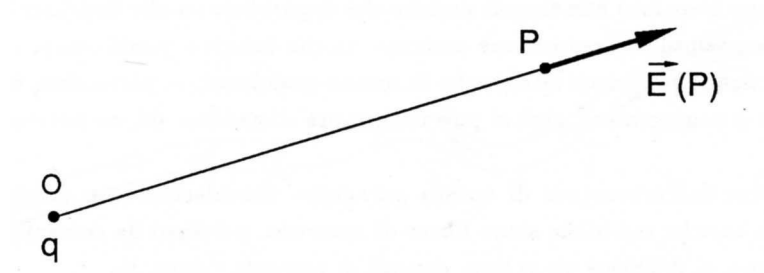


Fig.I.1

Una carica puntiforme q posta (Fig.1) in un punto O produce nel generico punto P un *campo elettrico*:

$$\vec{E}(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\text{vers } \vec{r}}{r^2} \quad (\text{I.1})$$

dove \vec{r} è il vettore diretto dalla carica q sorgente del campo (punto O) al punto P ; la costante che compare a denominatore: $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \frac{\text{Coulomb}^2}{\text{Joule} \times \text{metro}}$ è detta *permettività del vuoto*. Supponiamo ora che la carica unitaria che esplora il campo si sposti dal punto P al punto P' infinitesimamente vicino (Fig.2);

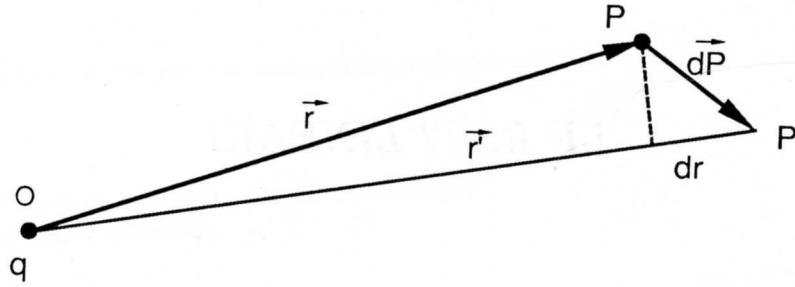


Fig.I.2

il lavoro fatto su questa carica unitaria vale:

$$d\mathcal{L} = \vec{E} \cdot d\vec{P} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\text{vers } \vec{r} \cdot d\vec{P}}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} \quad (\text{I.2})$$

dove dr rappresenta la variazione del modulo di r : $dr = r' - r$. La (2) ci dice che il lavoro è un differenziale esatto e quindi il campo è conservativo. Dato quindi un generico spostamento finito fra un punto A e un punto B si ha

$$\mathcal{L}(A \rightarrow B) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{AB} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) = \varphi_A - \varphi_B \quad (\text{I.3})$$

con

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (\text{I.4})$$

detto *potenziale* e tale che $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi = -\text{grad } \varphi$. L'unità di misura del potenziale è il *Volt* (simbolo V).

Generalmente, nella realtà, si ha a che fare con distribuzioni di carica e in questo caso, essendo la (1) e la (3) lineari nelle cariche, i campi elettrici e i potenziali saranno dati dalla somma dei vari contributi, ognuno associato alle singole cariche che appartengono alla distribuzione in oggetto. Non è quindi in genere semplice l'espressione matematica che descrive questi campi e potenziali, ma continuano a valere alcune proprietà intrinseche di queste grandezze; in particolare resta vero che il campo elettrostatico è conservativo, cioè si può far sempre discendere da un potenziale φ tale che $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$.

Entrando nel vivo dell'argomento di questo paragrafo, consideriamo un conduttore, cioè un corpo esteso in cui le cariche elettriche siano libere di muoversi, percorso da corrente; in ogni punto P di questo conduttore, si definisce un *vettore densità di corrente* \vec{j} dato da:

$$\vec{j} = \rho_p \vec{v} \quad (\text{I.5})$$

dove ρ_p rappresenta la densità numerica dei portatori di carica moltiplicata per la carica (col suo segno) del portatore singolo e \vec{v} è il vettore velocità dei portatori, supposta la stessa per tutti; in genere \vec{j} è un vettore funzione del punto (oltre che del tempo), così come possono esserlo separatamente sia ρ_p che \vec{v} . Se è presente più di un tipo di portatori, il vettore densità di corrente è dato dalla somma di tanti termini come la (5), quanti sono i tipi di portatori presenti.

L'*intensità di corrente* i attraverso una certa superficie S del conduttore è data dal flusso attraverso questa superficie del vettore \vec{j} :

$$i = \int_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS = \left(\frac{dq}{dt} \right)_S \quad (\text{I.6})$$

e rappresenta appunto la carica che nell'unità di tempo attraversa la superficie S . L'unità di misura è l'*Ampère* (simbolo A).

Il principio di conservazione della carica elettrica impone che una carica non si possa né creare né distruggere e ciò comporta che, scelto un volume dV , fisso nello spazio, la carica che ne esce durante un tempo dt deve uguagliare la diminuzione di carica contenuta in questo volume. In formule:

$$\operatorname{div} \vec{j} = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = -\frac{\partial \rho_e}{\partial t} \quad (\text{I.7})$$

dove ρ_e è la densità di carica elettrica di volume che, in generale, non coincide con ρ_p , la densità dei portatori di carica.

Nel seguito noi studieremo sempre i casi detti *stazionari* (o comunque *quasi-stazionari*) in cui la densità di volume di carica non varia in funzione del tempo cioè $\frac{\partial \rho_e}{\partial t} = 0$ e pertanto

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0 \quad (\text{I.8})$$

Se vale la (8) il vettore \vec{j} è detto essere *solenoidale*. In questi casi è sempre possibile individuare dei tubi di flusso in cui tutte le linee di \vec{j} si chiudono su se stesse, ovvero tali che in essi il flusso di \vec{j} —cioè i — è costante.

Nella pratica, avendo a che fare quasi sempre con conduttori filiformi, (non necessariamente a sezione costante), ciò significa che potremo identificare questi tubi di flusso proprio con i nostri conduttori e pertanto potremo parlare per ognuno di essi di una unica intensità di corrente i (o sinteticamente "*corrente*").

Usando un paragone, per la verità un po' banale, potremmo dire che il regime stazionario delle correnti corrisponde al defluire dell'acqua in un corso fluviale in cui gli eventuali bacini sono tutti a regime: in qualunque sezione del corso, supposto senza affluenti, la portata d'acqua è allora sempre la stessa.

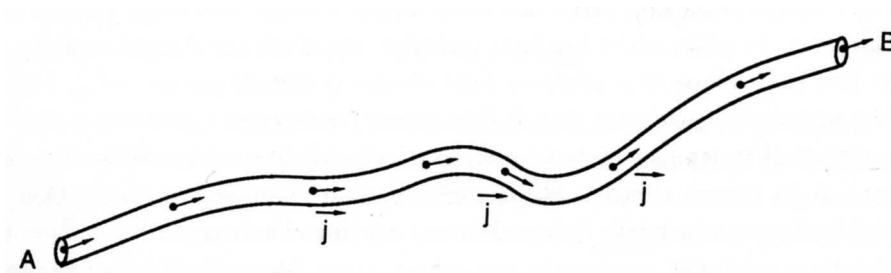


Fig.I.3

Sia quello in Fig.3 un conduttore filiforme esteso e supponiamo che la differenza del potenziale fra le sezioni A e B sia costante in funzione del tempo cioè $\varphi_A - \varphi_B = V_{AB} = \text{cost.}$ Trattandosi di un conduttore, ovvero di un corpo nel quale le cariche sono libere di muoversi, questa condizione non si può mantenere con la sola presenza di campi elettrostatici: infatti se supponiamo che in un certo istante t la distribuzione delle cariche sul conduttore sia tale da dar luogo alla differenza di potenziale (ddp) V_{AB} , negli istanti successivi la ddp tende a decrescere, fino ad annullarsi, poiché le cariche migrano entro il conduttore medesimo, sotto l'azione del campo elettrico, per riportare il sistema nella condizione in cui il potenziale in ogni punto è il medesimo. E' evidente allora la

necessità di un agente esterno che mantenga la ddp costante, fra l'altro rifornendo carica a una delle due superfici (A) e rimuovendola dall'altra (B). Vedremo fra poco che una macchina del genere esiste ed è detta “*generatore di forza elettromotrice*” o semplicemente “*forza elettromotrice*” (abbreviato *f.e.m.* o *fem*). Supponiamo quindi di poter soddisfare la condizione sopra detta: avremo quindi un moto stazionario di cariche fra le due superfici equipotenziali A e B. Al moto di queste cariche è associata quindi una corrente i che potremo valutare in una sezione qualsiasi del conduttore in quanto, ricordiamolo ancora, $\frac{\partial \rho_e}{\partial t} = 0$, ovvero non c'è accumulo di carica nel volume del conduttore e \vec{j} è solenoidale.

Poiché in un conduttore una carica è libera di muoversi al suo interno, ma non di abbandonarlo allontanandosi dalla superficie, stazionariamente il campo elettrico del nostro conduttore filiforme è diretto sempre lungo il filo e non può possedere una componente diretta verso la superficie esterna; che questa sia la condizione stazionaria lo si capisce supponendo che per un istante, in una certa regione del conduttore, essa non si verifichi, che cioè esista una componente del campo che muova le cariche verso la superficie esterna; se così fosse il processo si esaurirebbe non appena che le cariche migrate verso la superficie avessero creato il campo elettrico necessario a opporsi a una ulteriore migrazione. Si può vedere (vedi bibliografia del capitolo) che l'entità di questa densità superficiale di carica è estremamente piccola, tanto che in quasi ogni applicazione può essere trascurata; ciò tuttavia non toglie importanza al fatto fisicamente rilevante, ovvero che la distribuzione superficiale di carica del conduttore, stabilitasi all'atto dell'istaurarsi della ddp $\varphi_A - \varphi_B$ a opera di un generatore di fem, garantisce il campo elettrico caratteristico della situazione di regime.

L'intensità di questo campo “tangente” al conduttore e il legame fra la differenza di potenziale, la geometria del conduttore e la corrente che vi scorre, dipenderanno dalle proprietà elettrodinamiche dei portatori di carica sottoposti all'azione del campo elettrico: a questo proposito si trova che una carica in un conduttore (gli elettroni nei metalli per esempio, trascurando il fatto per altro fondamentale dell'agitazione casuale che essi possiedono a causa della temperatura finita) è sì libera di muoversi, cioè acquista una componente di velocità sotto l'azione di un campo elettrico comunque piccolo, però se il campo cessa essa perde tale componente in tempi brevissimi (ordine di grandezza $10^{-18}s$). Ciò significa che esiste anche una forza resistente che si oppone al moto medesimo; tale forza resistente, per una larga classe di conduttori detti *ohmici* (i metalli per esempio), è proporzionale alla velocità dei portatori medesimi, è cioè di tipo viscoso; inoltre, per questo tipo di conduttori, la densità dei portatori di carica ρ_p è costante e dipende solo dal mezzo interessato alla conduzione.

In presenza di un campo elettrico \vec{E}_e , la carica possiede pertanto una velocità di regime \vec{v}_d , in genere variabile da punto a punto del conduttore, ma tale che ovunque $\vec{E}_e + \vec{E}_d = 0$, dove con \vec{E}_d si indica il campo resistente, certamente non conservativo. L'annullarsi della forza totale agente sui portatori dipende dal fatto che, essendo la situazione stazionaria, le cariche di fatto non hanno accelerazione sensibilmente diversa da zero in nessun punto del conduttore (preciseremo meglio questa affermazione nel seguito). Nei conduttori ohmici, essendo $\vec{E}_d = -\frac{\vec{v}_d}{\mu}$ con μ costante (a temperatura costante), abbiamo:

$$\vec{v}_d = \mu \vec{E}_e \quad (\text{I.9})$$

La costante μ è detta mobilità dei portatori ed è una caratteristica del materiale conduttore; essendo $\vec{j} = \rho_p \vec{v}_d$, avremo

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}_e \quad (\text{I.10})$$

con $\sigma = \mu \rho_p$ detta *conducibilità*, caratteristica di quel certo conduttore (a quella certa temperatura). La relazione (10) è detta Legge di Ohm.

In questa forma la legge di Ohm è poco utile per le applicazioni circuitali; vediamo allora qual è la sua formulazione equivalente nel caso di un conduttore –magari filiforme– esteso.

Consideriamo il conduttore della Fig.3 assimilandolo a un tubo di flusso di \vec{j} : in ogni punto di esso vale la (10) e pertanto moltiplicando entrambi i membri della (10) scalarmente per il vettore infinitesimo $d\vec{P}$ diretto come la tangente nel punto al conduttore, avremo:

$$\frac{\vec{j} \cdot d\vec{P}}{\sigma} = \vec{E}_e \cdot d\vec{P} \quad (\text{I.11})$$

Integrando fra le due superfici equipotenziali A e B e ammettendo che \vec{j} sia costante su ogni sezione normale al conduttore, avremo:

$$\int_A^B \frac{\vec{j} \cdot d\vec{P}}{\sigma} = \int_A^B \vec{E}_e \cdot d\vec{P} = \varphi_A - \varphi_B \quad (\text{I.12})$$

Lungo il tubo di flusso \vec{j} e $d\vec{P}$ sono paralleli e il flusso di \vec{j} attraverso qualunque sezione S resta costante e uguale alla intensità di corrente i ; pertanto la relazione (12) può scriversi (dl è la lunghezza infinitesima lungo il filo):

$$i \int_A^B \frac{dl}{\sigma S} = \varphi_A - \varphi_B \quad (\text{I.13})$$

L'integrale a primo membro dipende solo dalla geometria e dal tipo di conduttore; a una certa temperatura, se il campione è omogeneo (per esempio è composto da un solo metallo), allora σ è costante e si può estrarre anche il fattore $\frac{1}{\sigma}$ dall'integrale. In generale, ponendo

$$R = \int_A^B \frac{dl}{\sigma S} \quad (\text{I.14})$$

possiamo esprimere la legge di Ohm nella forma cosiddetta *integrale* :

$$iR = \varphi_A - \varphi_B = V_{AB} \quad (\text{I.15})$$

cioè la corrente nel nostro conduttore è proporzionale alla differenza di potenziale applicata ai suoi estremi; quanto al segno, la corrente positiva attraversa il conduttore partendo dall'estremo a potenziale maggiore. La costante R è detta resistenza del conduttore (fra le due sezioni A e B). La sua unità di misura è l'*Ohm* (simbolo Ω) pari ovviamente a $\frac{\text{Volt}}{\text{Ampère}}$. Se il filo è a sezione costante S , dalla (13) si ha $R = \frac{l}{\sigma S}$ con l lunghezza totale fra A e B. Spesso invece della conducibilità σ si usa il suo inverso ρ , detto *resistività*, generalmente misurata nella unità mista $\Omega \cdot \text{cm}$.

Riportiamo qui sotto una tabella con i valori della resistività e del suo coefficiente di temperatura α , per alcuni metalli puri e leghe.

	ρ [$\Omega \cdot \text{cm}$]	α [$^{\circ}\text{C}^{-1}$]
Argento	$1.60 \cdot 10^{-6}$	$3.8 \cdot 10^{-3}$
Rame	$1.70 \cdot 10^{-6}$	$4.0 \cdot 10^{-3}$
Alluminio	$2.82 \cdot 10^{-6}$	$3.9 \cdot 10^{-3}$
Ferro	$9.60 \cdot 10^{-6}$	$6.0 \cdot 10^{-3}$
Manganina (Cu 85%, Mn 11%, Ni 4%)	$45.0 \cdot 10^{-6}$	$0.1 \cdot 10^{-4}$
Costantina (Cu 60%, Ni 40%)	$50.0 \cdot 10^{-6}$	$0.1 \cdot 10^{-3}$

Il coefficiente di temperatura determina il valore della resistività alla temperatura T , una volta che sia nota la resistività a una certa temperatura T_0 : $\rho = \rho_0 [1 + \alpha(T - T_0)]$. Il coefficiente α per gli elementi puri è pressoché indipendente da T e la resistenza cresce linearmente con la temperatura. In altri casi - come per molte leghe - α dipende dalla temperatura e la relazione lineare vale solo in un determinato intorno di T_0 dove α si può trattare come costante. E' questo il caso della Manganina e della Costantana; il valore di α riportato in tabella è quello intorno a $20^\circ C$; la piccolezza di questo valore è associata al fatto che α cambia di segno proprio nell'intorno di questa temperatura e ciò consente di adoperare tali leghe come campioni di resistenza (vedi Cap.IV,§1).

Quanto agli aspetti microscopici della conduzione nei conduttori di tipo ohmico (quali i metalli) possiamo, molto sommariamente, così descriverli: in un campione macroscopico di un metallo gli atomi sono aggregati in una struttura formante un reticolo cristallino; ogni singolo atomo è circondato da un numero di elettroni fissi pari a quello che compete a esso per essere neutro, meno 1 o 2 unità a seconda dell'elemento (1 nel caso del Rame); questi elettroni non sono legati a un singolo atomo, ma appartengono al cristallo nel suo insieme e possono muoversi liberamente all'interno di esso (*elettroni di conduzione*). Il metallo pertanto può essere visto come un aggregato ordinato di cariche fisse positive circondato da un gas di elettroni (qui come nel seguito, a meno che non sia esplicitamente detto il contrario, quando si parla di elettroni si intendono quelli liberi, di conduzione, in compartecipazione con tutti gli atomi); la neutralità del complesso è assicurata dal fatto che la carica degli elettroni di conduzione uguaglia quella degli ioni fissi. Pertanto in un conduttore ohmico la densità di carica di volume ρ_e è nulla e tale si mantiene in ogni punto anche durante il passaggio di corrente, almeno nel regime stazionario che prescrive $\frac{\partial \rho_e}{\partial t} = 0$.

A temperatura diversa dallo zero assoluto gli atomi oscillano (con ampiezza crescente con la temperatura) attorno alla loro posizione di equilibrio e gli elettroni si muovono a caso nel cristallo urtando contro gli atomi del reticolo. La distribuzione della velocità termica degli elettroni, per una temperatura T , si estende indefinitamente; tuttavia il valor quadratico medio è finito e il suo ordine di grandezza si può stimare, secondo la teoria classica dell'elettrone, in base alla relazione:

$$\frac{1}{2} m_e \bar{v}^2 = \frac{3}{2} kT \quad (\text{I.16})$$

con $k = 1.38 \cdot 10^{-23} J/K$ costante di Boltzman, $m_e = 9.109 \cdot 10^{-31} Kg$ massa dell'elettrone e T temperatura assoluta. A temperatura ambiente si trova $(\bar{v}^2)^{\frac{1}{2}} (300 K) \simeq 1.2 \times 10^5 m/s$. In realtà questo valore è di un ordine di grandezza inferiore rispetto a quello che si ottiene con una teoria corretta degli elettroni nei metalli.

Tutto questo in assenza di campo elettrico; quando si applica un campo elettrico, gli elettroni di conduzione cominciano a muoversi e in tempi brevissimi si stabilisce, in ogni punto del conduttore, una velocità media di deriva data dalla legge di Ohm: $\vec{v}_d = \mu \vec{E}_e$. Questa velocità non può essere pensata come quella di un singolo elettrone, ma va vista piuttosto come una piccola (vedremo tra poco quanto piccola) componente che si sovrappone alla velocità termica del gas degli elettroni (che è un vettore a media nulla). Gli elettroni cioè continuano nel loro moto stocastico urtando contro gli atomi del reticolo e anzi sono proprio questi urti che - in media - danno una resistenza di tipo viscoso. In base a questo meccanismo è facile comprendere il motivo per cui la resistività nei metalli cresce con la temperatura: infatti la probabilità degli urti con gli atomi del reticolo aumenta all'aumentare dell'ampiezza delle oscillazioni degli atomi intorno alla loro posizione di equilibrio.

Verifichiamo ora che la velocità di deriva responsabile della corrente è - almeno a temperatura ambiente - molto piccola rispetto alla velocità media dovuta all'agitazione termica. Consideriamo quindi un filo di Rame percorso da una corrente di $0.1 A$ (per esempio un filo lungo $1m$ e di

diametro di 10^{-2} cm ai capi del quale si applica la differenza di potenziale di 0.216 V); per calcolare v_d sfruttiamo le relazioni (5) e (6):

$$v_d = \frac{i}{\rho_p S} \quad (1.17)$$

i ed S sono note e resta da calcolare ρ_p la densità dei portatori di carica per unità di volume. Per far questo basta sapere il numero N di atomi per unità di volume e poi moltiplicarlo per il numero di elettroni di conduzione messi a disposizione del reticolo dal singolo atomo (1 nel caso del Rame). Per il Rame N si ricava, in base alla sua densità $\delta \simeq 8.9 \text{ g/cm}^3$, al peso atomico A (63.6) e al numero di Avogadro N_A :

$$N = N_A \frac{\delta}{A} = 6.02 \cdot 10^{23} \frac{8.9}{63.6} = 8.42 \cdot 10^{22} \frac{\text{atomi}}{\text{cm}^3}$$

Conseguentemente otteniamo per v_d :

$$v_d = \frac{0.1}{eN \cdot 10^{-4}} = 7.4 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

vale a dire circa 8 ordini di grandezza più piccola della velocità media termica calcolata precedentemente. Questo risultato giustifica *a posteriori* l'ipotesi di accelerazione –di regime– nulla dei portatori: infatti, data la piccolezza delle velocità di regime, anche le corrispondenti accelerazioni saranno estremamente piccole; non si dimentichi che stiamo parlando delle grandezze *medie a regime* e non del moto caotico dei portatori, per cui le accelerazioni sono esclusivamente quelle dovute alla dipendenza macroscopica delle velocità dalla posizione. Un esempio può servire a chiarire, anche quantitativamente, questo punto: supponiamo che il filo dell'esempio precedente sia avvolto in forma di elica con raggio di curvatura $R = 1 \text{ cm}$. La velocità di deriva lungo il filo è quella calcolata precedentemente; dovendo le cariche muoversi lungo la spirale, esse possederanno una accelerazione diversa da zero e pari all'accelerazione centripeta $v_d^2/R = 5.48 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2$. Pertanto la somma del campo elettrico applicato \vec{E}_e e del campo resistente \vec{E}_d non è esattamente zero, ma dà luogo a un campo residuo \vec{E}_r in grado di imprimere alle cariche l'accelerazione ora calcolata; si trova allora $E_r = m_e \cdot v_d^2 / (e \cdot R) = 7.8 \cdot 10^{-17} \text{ V/m}$ ($e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, carica dell'elettrone), da confrontarsi con il valore di $E_e = 2.16 \cdot 10^{-1} \text{ V/m}$ che si ottiene dividendo la differenza di potenziale agli estremi del filo per la sua lunghezza; il divario fra i moduli di questi campi è tale da giustificare ampiamente l'assunzione fatta di *esatto* bilancio fra campo elettrico applicato e campo resistente.

Tornando ora ai conduttori estesi e considerando due superfici equipotenziali A e B, si può far vedere che sussiste ancora la relazione (15) anche se in genere il calcolo della resistenza tra due superfici equipotenziali qualunque non è banale, principalmente a causa del fatto che per calcolarla occorre determinare preventivamente i tubi di flusso del vettore \vec{j} (talvolta aiutano per questo considerazioni di simmetria). Tuttavia nel caso di conduttori filiformi, variamente interconnessi, vedremo che esistono regole semplici che permettono di introdurre una resistenza complessiva fra due superfici equipotenziali qualunque appartenenti a questi conduttori.

La legge di Ohm nella sua formulazione integrale stabilisce una relazione univoca fra la corrente che attraversa un conduttore e la differenza di potenziale fra due superfici equipotenziali del conduttore attraverso le quali si considera il flusso di corrente; si dice spesso che attraverso il conduttore si ha una “caduta di potenziale” o “caduta ohmica” $\Delta V = iR$ dovuta alla corrente i che attraversa il conduttore di resistenza R . Sulla correttezza della espressione “caduta di potenziale dovuta alla corrente” si potrebbe anche obiettare, nel senso che si potrebbe altrettanto ragionevolmente sostenere che è la presenza della ddp ΔV a provocare la corrente e non il contrario.

Un conduttore che presenti fra due suoi estremi (ai quali sia possibile applicare una certa differenza di potenziale) una data resistenza R , si rappresenta graficamente come in Fig.4:



Fig.I.4

dove il tratto a zig-zag rappresenta la porzione del conduttore avente resistenza finita mentre i tratti rettilinei indicano conduttori di resistenza zero. Come esempio pratico si pensi di avere un filo calibro di Manganina lungo 1 m e avente sezione di 10^{-4} cm^2 : in base alla tabella precedente la sua resistenza vale $45\ \Omega$ e per collegarlo comodamente ad altri conduttori –quali ad esempio i morsetti di un generatore di forza elettromotrice – esso porterà saldati ai suoi estremi due *reofori* (portatori di corrente) di rame assai più corti di 1 m e aventi sezione molto maggiore di 10^{-4} cm^2 ; la loro resistenza sarà di molti ordini di grandezza inferiore rispetto a quella del filo di Manganina e potranno in molte situazioni (non necessariamente in tutte) essere considerati di resistenza zero e quindi disegnati come tratti rettilinei.

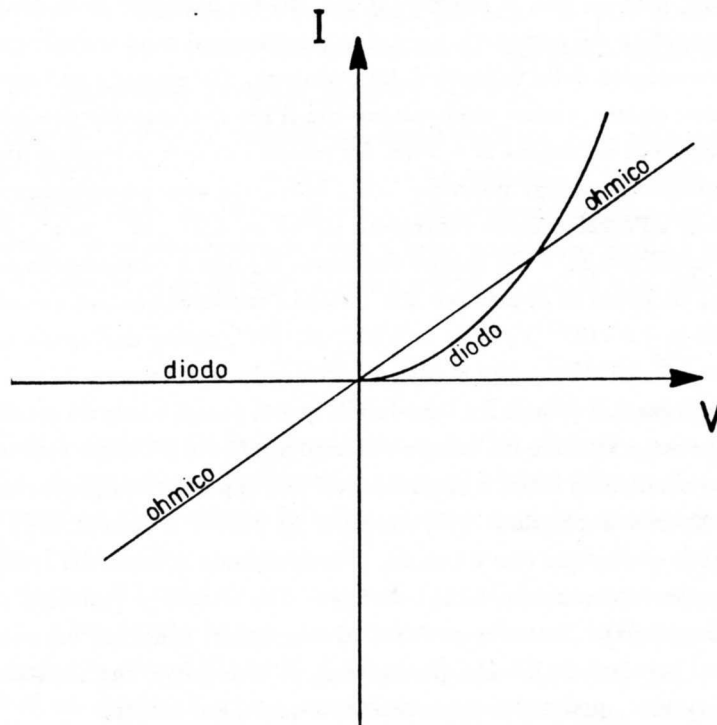


Fig.I.5

Abbiamo visto che i reofori servono per collegare un conduttore a un altro, dove “collegare” significa stabilire una continuità elettrica a resistenza trascurabile; il collegamento si può ottenere in vari modi e fra questi i più diffusi sono la pressione di due superfici l’una contro l’altra e la saldatura.

Se riportiamo in grafico la corrente che attraversa un conduttore ohmico in funzione della dif-

ferenza di potenziale ai suoi estremi (cioè fra le due superfici equipotenziali fra le quali è presente la resistenza R), otteniamo una retta che attraversa l'origine (curva "ohmico" della Fig.5); la pendenza della retta rappresenta l'inverso della resistenza R - detta "conduttanza" - del conduttore. Un conduttore del genere si dice essere *lineare* ($I \propto V$) e *bilaterale* nel senso che il suo comportamento non dipende dal verso della corrente. La curva $I = f(V)$ è detta "curva caratteristica" del conduttore; a titolo di esempio e per sgombrare subito il possibile equivoco che tutti i conduttori siano ohmici, nella Fig.5 è riportata anche la curva caratteristica di un diodo che, palesemente, è lungi da essere sia lineare che bilaterale (cosa sia un diodo lo vedremo più avanti, per ora ci basti sapere che è un particolare tipo di conduttore).

2.- Il generatore di forza elettromotrice

Come abbiamo accennato nel paragrafo precedente il generatore di forza elettromotrice è un dispositivo che ha la caratteristica di mantenere una differenza di potenziale costante fra due conduttori a esso appartenenti detti *terminali* (o *poli*). Uno di questi è detto polo positivo, l'altro negativo, con riferimento al segno della differenza di potenziale. Il simbolo che generalmente si adotta è quello di Fig.6:

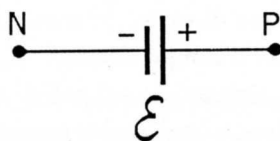


Fig.I.6

\mathcal{E} rappresenta la ddp presente fra i due terminali ($\mathcal{E} = \varphi_P - \varphi_N$) e nel caso che stiamo considerando di generatore ideale, essa è costante, indipendente dalla presenza o meno di un collegamento esterno fra i due poli tramite un ulteriore, generico conduttore. Nel caso che un conduttore ohmico sia applicato fra i due poli avremo la configurazione di Fig.7 (si tratta del più semplice fra i circuiti elettrici e il primo che incontriamo).

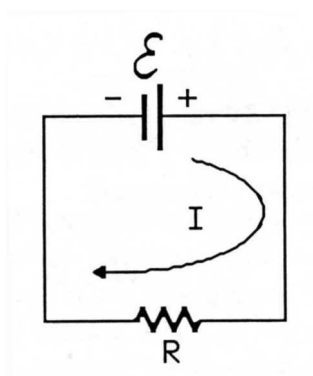


Fig.I.7

La corrente che circola nella resistenza R sarà data da $I = \frac{\mathcal{E}}{R}$ e si noti che tale corrente attraversa anche il generatore di fem \mathcal{E} il quale, nonostante l'apparente interruzione del circuito suggerita dal simbolo grafico, è pur sempre un conduttore; inoltre se siamo in condizioni stazionarie, non ci deve essere accumulo di cariche in nessuna regione del circuito. Si noti che la corrente positiva attraversa il generatore dal polo negativo al polo positivo, cioè le cariche all'interno del generatore compiono un cammino non "naturale", il che ovviamente significa che su di esse agisce un'altra forza oltre al campo elettrico; è proprio quest'altra forza – rappresentabile mediante un campo \vec{E}_g – che, compiendo lavoro sulle cariche, rende possibile il mantenimento della ddp \mathcal{E} fra i morsetti del generatore. Infatti, consideriamo il generatore in condizioni statiche, cioè con i terminali aperti (Fig.8): all'esterno di esso avremo solo il campo elettrico

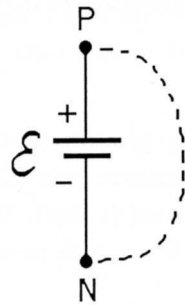


Fig.I.8

conservativo dovuto alla distribuzione di carica interna e superficiale dei vari conduttori e del generatore, mentre all'interno avremo sia il campo elettrico \vec{E}_e che il campo proprio del generatore \vec{E}_g ; quest'ultimo impedisce alle cariche accumulate sui poli di fluire da un polo all'altro per neutralizzarsi, sotto l'azione del campo \vec{E}_e . Se consideriamo il cammino tratteggiato nella figura, avremo per il lavoro fatto sulla carica unitaria (\vec{E} indica il campo totale agente sulla carica):

all'esterno

$$\int_{P_{esterno}}^N \vec{E} \cdot d\vec{P} = \int_{P_{esterno}}^N \vec{E}_e \cdot d\vec{P} = \varphi_P - \varphi_N = \mathcal{E} \quad (\text{I.18})$$

e all'interno

$$\begin{aligned} \int_{N_{interno}}^P \vec{E} \cdot d\vec{P} &= \int_{N_{interno}}^P (\vec{E}_e + \vec{E}_g) \cdot d\vec{P} = \int_{N_{interno}}^P \vec{E}_e \cdot d\vec{P} + \int_{N_{interno}}^P \vec{E}_g \cdot d\vec{P} = \\ &= \varphi_N - \varphi_P + \int_{N_{interno}}^P \vec{E}_g \cdot d\vec{P} = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.19})$$

Abbiamo uguagliato a zero il lavoro fatto dai campi all'interno del generatore, perché in un conduttore in condizioni statiche $\vec{E} = \vec{E}_e + \vec{E}_g = 0$.

Riprendendo l'ultima relazione scritta abbiamo così:

$$\int_{N_{interno}}^P \vec{E}_g \cdot d\vec{P} = \mathcal{E} \quad (\text{I.20})$$

che può anche porsi nella forma:

$$\oint \vec{E}_g \cdot d\vec{P} = \mathcal{E} \quad (\text{I.21})$$

poiché \vec{E}_g all'esterno del generatore è nullo; inoltre, essendo il campo elettrico conservativo, la relazione precedente può anche scriversi:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{P} = \mathcal{E} \quad (I.22)$$

Pertanto troviamo che la fem \mathcal{E} corrisponde al lavoro che il generatore compie per portare la carica positiva unitaria dal polo negativo al polo positivo e che tale lavoro coincide anche con la circolazione del campo del generatore su una linea chiusa che lo attraversi.

Si noti comunque che in condizioni statiche ($I = 0$) il generatore di fatto non compie lavoro poiché le cariche sono ferme.

Quando il generatore è chiuso su un conduttore esterno collegato fra i due poli, allora la corrente circola e non è più vero che all'esterno del generatore esiste solo un campo elettrico; questo è vero solo all'esterno del conduttore,

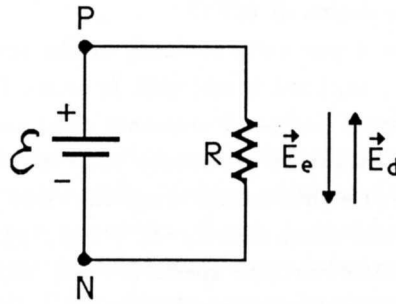


Fig.I.9

ma al suo interno sappiamo che esiste una forza resistente assimilabile a un campo dissipativo \vec{E}_d (vedi Fig.9); resta comunque vero che all'interno di tutti questi conduttori, anche in presenza di corrente, purché in condizione di regime, la somma di tutti i campi localmente presenti deve essere nulla; vale a dire entro il conduttore collegato ai capi di \mathcal{E} deve essere:

$$\vec{E}_e + \vec{E}_d = 0 \quad (I.23)$$

e pertanto

$$\int_{P_{est}}^N \vec{E}_e \cdot d\vec{P} + \int_{P_{est}}^N \vec{E}_d \cdot d\vec{P} = 0 \quad (I.24)$$

cioè

$$\varphi_P - \varphi_N = \mathcal{E} = - \int_{P_{est}}^N \vec{E}_d \cdot d\vec{P} \quad (I.25)$$

$\varphi_P - \varphi_N$ è stato posto uguale a \mathcal{E} poiché stiamo considerando il caso di un generatore di forza elettromotrice ideale, che cioè mantiene la sua ddp \mathcal{E} costante, indipendentemente dalla entità della corrente che lo attraversa.

La (25) dice che la ddp ($\varphi_P - \varphi_N$) uguaglia il lavoro resistente (positivo poiché \vec{E}_d è antiparallelo a $d\vec{P}$) che le forze di attrito, nel conduttore esterno, compiono sulla carica unitaria che lo attraversa; questo lavoro si ritroverà sotto forma di calore sviluppato nella resistenza R (in base alla legge di Ohm - vedi (15) - sappiamo già che il termine $-\int_{P_{est}}^N \vec{E}_d \cdot d\vec{P}$ uguaglia IR).

Consideriamo ora l'interno del generatore ideale: qui niente è variato, rispetto alle condizioni statiche, per quanto riguarda il valore dei campi \vec{E}_e e \vec{E}_g , poiché dovrà sempre essere $\vec{E}_e + \vec{E}_g = 0$

in ogni punto; la differenza sostanziale rispetto a prima è che ora le cariche si spostano e pertanto il campo \vec{E}_g , ovvero il generatore, compie effettivamente il lavoro \mathcal{E} sulla carica unitaria portandola dal polo negativo al polo positivo.

Il meccanismo del trasporto di carica nel circuito è pertanto il seguente: le cariche dal polo positivo fluiscono, sotto l'azione del campo elettrico, verso il polo negativo attraversando la resistenza R e la loro energia potenziale elettrostatica va perduta per vincere la forza di "attrito" all'interno della resistenza; giunte al polo negativo le cariche sono "trasportate" dal generatore verso il polo positivo e viene così rifornita a esse l'energia potenziale perduta nel tratto esterno.

Quale sia l'effettivo agente che, all'interno del generatore, trasporta le cariche positive dal polo negativo al polo positivo contro le forze elettrostatiche, questo dipende dai generatori impiegati. In molti casi (pile, accumulatori) l'azione è dovuta a effetti elettrochimici, in altri a effetti elettromeccanici (dinamo); fra quelli che si basano su effetti elettromeccanici è particolarmente istruttivo il generatore di Van de Graaff in cui le cariche vengono effettivamente *trasportate* su una cinghia isolante, mossa da un motore, dal polo negativo al polo positivo (tale generatore è impiegato per creare grosse ddp, fino a qualche decina di MV).

Da quanto detto finora non è per nulla evidente in che cosa differiscano dal punto di vista elettrico questi vari generatori, supposti avere tutti la stessa fem \mathcal{E} ; e di fatto se tutti fossero ideali, cioè presentassero la stessa \mathcal{E} indipendentemente dalla corrente erogata, sarebbero *identici* dal punto di vista elettrico; in pratica in un generatore reale la condizione sopradetta non si verifica, e viceversa "sotto carico", vale a dire quando esso eroga una certa corrente $I \neq 0$, la ddp ai terminali assume un valore $\mathcal{E}' < \mathcal{E}$. Possiamo allora scrivere: $\mathcal{E}' = \mathcal{E} - \Delta\varphi(I)$ con $\Delta\varphi(0) = 0$, intendendo che la differenza rispetto al caso limite di circuito aperto ($I \rightarrow 0$), dipende dalla corrente.

Non in tutti, ma in *molti* casi (per esempio nelle pile elettrochimiche) si trova che questa diminuzione può essere abbastanza correttamente descritta in base a un effetto di tipo ohmico presente all'interno del generatore; all'interno di esso cioè si avrà, in condizioni stazionarie (non statiche) un campo complessivo:

$$\vec{E}_e + \vec{E}_g + \vec{E}_d = 0 \quad (I.26)$$

dove \vec{E}_e sarà diverso dal valore in assenza di carico, mentre \vec{E}_g mantiene lo stesso valore, indipendentemente dal carico. Pertanto, facendo la circolazione lungo il circuito completo si trova:

$$\int_{N_{int}}^P \vec{E}_e \cdot d\vec{P} + \int_{N_{int}}^P \vec{E}_g \cdot d\vec{P} + \int_{N_{int}}^P \vec{E}_d \cdot d\vec{P} + \int_{P_{est}}^N \vec{E}_e \cdot d\vec{P} + \int_{P_{est}}^N \vec{E}_d \cdot d\vec{P} = 0 \quad (I.27)$$

Il primo e il quarto termine danno $\oint \vec{E}_e \cdot d\vec{P} = 0$ mentre il secondo è pari a \mathcal{E} . Abbiamo così:

$$\mathcal{E} = - \int_{N_{int}}^P \vec{E}_d \cdot d\vec{P} - \int_{P_{est}}^N \vec{E}_d \cdot d\vec{P} \quad (I.28)$$

Il secondo membro, ammettendo che anche all'interno del generatore \vec{E}_d risulti di tipo viscoso, ovvero proporzionale a \vec{j} , può essere scritto come una caduta ohmica. Avremo pertanto:

$$\mathcal{E} = I(\rho + R) \quad (I.29)$$

dove ρ rappresenta la cosiddetta "resistenza interna del generatore".

La ddp esistente ai capi del generatore sotto carico può allora scriversi

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E} - I\rho \quad (I.30)$$

come si può immediatamente verificare calcolando $\int_{N_{int}}^P \vec{E} \cdot d\vec{P}$ all'interno del generatore, tenendo presente che tale integrale vale 0, essendo nullo l'integrando. Pertanto in molti casi (nel seguito anzi supporremo *in tutti i casi* a meno che non sia esplicitamente detto il contrario) un generatore reale di fem \mathcal{E} si può rappresentare (Fig.10) come un generatore ideale della stessa fem \mathcal{E} con in serie una resistenza finita ρ :

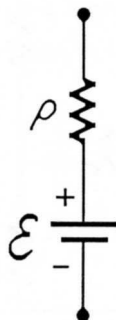


Fig.I.10

ovviamente la resistenza interna ρ non è in alcun modo separabile dal generatore per cui la fem sotto carico risentirà comunque della “caduta ohmica” della corrente su ρ e sarà quindi inferiore rispetto ad \mathcal{E} . Nella pratica generatori di fem di qualche *Volt* facilmente possono essere realizzati con resistenze interne assai piccole (decisamente inferiori a 1Ω). Resistenze più grandi si potranno incontrare in generatori di fem elevate oppure in presenza di piccole pile. Ma su questi punti torneremo nel seguito.

3.— *Collegamento dei resistori; circuiti equivalenti*

Un conduttore che presenti fra due estremi una certa resistenza R , fornito –in genere– di due reofori di resistenza trascurabile rispetto a R , è propriamente detto *Resistore*, anche se nell’uso comune lo si denota con il nome di *Resistenza*. Esso è il primo elemento circuitale passivo, lineare e bilaterale che incontriamo. Della bilateralità è già stato detto; quanto alla linearità (proporzionalità tra corrente e ddp applicata agli estremi della resistenza, cioè l’indipendenza di R da I) essa è vera in certe ipotesi una delle quali è che la temperatura della resistenza venga mantenuta costante (il che non è sempre facile); quanto al fatto che sia passivo, ciò significa che esso presenta una ddp ai suoi capi solo se una corrente lo attraversa; questo in contrasto con i generatori di fem che sono detti attivi in quanto capaci di presentare una ddp ai loro estremi anche in assenza di corrente e di fornire energia.

In base alle osservazioni fatte nel §1, sappiamo che collegando i reofori di vari resistori fra di loro, è possibile ottenere un conduttore composito che, fra due terminali in esso individuati, presenta una resistenza R_T la quale, indipendentemente dal fatto che sia o no esprimibile facilmente in funzione delle altre resistenze, è definibile operativamente in base alla (15):

$$R_T = \frac{\mathcal{E}}{I} \tag{I.31}$$

dove \mathcal{E} è la ddp fra le due superfici equipotenziali della nostra combinazione di resistori e I la corrente erogata dal generatore (Fig.11).

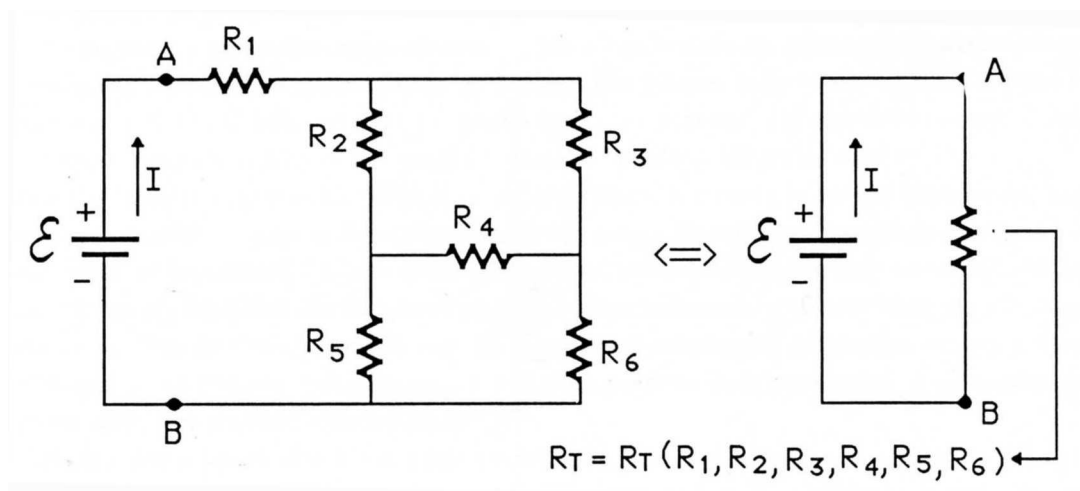


Fig.I.11

Quanto appena affermato è di importanza notevole nella trattazione dei circuiti elettrici poiché stabilisce l'equivalenza di due sistemi di conduttori. Vale a dire, con riferimento alla figura precedente, il complesso di resistori a sinistra (fra i due terminali A e B) è equivalente al resistore di destra (fra i medesimi terminali) poiché per quanto riguarda i terminali della rete si ha lo stesso regime di tensione (\mathcal{E}) e corrente (I). Più avanti estenderemo il concetto di equivalenza a sistemi più complicati di conduttori e generatori.

Consideriamo alcuni collegamenti estremamente semplici che sono alla base di strutture assai più complicate:

Resistori in serie: in questo caso (Fig.12) i resistori sono attraversati dalla stessa corrente.

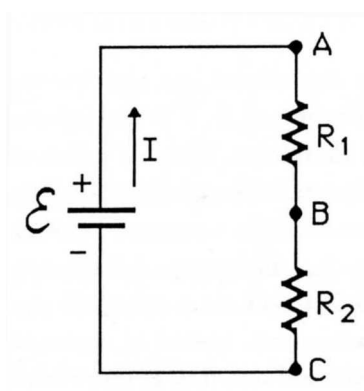


Fig.I.12

Per la legge di Ohm avremo:

$$\begin{cases} V_A - V_B = IR_1 \\ V_B - V_C = IR_2 \end{cases} \quad (\text{I.32})$$

e conseguentemente

$$\mathcal{E} = V_A - V_C = I(R_1 + R_2) \quad (\text{I.33})$$

Pertanto il sistema è equivalente a un unico resistore con

$$R_T = R_1 + R_2 \quad (\text{I.34})$$

vale a dire: *le resistenze dei resistori collegati in serie si sommano.*

Resistori in parallelo: in questo caso è presente la stessa differenza di potenziale ai capi dei due resistori (Fig.13); la legge di Ohm ci dice:

$$\begin{cases} \frac{\mathcal{E}}{R_1} = I_1 \\ \frac{\mathcal{E}}{R_2} = I_2 \end{cases} \quad (\text{I.35})$$

Sommando membro a membro otteniamo

$$\mathcal{E} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = I_1 + I_2 \quad (\text{I.36})$$

che può scriversi

$$\mathcal{E} = (I_1 + I_2) \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = (I_1 + I_2) \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (\text{I.37})$$

Ora, anticipando un risultato –per altro intuitivo– che discuteremo un po' più ampiamente nel seguito, I (corrente erogata dal generatore) è uguale alla somma $I_1 + I_2$ (vedi Fig.13)

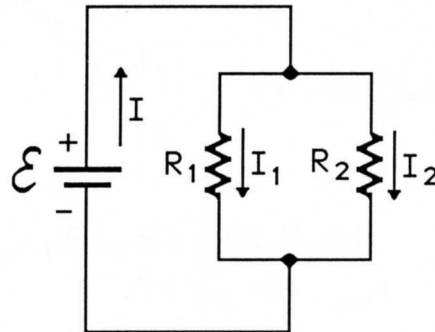


Fig.I.13

e pertanto possiamo dire che la *conduttanza di due resistori in parallelo si ottiene sommando le conduttanze*. Simbolicamente il valore di due resistenze in parallelo R_1 e R_2 si indica con $R_1 \parallel R_2$.

Si noti che date due resistenze R_1 e R_2 con $R_1 \gg R_2$, la serie è praticamente uguale a R_1 , mentre il loro parallelo è praticamente uguale a R_2 .

Le conclusioni a cui siamo giunti valgono indipendentemente dal numero di resistori che compongono la serie o il parallelo, vale a dire n resistori in serie sono equivalenti a un unico resistore pari alla somma delle n resistenze, e n resistori in parallelo sono equivalenti a un unico resistore avente conduttanza pari alla somma delle n conduttanze. Se fra due terminali abbiamo un aggregato di serie e paralleli di resistenze, sarà possibile via via sostituire

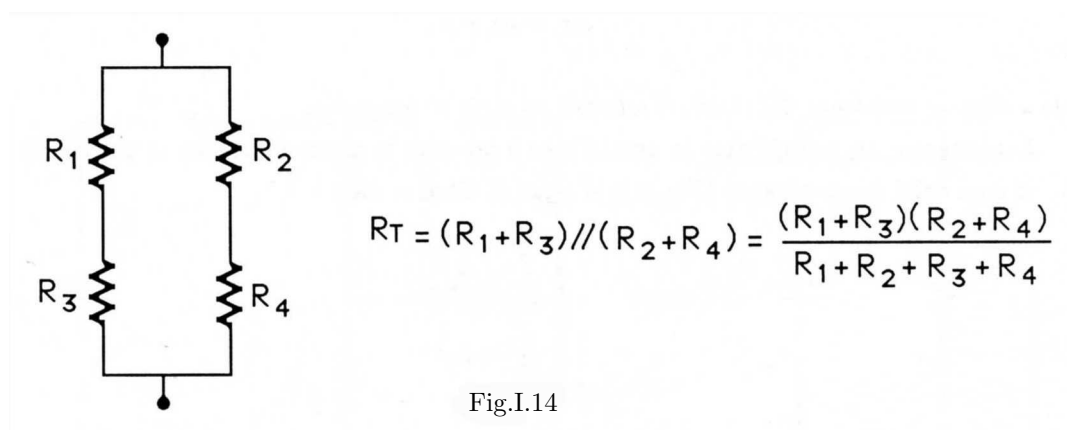


Fig.I.14

a tali combinazioni il resistore equivalente fino a ricondursi a un unico resistore. Nelle Figg.14 e 15 sono riportati due esempi di questa procedura.

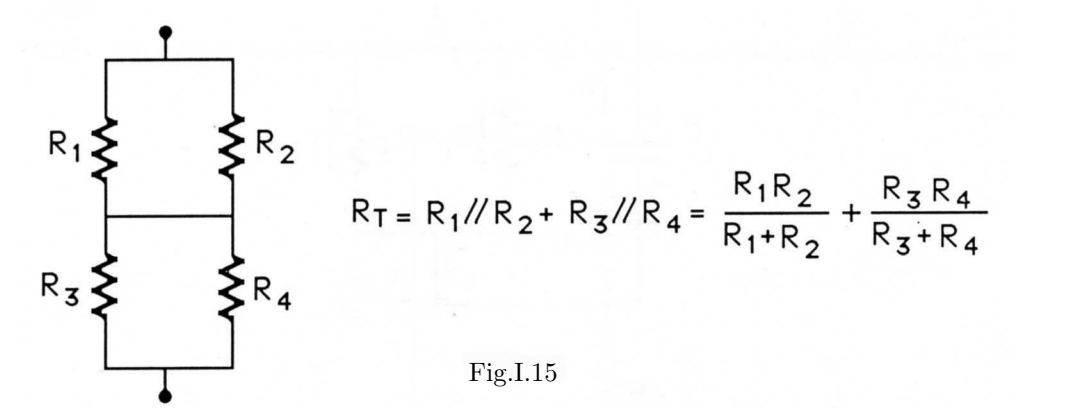


Fig.I.15

Le connessioni serie e parallelo non esauriscono tutte le topologie possibili di resistori interconnessi: si pensi ad esempio alla configurazione della Fig.16, nella quale le tre resistenze poste a triangolo R_{ab}, R_{bc}, R_{ac}

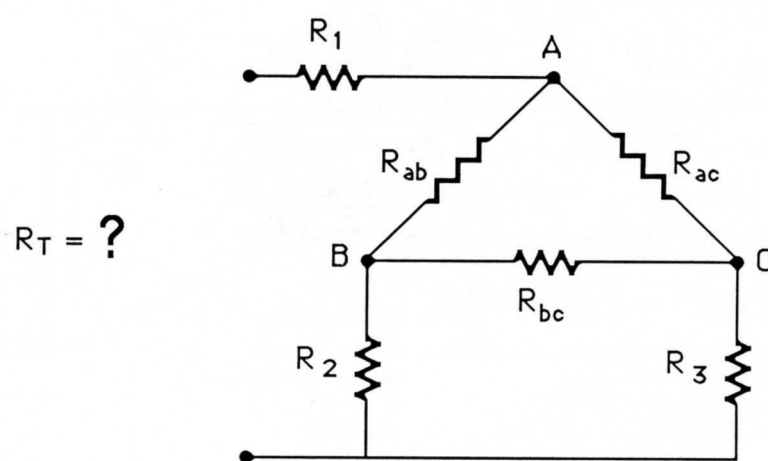


Fig.I.16

impediscono di considerare la configurazione come combinazione di serie e paralleli. Per risolvere questo problema (identico a quello di Fig.11) si procede così: si sostituisce al triangolo di resistenze una stella di resistenze che dà luogo a una configurazione risolubile come serie e paralleli (Fig.17)

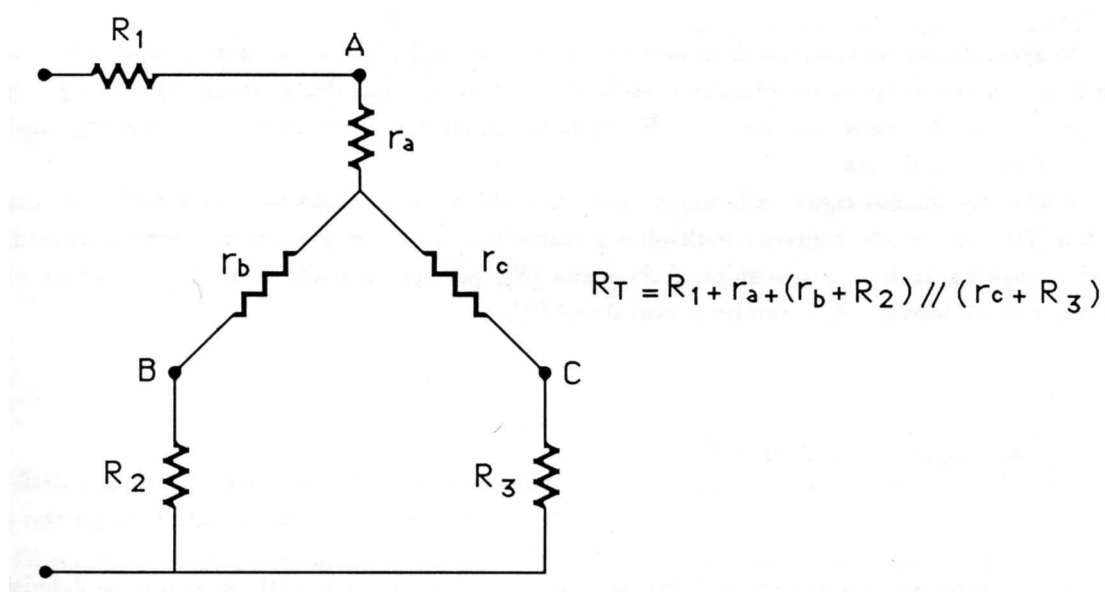


Fig.I.17

r_a, r_b, r_c saranno calcolati in funzione di R_{ab}, R_{bc}, R_{ac} , imponendo che le resistenze fra i nodi A-B, B-C, A-C siano le stesse nella configurazione a triangolo e in quella a stella. Dovrà così essere:

Resistenza fra A e C:

$$R_{ac} \parallel (R_{ab} + R_{bc}) = r_a + r_c \quad (I.38)$$

Resistenza fra B e C:

$$R_{bc} \parallel (R_{ab} + R_{ac}) = r_b + r_c \quad (I.39)$$

Resistenza fra A e B:

$$R_{ab} \parallel (R_{ac} + R_{bc}) = r_a + r_b \quad (I.40)$$

Sviluppando i calcoli si trova:

$$r_a = \frac{R_{ab}R_{ac}}{R_{ab} + R_{ac} + R_{bc}} \quad (\text{I.41})$$

$$r_b = \frac{R_{bc}R_{ab}}{R_{ab} + R_{ac} + R_{bc}} \quad (\text{I.42})$$

$$r_c = \frac{R_{bc}R_{ac}}{R_{ab} + R_{ac} + R_{bc}} \quad (\text{I.43})$$

$$\frac{1}{R_{ab}} = \frac{\frac{1}{r_a r_b}}{\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}} \quad (\text{I.44})$$

$$\frac{1}{R_{ac}} = \frac{\frac{1}{r_a r_c}}{\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}} \quad (\text{I.45})$$

$$\frac{1}{R_{bc}} = \frac{\frac{1}{r_b r_c}}{\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}} \quad (\text{I.46})$$

Le relazioni da (41) a (46) costituiscono le cosiddette “*Trasformazioni Stella - Triangolo*” e “*Triangolo - Stella*”.

In generale con sostituzioni di questo tipo (nell'uno o nell'altro verso: per esempio nel circuito precedente avremmo potuto sostituire la stella fra ACD con l'equivalente triangolo) si può giungere a rappresentare la configurazione in studio come combinazione di configurazioni serie e parallelo e così risolvere il problema.

Infine, per quanto riguarda le unità di misura, abbiamo già detto dell'unità della resistenza, l'*Ohm* (Ω); per quanto riguarda multipli e sottomultipli si usano le solite notazioni standard; la conduttanza ha anch'essa una unità, il *Siemens* (S); più spesso si usa la Ω^{-1} detta anche *mho*, oppure l'unità derivata A/V (molto spesso il mA/V).

4.— *Le leggi di Kirchhoff*

Diamo innanzitutto qualche definizione (anche se alcuni dei concetti oggetto delle definizioni sono già stati più o meno tacitamente introdotti):

Circuito: un insieme di conduttori che si chiude su se stesso, comprendente uno o più generatori di fem.

Rete: un insieme di circuiti collegati fra loro, in modo che sia possibile, partendo da un punto, ritornarvi in più di un modo (il confine fra rete e circuito è però tenue). Nell'ipotesi che la fem applicata sia costante e che ogni conduttore appartenente alla rete sia ohmico, la rete è detta lineare (vedremo poi che si può avere una rete lineare anche in altre condizioni).

Nodo: punto della rete in cui si incontrano tre o più conduttori.

Ramo: conduttore fra due nodi.

Maglia: successione chiusa di rami (ognuno percorso una sola volta).

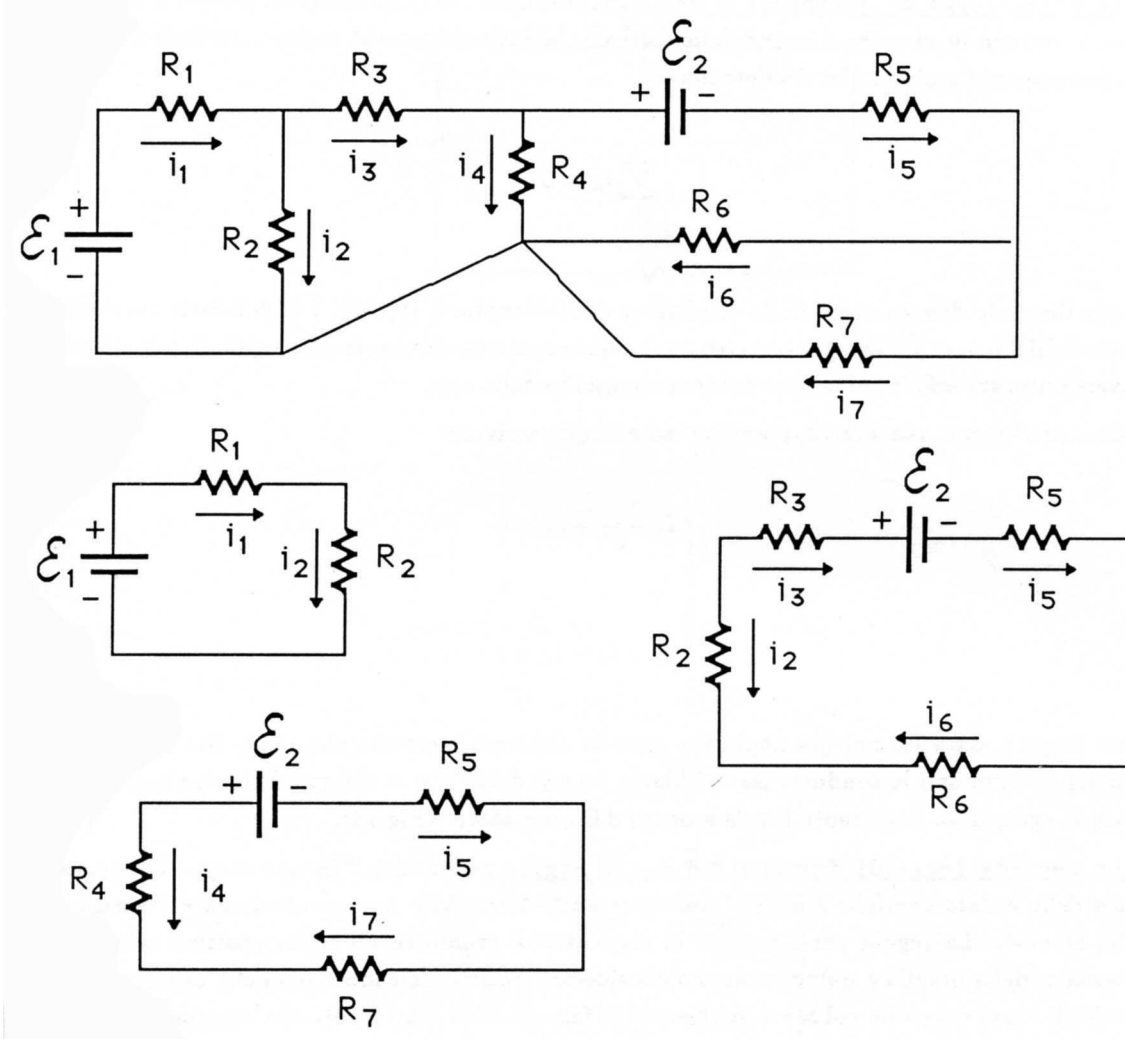


Fig.I.18

Nella Fig.18 a titolo di esempio si sono disegnate separate alcune (ma non certo tutte) le maglie della rete riportata nella parte superiore.

Ricordiamo che un generatore di fem invia nel circuito esterno una corrente positiva nel verso che va dal polo positivo a quello negativo; tuttavia, quando si avrà a che fare con una rete, disegneremo le correnti nei vari rami (una per ramo e non di più) con un verso qualunque (vedi figura). La “risoluzione” del circuito consisterà nel trovare il valore della corrente nei vari rami, col suo segno. Se una corrente, nella soluzione finale, risulta negativa significa che il segno inizialmente attribuito è opposto a quello vero.

Il regime stazionario delle correnti nei vari rami si può determinare in base ai principi dell'elettrostatica, alla condizione di stazionarietà e alla legge di Ohm. Di fatto, però, la risoluzione del circuito si basa su due leggi dette di *Kirchhoff* che discendono direttamente dai principi sopra esposti. Esse non aggiungono cioè nessuna nuova informazione e nient'altro sono che una formulazione alternativa alle leggi e ai principi di cui sopra, ma hanno il vantaggio di fornire una strada diretta e semplice per la determinazione delle correnti nella rete.

La prima legge di Kirchhoff o dei nodi stabilisce che: “*La somma algebrica delle correnti che si incontrano in un nodo è nulla*” (alle correnti che si avvicinano al nodo si attribuisce un segno e il segno opposto a quelle che si allontanano)

$$\sum_k i_k = 0 \quad (\text{I.47})$$

La legge discende direttamente dalla condizione di stazionarietà (8): $\text{div } \vec{j} = 0$; infatti quest'ultima implica che il flusso di \vec{j} (cioè i) attraverso qualunque superficie chiusa sia zero e quindi, in particolare, attraverso una superficie chiusa che contenga un nodo della rete.

Con riferimento alla Fig.18, possiamo ad esempio scrivere:

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 = 0 \\ i_3 - i_4 - i_5 = 0 \\ i_5 - i_6 - i_7 = 0 \end{cases} \quad (\text{I.48})$$

Questa legge è stata da noi già applicata quando abbiamo mostrato che, date due resistenze in parallelo, si sommano le conduttanze: abbiamo infatti detto che la somma delle due correnti nelle resistenze eguagliava la corrente totale erogata dal generatore (Fig.13).

La seconda legge di Kirchhoff o delle maglie recita così: “*In una maglia la somma algebrica delle cadute ohmiche è uguale alla somma algebrica delle fem eventualmente presenti nella maglia stessa*”. La regola per i segni è la seguente: si stabilisce un senso positivo arbitrario di percorrenza della maglia e quindi vengono considerate positive le cadute ohmiche associate a una corrente di ramo concorde col senso prefissato; le fem positive sono quelle che vengono attraversate dal polo negativo a quello positivo percorrendo la maglia nel senso positivo prefissato.

Applichiamo la legge alle tre maglie disegnate in Fig.18 e poi vedremo qual è la giustificazione della validità di questa legge.

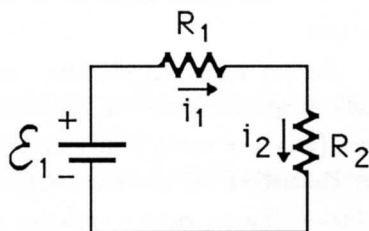


Fig.I.19

Scegliamo come positivo il senso di percorrenza orario delle maglie. Per la maglia in Fig.19 otteniamo

$$i_1 R_1 + i_2 R_2 = \mathcal{E}_1 \quad (\text{I.49})$$

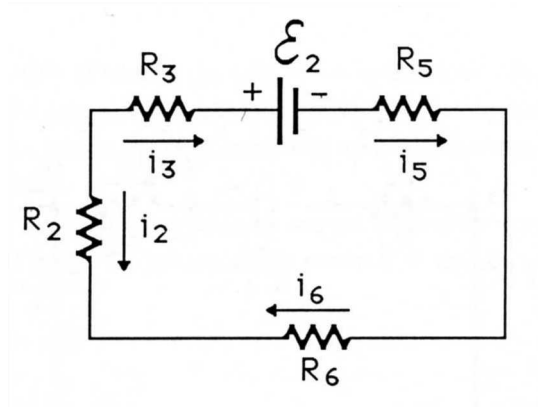


Fig.I.20

Per la maglia in Fig.20:

$$-i_2 R_2 + i_3 R_3 + i_5 R_5 + i_6 R_6 = -\mathcal{E}_2 \quad (\text{I.50})$$

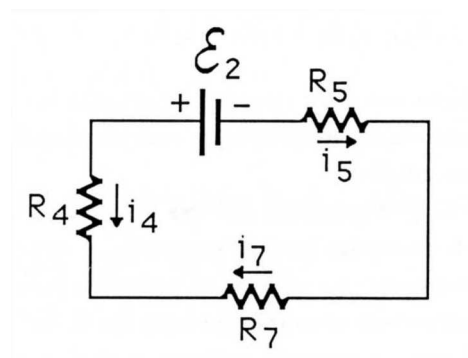


Fig.I.21

Per la maglia di Fig.21:

$$-i_4 R_4 + i_5 R_5 + i_7 R_7 = -\mathcal{E}_2 \quad (\text{I.51})$$

Si osservi che $\mathcal{E}_{1,2}$ rappresentano i valori assoluti della fem.

La giustificazione della legge va ricercata nel fatto che, per una maglia qualunque, all'esterno dei conduttori che appartengono a essa, abbiamo solo il campo elettrostatico \vec{E}_e ; pertanto $\oint \vec{E}_e \cdot d\vec{P} = 0$ e se scegliamo il cammino chiuso Γ in modo che non passi mai all'interno dei nostri conduttori, ma si appoggi semplicemente ai capi di ogni componente (resistenze o generatori), troviamo (Fig.22):

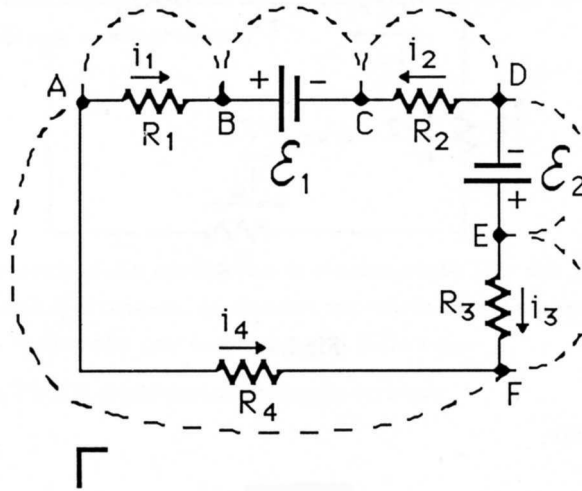


Fig.I.22

$$\oint \vec{E}_e \cdot d\vec{P} = (V_A - V_B) + \mathcal{E}_1 + (V_C - V_D) - \mathcal{E}_2 + (V_E - V_F) + (V_F - V_A) = 0 \quad (\text{I.52})$$

che sfruttando la legge di Ohm dà appunto

$$i_1 R_1 - i_2 R_2 + i_3 R_3 - i_4 R_4 = -\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 \quad (\text{I.53})$$

Si faccia attenzione che la maglia non è un circuito e pertanto le correnti nei vari conduttori della maglia assumono in genere valore e segno differente, cosa che sarebbe assurda se si trattasse di un circuito composto da un'unica maglia.

Basandosi su queste due leggi è possibile scrivere un sistema di equazioni lineari con almeno tante equazioni quanto sono le incognite (cioè le correnti); in genere se scegliessimo tutti i nodi e tutte le maglie della rete, scriveremmo un numero di equazioni superiore a quello delle incognite (il che vuol dire che alcune equazioni non sono indipendenti fra di loro).

Per quello detto fino a ora, le correnti nei vari rami si possono davvero tracciare a caso, così come a caso si possono individuare le maglie della rete e scegliere i sensi positivi di percorrenza delle maglie; ciò porta ad un sistema cui sono associate matrici senza alcun particolare grado di simmetria. Questo non è di per sé un male, salvo che sarebbe preferibile trovare un metodo che permettesse di individuare un sottoinsieme di equazioni indipendenti e magari anche di scrivere direttamente le matrici per la soluzione col Metodo di Cramer. Il sistema esiste ed è detto "*Metodo delle correnti di maglia*". Esso consiste nella seguente procedura: intanto, per tutte le maglie che saranno individuate nel circuito, il senso positivo di percorrenza sarà sempre lo stesso (diciamo orario); quindi, partendo da una maglia "*reale*" nel circuito, sceglieremo la maglia successiva fra quelle reali adiacenti a essa, cioè quelle che includono un ramo della precedente, e così via fino a che tutti i rami siano stati considerati. Per maglia "*reale*" si intende un insieme chiuso di rami individuabili all'interno della rete senza la soppressione di alcun ramo. Quanto alle correnti non si considerano quelle di ramo, ma si definiscono le *correnti di maglia*, una per ognuna delle maglie scelte. La corrente che effettivamente circola in un ramo sarà data ovviamente dalla somma algebrica delle correnti di maglia (la differenza in pratica, data la procedura) delle due maglie che hanno in compartecipazione il ramo in oggetto. Se si tratta di un ramo esterno, la corrente del ramo coincide con quella della maglia (l'unica) cui tale

ramo appartiene. Seguendo questa procedura, applicando soltanto la seconda legge di Kirchhoff, si scrivono tante equazioni quante sono le maglie e questo, data la relazione che intercorre fra correnti di maglia e correnti di ramo, significa di fatto trovare le correnti di tutti i rami.

Vediamo su un esempio la procedura, usando ancora il circuito precedentemente esaminato, ridisegnato per comodità in Fig.23. Da notare che le correnti di maglia sono scritte con un simbolo

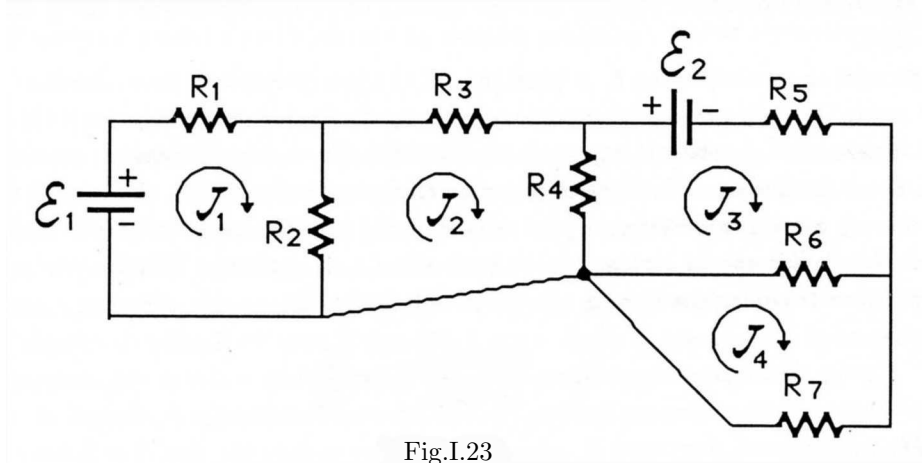


Fig.I.23

grafico diverso dalle correnti di ramo. L'applicazione del metodo delle correnti di maglia porta alle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} R_1 \mathcal{J}_1 + R_2 (\mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_2) = \mathcal{E}_1 \\ R_3 \mathcal{J}_2 + R_2 (\mathcal{J}_2 - \mathcal{J}_1) + R_4 (\mathcal{J}_2 - \mathcal{J}_3) = 0 \\ R_5 \mathcal{J}_3 + R_4 (\mathcal{J}_3 - \mathcal{J}_2) + R_6 (\mathcal{J}_3 - \mathcal{J}_4) = -\mathcal{E}_2 \\ R_6 (\mathcal{J}_4 - \mathcal{J}_3) + R_7 \mathcal{J}_4 = 0 \end{cases} \quad (\text{I.54})$$

che possono essere così riorganizzate:

$$\begin{cases} (R_1 + R_2) \mathcal{J}_1 - R_2 \mathcal{J}_2 = \mathcal{E}_1 \\ -R_2 \mathcal{J}_1 + (R_2 + R_3 + R_4) \mathcal{J}_2 - R_4 \mathcal{J}_3 = 0 \\ -R_4 \mathcal{J}_2 + (R_4 + R_5 + R_6) \mathcal{J}_3 - R_6 \mathcal{J}_4 = -\mathcal{E}_2 \\ -R_6 \mathcal{J}_3 + (R_6 + R_7) \mathcal{J}_4 = 0 \end{cases} \quad (\text{I.55})$$

A tale sistema è associata la matrice

$$\begin{pmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 & 0 & 0 \\ -R_2 & R_2 + R_3 + R_4 & -R_4 & 0 \\ 0 & -R_4 & R_4 + R_5 + R_6 & -R_6 \\ 0 & 0 & -R_6 & R_6 + R_7 \end{pmatrix} \quad (\text{I.56})$$

Generalizzando al caso di una rete qualunque è facile rendersi conto che tale matrice è sempre simmetrica e i suoi elementi sono valutabili immediatamente dalla semplice ispezione della rete: gli elementi diagonali a_{kk} sono ognuno la resistenza totale della maglia k -esima, gli elementi $a_{kl} = a_{lk}$ con $k \neq l$ sono la resistenza comune alle due maglie k ed l cambiata di segno.

Seguendo questa procedura è facile quindi scrivere direttamente la matrice che consente la risoluzione del problema. La corrente di maglia \mathcal{J}_k sarà così data da:

$$\mathcal{J}_k = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,k-1} & \mathcal{E}_1 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,k-1} & \mathcal{E}_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\text{Det}(a_{kl})} = \frac{\mathcal{E}_1 \text{Det}M_{1k}}{\text{Det}(a_{kl})} \cdot (-1)^{1+k} + \dots + \frac{\mathcal{E}_n \text{Det}M_{nk}}{\text{Det}(a_{kl})} \cdot (-1)^{n+k} \quad (\text{I.57})$$

dove M_{lk} rappresenta il minore rispetto all'elemento a_{lk} ed \mathcal{E}_j rappresenta la somma delle fem nella maglia j -esima.

I coefficienti che moltiplicano \mathcal{E}_j si prestano a una interpretazione notevolmente interessante, anche dal punto di vista pratico. Supponiamo che \mathcal{E}_k sia l'unico generatore presente nella nostra rete: se vi fossero altri generatori, supponiamo di sostituirli con dei collegamenti a resistenza nulla. E' sempre possibile fare in modo, disegnando opportunamente il circuito, che il ramo dove si trova il generatore \mathcal{E}_k sia un ramo esterno (cioè non in compartecipazione); in questo caso la corrente della maglia k coincide con la corrente del ramo e quindi con quella che effettivamente attraversa il generatore. Si vede subito che in base alla (57) e alla (31) si ha:

$$\mathcal{J}_k = \frac{\text{Det}(M_{kk})}{\text{Det}(a_{kl})} \mathcal{E}_k = \frac{\mathcal{E}_k}{R_T} \quad (\text{I.58})$$

Cioè $\frac{\text{Det}(M_{kk})}{\text{Det}(a_{kl})}$ rappresenta l'inverso della resistenza equivalente a tutto il circuito, vista da \mathcal{E}_k fra i suoi terminali, quando i generatori siano tutti, meno \mathcal{E}_k , cortocircuitati.

Ci potremmo chiedere come mai sia possibile, sfruttando apparentemente solo la seconda legge di Kirchhoff nella sua formulazione equivalente del Metodo delle correnti di maglia, risolvere il nostro circuito. Il motivo è che in realtà il metodo ora mostrato sfrutta implicitamente anche la legge dei nodi, precisamente quando afferma che in un ramo in compartecipazione la corrente vera è data dalla somma algebrica delle due correnti di maglia cui tale ramo appartiene.

5.— Il Principio di Sovrapposizione

Con riferimento all'esempio precedente, consideriamo un ramo della maglia k -esima. La corrente i_r che circola in tale ramo sarà così data o dalla corrente \mathcal{J}_k medesima, qualora si tratti di un ramo esterno, oppure dalla differenza $\mathcal{J}_k - \mathcal{J}_l$ (o $\mathcal{J}_l - \mathcal{J}_k$ a secondo del senso scelto per la corrente i_r) se il ramo è in compartecipazione fra la maglia k -esima e la l -esima. In entrambi i casi tale corrente sarà esprimibile come

$$i_r = C_{1r}\mathcal{E}_1 + \dots + C_{nr}\mathcal{E}_n \quad (\text{I.59})$$

cioè come combinazione lineare delle forze elettromotrici \mathcal{E}_k (ognuna essendo la somma algebrica delle fem nella maglia k -esima). Il secondo membro può quindi anche scriversi

$$i_r = \sum_{s=1}^N C_{sr}e_s \quad (\text{I.60})$$

dove questa volta la sommatoria è estesa a tutti gli N generatori e_s di fem appartenenti alla rete. Le costanti C_s sono le stesse per tutti i generatori posti in serie nello stesso ramo. Quest'ultima relazione

si presta a una interpretazione estremamente utile dal punto di vista pratico: la corrente in un ramo qualunque può sempre ottenersi come la somma di N correnti ognuna ottenuta sostituendo con un conduttore a resistenza nulla (*cortocircuitando*) tutti i generatori presenti meno uno e ripetendo per tutti i generatori la stessa procedura. E' questa una formulazione del

Principio di Sovrapposizione che può essere anche enunciato dicendo che “*La corrente totale attraverso ogni elemento di un rete lineare avente generatori indipendenti, è uguale alla somma algebrica delle correnti prodotte nell'elemento da ciascun generatore agente separatamente*”.

Tale Principio discende direttamente dal fatto che il campo elettrico è lineare nelle cariche e che vale cioè il Principio dell'indipendenza delle azioni simultanee. Le conseguenze sono notevoli perché il Principio di Sovrapposizione consente di risolvere una rete complicata quanto si vuole andando a risolvere N reti, ognuna con uno solo degli N generatori; nel fare ciò si sfrutta il fatto, per il momento non ovvio, che quando si considera un solo generatore per volta non è necessario ricorrere alla stesura di tutto il sistema di equazioni, ma si riesce a determinare la corrente dei vari rami usando metodi più rapidi e semplificati (come per le resistenze equivalenti del §3). Prima di vedere ciò su un esempio, è opportuno osservare che i generatori vengono cortocircuitati idealmente (cioè viene messo $\mathcal{E} = 0$) solo nel caso in cui essi siano privi di resistenza interna, cioè siano ideali; locuzione più esatta sarebbe dire: “*il generatore viene sostituito dalla sua resistenza interna*”. Negli esempi fatti precedentemente la resistenza interna del generatore o era nulla o era stata inglobata nella resistenza in serie esplicitamente considerata.

Guardiamo ora un esempio di applicazione del Principio di Sovrapposizione e contemporaneamente impariamo a valutare la corrente in un ramo in un modo che non farà più ricorso all'algebra delle matrici, bensì alla sostituzione di gruppi di resistori con un unico resistore equivalente. Questa è fra l'altro la procedura che il più delle volte si adopera perché, nel caso di reti relativamente semplici, è molto più diretta. Il circuito è quello in Fig.24:

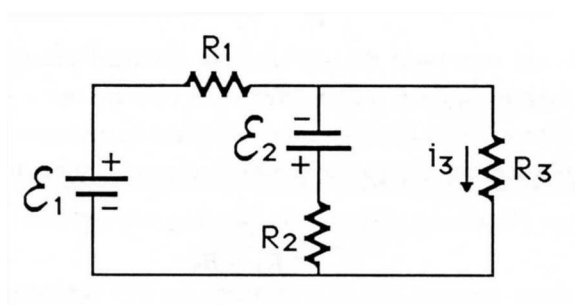


Fig.I.24

Supponiamo di voler determinare la corrente i_3 che circola nella resistenza R_3 . Secondo il Principio di Sovrapposizione dobbiamo calcolare i due contributi provenienti alla corrente in R_3 nei due circuiti di Fig.25.

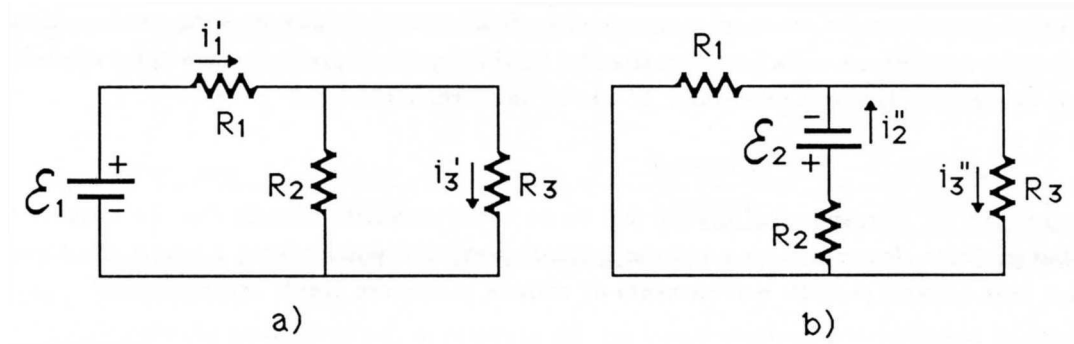


Fig.I.25

Per “risolvere” questi due circuiti mostriamo prima un risultato del tutto generale su come si divide la corrente in un parallelo di due resistenze. Si abbia cioè la configurazione di Fig.26

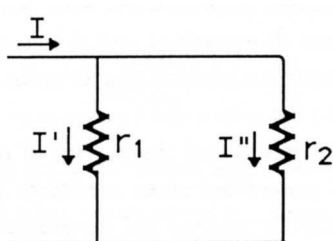


Fig.I.26

Per la legge dei nodi abbiamo $I = I' + I''$ e per la seconda legge di Kirchhoff (con le correnti di ramo, quelle vere cioè) $I'r_1 - I''r_2 = 0$. Otteniamo così

$$I' = I \frac{r_2}{r_1 + r_2} \quad I'' = I \frac{r_1}{r_1 + r_2} \quad (\text{I.61})$$

ovvero

$$\frac{I'}{I''} = \frac{r_2}{r_1} \quad (\text{I.62})$$

la corrente cioè si divide nei due rami del parallelo in maniera inversamente proporzionale alla resistenza dei rami. Chiameremo questa regola “Regola di ripartizione o di divisione della corrente”.

Tornando ora al circuito a) della Fig.25, se conoscessimo la corrente i_1' potremmo direttamente determinare i_3' ; infatti dalla Regola di ripartizione della corrente abbiamo:

$$i_3' = i_1' \frac{R_2}{R_2 + R_3} \quad (\text{I.63})$$

D'altronde, ricorrendo alle resistenze equivalenti, possiamo esprimere i_1' come:

$$i_1' = \frac{\mathcal{E}_1}{R_1 + R_2 \parallel R_3} = \frac{\mathcal{E}_1(R_2 + R_3)}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} \quad (\text{I.64})$$

Per il circuito b), quando \mathcal{E}_1 sia cortocircuitato, abbiamo:

$$i_3'' = i_2'' \frac{R_1}{R_1 + R_3} \quad (\text{I.65})$$

$$i_2'' = -\frac{\mathcal{E}_2}{R_2 + R_1 \parallel R_3} = -\frac{\mathcal{E}_2(R_1 + R_3)}{R_2R_1 + R_2R_3 + R_1R_3} \quad (\text{I.66})$$

La corrente totale i_3 che circola nella resistenza R_3 sarà data da (la convenzione del segno per i_3 è concorde con quella di i_3' e di i_3'')

$$i_3 = i_3' + i_3'' = \frac{\mathcal{E}_1R_2 - \mathcal{E}_2R_1}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} \quad (\text{I.67})$$

Al risultato finale siamo arrivati assai rapidamente, fra l'altro senza sviluppare conti particolarmente complicati. Per confronto calcoliamo la stessa corrente i_3 con la procedura delle correnti di maglia (Fig.27).

La matrice del circuito è:

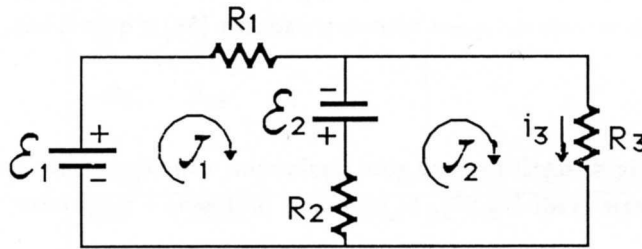


Fig.I.27

$$\begin{pmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 \end{pmatrix} \quad (\text{I.68})$$

e pertanto

$$\mathcal{J}_2 = i_3 = \frac{(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)R_2 - \mathcal{E}_2(R_1 + R_2)}{\begin{vmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 \end{vmatrix}} = \frac{\mathcal{E}_1R_2 - \mathcal{E}_2R_1}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} \quad (\text{I.69})$$

Si noti che in questo caso anche la procedura delle correnti di maglia è estremamente spedita soprattutto perché, trattandosi di due maglie soltanto, il calcolo del determinante è banale.

6.— Altri teoremi delle reti lineari

Sfruttando le leggi di Kirchhoff e facendo ricorso ai metodi risolutivi dell'algebra delle matrici si possono dimostrare alcuni teoremi che possono aiutare non poco nella risoluzione delle reti lineari. Citiamo fra questi:

il **Teorema di Reciprocità**: “Se un generatore di fem costante posto nel ramo r -esimo di una rete passiva, lineare, bilaterale produce una certa corrente i_r nel ramo k -esimo della rete medesima, allora questo generatore, inserito nel ramo k -esimo produrrà la medesima corrente $i_r = i_k$ nel ramo r -esimo”.

il **Teorema di Compensazione**: “In una rete passiva, lineare e bilaterale contenente generatori di fem costante, se una resistenza R attraverso cui passa una corrente i è aumentata di una certa quantità ΔR , il cambiamento delle correnti nella rete è uguale a quello prodotto da un generatore pari a $i\Delta R$ posto in opposizione a i nel ramo che contiene R ”.

Il Teorema di Thévenin di fondamentale importanza per le semplificazioni -anche concettuali- che permette di introdurre, risolve il seguente problema: supponiamo di avere una rete lineare e di individuare in essa due “terminali”, in sostanza due punti della rete, non necessariamente due nodi: rispetto all’applicazione di una resistenza o di un generatore (o di un’altra rete tramite due altri terminali in essa individuati) come si comportano dal punto di vista circuitale questi due terminali ? Il teorema di Thévenin fornisce la risposta stabilendo che: “*Ogni rete passiva, lineare e bilaterale contenente generatori di fem costanti e avente due terminali si comporta rispetto a questi due terminali come un unico generatore reale avente resistenza interna R_{Th} e fem \mathcal{E}_{Th} , dove \mathcal{E}_{Th} è la tensione che appare fra questi terminali quando non si colleghi nessun ulteriore conduttore fra essi e R_{Th} è la resistenza che si misura fra i terminali quando tutti i generatori ideali di fem posti nella rete siano sostituiti da cortocircuiti*”. \mathcal{E}_{Th} è detta fem equivalente di Thévenin o fem a circuito aperto e R_{Th} è detta resistenza equivalente di Thévenin oppure resistenza d’ingresso dei due terminali. Alla fine del §4 abbiamo già incontrato quest’ultima grandezza (58) e quindi sappiamo anche calcolarla.

Il teorema consente di sostituire una rete qualunque, con riferimento a due suoi terminali, con un unico generatore reale (vedi Fig.28). In pratica il problema è ricondotto

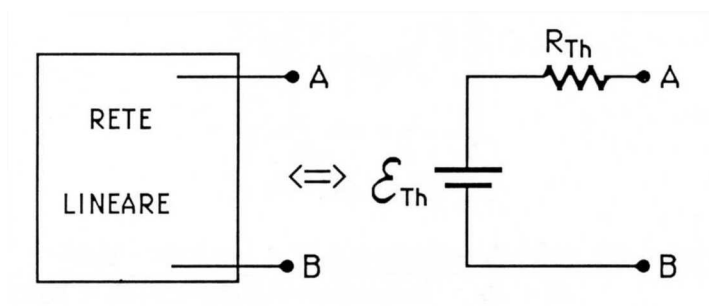


Fig.I.28

a determinare \mathcal{E}_{Th} e R_{Th} ; per la prima (\mathcal{E}_{Th}) in genere non c’è altro da fare che risolvere la rete e, una volta note le correnti, determinare la ddp fra i due terminali. Quanto a R_{Th} si può calcolare procedendo col solito sistema di calcolo della resistenza di una rete di resistori, oppure come visto alla fine del §4. Alternativamente potremo inserire fra i terminali A e B un cortocircuito e, risolvendo la nuova rete così ottenuta, valutare la corrente I_{cc} che lo attraversa; dal valore di quest’ultima, notando che $I_{cc} = \frac{\mathcal{E}_{Th}}{R_{Th}}$ si può risalire a R_{Th} (questa procedura stabilisce anche un sistema di *misurare* R_{Th} come vedremo in seguito).

Diamo ora una dimostrazione del teorema di Thévenin: intanto, scelti due terminali A e B della rete esprimiamo la differenza di potenziale $\mathcal{E}_{Th} = V_A - V_B$ fra questi due terminali, quando da essi non sia derivata corrente: una maniera operativa per determinare questa ddp è porre fra i due terminali una resistenza R con in serie un generatore E_0 di valore uguale a \mathcal{E}_{Th} e messo a esso in opposizione (Fig.29).

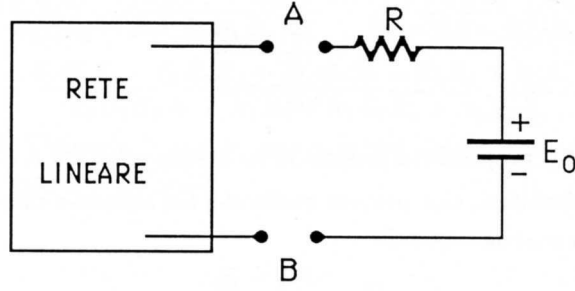


Fig.I.29

Si viene così a costruire una maglia (diciamo la n -esima) nella quale, se $E_0 = V_A - V_B$, per la seconda legge di Kirchhoff sarà $\mathcal{J}_n = 0$. D'altronde, volendo esprimere \mathcal{J}_n in funzione dei parametri della rete avremo

$$\mathcal{J}_n = \frac{\begin{vmatrix} R_{11} & -R_{12} & \dots & \mathcal{E}_1 \\ -R_{21} & R_{22} & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -R_{n1} & \dots & \dots & \mathcal{E}_n - E_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_{11} & -R_{12} & \dots & -R_{1n} \\ -R_{21} & R_{22} & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -R_{n1} & \dots & \dots & R_{nn} + R \end{vmatrix}} = \frac{D' - E_0 \cdot D_n}{D} \quad (I.70)$$

dove

$$D' = \begin{vmatrix} R_{11} & -R_{12} & \dots & \mathcal{E}_1 \\ -R_{21} & R_{22} & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -R_{n1} & \dots & \dots & \mathcal{E}_n \end{vmatrix} \quad (I.71)$$

e

$$D_n = \begin{vmatrix} R_{11} & -R_{12} & \dots & -R_{1,n-1} \\ -R_{21} & R_{22} & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -R_{n-1,1} & \dots & \dots & R_{n-1,n-1} \end{vmatrix} \quad (I.72)$$

Si vede che per $\mathcal{J}_n = 0$ deve essere ($\mathcal{E}_{Th} = E_0$):

$$D' - \mathcal{E}_{Th} \cdot D_n = 0 \quad (I.73)$$

e pertanto

$$\mathcal{E}_{Th} = \frac{D'}{D_n} \quad (I.74)$$

Per E_0 qualsiasi, in base alla (74) e (70) possiamo scrivere:

$$\mathcal{J}_n = \frac{\mathcal{E}_{Th} - E_0}{\frac{D}{D_n}} \quad (I.75)$$

D può porsi nella forma:

$$D = \begin{vmatrix} R_{11} & -R_{12} & \dots & R_{1,n} \\ -R_{21} & R_{22} & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -R_{n1} & \dots & \dots & R_{n,n} \end{vmatrix} + R \cdot D_n = D^* + R \cdot D_n \quad (I.76)$$

e pertanto

$$\mathcal{J}_n = \frac{\mathcal{E}_{Th} - E_0}{\frac{D^*}{D_n} + R} \quad (I.77)$$

D'altronde $\frac{D^*}{D_n}$ -vedi la (58)- rappresenta proprio la resistenza vista fra A e B quando tutti i generatori della rete siano cortocircuitati, cioè proprio quella che noi abbiamo chiamato R_{Th} . L'espressione della corrente nella nostra maglia è quindi:

$$\mathcal{J}_n = \frac{\mathcal{E}_{Th} - E_0}{R_{Th} + R} \quad (I.78)$$

che corrisponde proprio ad avere il circuito di Fig.30:

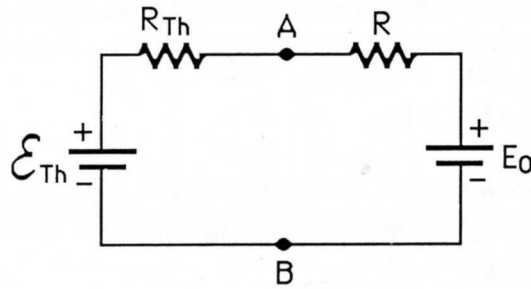


Fig.I.30

Il teorema è così dimostrato nel caso più generale possibile poiché, valendo esso quando fra A e B si pone un generatore E_0 con in serie una resistenza R , proprio per il teorema di Thévenin, questa configurazione può rappresentare i terminali di una qualunque rete lineare. Guardiamo ora alcune applicazioni del teorema di Thévenin. Riprendiamo il circuito di Fig.27 e supponiamo di voler aggiungere in parallelo a R_3 la resistenza R_4 con in serie il generatore \mathcal{E}_4 e di voler determinare i_4 (Fig.31). Se ignorassimo il teorema di Thévenin, non ci resterebbe che applicare la procedura standard e scrivere

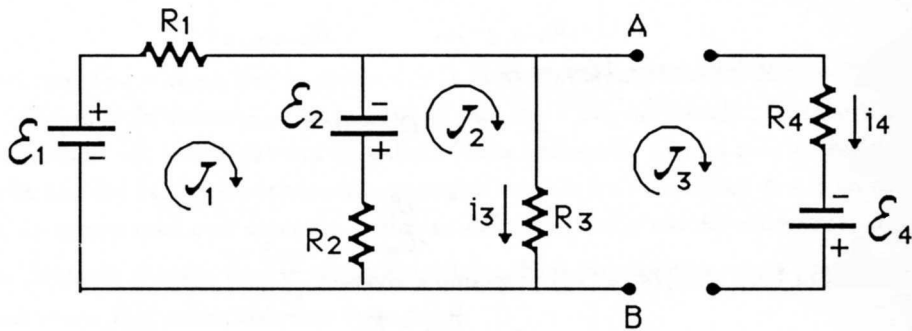


Fig.I.31

$$i_4 = \mathcal{J}_3 = \frac{(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) \begin{vmatrix} -R_2 & R_2 + R_3 \\ 0 & -R_3 \end{vmatrix} + \mathcal{E}_2 \begin{vmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ 0 & -R_3 \end{vmatrix} + \mathcal{E}_4 \begin{vmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 & 0 \\ -R_2 & R_2 + R_3 & -R_3 \\ 0 & -R_3 & R_3 + R_4 \end{vmatrix}} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)R_2R_3 - \mathcal{E}_2R_3(R_1 + R_2) + \mathcal{E}_4(R_1 + R_2)(R_2 + R_3) - \mathcal{E}_4R_2^2}{(R_1 + R_2)(R_2 + R_3)(R_3 + R_4) - R_3^2(R_1 + R_2) - R_2^2(R_3 + R_4)} = \\
 &= \frac{\mathcal{E}_1R_2R_3 - \mathcal{E}_2R_1R_3 + \mathcal{E}_4(R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3)}{R_1R_2R_3 + R_1R_2R_4 + R_1R_3R_4 + R_2R_3R_4} \quad (I.79)
 \end{aligned}$$

Usando il teorema di Thévenin possiamo invece prima determinare R_{Th} e \mathcal{E}_{Th} e quindi determinare la corrente i_4 del circuito di Fig.32:

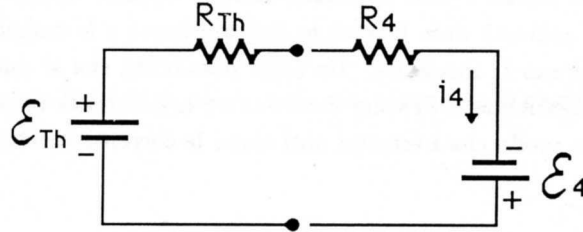


Fig.I.32

$$i_4 = \frac{\mathcal{E}_{Th} + \mathcal{E}_4}{R_{Th} + R_4} \quad (I.80)$$

Per determinare \mathcal{E}_{Th} basta ricordare il risultato (67) e calcolare

$$\mathcal{E}_{Th} = i_3R_3 = \frac{\mathcal{E}_1R_2 - \mathcal{E}_2R_1}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} R_3 \quad (I.81)$$

Quanto a R_{Th} si trova che essa vale:

$$R_{Th} = R_3 \parallel R_2 \parallel R_1 = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{R_1R_2R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} \quad (I.82)$$

E pertanto applicando la (80) troviamo il risultato precedentemente visto:

$$i_4 = \frac{\mathcal{E}_1R_2R_3 - \mathcal{E}_2R_1R_3 + \mathcal{E}_4(R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3)}{R_1R_2R_3 + R_1R_2R_4 + R_1R_3R_4 + R_2R_3R_4} \quad (I.83)$$

Mostriamo nel seguito numerosi esempi in cui il teorema di Thévenin permette di introdurre notevoli semplificazioni, sia concettuali che di calcolo.

A titolo di ulteriore applicazione (assai semplice per la verità) della legge di Ohm vediamo quella che nel seguito sarà richiamata come regola del “*Partitore di tensione*”;

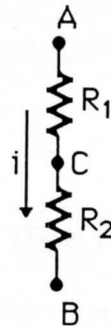


Fig.I.33

consideriamo due resistenze in serie (Fig.33) ai capi delle quali sia presente una differenza di potenziale $V_A - V_B$. Se vogliamo conoscere la ddp $V_C - V_B$ otteniamo, in base alla legge di Ohm:

$$V_C - V_B = iR_2 = (V_A - V_B) \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (\text{I.84})$$

Nello studio delle reti lineari e delle applicazioni della legge di Kirchhoff abbiamo sempre fatto l'implicita ipotesi che le quantità note fossero le fem applicate e le resistenze. Si trattava cioè di ottenere le correnti che erano le incognite. Un'altra possibilità che si può presentare, è quella di conoscere le correnti e le resistenze e di voler determinare le differenze di potenziale. In questo caso scriveremo le equazioni in modo che i termini noti siano le correnti: pertanto è opportuno porre la legge di Ohm nella forma

$$V \frac{1}{R} = I \quad (\text{I.85})$$

facendo intervenire la conduttanza $\frac{1}{R}$ invece della resistenza. Le equazioni restano ovviamente lineari, ma il ricorso alla procedura prima seguita delle correnti di maglia non è più opportuna. Senza entrare nei dettagli ci limiteremo a dire che in questi casi conviene introdurre le differenze di potenziale dei vari nodi rispetto a un certo nodo di riferimento (*Tensione dei nodi*) e quindi esprimere la corrente in un ramo come la differenza fra le tensioni dei due nodi, alle estremità del ramo in oggetto, moltiplicata per la conduttanza del ramo; una volta espresse in questa maniera le correnti dei vari rami confluenti nel nodo, si tratta di applicare la prima legge di Kirchhoff, imponendo che la loro somma sia nulla, oppure uguagli una eventuale corrente confluyente in quel ramo, inviata da un dispositivo opportuno (*Generatore di corrente*). Esiste un evidente parallelismo fra la procedura ora detta (*Metodo delle Tensioni dei nodi*) e quella delle correnti di maglia; le procedure addirittura coincidono formalmente, purché alle tensioni si sostituiscano le correnti, alle resistenze le conduttanze e alle fem impresse dai generatori di fem le correnti inviate dai generatori di corrente. Si dice che i due procedimenti sono “*duali*”.

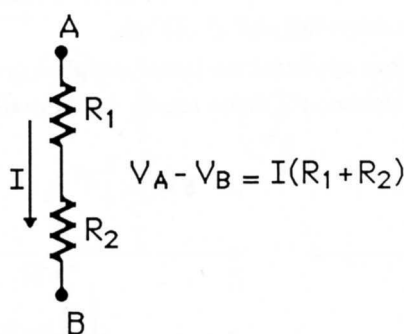


Fig.I.34

Un altro esempio di situazione duale è quello delle resistenze in serie e in parallelo: infatti la relazione che lega la ddp, la corrente e le resistenze nella prima configurazione è esattamente quella fra corrente, ddp e conduttanza nella seconda; il caso è riportato nelle Figg.34 e 35.

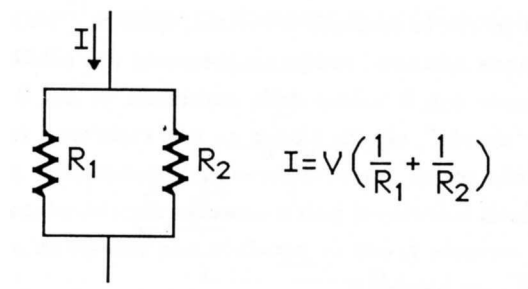


Fig.I.35

Molto spesso riconoscere il duale di un circuito noto, consente di risolvere il problema per pura analogia e quindi assai rapidamente.

7.— Generatori di tensione e generatori di corrente. Teorema di Norton

Abbiamo visto nei paragrafi precedenti che i generatori reali di fem \mathcal{E} si possono rappresentare (Fig.36) in maniera sufficientemente accurata come generatori ideali di fem con in serie una resistenza (resistenza interna del generatore).

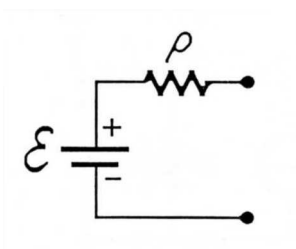


Fig.I.36

Pertanto, rispetto a un generatore ideale, si ha un limite alla corrente massima erogabile ($i_{max} = \frac{\mathcal{E}}{\rho}$). Ovviamente l'influsso della resistenza interna (potremmo dire della non idealità del generatore) si fa sentire tanto di più quanto più grossa è la corrente che il generatore eroga durante l'utilizzo.

Oltre ai generatori ideali di tensione possono definirsi dei generatori ideali di corrente (i loro duali, cioè): la caratteristica di un generatore ideale di corrente è quella di inviare una corrente costante, indipendentemente dal valore della tensione ai suoi terminali. Il simbolo per un generatore ideale di corrente è quello di Fig.37.

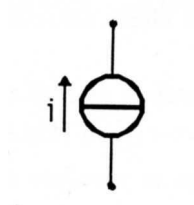


Fig.I.37

La freccia indica il senso in cui la corrente è inviata, mentre i indica il valore assoluto della corrente. Se la corrente i rimane costante, indipendentemente dal carico, la tensione ai terminali del generatore cresce linearmente con il valore della resistenza su cui il generatore è chiuso. Un generatore ideale di corrente “aperto”, ovvero chiuso su una resistenza infinita manifesterà ai suoi terminali una ddp infinita. Nella realtà questa differenza di potenziale sarà elevata e non infinita; si trova che un generatore reale di corrente si può schematizzare abbastanza accuratamente (Fig.38) come un generatore ideale di corrente i , con in parallelo una resistenza ρ (tanto più grossa quanto più il generatore si avvicina al caso ideale).

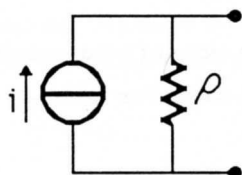


Fig.I.38

Pertanto, quando il generatore reale è chiuso su un carico e ai suoi terminali presenta una differenza di potenziale V (Fig.39), la corrente effettivamente inviata sul carico è

$$i' = i - i'' = i - \frac{V}{\rho} \quad (\text{I.86})$$

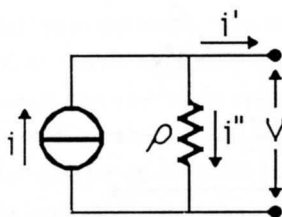


Fig.I.39

Si noti che si è parlato di una certa ddp ai morsetti e non del valore della resistenza su cui il generatore è chiuso, perché quest'ultimo caso sarebbe stato assai particolare, rispetto al caso generale in cui il generatore fa parte di una rete attiva, nella quale cioè agiranno altri generatori e non saranno presenti solo resistenze .

Non è difficile rendersi conto della perfetta dualità del comportamento dei generatori di tensione e di corrente rispetto alle loro resistenze in serie e in parallelo rispettivamente. In particolare si noti che la corrente erogata da un generatore reale di corrente coincide con quella del corrispondente elemento ideale quando il carico è tale che la ddp ai suoi terminali è nulla; “dualmente” un generatore di fem reale presenta la fem del generatore ideale associato quando la corrente che lo attraversa è nulla.

Esiste inoltre una equivalenza fra generatori reali di corrente e generatori reali di tensione; ovvero, dato un certo generatore reale di tensione (\mathcal{E}, ρ) (Fig.40) si può far vedere che esso è equivalente a un generatore reale di corrente $i = \frac{\mathcal{E}}{\rho}$ con in parallelo una resistenza ρ . Precisiamo innanzitutto la formulazione di equivalenza di due reti: *due reti sono equivalenti con riferimento a un numero qualunque di terminali se un insieme di tensioni applicate a questi terminali (o un*

insieme di correnti inviate in questi terminali) produce in entrambe le reti il medesimo insieme di correnti (o il medesimo insieme di tensioni).

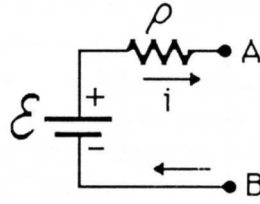


Fig.I.40

Supponiamo quindi che il generatore di tensione eroghi una corrente i ; fra i suoi morsetti avremo allora:

$$V_A - V_B = \mathcal{E} - i\rho \quad (\text{I.87})$$

Se abbiamo un generatore di corrente (Fig.41) per avere la stessa corrente in uscita i con la stessa ddp $V_A - V_B$, deve valere

$$i'' = \frac{V_A - V_B}{R} = \frac{\mathcal{E} - i\rho}{R} \quad (\text{I.88})$$

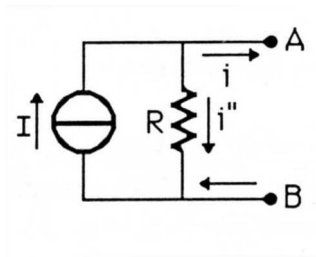


Fig.I.41

D'altronde è

$$I = i + i'' = i + \frac{V_A - V_B}{R} = i + \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{i\rho}{R} \quad (\text{I.89})$$

e affinché questa valga per ogni i deve essere:

$$R = \rho \quad I = \frac{\mathcal{E}}{\rho} \quad (\text{I.90})$$

Quest'ultimo risultato, che stabilisce in maniera quantitativa l'equivalenza fra generatori reali di fem e corrente, va sotto il nome di **Teorema di Norton**.

E' opportuno notare che un generatore quasi-ideale di corrente I si può abbastanza bene approssimare con un generatore di fem \mathcal{E} elevata con in serie una resistenza R anch'essa elevata, in modo che $I = \frac{\mathcal{E}}{R}$; ovviamente tale generatore funziona tanto meglio, cioè è tanto più vicino a essere ideale, quanto più piccola, rispetto a \mathcal{E} , è la caduta di tensione $V_A - V_B$ ai suoi terminali.

8.— Il teorema di Miller

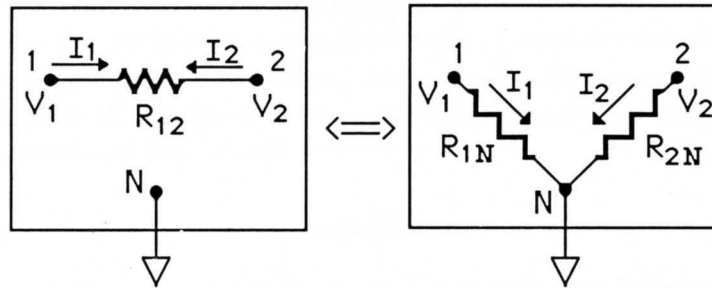


Fig.I.42

Consideriamo una rete lineare, passiva e bilaterale e definiamo le tensioni dei vari nodi (rappresentati in Fig.42) rispetto a un nodo di riferimento N^* . Siano V_1 e V_2 le tensioni di due nodi della rete e sia R_{12} la resistenza fra di essi. Il teorema di Miller stabilisce quali devono essere le resistenze R_{1N} e R_{2N} che, collegate fra i nodi 1 e N e 2 e N (e tolta la resistenza R_{12}), rendono la rete equivalente a quella con R_{12} .

Detto $k = \frac{V_2}{V_1}$ il rapporto fra le due ddp, abbiamo

$$I_1 = \frac{V_1 - V_2}{R_{12}} = \frac{V_1(1 - k)}{R_{12}} = \frac{V_1}{\frac{R_{12}}{1 - k}} \quad (\text{I.91})$$

e inoltre

$$I_2 = -I_1 = \frac{-V_2(\frac{1}{k} - 1)}{R_{12}} = \frac{V_2}{R_{12} \cdot \frac{k}{k - 1}} \quad (\text{I.92})$$

Si vede così che la presenza di due resistenze

$$R_{1N} = \frac{R_{12}}{1 - k} \quad (\text{I.93})$$

e

$$R_{2N} = \frac{R_{12}k}{k - 1} \quad (\text{I.94})$$

fra i nodi 1 e 2 e quello di riferimento N, equivale alla presenza del collegamento diretto 1-2. Come caso particolare, ma come vedremo molto più avanti assai importante dal punto di vista pratico, supponiamo che $|k| \gg 1$ con $k < 0$. Abbiamo così $R_{1N} \ll R_{12}$ e $R_{2N} \simeq R_{12}$.

Dal teorema di Miller, limitandoci al caso di una rete costituita di sole resistenze e generatori di fem o corrente costanti, si vede che per $k > 0$, non è possibile trovare una rete equivalente fatta come detto sopra: infatti essa comporterebbe (vedi (93) e (94)) l'esistenza di una resistenza negativa.

* Il simbolo ∇ è quello che generalmente si usa per il nodo di riferimento per la misura delle tensioni ("comune"); spesso, ma non sempre, tale nodo è collegato alla terra e in questo caso si parla di nodo o terminale di "terra" o di "massa"; il simbolo che adotteremo per il terminale di terra è il seguente: ∇ .

Fisicamente questa impossibilità nello stabilire l'equivalenza deriva dal fatto che se $k > 0$, le tensioni V_1 e V_2 hanno sempre lo stesso segno e pertanto nel circuito equivalente secondo Miller non si riesce -a meno di non introdurre appunto resistenze negative- a riprodurre, come si deve, una corrente entrante in un nodo e uscente dall'altro.

Tornando al caso in cui è possibile stabilire l'equivalenza ($k < 0$), si noti che le due reti sono del tutto equivalenti in quanto le tensioni dei terminali sono le stesse in entrambi i casi e così le correnti entranti (o uscenti) da tutti i nodi; infatti $I_1 = -I_2$, per cui anche nel nodo N la corrente complessiva resta inalterata.

9.— Potenza nei circuiti elettrici

Abbiamo già visto che il campo elettrostatico nello spostare una carica q da un punto A a un punto B compie un lavoro indipendente dal cammino e pari a $q(V_A - V_B)$. Pertanto se consideriamo un conduttore qualsiasi (non necessariamente ohmico) ai capi del quale sia presente una ddp V e nel quale scorra una corrente costante i , il lavoro infinitesimo $d\mathcal{L}$ fatto sulla carica dq che attraversa il conduttore in un tempuscolo dt vale

$$d\mathcal{L} = dqV \quad (I.95)$$

e pertanto

$$W = \frac{d\mathcal{L}}{dt} = iV \quad (I.96)$$

cioè la potenza istantanea associata al campo elettrico è misurata dal prodotto iV .

Quando la corrente è stazionaria e non si ottiene lavoro meccanico dal sistema, né si hanno alterazioni permanenti nel circuito e nell'ambiente, tale lavoro si deve poter ritrovare tutto sotto forma di energia termica. Tale fenomeno va sotto il nome di *effetto Joule*.

Nel caso che il conduttore sia ohmico e che esista un termostato al quale il conduttore cede la quantità di calore, cosicché R resti costante, allora vale $I = \frac{V}{R}$ e la potenza istantanea associata al campo elettrico potrà esprimersi anche come

$$W = iV = i^2 R = \frac{V^2}{R} \quad (I.97)$$

e la quantità di calore, espressa in Joule, prodotta per unità di tempo, sarà anch'essa data da $W = i^2 R = \frac{V^2}{R}$.

Noi abbiamo ipotizzato che tale quantità di calore venga ceduta a un termostato verso il quale R presenti una piccola resistenza termica; di fatto tale resistenza termica sarà piccola ma non zero per cui il resistore vedrà aumentare la propria temperatura e parte dell'energia fornita dal generatore andrà ad aumentare l'energia interna del resistore; il conseguente aumento di temperatura modificherà - almeno in linea di principio - il valore R della resistenza.

La trasformazione da energia potenziale delle cariche a loro energia cinetica e poi a energia interna, avviene nel metallo tramite il seguente meccanismo: gli elettroni fra un urto e l'altro acquistano una energia cinetica pari alla differenza di potenziale attraversata e durante l'urto la cedono agli ioni del reticolo; questi ultimi aumentano di conseguenza l'ampiezza delle oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio e macroscopicamente ciò corrisponde all'aumento della temperatura.

Poiché in genere i resistori vengono utilizzati in aria, la temperatura del resistore aumenterà durante il passaggio della corrente ed esiste quindi un limite alla corrente massima che può circolare

in esso; per l' utilizzo in aria di un dato resistore è in genere indicato il cosiddetto "wattaggio" cioè la potenza massima che si può dissipare sul resistore, prima che intervengano alterazioni permanenti nel valore della resistenza. Se poi si tratta di una resistenza campione o comunque ad alta stabilità (in funzione della temperatura) la definizione del wattaggio riguarda anche il fatto che le caratteristiche di precisione restano valide entro un certo ambito di temperatura; equivalentemente, invece del wattaggio, si può indicare la tensione massima ai capi del resistore o la corrente massima attraverso di esso e talvolta questi sono i parametri effettivamente forniti. In base a quanto detto sopra, il wattaggio si riferisce all' utilizzo del resistore in aria, a temperatura ambiente; se il resistore è accoppiato termicamente con un sistema che migliori la rimozione del calore in esso prodotto, il resistore potrà essere utilizzato anche oltre i limiti del wattaggio previsto in aria.

Nel caso di un circuito composto da un generatore chiuso su una resistenza, la potenza totale dissipata sotto forma di calore è data da $i^2 R$ dove R è la somma della resistenza interna del generatore più la resistenza del circuito esterno $R = \rho + R_{ext}$ (Fig.43). Tale potenza coincide

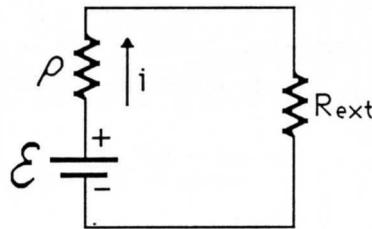


Fig.I.43

con il lavoro per unità di tempo fatto dal generatore: infatti per la seconda legge di Kirchhoff

$$i = \frac{\mathcal{E}}{\rho + R_{ext}} = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

e pertanto

$$i^2 \cdot R = \mathcal{E} \cdot i \quad (\text{I.98})$$

La potenza $\mathcal{E} \cdot i$ rappresenta proprio il lavoro per unità di tempo fatto dal generatore: infatti (vedi (21)), abbiamo già mostrato che la fem \mathcal{E} coincide col lavoro complessivo fatto dal generatore sulla carica unitaria, ovvero che il campo elettrico conservativo necessariamente compie un lavoro complessivamente nullo (positivo all'esterno del generatore, negativo al suo interno) e che l'unica forza che fa lavoro è quella del campo del generatore. La (98) ci suggerisce che la massima potenza che un generatore può erogare è data da $\mathcal{E} \cdot i_{max}$ dove $i_{max} = \frac{\mathcal{E}}{\rho}$ ($R_{ext} = 0$). Così avremo:

$$W_{max} = \frac{\mathcal{E}^2}{\rho} \quad (\text{I.99})$$

In queste condizioni tutta la potenza finisce in calore dissipato all'interno del generatore medesimo. Quasi sempre ha interesse, viceversa, poter disporre di potenza sul carico. Detta $W_{ext} = i^2 \cdot R_{ext}$ tale potenza, guardiamo quando questa è massima (in funzione di R_{ext}):

$$W_{ext} = i^2 \cdot R_{ext} = \frac{\mathcal{E}^2}{(R_{ext} + \rho)^2} \cdot R_{ext} \quad (\text{I.100})$$

Imponendo che $\frac{\partial W_{ext}}{\partial R_{ext}} = 0$ si trova

$$R_{ext} = \rho \quad (\text{I.101})$$

cioè il massimo trasferimento di potenza dal generatore al carico si ha quando la resistenza del carico è uguale alla resistenza interna del generatore. In questo caso la potenza erogata dal generatore vale (vedi (98) e (101))

$$\mathcal{E} \cdot \frac{\mathcal{E}}{2\rho} = \frac{W_{max}}{2} \quad (\text{I.102})$$

cioè metà di quella massima possibile.

La conclusione alla quale si è giunti è generale e non dipende dal fatto che il carico sia una resistenza, o un altro tipo di conduttore non ohmico. Infatti, detta V la caduta di tensione sul collegamento esterno (Fig.44) abbiamo, per la seconda legge di Kirchhoff, applicata senza esplicitare la ddp V sotto forma di caduta:

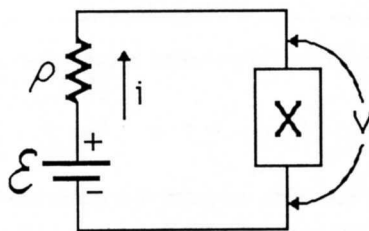


Fig.I.44

$$i = \frac{\mathcal{E} - V}{\rho} \quad (\text{I.103})$$

e pertanto il lavoro fatto per unità di tempo dal generatore sul carico è dato da

$$W_{ext} = Vi = \frac{V\mathcal{E} - V^2}{\rho} \quad (\text{I.104})$$

Se si vuole massimizzare W_{ext} rispetto a V si trova

$$V = \frac{\mathcal{E}}{2} \quad (\text{I.105})$$

cui corrisponde la corrente $i = \frac{\mathcal{E}}{2\rho}$ come precedentemente trovato.

Affinché questa ultima osservazione non sembri una pura speculazione e per mostrare come non sempre il lavoro fatto da un generatore finisce nel solo effetto Joule, consideriamo il caso in cui il generatore di fem \mathcal{E} (con resistenza interna ρ) sia collegato a un motore elettrico in corrente continua. Anticipando un risultato che sarà dimostrato e ampiamente discusso nel Cap.XX,§7, si trova che, con buona approssimazione, durante il suo movimento, il motore presenta fra i due morsetti A e B una ddp V_M (Fig.45)

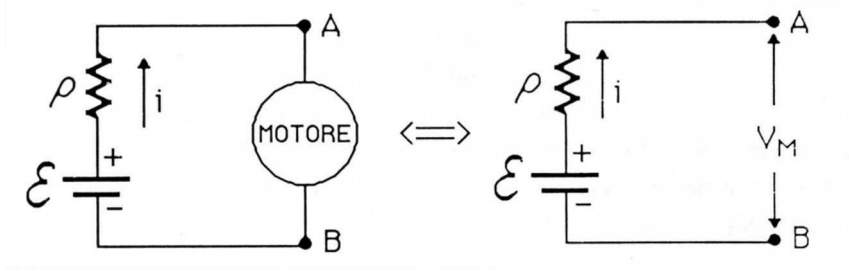


Fig.I.45

proporzionale alla velocità angolare del suo albero ω e che la coppia meccanica τ , che il motore è in grado di sviluppare, è proporzionale alla corrente che passa nel suo avvolgimento, ovvero i . Più precisamente, trascurando la resistenza ohmica dell'avvolgimento del motore rispetto a ρ , si trova:

$$\begin{cases} V_M = \omega \cdot G \\ \tau = i \cdot G \end{cases} \quad (\text{I.106})$$

con G costante. Dalle (106) si ricava per la potenza meccanica

$$W_{Mec} = \tau \cdot \omega = V_M \cdot i \quad (\text{I.107})$$

ovvero in questo caso la potenza elettrica erogata dal generatore sul carico esterno (il motore) va tutta in potenza meccanica. La (105) ci assicura anche che tale trasferimento sarà massimo quando $V_M = \frac{\mathcal{E}}{2}$.

Tornando al caso generale di un carico qualsivoglia, è opportuno notare che quanto più è piccola la resistenza interna del generatore, tanto più grande sarà la potenza massima trasferibile, poiché, a parità di tensione sul carico ($\frac{\mathcal{E}}{2}$), tanto maggiore sarà la corrente ($\frac{\mathcal{E}}{2\rho}$).

Procedendo in maniera analoga o sfruttando l'equivalenza fra generatori di fem e di corrente, nel caso di un generatore di corrente i si trova che il massimo trasferimento di potenza verso il carico si ha quando la ddp V sul carico è pari a $\frac{i\rho}{2}$, cioè anche in questo caso quando la potenza si equipartisce fra generatore e carico.

10.— Un esempio di massimizzazione di trasferimento di potenza

Supponiamo di disporre di n generatori di fem tutti uguali fra loro, caratterizzati ognuno da una certa fem ϵ e resistenza interna ρ e sia dato un certo carico R al quale vogliamo trasferire la massima potenza possibile da parte dei generatori. Quale è la configurazione in cui disporre i generatori allo scopo di massimizzare la potenza trasferita al circuito esterno, ovvero -essendo fissata R - allo scopo di rendere massima la corrente I che circolerà in R ? Riprendendo un risultato trovato nel paragrafo precedente, osserviamo che se un generatore (ϵ, ρ) eroga una corrente pari a $\frac{\epsilon}{2\rho}$, ciò significa che il generatore sta trasferendo al circuito esterno la massima potenza possibile. Nel nostro caso di n generatori, se riusciamo a montare i generatori in modo che ognuno eroghi la corrente $\frac{\epsilon}{2\rho}$, siamo quindi nelle condizioni in cui il massimo trasferimento di potenza su R ($W_M = \frac{\epsilon^2}{4\rho} \cdot n$) può

avvenire. Supponiamo allora che ogni generatore eroghi questa corrente; allora le configurazioni per cui ciò può avvenire, sono esclusivamente serie di generatori in parallelo fra di loro con i generatori concordi; altri tipi di configurazione darebbero infatti luogo a dissimetrie fra i vari generatori, mentre la condizione di massimo trasferimento richiede che ogni generatore eroghi la stessa corrente $\left(\frac{\epsilon}{2\rho}\right)$, cioè ogni generatore deve essere esattamente nella stessa condizione di qualunque altro. Pertanto i gruppi di generatori in parallelo devono essere tutti costituiti dallo stesso numero n_p di generatori. Sia n_s il numero di questi gruppi posti in serie, ognuno di n_p generatori in parallelo (Fig.46).

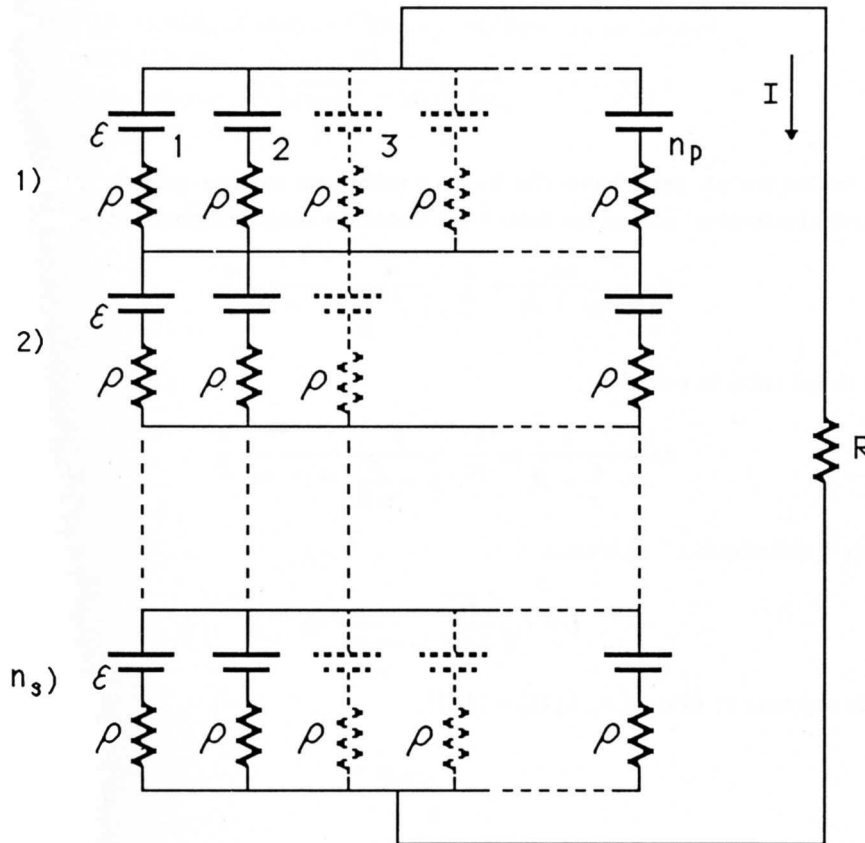


Fig.I.46

Dovrà quindi essere

$$n = n_s \cdot n_p \tag{I.108}$$

Il problema è trovare n_s (o n_p). Nell'ipotesi che la corrente su R sia la massima possibile sappiamo già che essa varrà:

$$I = \sqrt{\frac{W_M}{R}} = \sqrt{\frac{\epsilon^2 n}{4\rho R}} = \frac{\epsilon}{2} \sqrt{\frac{n}{\rho R}} \tag{I.109}$$

In ogni generatore circolerà quindi una corrente data da $\frac{I}{n_p}$ che a sua volta deve essere uguale a $\frac{\epsilon}{2\rho}$; abbiamo così

$$\frac{\epsilon}{2\rho} = \frac{\epsilon}{2n_p} \sqrt{\frac{n}{\rho R}} \tag{I.110}$$

cioè

$$n_p = \sqrt{\frac{n\rho}{R}} \quad (\text{I.111})$$

e pertanto

$$n_s = \frac{n}{n_p} = \sqrt{\frac{nR}{\rho}} \quad (\text{I.112})$$

A questo punto possiamo calcolarci sia la fem complessiva \mathcal{E} di questo insieme di generatori che la resistenza ρ_T complessiva:

$$\mathcal{E} = n_s \epsilon = \sqrt{\frac{nR}{\rho}} \cdot \epsilon \quad (\text{I.113})$$

$$\rho_T = n_s \cdot \frac{\rho}{n_p} = \sqrt{\frac{nR}{\rho}} \cdot \frac{\rho}{\sqrt{\frac{n\rho}{R}}} = R \quad (\text{I.114})$$

Abbiamo cioè realizzato un generatore che ha una resistenza interna proprio uguale a quella del carico. Si osservi che se avessimo messo tutti i generatori in serie avremmo ottenuto

$$I_S = \frac{n\epsilon}{n\rho + R} = \frac{\epsilon}{R} \cdot \frac{n}{1 + \frac{n\rho}{R}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\epsilon}{\rho} \quad (\text{I.115})$$

Se li avessimo messi tutti in parallelo

$$I_P = \frac{\epsilon}{\frac{\rho}{n} + R} = \frac{\epsilon}{R} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\rho}{nR}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\epsilon}{R} \quad (\text{I.116})$$

Nel nostro caso “ottimizzato” abbiamo:

$$I = \epsilon \sqrt{\frac{n}{4\rho R}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \quad (\text{I.117})$$

Riprendendo le espressioni di n_s e n_p (112) e (111)

$$n_s = \sqrt{\frac{nR}{\rho}}$$

$$n_p = \sqrt{\frac{n\rho}{R}}$$

si vede che se $\rho \ll R$ conviene fare una serie di molti gruppi ognuno costituiti di pochi generatori in parallelo e viceversa se $\rho \gg R$. Quando $R = \rho$ allora il numero di generatori che compongono ogni singolo parallelo deve essere uguale al numero dei gruppi che compongono la serie.

Il caso ora considerato non è puramente speculativo: in una centrale elettrica con n celle fotovoltaiche (n davvero assai grande) si presenta un problema analogo a quello sopra esposto, essendo R il carico costituito dalle utenze della centrale.

NOTA BIBLIOGRAFICA

Per i concetti fondamentali dell'elettrostatica si possono consultare **FR 71**, **FE 63**, **PA 62**, **JA 75**. Una trattazione dettagliata (spesso un po' formale) delle reti lineari si può trovare su **FR 59** e

AL 60, **DE 69** e **SC 87** sono fra i testi più completi ed esaurienti sull'argomento delle reti lineari. Il Cap.3 di **FR 71** è una ottima introduzione allo studio del moto delle cariche elettriche. Per le proprietà dei conduttori si veda il Cap.4 di **FR 71** e il Cap.1 di **MI 72**; in entrambi i casi si tratta di esposizioni di fenomenologia che non entrano in eccessivi dettagli di struttura della materia, ma consentono di cogliere i fatti fisici fondamentali.

Se si vuole approfondire il problema del campo elettrico nei conduttori percorsi da corrente e della carica elettrica superficiale responsabile del campo medesimo, si veda ad esempio:

- a) Seely: "Introduction to Electromagnetic Fields"
International Student Ed. (1958)
Sect. 5.5.
- b) Rosser: "Magnitude of surface Charge Distributions associated
with Electron Current Flow"
Am. Journ. of Phys. **38** (1970), **265**
e articoli qui citati.

II

IL GALVANOMETRO DI DEPREZ - D'ARSONVAL

1.— *Interazione fra corrente elettrica e campo di induzione magnetica*

In questo capitolo studieremo il principio di funzionamento e le caratteristiche costruttive del *Galvanometro di Deprez- d'Arsonval*; troveremo che quando fra i due terminali, di cui lo strumento è dotato, passa una corrente i , è osservabile lo spostamento di un indice, proporzionale alla corrente i medesima. Il galvanometro di Deprez-d'Arsonval (nel seguito semplicemente: *galvanometro*) è pertanto un misuratore di corrente; esso è stato, a partire dal secolo scorso fino a qualche decennio fa, *lo strumento base* di quasi tutte le misure elettriche.

Per studiare il funzionamento del galvanometro bisogna innanzitutto ricordare la 2^a legge di Laplace: essa stabilisce che fra la corrente e il campo di induzione magnetica esiste una interazione, secondo la quale l'elemento $d\vec{l}$ del conduttore filiforme percorso da una corrente i è sottoposto a una forza pari a

$$d\vec{F} = i d\vec{l} \wedge \vec{B} \quad (\text{II.1})$$

dove \vec{B} è il campo di induzione magnetica nel punto ove si considera il $d\vec{l}$; $d\vec{l}$ ha direzione e verso uguale a quello dei portatori di carica positivi che danno luogo alla corrente i (o *darebbero* se i portatori sono negativi). Da richiamare è anche la legge di Faraday sull'induzione: se il flusso del vettore induzione magnetica $\Phi_S(\vec{B}) = \oint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS$ attraverso una qualunque superficie S che si appoggi a una maglia di un circuito varia nel tempo, allora nella maglia del circuito si genera una fem

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_S(\vec{B})}{dt} \quad (\text{II.2})$$

Si noti che questa fem, in genere, dipende dal tempo; ammettiamo che, nonostante ciò, si possano ancora applicare le leggi di Kirchhoff. Più avanti vedremo che questo è legittimo qualora le variazioni di \mathcal{E} si svolgano con tempi caratteristici molto maggiori del rapporto fra le dimensioni del circuito e la velocità della luce; in tutti i casi che affronteremo in questo corso, tale condizione sarà sempre ampiamente verificata.

2. – Principio di funzionamento del galvanometro: Statica

Il principio di funzionamento del galvanometro è illustrato con riferimento alla Fig.1: una bobina B di sottile filo di rame smaltato è

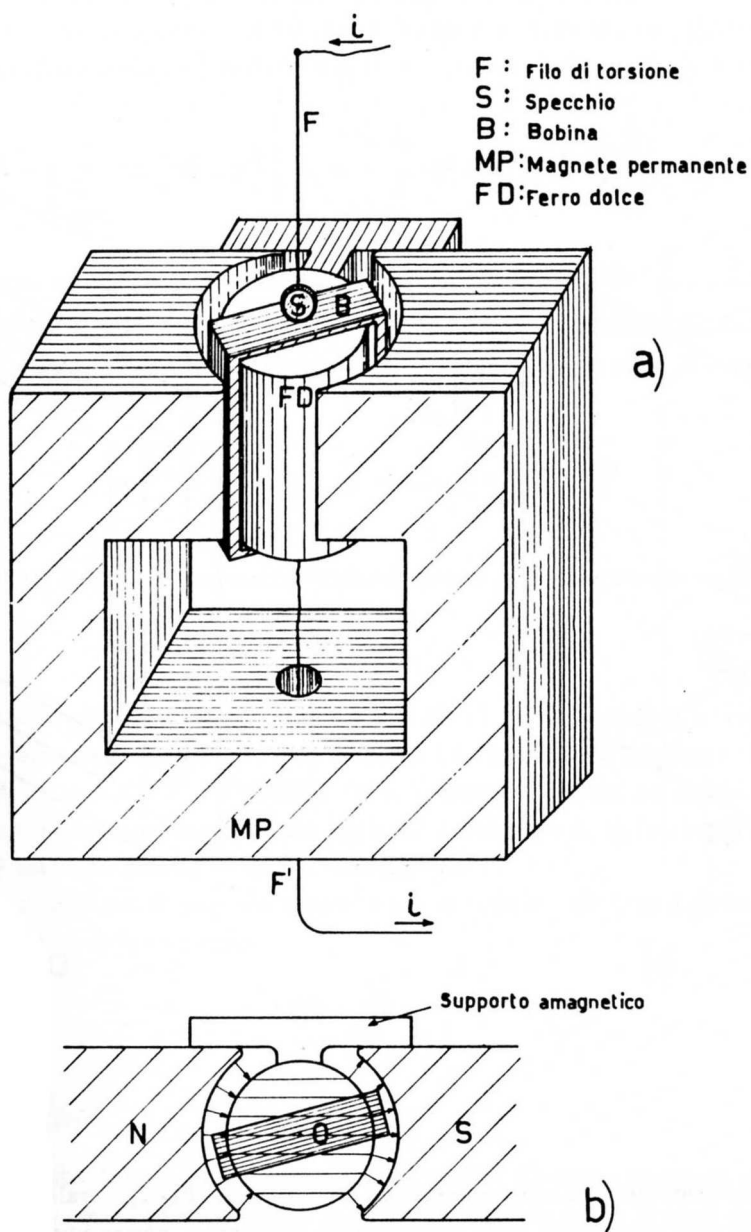


Fig.II.1

avvolta su un rocchetto sospeso a un filo F che presenta elasticità di torsione. Il filo di torsione e un ulteriore filo F', che non presenta viceversa alcuna particolare elasticità, portano corrente alla bobina. La bobina, sospesa in modo che l'asse di rotazione sia un asse principale di inerzia baricentrico, si muove nel breve spazio fra le espansioni polari di un magnete permanente MP e un

nucleo centrale di ferro dolce FD, mantenuto in una posizione fissa rispetto al magnete tramite un supporto amagnetico. Questa struttura fa sì che il campo nel sottile traferro sia elevato (ordine di grandezza $10^{-1}T$) e diretto radialmente (verso il centro O, vedi Fig.1b); inoltre, data la simmetria, il campo è costante in modulo nel traferro, su una circonferenza di centro O. S è uno specchietto solidale con la bobina, la cui funzione sarà spiegata più avanti.

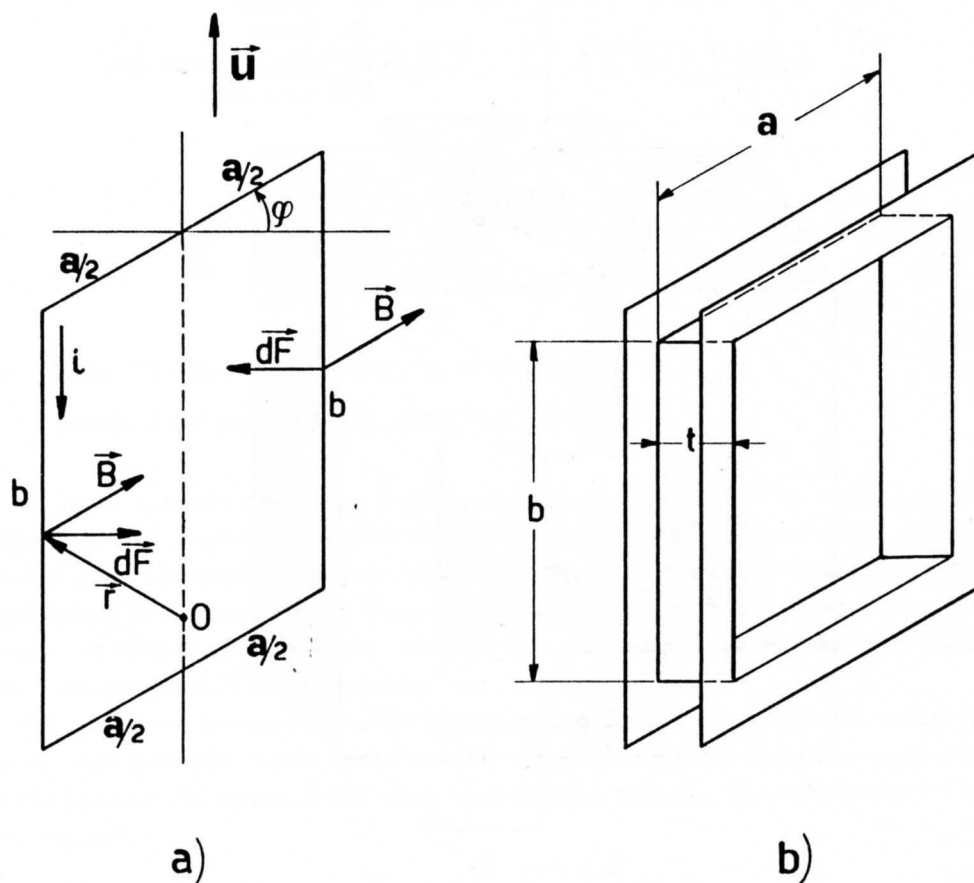


Fig.II.2

Consideriamo ora una spira qualunque della bobina (Fig.2) e tralasciamo di disegnare la struttura del circuito magnetico; sulla spira, punto per punto, agisce una forza che se secondo la (1) vale:

$$d\vec{F} = i d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

essendo i la corrente che circola nella spira. Da quanto detto sopra, il campo \vec{B} nei tratti lunghi b è diretto ortogonalmente a i e giace sul piano della spira (stiamo trascurando cioè lo spessore t della bobina (vedi Fig.2b) ove è disegnato il rocchetto); pertanto le forze sono dirette ortogonalmente al piano della bobina e da parti opposte nei due tratti, come in figura. Quanto ai tratti lunghi a , il

campo \vec{B} giace ancora sul piano della spira, pur con una componente non nulla diretta lungo il filo (che però non dà contributo alla forza); la simmetria della struttura continua ad assicurare l'assenza di componenti di \vec{B} ortogonali al piano della spira. Pertanto anche i lati lunghi a contribuiscono con forze perpendicolari al piano della spira. A causa della struttura del circuito magnetico, nei tratti lunghi a il campo di induzione è certamente molto più debole che non nei tratti lunghi b ; pertanto in prima approssimazione trascuriamo queste forze, salvo poi tornare sull'argomento dopo aver trovato una soluzione approssimata per il momento assiale che agisce sulla bobina. Le forze che agiscono sui tratti lunghi b danno chiaramente risultante nulla, ma momento risultante diverso da zero. Calcoliamoci quindi il momento assiale di queste forze, essendo l'asse quello di sospensione:

$$\tau_u^{(a)} = \left[\oint_{\text{spira}} \vec{r} \wedge (i d\vec{l} \wedge \vec{B}) \right] \cdot \vec{u} = - \oint_{\text{spira}} (\vec{r} \wedge \vec{u}) \cdot (i d\vec{l} \wedge \vec{B}) \quad (\text{II.3})$$

dove \vec{r} è il vettore che unisce un punto O qualunque dell'asse con il $d\vec{l}$ considerato e \vec{u} è il versore dell'asse. Si noti che per i tratti b , $\vec{r} \wedge \vec{u}$ rappresenta un vettore di modulo pari ad $\frac{a}{2}$ e diretto antiparallelamente a $d\vec{F} = i d\vec{l} \wedge \vec{B}$. Inoltre in questi tratti della spira $d\vec{F} = i d\vec{l} \wedge \vec{B}$ è un vettore di modulo $iBdl$. Dalla (3) si ha allora

$$\tau_u^{(a)} = \frac{iaB}{2} \int_{\text{tratti } b} dl = iabB \quad (\text{II.4})$$

Ponendo $a \cdot b = S$, superficie della spira, possiamo scrivere questo momento assiale come

$$\tau_u^{(a)} = iSB \quad (\text{II.5})$$

indipendente dall'angolo φ di rotazione della bobina attorno al suo asse di sospensione (vedi Fig.2a), purché φ sia tale che la bobina resti sempre confinata nella zona del traferro. Il momento che agisce su una singola spira è quindi proporzionale alla corrente che la percorre. Se avessimo considerato anche le forze sui lati corti, avremmo trovato un contributo aggiuntivo al momento, anch'esso proporzionale a i e positivo, ancorché assai più piccolo di quello ora calcolato.

Le spire in realtà sono assai più di una, diciamo n , e per ognuna di esse vale il risultato (5); sul complesso nella bobina agirà quindi una coppia:

$$\tau_i = inSB = iG \quad (\text{II.6})$$

con:

$$G = nSB \quad (\text{II.7})$$

Nel dedurre la (6) è stata introdotta una approssimazione, poiché abbiamo supposto che tutte le spire avessero esattamente la stessa geometria; tuttavia, anche tenendo conto di ciò e dell'altra approssimazione già discussa, possiamo dire che la proporzionalità fra momento e corrente è comunque preservata e tutt'al più la costante G ha un valore leggermente diverso da quello dell'espressione (6).

Se supponiamo ora che il nostro sistema sia all'equilibrio, cioè che una corrente i circoli nel galvanometro da un tempo indefinitamente lungo e che la coppia antagonista $-E\varphi$ prodotta dal filo si opponga esattamente a iG , avremo $\left(\sum_k \tau_{u_k}^{(a)} = 0 \right)$

$$E\varphi = inSB \quad (\text{II.8})$$

per cui:

$$i = \frac{E}{nSB} \varphi = \frac{E}{G} \varphi = K_r \varphi \quad (\text{II.9})$$

cioè la deflessione rispetto alla posizione di riposo $\varphi = 0$ (ad esempio coincidente con la direzione Nord-Sud del campo di induzione nel nucleo di ferro dolce (vedi Fig.1b) è proporzionale alla corrente. K_r è detta *Costante reometrica* ed è tanto più piccola quanto più sensibile è il galvanometro. I valori della costante K_r variano, a seconda dei galvanometri, entro vasti limiti; come ordine di grandezza diciamo che essi possono arrivare –al minimo– fino a qualche $10^{-6} \frac{A}{rad}$.

Lo strumento ora descritto è caratterizzato da una meccanica di precisione, quindi è assai delicato e deve essere montato in bolla, su un piano orizzontale privo di vibrazioni, in modo che la bobina sia effettivamente libera di muoversi nel sottile traferro. Il problema di effettuare la lettura dello spostamento angolare senza disturbare l'equipaggio mobile è risolto, negli strumenti più sensibili, col sistema della leva ottica (*metodo di Pogendorf*): un proiettore P (Fig.3)

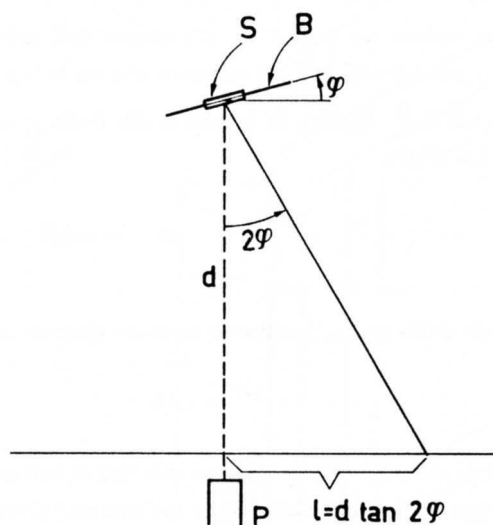


Fig.II.3

invia l'immagine di un crocifilo sullo specchio S solidale con la bobina B del galvanometro; la direzione del fascetto riflesso forma pertanto con la direzione di incidenza un angolo 2φ , se φ è l'angolo di cui la bobina è ruotata rispetto alla posizione di riposo. La quantità che si misura è lo spostamento dell'immagine del crocifilo, riflessa sullo specchio, che si forma su una scala graduata posta a una distanza d dall'asse del galvanometro (generalmente la stessa del proiettore). Meglio di una scala lineare funzionerebbe una scala circolare con centro sull'asse della bobina, cosicché la relazione di proporzionalità fra corrente e spostamento risulterebbe valida su tutto il campo angolare. Nel caso di una scala lineare avremo invece:

$$l = d \tan 2\varphi \quad (\text{II.10})$$

e pertanto

$$\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{atan} \frac{l}{d} \quad (\text{II.11})$$

Per angoli piccoli la (10) può essere approssimata come

$$l = d \cdot 2\varphi \quad (\text{II.12})$$

e in questo caso è più comodo definire una costante reometrica k_r , nelle unità $\frac{A}{[l]}$ anzichè $\frac{A}{rad}$ in quanto la lunghezza è la quantità direttamente misurabile:

$$i = K_r \varphi = K_r \cdot \frac{l}{2d} = k_r l \quad (\text{II.13})$$

Qualora le elongazioni siano tali che non è più legittimo confondere l'angolo con la tangente, porremo

$$i = \frac{K_r}{2} \operatorname{atan} \frac{l}{d} = k_r d \operatorname{atan} \frac{l}{d} \quad (\text{II.14})$$

Tipici valori per d ed l possono essere $d \simeq 1 \text{ m}$, $l \simeq 0 \div 20 \text{ cm}$, con k_r dell'ordine di $10^{-9} \div 10^{-7} \frac{A}{mm}$. Esistono anche versioni molto compatte di galvanometri da banco che in uno stesso contenitore hanno sia l'equipaggio mobile che il sistema di lettura a leva ottica con la scala già tarata in corrente: in laboratorio esistono strumenti di questo tipo e hanno una sensibilità massima di 100 nA/divisione .

3.— Principio di funzionamento del galvanometro: Dinamica

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che se in un galvanometro circola una corrente i e se il sistema è a regime, lo spostamento angolare dell'equipaggio è proporzionale alla corrente i . In questo paragrafo studiamo il problema di come il galvanometro raggiunge tale situazione di regime una volta che, partendo da condizioni di riposo, lo si inserisca nel circuito di misura. Tale problema ha interesse almeno da due punti di vista: *primo*, che se si vogliono ridurre i tempi di misura della corrente, occorre conoscere la dipendenza del moto del galvanometro dai parametri del circuito di misura in cui lo strumento è inserito; *secondo*, che la conoscenza della dinamica del galvanometro è fondamentale per applicazioni dove lo strumento è adoperato nella misura di carica (Cap.VI).

Da un punto di vista elettrico il galvanometro, almeno finché è a riposo, è assimilabile a una resistenza, quella della bobina; pertanto, una volta che il galvanometro sia fermo, il circuito dove esso è inserito potrà *sempre* mettersi nella forma della Fig.4 dove i è la corrente che circola nel galvanometro (simbolo \odot).

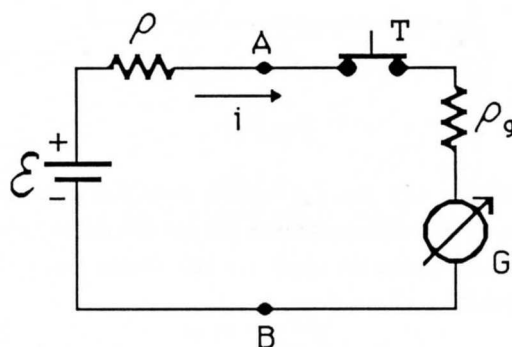


Fig.II.4

Il teorema di Thévenin ci assicura infatti che i due terminali A e B fra cui lo strumento viene inserito, potranno sempre schematizzarsi tramite il loro circuito equivalente. La resistenza ρ_g tiene

conto della resistenza dell'avvolgimento, mentre T rappresenta un tasto in grado di interrompere la corrente nel circuito. Nella Fig.4 T è rappresentato chiuso, cioè è equivalente a un corto circuito (resistenza 0) e nel circuito circola quindi una corrente

$$i = \frac{\mathcal{E}}{\rho + \rho_g} \quad (\text{II.15})$$

cui lo strumento risponde con una elongazione statica $\varphi_s = \frac{i}{K_r}$ (vedi(9)). Supponiamo ora invece che il tasto T sia aperto da un tempo indefinitamente lungo: il galvanometro è allora a riposo nella posizione di equilibrio in quanto $i = 0$. Al tempo $t = 0$ chiudiamo quindi il tasto T e studiamo il moto del sistema con le condizioni iniziali $\varphi(0) = 0$ e $\dot{\varphi}(0) = 0$. Per risolvere il problema in esame, ovvero del moto del galvanometro determinato da $\varphi(t)$, occorre individuare tutti i momenti assiali τ_k agenti sulla bobina e porre:

$$\mathcal{J}\ddot{\varphi} = \sum_k \tau_k \quad (\text{II.16})$$

dove \mathcal{J} è il momento di inerzia della bobina rispetto all'asse (che ricordiamo essere un asse principale di inerzia baricentrico).

Fra le coppie applicate sicuramente vi è la coppia di richiamo $-E\varphi$. Inoltre durante il moto agirà una coppia resistente dovuta allo smorzamento dell'aria; supponiamo che essa sia di tipo viscoso: $-C\dot{\varphi}$. Il generatore invia una corrente $i = \frac{\mathcal{E}}{\rho + \rho_g}$ che, secondo la (6), dà luogo a un momento assiale pari a $Gi = nSBi$. Esiste infine un altro termine che tiene conto del fatto accennato nel §1: poiché il flusso $\Phi(\vec{B})$ tagliato dal circuito varia, sorge una forza elettromotrice $\mathcal{E}_\phi = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$, in serie col generatore \mathcal{E} medesimo. Concludendo possiamo dire che il circuito in studio è quello di Fig.5.

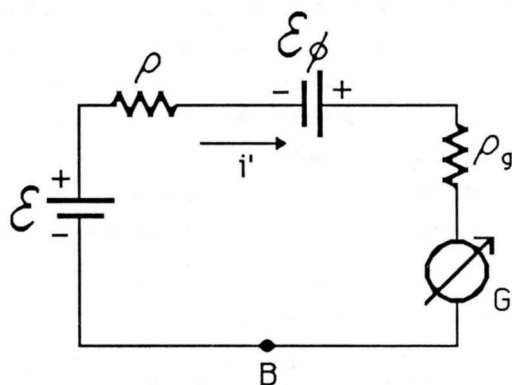


Fig.II.5

Poiché il tempo caratteristico con cui \mathcal{E}_ϕ varia è dato dal periodo del galvanometro, cioè è dell'ordine di qualche secondo, ovvero estremamente più grande del rapporto fra le dimensioni tipiche del circuito e la velocità della luce, possiamo applicare alla nostra maglia la prima legge di Kirchhoff. La corrente istantanea nel circuito è allora data da

$$i' = \frac{\mathcal{E} + \mathcal{E}_\phi}{\rho + \rho_g} = i + i_\phi \quad (\text{II.17})$$

che dà pertanto luogo a una coppia sulla bobina del galvanometro pari a (vedi (6)):

$$\tau_i = Gi + Gi_\phi \quad (\text{II.18})$$

La (17) è un'approssimazione –peraltro molto buona– di una espressione un po' più complicata che tiene in conto anche il cosiddetto *coefficiente di autoinduzione* della bobina (ma questo lo impareremo molto più avanti, nel Cap. XX, §6).

Se supponiamo ora che non esistano altre coppie applicate alla bobina, possiamo finalmente scrivere:

$$\mathcal{J}\ddot{\varphi} = -E\varphi - C\dot{\varphi} + Gi + Gi_{\phi} \quad (\text{II.19})$$

Per definire completamente il problema occorre ancora determinare \mathcal{E}_{ϕ} e poi, tramite la (17) i_{ϕ} . Consideriamo allora la bobina nel traferro, con riferimento a una singola spira (Fig.6).

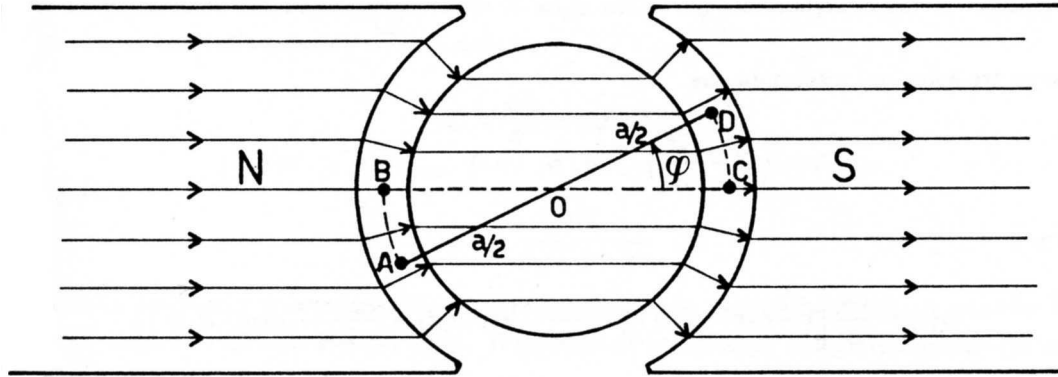


Fig.II.6

E' evidente dal disegno che il flusso di \vec{B} concatenato con la spira dipende da φ : per $\varphi = 0$ esso è nullo e cresce all'aumentare di φ . Per calcolarlo in una generica posizione φ , possiamo ricorrere alla proprietà che $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, ovvero che il vettore \vec{B} è solenoidale e pertanto il flusso attraverso un qualunque contorno non dipende dalla forma della superficie che si appoggia su di esso e che viene scelta per effettuare il calcolo. Come superficie che si appoggia alla spira scegliamo quindi quella tratteggiata in Fig.6 (in realtà nella figura se ne vede solo una sezione; la dimensione ortogonale al piano della figura è b). Il flusso in ognuno dei tratti AB e CD, tenendo conto della dimensione normale al foglio, vale $\frac{a}{2} \cdot b \cdot \varphi \cdot B$ (si ricordi che $B = \text{cost}$ su circonferenze centrate in O e che la normale positiva ha la stessa orientazione rispetto a \vec{B} nei due tratti considerati), mentre il contributo nel tratto BC è nullo. Il segno positivo del flusso deriva dalla convenzione scelta per il verso della corrente (vedi Fig.2a) e per φ . Essendo n le spire:

$$\Phi(\vec{B}) = nSB\varphi = G\varphi \quad (\text{II.20})$$

e conseguentemente

$$\mathcal{E}_{\phi} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -G\dot{\varphi} \quad (\text{II.21})$$

e per la (15) e la (17):

$$i_{\phi} = -\frac{G\dot{\varphi}}{\rho + \rho_g} \quad (\text{II.22})$$

L'equazione che regola il moto può così mettersi nella forma definitiva ($R = \rho + \rho_g$):

$$\mathcal{J}\ddot{\varphi} + \left(C + \frac{G^2}{R}\right)\dot{\varphi} + E\varphi = Gi \quad (\text{II.23})$$

Il termine dato dalla (22) dà, come lo smorzamento dell'aria, un contributo di tipo viscoso; esso è detto *smorzamento elettrodinamico* ed è tanto più efficace quanto più piccola è la resistenza totale R su cui è chiuso il galvanometro.

Per risolvere l'equazione differenziale (23), si trova prima la soluzione dell'equazione omogenea associata; la si somma poi a un integrale particolare, cioè la soluzione statica (8) $\varphi_s = \frac{G}{E}i$ e infine, tramite le condizioni iniziali ($\varphi(0) = 0$ e $\dot{\varphi}(0) = 0$), si fissano le costanti arbitrarie introdotte nella soluzione omogenea. Senza entrare nei dettagli, posto:

$$\sigma_1 = \frac{\left(C + \frac{G^2}{R}\right)}{2\mathcal{J}} \quad e \quad \sigma_2 = \frac{\sqrt{\left|4E\mathcal{J} - \left(C + \frac{G^2}{R}\right)^2\right|}}{2\mathcal{J}} \quad (\text{II.24})$$

si trovano tre soluzioni a seconda che

$$\Delta = \left(C + \frac{G^2}{R}\right)^2 - 4\mathcal{J}E \quad > 0 \quad , \quad = 0 \quad , \quad < 0$$

I: $\Delta > 0$

$$\varphi(t) = \frac{Gi}{E} \left[1 - \exp(-\sigma_1 t) \cdot \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\sigma_2} \exp(\sigma_2 t) + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2\sigma_2} \exp(-\sigma_2 t) \right) \right] \quad (\text{II.25})$$

II: $\Delta = 0$

$$\varphi(t) = \frac{Gi}{E} [1 - \exp(-\sigma_1 t) \cdot (1 + \sigma_1 t)] \quad (\text{II.26})$$

III: $\Delta < 0$

$$\varphi(t) = \frac{Gi}{E} \left[1 - \exp(-\sigma_1 t) \cdot \left(\cos \sigma_2 t + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \text{sen } \sigma_2 t \right) \right] \quad (\text{II.27})$$

I tre tipi di moto sono detti *sottocritico*, *critico*, *sovra-critico* e corrispondono agli andamenti di Fig.7.

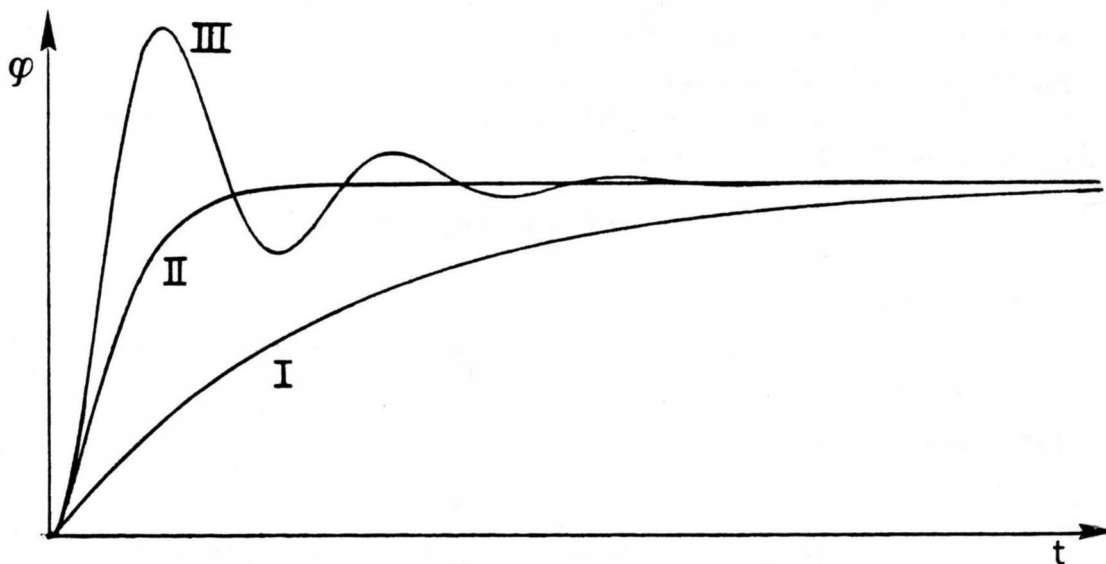


Fig.II.7

Nel primo tipo di moto (I) lo smorzamento elettrodinamico è così forte che non si osserva alcun carattere oscillatorio del moto; tale carattere è viceversa evidente nel moto sovracritico (III). Il moto critico (II) è anch'esso non oscillatorio ma $\varphi(t)$ si "avvicina" all'asintoto in un tempo inferiore rispetto agli altri due casi. La resistenza $R = R_c$ per cui si ha il moto critico è detta *Resistenza critica* ($R_c - \rho_g$ è detta *Resistenza critica esterna*).

In genere si cerca di lavorare con galvanometri che siano chiusi su una resistenza totale pari a quella critica in modo da avere tempi di risposta i più brevi possibile. In realtà, tenendo conto del fatto che la lettura può farsi anche quando la bobina oscilla intorno al valore asintotico, purchè con una ampiezza sufficientemente piccola, conviene lavorare in condizioni leggermente sovracritiche. Quanto all'espressione della resistenza critica R_c in funzione dei parametri del galvanometro, essa si può ottenere in base alla relazione che la definisce:

$$C + \frac{G^2}{R_c} = 2\sqrt{E\mathcal{J}} \quad (\text{II.28})$$

ottenendo:

$$R_c = \frac{G^2}{2\sqrt{E\mathcal{J}} - C} \quad (\text{II.29})$$

I valori della resistenza critica possono variare grandemente (da pochi Ω fino a qualche $k\Omega$), a seconda di come è realizzato lo strumento. Il periodo di oscillazione del galvanometro (in assenza di smorzamento) vale $T = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi\sqrt{\frac{\mathcal{J}}{E}}$ e valori abbastanza tipici sono di qualche secondo. In presenza di smorzamento $\omega = \sigma_2 = \sqrt{\omega_o^2 - \frac{(C + \frac{G^2}{R})^2}{4\mathcal{J}^2}}$ e quindi è leggermente più piccola di ω_o ; corrispondentemente il periodo cresce, seppur moderatamente. Nelle Figg.8 e 9 è riportato in grafico $\varphi = \varphi(t)$ in funzione del tempo e in funzione del parametro $\log \frac{R}{R_c}$. Si è ammesso che sia presente uno smorzamento dell'aria realistico. Le due figure differiscono solo per la scala dei tempi e il campo di variazioni di R . Il periodo è stato assunto essere $T = 6.3$ s.

4.— *Resistenza interna e costante reometrica* *Sensibilità amperometrica e voltmetrica*

Supponiamo di progettare un galvanometro e di volere massimizzare la sensibilità, vale a dire la deflessione angolare φ dell'equipaggio mobile, a parità di *eccitazione*; la dipendenza di $K_r = E/nSB$ dai vari parametri ci dice che conviene fare B il più grande possibile ed E la più piccola, compatibilmente con la massa dell'equipaggio, che deve essere comunque sorretto dal filo. La superficie S della bobina risulta determinata dalle dimensioni del circuito magnetico; S e la dimensione del traferro determinano in maniera pressoché rigida le dimensioni del rocchetto e quindi la quantità totale di rame dell'avvolgimento.

GALVANOMETRO

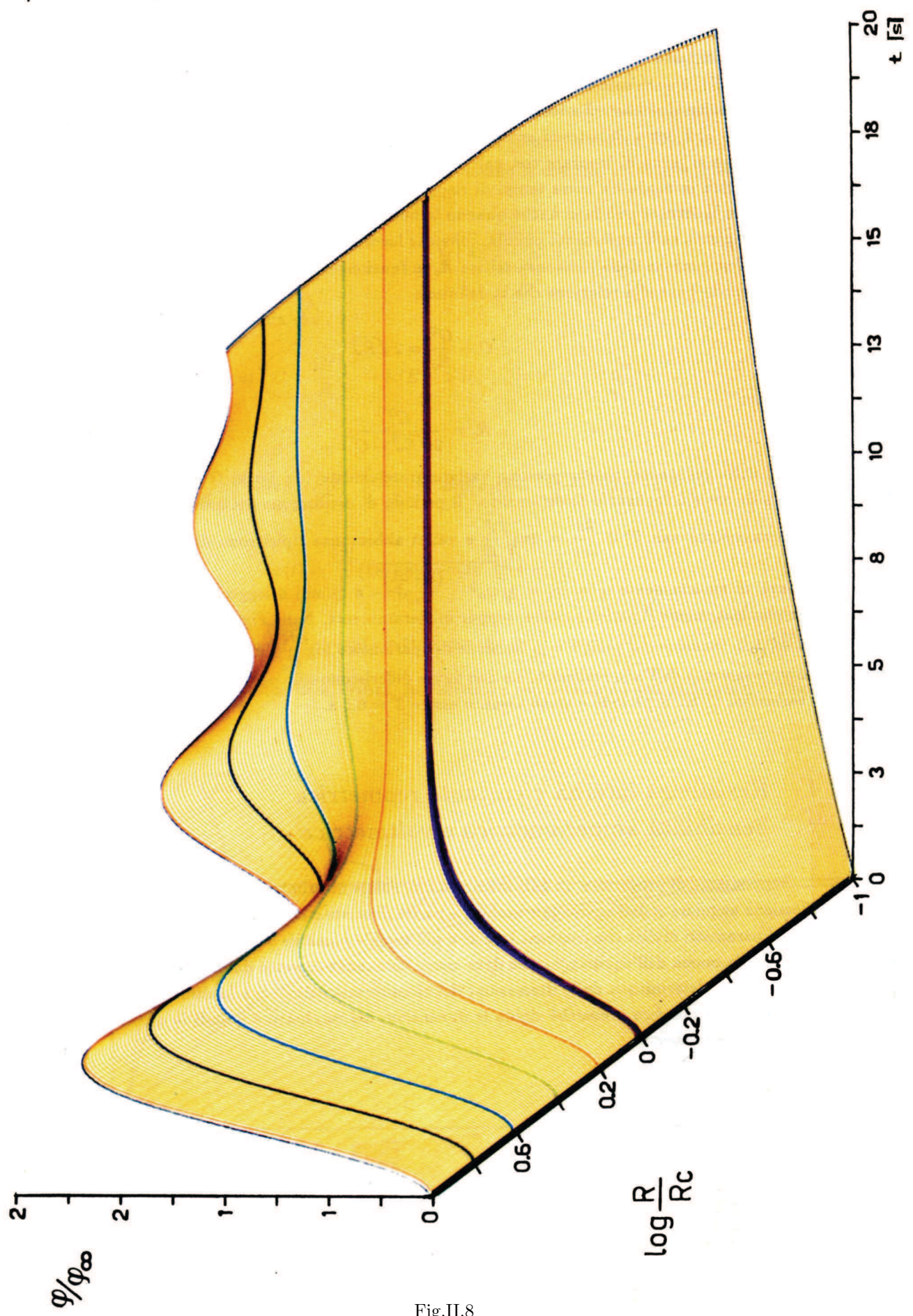


Fig.II.8

GALVANOMETRO

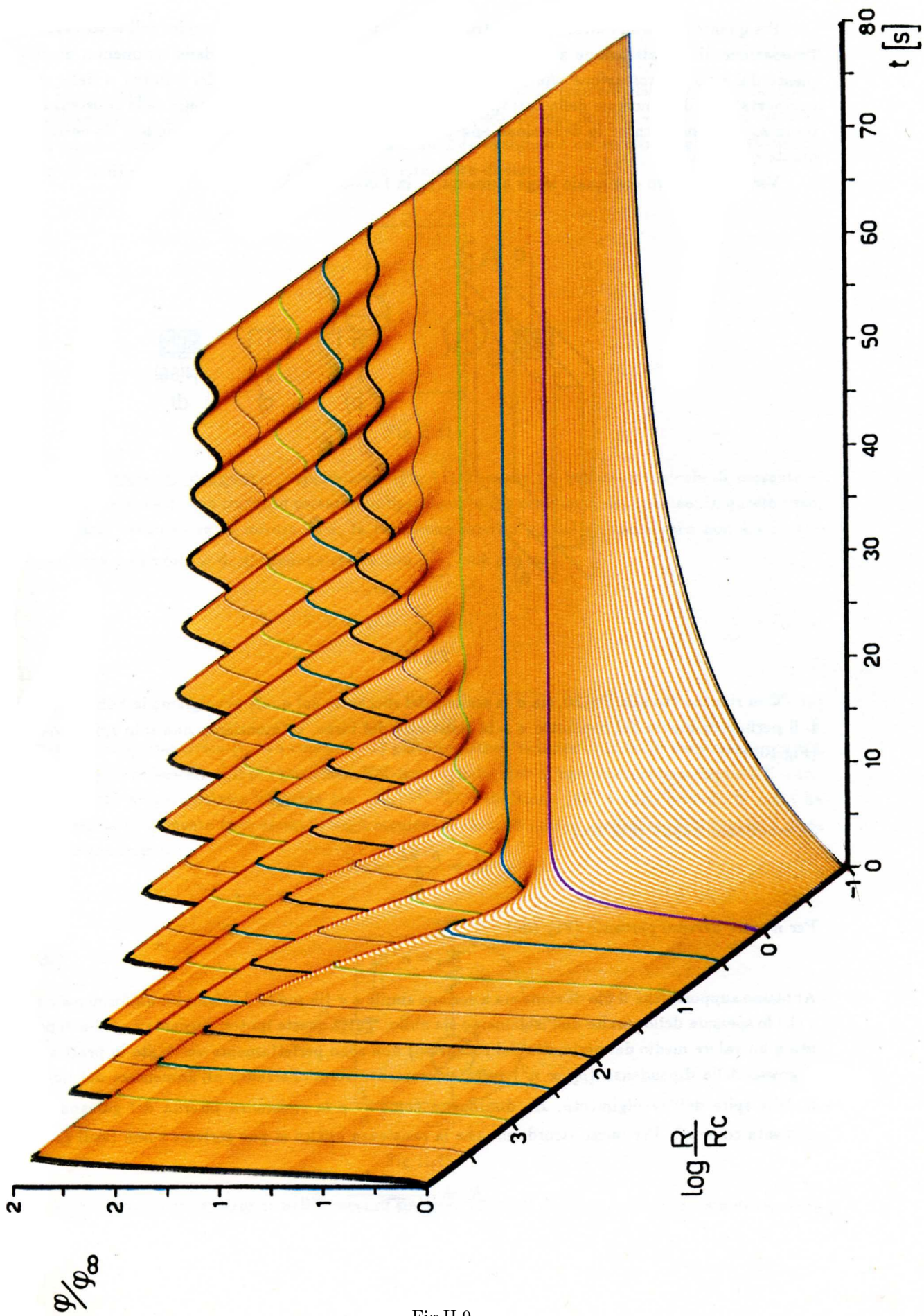


Fig.II.9

Per quanto riguarda l'ultimo parametro da fissare, ovvero il numero delle spire dell'avvolgimento, l'operazione di ottimizzazione non è univoca, ovvero dipende dall'utilizzo dello strumento, precisamente dal tipo di *eccitazione* che stiamo considerando; infatti l'aumento del numero n delle spire comporta sì la diminuzione della costante reometrica K_r , ma anche l'aumento della resistenza interna ρ_g dello strumento: la deflessione angolare, in linea di principio, può dipendere da entrambe queste quantità.

Vediamo intanto con quale legge aumenta ρ_g in funzione di n .

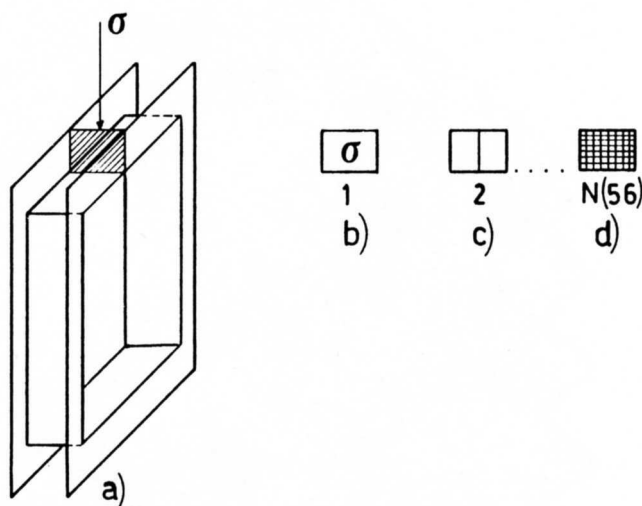


Fig.II.10

Con riferimento alla Fig.10, sia σ la sezione del rocchetto sul quale avvolgiamo la bobina. Detto L il perimetro medio del rocchetto e ρ la resistività del rame, se montiamo una sola spira avremo (Fig.10b)

$$R_1 = \frac{\rho \cdot L}{\sigma} \quad (\text{II.30})$$

Se montiamo 2 spire (Fig.10c)

$$R_2 = \frac{\rho \cdot 2L}{\frac{\sigma}{2}} = 4R_1 \quad (\text{II.31})$$

Per n spire avremo pertanto (Fig.10d)

$$R_n = n^2 R_1 \quad (\text{II.32})$$

Abbiamo supposto che il filo di rame sia a sezione simile a σ (in modo da riempire uniformemente σ) e che lo spessore dello smalto dell'isolamento sia nullo. Tutte queste ipotesi (insieme a quella di poter usare un valore medio del perimetro del rocchetto) non sono perfettamente verificate in pratica, ma il grosso della dipendenza ($\rho_g \propto n^2$) resta sicuramente vero. Pertanto all'aumentare del numero n delle spire dell'avvolgimento, K_r diminuisce come $\frac{1}{n}$ e la resistenza interna del galvanometro aumenta come n^2 . Per inciso ricordiamo che la resistenza critica si può scrivere come (vedi (29)):

$$R_c = \frac{G^2}{2\sqrt{E\mathcal{J}} - C}$$

e pertanto

$$R_c = kn^2 \propto \rho_g \quad (\text{II.33})$$

cioè la resistenza critica aumenta come la resistenza interna, al crescere del numero delle spire. Guardiamo ora quali sono le conseguenze degli andamenti trovati per K_r e per ρ_g nei riguardi della massimizzazione della sensibilità, considerando il galvanometro nei suoi impieghi caratteristici: misuratore di corrente, misuratore di tensione, rivelatore di zero.

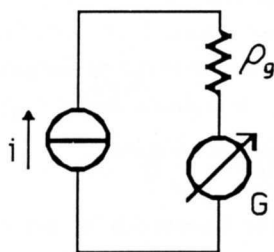


Fig.II.11

Misuratore di corrente: supponiamo (Fig.11) di avere un generatore ideale di corrente i , ovvero di disporre di una corrente costante indipendente dalla resistenza del circuito; in questo caso, se vogliamo ottimizzare la misura di i , la resistenza interna ρ_g del galvanometro non ha alcuna importanza e l'angolo φ di deflessione cresce con $\frac{1}{K_r}$, cioè con n :

$$\varphi = \frac{1}{K_r} i \propto n \quad (\text{II.34})$$

Detta

$$S_A = \frac{\partial \varphi}{\partial i_g} \quad (\text{II.35})$$

Sensibilità amperometrica ($i_g = i$ corrente nel galvanometro), si trova quindi che essa cresce con n e conviene quindi crescere n il più possibile. Nel caso attuale, cioè di uno strumento a risposta lineare, la sensibilità amperometrica coincide con $(K_r)^{-1}$. La definizione (35) è utile quando la scala ha una risposta non lineare (per esempio negli strumenti elettrodinamici, vedi Cap.XI), funzione della corrente medesima.

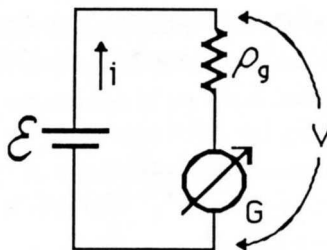


Fig.II.12

Misuratore di tensione: nell'ipotesi di disporre (Fig.12) di un generatore ideale di tensione \mathcal{E} , se vogliamo ottimizzare la misura di $\mathcal{E} = i \cdot \rho_g = V_g$ (V_g ddp ai capi del galvanometro) è chiaro che entrano in gioco sia la costante reometrica che la resistenza interna dello strumento:

$$\varphi = \frac{1}{K_r} i = \frac{1}{K_r \rho_g} \cdot V_g \propto \frac{1}{n} V_g \quad (\text{II.36})$$

Definita

$$S_V = \frac{\partial \varphi}{\partial V_g} \quad (\text{II.37})$$

Sensibilità voltmetrica, abbiamo che essa vale:

$$S_V = \frac{1}{K_r \rho_g} \quad (\text{II.38})$$

e diminuisce come $\frac{1}{n}$, cioè conviene avere poche spire.

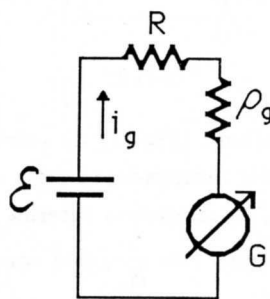


Fig.II.13

Questi risultati vanno visti come casi limite del caso generale (Fig.13) in cui il galvanometro è posto in serie a un generatore reale di tensione, cioè fra due terminali di una generica rete lineare di cui il generatore in questione rappresenta l'equivalente secondo Thévenin; alternativamente potremmo considerare l'equivalente di Norton dei due terminali, nel caso che preferissimo studiare il circuito mediante generatori di corrente anziché di fem. Anche in questo caso vogliamo massimizzare, rispetto al parametro n , la deflessione angolare, fissati i valori della fem e della resistenza di Thévenin, cioè il circuito esterno; in pratica questo caso corrisponde all'utilizzo del galvanometro quale

Rivelatore di zero, cioè per mettere in evidenza la più piccola possibile fem di Thévenin (ovvero la più piccola possibile corrente secondo Norton). Vedremo più avanti numerosi utilizzi del galvanometro quale Rivelatore di zero. Questa volta, data la resistenza finita del circuito esterno, la deflessione del galvanometro dipende sia da K_r che da ρ_g ; con riferimento alla Fig.13, abbiamo per i_g , corrente che circola nel galvanometro, e per φ , la deflessione osservata:

$$i_g = \frac{\mathcal{E}}{R + \rho_g} \quad (\text{II.39})$$

$$\varphi = \frac{1}{K_r} \cdot \frac{\mathcal{E}}{(R + \rho_g)} \quad (\text{II.40})$$

Esplicitando le dipendenze di K_r e ρ_g da n , abbiamo:

$$\varphi = \frac{nSB}{E} \cdot \frac{\mathcal{E}}{R + kn^2} \quad (\text{II.41})$$

e se vogliamo massimizzare φ rispetto a n troviamo:

$$0 = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \propto R + kn^2 - 2kn^2 \quad (\text{II.42})$$

Pertanto:

$$kn^2 = R \quad (\text{II.43})$$

cioè il massimo di deflessione (e quindi di sensibilità) si ha quando il numero delle spire n è tale da conferire al galvanometro una resistenza interna pari alla resistenza in serie al generatore. Questo è quanto dire che la massima deflessione possibile del galvanometro, si ha per il massimo trasferimento di potenza, vedi (I.101). Alla stessa conclusione si poteva anche giungere ragionando, meno formalmente, così: per avere la massima elongazione occorre avere il massimo momento $G \cdot i$ dovuto alla corrente; tenendo conto che $G \propto n$ e $\rho_g \propto n^2$ abbiamo $G \propto \sqrt{\rho_g}$ e pertanto dobbiamo massimizzare:

$$G \cdot i \propto \sqrt{\rho_g} \cdot \frac{\mathcal{E}}{R + \rho_g} = \sqrt{W_g} \quad (\text{II.44})$$

dove W_g rappresenta la potenza trasferita dal generatore al galvanometro

$$W_g = i_g^2 \cdot \rho_g = \frac{\mathcal{E}^2}{(R + \rho_g)^2} \cdot \rho_g \quad (\text{II.45})$$

Il caso ora descritto, di avere cioè la possibilità di fare diversi tipi di avvolgimento su uno stesso “kit” di galvanometro, non è un caso così peregrino come potrebbe sembrare; di fatto nei laboratori particolarmente attrezzati di qualche decennio fa, le misure che contemplavano l’uso del galvanometro come rivelatore di zero (*Ponti di Wheatstone* o *Potenziometri* ad esempio) venivano ottimizzate montando nel circuito quello della serie di galvanometri a disposizione (tutti uguali salvo il rocchetto) che aveva una resistenza interna di valore il più prossimo possibile a quello della resistenza equivalente di Thévenin presente fra i due terminali ove lo strumento andava inserito; ritorneremo sull’argomento quando tratteremo i sistemi di misura che contemplano azzeramenti di corrente.

Ora, possiamo invece a esaminare gli strumenti (*amperometri*, *voltmetri*, *ohmetri*) e i sistemi di misura basati sui galvanometri; nel seguito col termine *galvanometro* indicheremo soltanto quegli strumenti, particolarmente sensibili, che siano effettivamente costruiti come detto sopra, cioè con l’equipaggio sospeso a un filo di torsione e la lettura con leva ottica.

NOTA BIBLIOGRAFICA

Sul principio di funzionamento e le caratteristiche del Galvanometro di Deprez-d’Arsonval, si consiglia **LA 38. CO 85** è uno dei pochi testi moderni che tratta degli accorgimenti tecnici che i costruttori adottano (o forse meglio *adottavano*) per ottenere le caratteristiche volute di stabilità e precisione del galvanometro. I trattati di Fisica Generale della prima metà del novecento generalmente descrivono con dovizia di particolari tali strumenti (si veda ad esempio: OLLIVIER “Physique générale” (HERMANN) (1927).

Approfondimenti sul limite teorico della sensibilità del galvanometro si possono basare su:

- a) Ising: “A natural limit for the sensibility of galvanometers”
Phil. Mag. Vol 1 (1926)**827**
(lavoro teorico)
- b) Ornstein et al.: “The Brownian movement of a galvanometer coil and the influence of the temperature of the outer circuit”
Proc. Phys. Soc. Vol 115 (1927)**391**
(lavoro sperimentale).

III

GLI STRUMENTI A BOBINA MOBILE

1.— *Strumenti ad ago*

Il principio del Galvanometro di Deprez-d'Arsonval trova applicazione in quasi tutti gli strumenti ad ago per misure in corrente continua. Tuttavia negli strumenti ad ago ci sono alcune sostanziali differenze rispetto ai galvanometri descritti nel capitolo precedente, che rendono tali strumenti più semplici da adoperare e più robusti da maneggiare, il tutto a spese di una ridotta sensibilità. Innanzitutto l'equipaggio non è sospeso a un filo, bensì è montato su un alberino che ruota su due supporti fissi, spesso costituiti da rubini (come il bilanciere di un orologio). Ciò consente di montare, solidalmente con l'equipaggio, un ago contrappesato che permette la lettura, su una scala fissa con lo strumento, della grandezza in *Ampère* o *Volt* o *Ohm* (a seconda del circuito, come vedremo). La coppia di richiamo è prodotta da una molla a spirale. Lo strumento in questo modo diventa facilmente trasportabile anche se le misure, a motivo dei contrappesi sull'ago, vanno effettuate in una precisa posizione dello strumento rispetto alla verticale. La sensibilità è ridotta rispetto ai galvanometri prima descritti principalmente perché la costante di richiamo è assai più grande, per rendere piccolo l'effetto degli attriti dovuti ai supporti. Inoltre per rendere gli strumenti effettivamente trasportabili, i campi magnetici sono prodotti da *piccoli* magneti permanenti e conseguentemente la sezione S della bobina è relativamente contenuta.

2.— *Classe di uno strumento ad ago*

Supponiamo che il nostro strumento abbia una scala tarata in *Ampère* o in sottomultipli: in tal caso si parla propriamente di *Amperometro* (vedi Fig.1 dove è schematicamente rappresentato un *milliamperometro*).

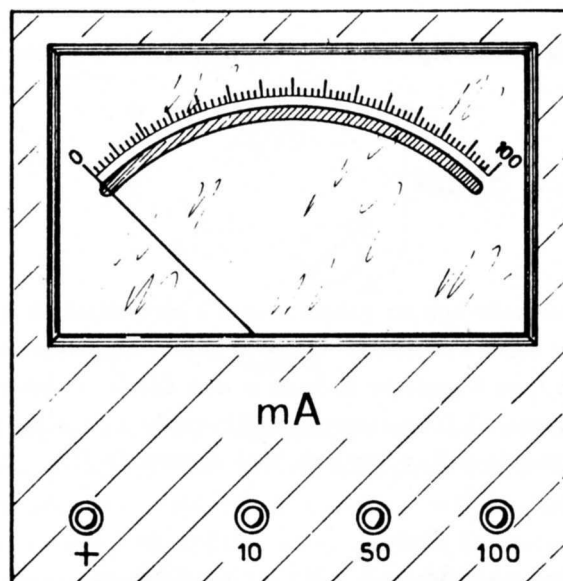


Fig.III.1

Per ridurre l'errore di lettura l'ago sarà sottile, così come le tacche della scala. Inoltre per eliminare l'errore di parallasse dovuto al fatto che scala e ago non sono sullo stesso piano, lo strumento disporrà di una scala a specchio. Con questi accorgimenti si può pensare che la lettura possa farsi a meno di $\sim 1/4$ della divisione più piccola. Tale indeterminazione si ripercuote direttamente sulla precisione della misura e dà un contributo costante su tutta la scala, indipendente cioè dal valore della corrente che misuriamo. Questa non è certamente l'unica delle indeterminazioni connesse con la misura. Infatti lo strumento medesimo contribuisce con un certo errore di *taratura*. Oltre all'errore di taratura vero e proprio, cioè la non perfetta adeguatezza della scala alla risposta dello strumento, ivi compresa l'eventuale non perfetta costanza di K_r in funzione di i , tale errore in genere ingloba altri contributi. Fra questi, la variazione della risposta dello strumento in funzione della temperatura e l'influenza un po' erratica degli attriti dei supporti possono avere una notevole importanza nello stabilire un limite alla precisione. Il costruttore in fase di progetto ed esecuzione dello strumento determina la precisione che lo strumento può garantire e fornisce al cliente l'informazione a riguardo, garantendo su tutta la scala una indeterminazione massima di valore costante. Convenzionalmente questa indeterminazione è data tramite la cosiddetta *Classe* dello strumento: con uno strumento di classe X, una misura fatta con una deflessione corrispondente al fondo scala ha un errore, dovuto alle imperfezioni di costruzione di cui si è detto, inferiore o uguale allo X% della lettura; tale errore resta costante in valore assoluto su tutta la scala. Con uno strumento di classe 1, misure fatte a fondo scala avranno un errore (di taratura) dell'1%, a metà scala del 2%, a un terzo della scala del 3% e così via. Pertanto, dato uno strumento di una determinata classe, le misure *a priori* più accurate sono quelle che danno deflessioni prossime al fondo scala: per esse infatti è minimo il contributo relativo dell'errore di taratura e di lettura.

Valori tipici della classe di strumenti da laboratorio sono $0.5 \div 1$; le scale su cui si effettua la lettura saranno di finezza adeguata, cioè tali da non compromettere la classe dello strumento; vale a dire il costruttore fornisce strumenti di classe piccola, cioè precisi, con scale più finemente divise (e quindi più ampie) di quelle di strumenti di classe più alta, ovvero meno precisi.

La classe dello strumento si legge sul quadrante nella forma di un piccolo numero, insieme ad altri simboli che forniscono informazioni sulle caratteristiche dello strumento; per i simboli e il loro

significato si rimanda alla tabella riportata nell'ultima pagina di questo volume.

3.— *Amperometri. Shunt*

Realizzare un *Amperometro* con un galvanometro è immediato, in quanto il galvanometro è di per sé uno strumento che misura corrente. Tuttavia questo amperometro, a causa della resistenza interna del galvanometro, non è perfetto o, come si dice *ideale*: se inseriamo lo strumento fra due terminali di una rete, resi accessibili interrompendo il ramo dove circolava una corrente I^* , la corrente I misurata, indipendentemente dalla precisione, sarà diversa da I^* .

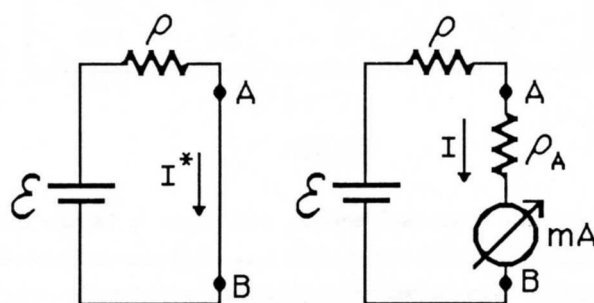


Fig.III.2

Infatti, con riferimento alla Fig.2, avremo

$$I^* = \frac{\mathcal{E}}{\rho} \quad (\text{III.1})$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{\rho + \rho_A} = I^* \left(\frac{1}{1 + \frac{\rho_A}{\rho}} \right) \quad (\text{III.2})$$

\mathcal{E} e ρ sono la fem e la resistenza equivalente del generatore di Thévenin fra i due terminali. La (2) ci dice che I è tanto più simile a I^* quanto più $\rho_A < \rho$. Il caso limite di $\rho_A = 0$ rappresenta l'amperometro ideale.

Il fatto che $I \neq I^*$ talvolta non costituisce neppure un problema, quando per esempio teniamo lo strumento fisso sul circuito e vogliamo conoscere proprio I . In ogni caso si tratta di un problema facilmente sormontabile: infatti, misurata I tramite la (2) possiamo risalire a I^* se sono note ρ_A e ρ .

Facciamo ora vedere che un amperometro *quasi-ideale* si realizza tanto più facilmente, a parità di sensibilità amperometrica, quanto più piccola è la resistenza interna del galvanometro utilizzato oppure, a parità di resistenza interna, quanto più sensibile è il galvanometro. La prima parte dell'affermazione è ovvia. Quanto alla seconda, supponiamo di avere due galvanometri A e B con la stessa resistenza interna ma con A 10 volte più sensibile di B. Usando A potremo avere la stessa deflessione che con B, ponendo in parallelo allo strumento (e quindi a $\rho_A = \rho_B$) una resistenza pari a $\frac{\rho_A}{9}$.

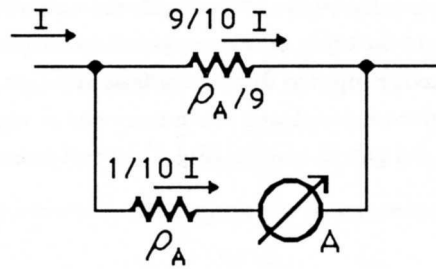


Fig.III.3

In questo modo (vedi Fig.3) la corrente entrante nei terminali dell'amperometro che utilizza A si divide nei due rami del parallelo e solo $1/10$ di essa passa effettivamente nel galvanometro. La resistenza totale dell'amperometro vista dal circuito è $\rho_A' = \frac{\rho_A}{10}$. Pertanto i due amperometri che utilizzano A e B danno, se attraversati dalla stessa corrente, la stessa indicazione, ma il primo inserisce fra i terminali di misura una resistenza 10 volte più piccola del secondo. Questo ora descritto è il più semplice dei cosiddetti "Shunt" (*derivazioni*) *.

I galvanometri hanno una sensibilità esorbitante rispetto alle intensità di corrente che di norma ha interesse misurare; pertanto lo shunt diventa spesso, nella realizzazione degli amperometri, una necessità. Non solo: lo shunt consente anche di lavorare con lo strumento chiuso su una resistenza prossima a quella critica R_C , con conseguente riduzione dei tempi di risposta dello strumento. Guardiamo come ciò si realizza: intanto va premesso che in una condizione realistica di misura di una corrente, si cerca di fare in modo che la resistenza complessiva dello strumento, cioè il parallelo dello shunt con la resistenza interna ρ_A vera e propria, sia molto minore della resistenza ρ del generatore equivalente di Thévenin; se questo non si verifica il regime di corrente è infatti fortemente influenzato dalla misura medesima e si rendono necessarie le correzioni (2).

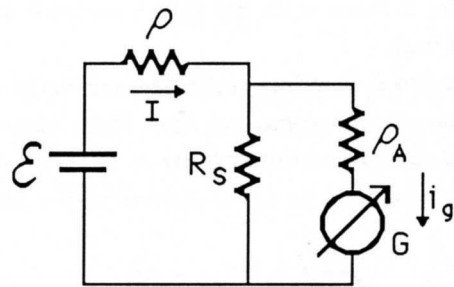


Fig.III.4

Ammettiamo di soddisfare allora questa condizione; pertanto in Fig.4 la resistenza vista dal galvanometro è:

$$\rho_A + R_S \parallel \rho \simeq \rho_A + R_S \quad (\text{III.3})$$

* Col termine *shunt* si indica propriamente la resistenza che si pone in parallelo a uno strumento per ridurne la sensibilità. Se il galvanometro A sopra descritto ha una corrente di fondo scala $I_{fs} = 10mA$, lo shunt descritto è detto "shunt da 100 mA". Si dice anche che lo shunt è caratterizzato da un rapporto 10.

Allora sarà possibile, scegliendo $\rho_A + R_S = R_C$ avere il galvanometro chiuso sempre su una resistenza assai vicina a quella critica, purché in tutte le misure in cui lo strumento è utilizzato, $\rho \gg R_S$. La richiesta $R_C = \rho_A + R_S$, definisce il rapporto di shunt e fissa il fondo scala dell'amperometro a un valore che può non essere particolarmente adatto alle misure che si vogliono compiere. L'aggiunta di una ulteriore resistenza nel ramo del galvanometro (Fig.5), ci restituisce il grado di libertà mancante, a spese della sensibilità.

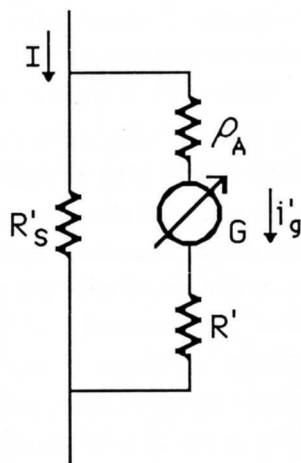


Fig.III.5

Le nuove condizioni saranno:

$$R_C = \rho_A + R' + R'_S \quad (\text{III.4})$$

$$i'_g = I \cdot \frac{R'_S}{R_C} \quad (\text{III.5})$$

La (5) determina il rapporto fra il fondo scala del galvanometro e il fondo scala dell'amperometro che lo utilizza come strumento base.

Con il sistema sopra descritto è possibile realizzare quello che si chiama *Shunt Universale* o *Shunt di Ayrton* (Fig.6) che ora descriveremo nel caso di un amperometro con quattro portate, scalate ognuna di un fattore 10 rispetto alla precedente.

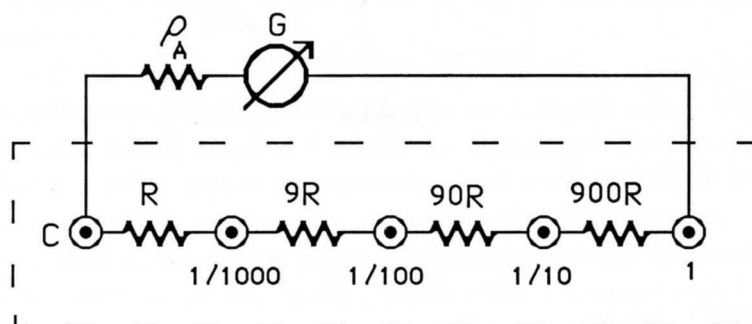


Fig.III.6

Collegiamo i morsetti C e 1 dello strumento al nostro circuito, che per semplicità supponiamo

sia costituito da un generatore di corrente I (vale a dire supponiamo che la resistenza di Thévenin del generatore di tensione associato sia molto maggiore della resistenza complessiva del nostro strumento: $1000R \parallel \rho_A$). In questa configurazione la corrente nel galvanometro è data da

$$i_{g1} = I \cdot \frac{1000R}{1000R + \rho_A} \quad (\text{III.6})$$

Mantenendo sempre la stessa corrente I , ma collegando lo strumento fra C e 1/10 avremo

$$i_{g10} = I \cdot \frac{100R}{1000R + \rho_A} = \frac{i_{g1}}{10} \quad (\text{III.7})$$

e analogamente per i collegamenti C-1/100 e C-1/1000. I rapporti fra le correnti nelle quattro configurazioni, a parità di I , non dipendono né da ρ_A , né dal valore di R . In questo senso lo shunt è detto *universale*, in quanto l'insieme di resistenze contenute nella linea tratteggiata di Fig.6 (spesso montate in un unico contenitore), costituisce un accessorio che può essere adoperato in connessione con qualunque galvanometro in quanto i suoi rapporti di shunt sono sempre gli stessi. Si noti che questa volta per "rapporto di shunt" si intende qualcosa di diverso rispetto a prima: ora esso è il rapporto fra le correnti nel galvanometro nelle varie posizioni dello shunt e non il rapporto fra le correnti nel galvanometro senza e con lo shunt.

La "universalità" dello shunt non va intesa in senso troppo generale: se ad esempio vogliamo che il galvanometro sia chiuso su una resistenza pari a quella critica, occorrerà montare un particolare shunt universale, precisamente quello con R tale che $1000R + \rho_A = R_C$.

Nelle varie portate la resistenza interna dello strumento cambia; in qualche tipo di applicazione la si vuole mantenere costante e per far ciò basta aggiungere in serie ai terminali 1/1000, 1/100, 1/10 una resistenza di opportuno valore.

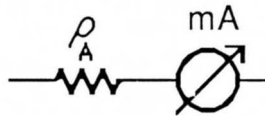


Fig.III.7

La configurazione che utilizza lo shunt di Ayrton è fra le più diffuse negli amperometri a varie portate ed è comunque una regola praticamente generale che gli strumenti ad ago siano chiusi sulla resistenza critica; pertanto, quando in un circuito schematizzeremo lo strumento misuratore di corrente come in Fig.7, in genere esso corrisponderà a un'altra configurazione (equivalente) del tipo in Fig.8 tale che

$$R_P + \rho_A' = R_C \quad (\text{III.8})$$

con

$$\rho_A = R_P \parallel \rho_A' \quad (\text{III.9})$$

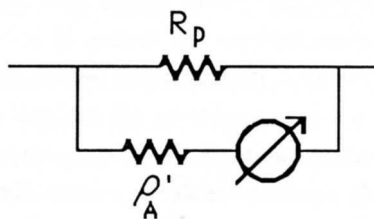


Fig.III.8

Per fare un esempio pratico riportiamo nella Fig.9 uno schema realistico per lo strumento di Fig.1, dotato di tre fondo scala: 10, 50, 100 mA.

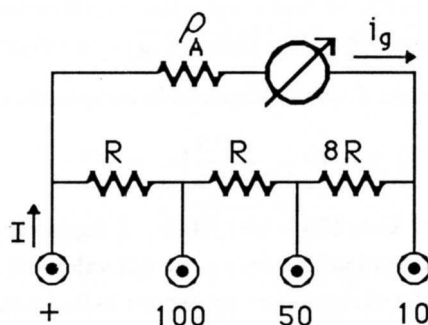


Fig.III.9

Se lo strumento base ha un fondo scala $i_{gfs} = 2mA$ e $\rho_A = 100 \Omega$, imponendo che lo strumento vada a fondo scala quando fra i terminali + e 10 passa una corrente $I = 10 mA$, abbiamo:

$$i_{gfs} = \frac{10R}{10R + \rho_A} \cdot 10mA$$

che è soddisfatta per $R = 2.5 \Omega$.

Quanto a ρ_A , essa rappresenta la resistenza equivalente di uno schema del tipo mostrato in Fig.8 e assicura allo strumento di essere chiuso su una resistenza molto prossima a quella critica. Ciò significa che il galvanometro base vero e proprio avrà una corrente di fondo scala inferiore a $2 mA$ e pari a $2 mA \cdot \frac{R_P}{R_P + \rho_A'}$.

4.— Campo di correnti misurabili.

Errori di misura

Il limite inferiore delle correnti misurabili con strumenti a bobina mobile tipo Galvanometro di Deprez-d'Arsonval, è teoricamente dato dalla corrente che provoca una deflessione decisamente superiore alla ampiezza delle oscillazioni stocastiche dell'equipaggio; quest'ultimo è infatti un sistema meccanico a un grado di libertà che, a temperatura T , possiede un'energia media $\frac{1}{2} \mathcal{I} \langle \dot{\varphi}^2 \rangle = \frac{1}{2} kT$ con k costante di Boltzmann. Si trova che questo limite (per galvanometri con periodo proprio dell'ordine di alcuni secondi e resistenza interna dell'ordine di 100Ω) è attorno alle decine di μA . In pratica (stiamo parlando di galvanometri in postazione estremamente stabile e con lettura a leva ottica) correnti poco al di sotto del nA sono un limite più realistico.

Per la misura di correnti elevate i limiti di precisione vengono piuttosto dalla difficoltà di realizzare shunt con resistenze piccole e sufficientemente precise. Uno shunt per grosse correnti (fino a centinaia di Ampère) deve essere realizzato in modo che le cadute di tensione che inevitabilmente si verificano sui contatti, non influenzino il rapporto di partizione.

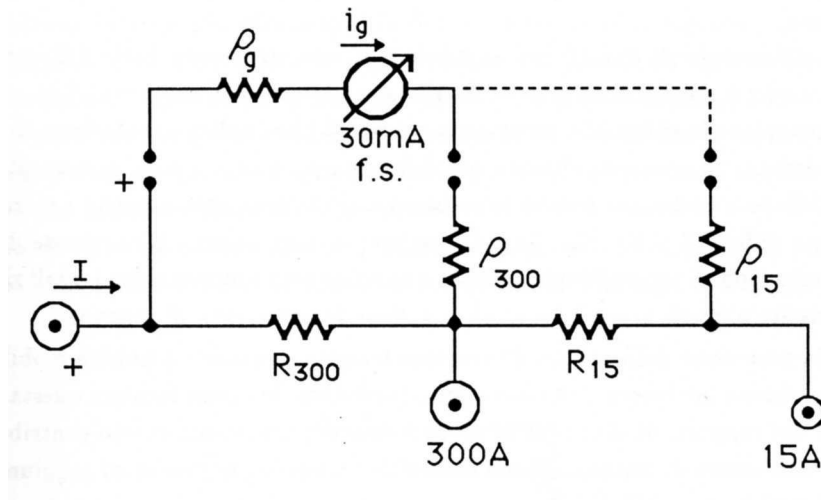


Fig.III.10

Questo si realizza col sistema riportato in Fig.10, dove lo shunt è un oggetto fisicamente distinto dall'amperometro ed è provvisto di tre morsetti per la corrente da misurare, di cui uno comune (+), e altri tre da collegare allo strumento; questa seconda terna di morsetti è interessata dalle correnti di moderata intensità che circolano nel galvanometro (30 mA f.s.). Si notino i seguenti accorgimenti: i morsetti dove può passare la corrente fino a 300 A sono di dimensioni notevolmente superiori a quello da 15 A; quest'ultimo a sua volta è notevolmente più robusto di quelli (tutti uguali) che vanno allo strumento. La dimensione del morsetto dipende dal fatto che la pressione da esercitare fra i due conduttori messi in contatto deve essere tanto più elevata quanto più elevata è la corrente che essi trasportano; infatti con una adeguata pressione si riduce la resistenza del collegamento. Il corretto dimensionamento dei morsetti riduce la possibilità di cadute di tensione elevate che porterebbero al surriscaldamento e progressivo deterioramento dei contatti medesimi. Inoltre – e questo è l'accorgimento fondamentale – la ripartizione fra le resistenze dello shunt e ρ_g è fatta mediante dei fili saldati direttamente ai capi delle resistenze R_{300} e R_{15} in modo che i rapporti di shunt

$$S_{300} = \left(\frac{i_g}{I} \right)_{300} = \frac{R_{300}}{\rho_g + R_{300} + \rho_{300}} \simeq \frac{R_{300}}{\rho_g + \rho_{300}} \quad (\text{III.10})$$

$$S_{15} = \left(\frac{i_g}{I} \right)_{15} = \frac{R_{15} + R_{300}}{\rho_g + R_{15} + R_{300} + \rho_{15}} \simeq \frac{R_{15} + R_{300}}{\rho_g + \rho_{15}} \quad (\text{III.11})$$

non dipendano in alcun modo dalla eventuale resistenza residua sui morsetti della corrente.

La presenza delle resistenze ρ_{300} e ρ_{15} non sarebbe strettamente necessaria a stabilire i due rapporti di cui alle (10) e (11). Il motivo della loro presenza è puramente di ordine pratico, in quanto in fase di costruzione dello shunt, anziché costruire due resistenze R_{300}^* e R_{15}^* di valore molto piccolo e molto accurate, che definiscano i rapporti voluti S_{300} e S_{15} senza l'intervento di ρ_{300} e ρ_{15} rispettivamente, si preferisce costruire $R_{300} > R_{300}^*$ e $R_{15} > R_{15}^*$ senza particolare cura per la

tolleranza e poi tramite ρ_{300} e ρ_{15} si procede a stabilire i rapporti di shunt voluti. La semplificazione di quest'ultima procedura consiste nel fatto che mentre R_{300} e R_{15} sono resistenze al massimo dell'ordine dei $m\Omega$ e quindi molto difficili da costruire con piccola tolleranza (anche al cento), ρ_{300} e ρ_{15} sono dell'ordine degli Ω e quindi molto più facilmente controllabili con buona precisione.

Tornando all'esempio di Fig.10 che si riferisce a uno strumento reale (*Weston*), si noti che la corrente di fondo scala dello strumento è $30mA$ e pertanto il rapporto S_{300} vale 10^{-4} e S_{15} $2 \cdot 10^{-3}$; nell'accoppiare lo shunt allo strumento occorrerà che i collegamenti verso lo strumento non introducano resistenze in grado di alterare sensibilmente $\rho_g + \rho_{300}$ o $\rho_g + \rho_{15}$; questo, per la verità non è troppo difficile a realizzare poiché le resistenze di collegamento tramite i morsetti si possono fare senza troppa difficoltà $\leq 10^{-2}\Omega$. Quando parleremo della misura di resistenze di piccolo valore ritroveremo questo tipo di accorgimento, cioè la distinzione fra i morsetti fra i quali si invia la grossa intensità di corrente e quelli ai capi dei quali si collega lo strumento di misura.

Quanto alla precisione delle misure di corrente tramite strumenti a bobina mobile, essa è determinata dalla precisione intrinseca dello strumento (se è data, la classe fornisce questa informazione), dalla precisione dei rapporti di shunt (se lo shunt è esterno, altrimenti questo contributo è inglobato nella Classe) e dall'errore di lettura. Come ordine di grandezza le precisioni raggiungibili non sono mai migliori di qualche per mille.

Se lo scopo della nostra misura è conoscere non tanto la corrente I che circola attraverso lo strumento, quanto quella I^* che circola nel ramo quando lo strumento non è inserito allora, (vedi Fig.2a e b), occorre conoscere sia ρ_A che la resistenza ρ del generatore equivalente di Thévenin. Dalla relazione (2) abbiamo

$$I^* = I \left(1 + \frac{\rho_A}{\rho} \right) \quad (\text{III.12})$$

e pertanto la precisione con cui si determina I^* dipende oltreché dalla precisione su I , anche da quella su ρ_A e ρ :

$$\frac{\Delta I^*}{I^*} = \frac{\Delta I}{I} + \frac{\rho_A}{\rho + \rho_A} \left(\frac{\Delta \rho_A}{\rho_A} + \frac{\Delta \rho}{\rho} \right) \quad (\text{III.13})$$

La (13) ci conferma che se $\rho_A \ll \rho$ (come in genere si cerca di fare) il contributo all'errore derivante dall'indeterminazione sulla conoscenza delle resistenze è relativamente poco importante (si tratta infatti di una indeterminazione su una già piccola correzione).

Un effetto che può limitare la precisione delle misure di deboli correnti, soprattutto quando la resistenza interna dello strumento è piccola, è la presenza di gradienti di temperatura lungo il circuito, principalmente alla giunzione fra conduttori diversi; si creano infatti così delle fem termoelettriche (ordine di grandezza $< 10^{-4}V$ per sbalzi di qualche grado) che possono dar luogo a contributi di corrente importanti, se le resistenze in gioco sono piccole; l'effetto è tuttavia eliminabile attendendo che il circuito, dopo le inevitabili manipolazioni durante il montaggio, raggiunga l'equilibrio termico e verificando che a circuito chiuso, senza generatori direttamente applicati, lo strumento segnali, entro l'errore di lettura, corrente nulla. Problemi simili a quelli ora detti possono provenire anche dalla presenza di contatti fra superfici non sufficientemente pulite; differenze di potenziale di origine elettrochimica possono in questo caso insorgere e inviare correnti non controllabili nel circuito.

Più avanti (Cap.XV,§5), vedremo che con l'ausilio di tecniche elettroniche è possibile realizzare misuratori di corrente che spingono, soprattutto verso i valori piccoli, il campo di correnti misurabili (fino a $10^{-15}A$); è inoltre possibile costruire *mAmperometri* sostanzialmente ideali, caratterizzati cioè una resistenza interna praticamente nulla.

5.— Voltmetri. Ohm per Volt

La scala di un amperometro può essere facilmente convertita in una scala di un voltmetro; infatti, detta ρ_V la resistenza in serie allo strumento, la ddp fra i morsetti di ingresso, quando attraverso essi circola una corrente i , sarà data da $V = i \cdot \rho_V$. Di fatto i voltmetri ad ago mobile sono realizzati proprio in questo modo; in genere ρ_V è il contributo di due parti: una, ρ_g , la resistenza interna dello strumento vero e proprio (comprendente eventualmente lo shunt che permette allo strumento di lavorare su una resistenza prossima a quella critica) e un'altra resistenza aggiuntiva, scelta del valore opportuno per realizzare il fondo scala voluto.

Supponiamo di disporre di un voltmetro siffatto e di voler misurare la ddp presente fra due terminali di una rete; siano \mathcal{E}^* e ρ la fem e la resistenza di Thévenin fra questi due terminali (Fig.11).

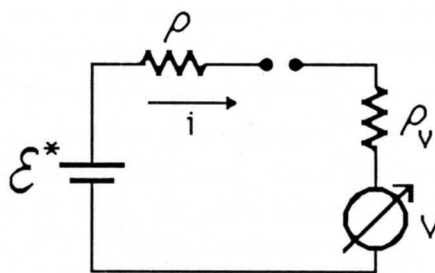


Fig.III.11

Un voltmetro ideale dovrebbe indicare (a parte gli errori di taratura e lettura) il valore \mathcal{E}^* ; la lettura sarà invece $V < \mathcal{E}^*$:

$$V = i \cdot \rho_V = \frac{\mathcal{E}^*}{\rho + \rho_V} \cdot \rho_V = \mathcal{E}^* \left(\frac{1}{1 + \frac{\rho}{\rho_V}} \right) \quad (\text{III.14})$$

La correzione $1 + \frac{\rho}{\rho_V}$ da apportare a V per ottenere \mathcal{E}^* è tanto più vicina a 1 (cioè il voltmetro si avvicina a essere ideale) quanto più $\rho_V > \rho$.

Si può vedere che -come nel caso degli amperometri- la qualità dello strumento (intesa come minimizzazione della differenza fra V e \mathcal{E}^*) è tanto migliore quanto più sensibile è lo strumento base utilizzato. Infatti, supponiamo di disporre di due *microamperometri* ($\mu\text{Amperometri}$), uno da $10 \mu\text{A}$ f.s. e l'altro da $100 \mu\text{A}$ f.s., entrambi con resistenza interna $\ll 100 \text{ k}\Omega$; col primo strumento possiamo realizzare un voltmetro con fondo scala 1 V e avente una ρ_V di $100 \text{ k}\Omega$; col secondo, il voltmetro avrà una ρ_V di $10 \text{ k}\Omega$.

Il simbolo adottato generalmente per rappresentare un voltmetro reale è quello di Fig.11; un voltmetro ideale si rappresenta nello stesso modo ed è caratterizzato dall'avere ρ_V infinita.

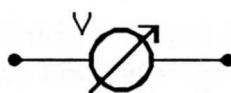


Fig.III.12

Un'altra possibile scelta potrebbe essere (e in molti testi è così) quella di rappresentare col simbolo di Fig.12 un voltmetro ideale, cioè uno strumento con resistenza infinita e porre poi, per lo strumento reale, ρ_V in parallelo. Si noti che con lo stesso simbolo, nei due casi si indicano due cose diverse. Nel testo verrà adottato il simbolo di Fig.11 che, almeno nel caso di strumenti a bobina mobile, è più aderente alla realtà in quanto lo strumento vero e proprio è un misuratore di corrente caratterizzato da una resistenza relativamente piccola.

Con un μ Amperometro che vada a fondo scala con una corrente i_{fs} , è semplice costruire un voltmetro con varie portate (per esempio da 0.1V a 100V e con un fattore 10 fra portata e portata).

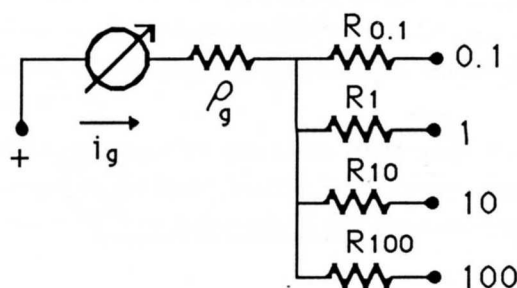


Fig.III.13

Basterà infatti (vedi Fig.13) aggiustare i valori delle resistenze $R_{0.1}, R_1, R_{10}, R_{100}$ in modo tale che lo strumento vada a fondo scala (ovvero $i_g = i_{fs}$) quando fra il morsetto + (comune a tutte le posizioni) e i morsetti 0.1, 1, 10 e 100 sia presente rispettivamente la differenza di potenziale di 0.1V, 1V, 10V e 100V. In ogni portata la resistenza ρ_V dello strumento è data da

$$\rho_V = \frac{V_{fs}}{i_{fs}} \quad (\text{III.15})$$

ed essendo i_{fs} costante, ρ_V cresce come V_{fs} .

In genere il costruttore non fornisce la resistenza ρ_V di ogni portata, ma si limita a dare il valore della resistenza che lo strumento presenta quando è nella portata di 1V fondo scala, corrispondente numericamente all'inverso di i_{fs} . Per conoscere la ρ_V nelle altre portate basta moltiplicare questo numero per la ddp di fondo scala della portata in esame. Questa costante costituisce i cosiddetti *Ohm per Volt* dello strumento (Ω/V). Se ad esempio il voltmetro è da 10000 Ω/V , la corrente che manda a fondo scala lo strumento è $10^{-4} \frac{V}{\Omega} = 10^{-1} \text{ mA}$ e lo strumento nella portata di 1V fondo scala ha una resistenza $\rho_V = 10^4 \Omega$, mentre ad esempio nella portata 10V e 0.1V ha rispettivamente $10^5 \Omega$ e $10^3 \Omega$.

6.— Campi di tensioni misurabili.

Errori di misura

Il limite inferiore alle ddp misurabili ha la stessa origine del limite inferiore per la misura di correnti con un galvanometro, cioè la temperatura finita del sistema; tenendo conto dei valori tipici della resistenza interna, difficilmente si possono misurare differenze di potenziale inferiori a qualche centinaio di nV . In questi casi, oltretutto, occorrerà grande cautela nell'eliminare le fem elettrochimiche o termoelettriche che possono vanificare l'accuratezza (addirittura impedire la fattibilità) delle misure, già per valori della ddp di qualche ordine di grandezza più grandi.

I limiti alla precisione di misura di grosse differenze di potenziale sono dati dalla difficoltà di realizzare resistenze da porre in serie allo strumento che siano di valore elevato, note con precisione e soprattutto esenti da perdite incontrollate (tanto più facilmente presenti quanto più alta è la tensione).

In ogni caso poi la precisione delle misure di tensione è limitata dalla classe (ovvero dalla qualità) dello strumento impiegato per misurare la corrente. Come nel caso delle misure di corrente, qualora si voglia conoscere la tensione \mathcal{E}^* e non V (quella misurata, vedi esempio all'inizio del paragrafo precedente) occorrerà correggere V , moltiplicandolo per $1 + \frac{\rho}{\rho_V}$. Se ρ e ρ_V sono confrontabili può risultare non trascurabile, per l'errore su $\mathcal{E}^* = V \left(1 + \frac{\rho}{\rho_V} \right)$, anche l'errore su ρ_V .

Più avanti mostreremo metodi di misura di differenze di potenziale (*Misure potenziometriche*) che, basandosi su galvanometri impiegati come rivelatori di zero, hanno il pregio – almeno nominalmente – di non derivare corrente dai due terminali ove è presente la ddp da misurare; con questi metodi di misura si determina quindi direttamente la fem di Thévenin e si ottengono per di più precisioni elevate. Inoltre, ricorrendo a metodi elettronici, si possono compiere misure di differenza di potenziale che sono di fatto molto vicine a essere ideali (Cap.XV,§5).

7.— Ohmetri realizzati con strumenti a bobina mobile

Per *Ohmetro* si intende uno strumento (o un insieme di strumenti) capace di misurare resistenze. Supponiamo di disporre di un voltmetro ideale ($\rho_V \rightarrow \infty$) e di un amperometro ideale ($\rho_A \rightarrow 0$). Se vogliamo conoscere il valore di una resistenza R incognita potremo montare uno dei due circuiti in Fig.14.

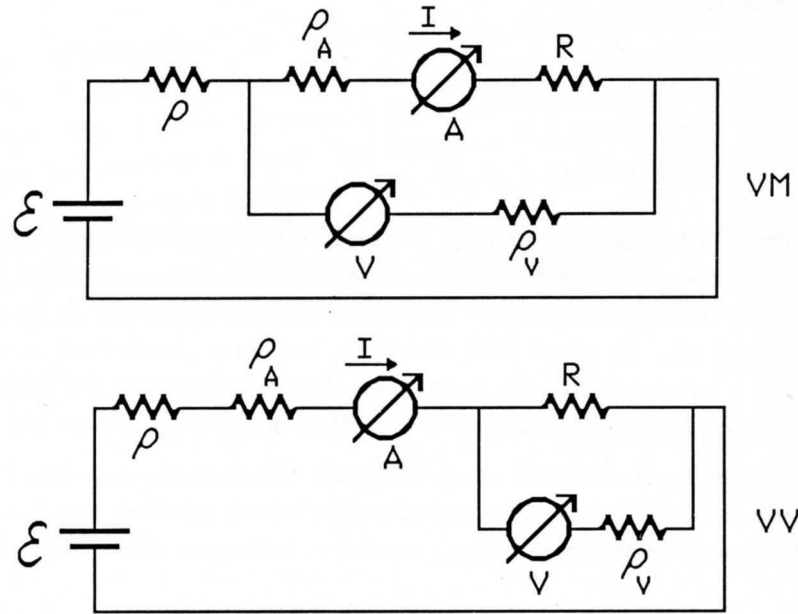


Fig.III.14

In entrambi i casi, se gli strumenti fossero ideali, R sarebbe data da

$$R = \frac{V}{I} \quad (\text{III.16})$$

dove V è la lettura sul voltmetro e I è la lettura sull'ampmetro.

In pratica i nostri strumenti non sono ideali e pertanto dovremo tenere conto che: nel caso VM (*Voltmetro a Monte*) la differenza di potenziale V contiene anche la caduta sull'ampmetro, mentre nel caso VV (*Voltmetro a Valle*) la corrente nell'ampmetro è la somma della corrente che passa nella resistenza R più quella che passa nel voltmetro. Pertanto i rapporti $\frac{V}{I}$, in entrambi i casi sono prossimi a R ma non coincidono con essa. Infatti:

Voltmetro a monte

$$\frac{V}{I} = \frac{I(R + \rho_A)}{I} = R \left(1 + \frac{\rho_A}{R} \right) \quad (\text{III.17})$$

Voltmetro a valle

$$\frac{V}{I} = \frac{I(R \parallel \rho_V)}{I} = R \left(\frac{1}{1 + \frac{R}{\rho_V}} \right) \quad (\text{III.18})$$

Allo scopo di determinare R , entrambi i metodi sono utilizzabili, purché siano note con sufficiente precisione ρ_A e ρ_V . I limiti di applicabilità di questi sistemi si ottengono considerando le due misure di corrente e tensione a essi associate. Vale a dire, per resistenze R basse il metodo che conviene adottare è quello del Voltmetro a Valle purché si disponga di un voltmetro sufficientemente sensibile (a meno di non inviare in R correnti molto elevate). Per resistenze elevate conviene viceversa il metodo del Voltmetro a Monte, ma il limite può venire dalla sensibilità dell'ampmetro. In generale non esiste una ricetta definitiva su quale dei due metodi conviene scegliere; caso per caso una valutazione complessiva, che tenga conto di tutti i parametri in gioco (classe degli strumenti ed errori di lettura inclusi) deve essere effettuata e sulla base di questa sarà possibile decidere quale dei due metodi dà l'errore (a priori) più piccolo.

Anche con un solo strumento ad ago è possibile costruire un Ohmetro. Un esempio tipico è mostrato in Fig.15.

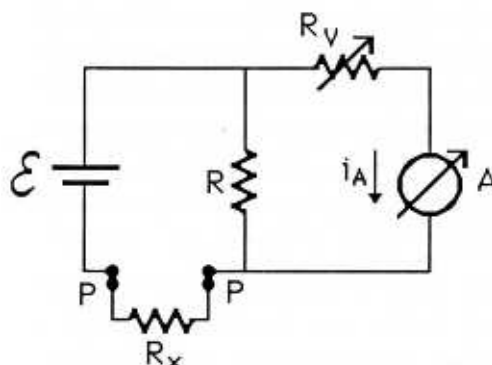


Fig.III.15

R_V contiene anche la resistenza interna dell'amperometro *. Troviamo la dipendenza della corrente i_A che circola nell'amperometro, in funzione di R_X :

$$i_A = \frac{\mathcal{E}}{R_X + R \parallel R_V} \cdot \frac{R}{R + R_V} = \frac{\mathcal{E}}{R_X \left(1 + \frac{R_V}{R}\right) + R_V} = \frac{i_{fs}}{1 + R_X \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_V}\right)} \quad (\text{III.19})$$

dove $i_{fs} = \mathcal{E}/R_V$ rappresenta la corrente di fondo scala. Riportando in grafico $i_A = i_A(R_X)$ otteniamo l'andamento di Fig.16.

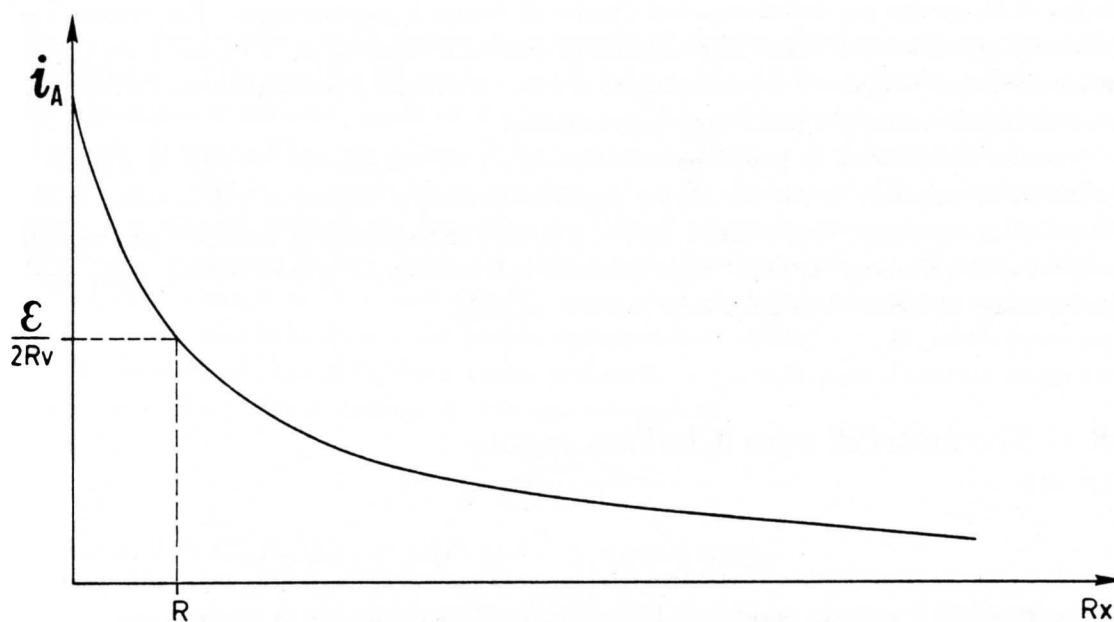


Fig.III.16

* Il simbolo adottato per R_V sta a significare una resistenza di valore variabile (reostato). Vedremo più avanti qualche esempio di come esso si possa realizzare (Cap.IV,§1).

Se vogliamo convertire la scala dello strumento da *Ampère* a *Ohm*, avremo una scala “invertita” e oltretutto non lineare: lo zero della corrente corrisponde a $R_X \rightarrow \infty$, mentre $R_X = 0$ corrisponde alla massima corrente (i_{fs}). Poiché \mathcal{E} (ordine di grandezza di qualche V) è fornita da una pila, inserita dentro la scatola che contiene anche lo strumento, essa non si mantiene costante nel tempo e occorre, prima di ogni misura, verificare la taratura: la procedura è estremamente semplice e consiste nel sostituire la resistenza R_X con un cortocircuito; variando R_V mediante un’opportuna manopola si porta l’ago dello strumento sul fondo scala (corrispondente a 0Ω); a questo punto lo strumento è tarato e si può procedere all’inserzione di R_X e alla sua misura.

La scala non consente misure molto precise di R_X , soprattutto di quelle che danno luogo a correnti i_A molto al di sotto di $\frac{\mathcal{E}}{2R_V}$, in quanto gli errori di lettura diventano, da questo punto in poi, estremamente importanti. La Fig.16 ci fa infatti vedere che per correnti piccole la pendenza molto modesta di $i_A = i_A(R_X)$ comporta grosse indeterminazioni su R_X , anche per moderate incertezze su i_A .

Guardiamo, facendo anche un esempio numerico, per quali valori di R_X la corrente si dimezza rispetto al valore di fondo scala $i_{fs} = i_A(R_X = 0)$. Si abbiano i seguenti valori:

$$\begin{cases} \mathcal{E} \simeq 1 V \\ R \simeq 20 \Omega \\ R_V \simeq 100 k\Omega \end{cases} \quad (\text{III.20})$$

Quando $R_X = R$ la corrente si dimezza; infatti dalla 19) si ottiene:

$$i_A(R_X = R) = \frac{\mathcal{E}}{2R_V + R} \simeq \frac{\mathcal{E}}{2R_V} = \frac{i_{fs}}{2} \quad (\text{III.21})$$

La precisione è quindi dominata dalla classe dello strumento solo per resistenze fino a qualche decina di Ω , mentre per valori superiori l’errore di lettura è preponderante. Per ovviare a questo problema tali strumenti hanno la possibilità di cambiare valore di R_x a centro scala (gli estremi nominali restano sempre 0 e ∞) aumentando R e R_V . Un limite a questa procedura è stabilito dalla sensibilità dello strumento usato come amperometro.

Misure di resistenza di qualità intrinsecamente più elevata saranno descritte in seguito: alcune (*Ponti di Wheatstone, di Kelvin, Misure potenziometriche*) si basano su galvanometri usati come rivelatori di zero; altre invece fanno ricorso a metodi elettronici, non foss’altro per migliorare le prestazioni dei rivelatori di zero. Tutti questi metodi consentono misure estremamente precise e hanno campi di applicazione assai vasti (dai $m\Omega$ ai $M\Omega$).

8.— Rivelatori di zero a bobina mobile

Si tratta sostanzialmente di galvanometri in cui la caratteristica di gran lunga più curata in fase di progettazione è stata la sensibilità; la precisione ed eventualmente la linearità sono di modesto interesse. All’impiego come rivelatori di zero, si adattano perfettamente galvanometri con filo di torsione e lettura a leva ottica, possibilmente dotati di uno shunt universale che consenta di lavorare in condizioni prossime a quelle critiche e di adattare la sensibilità del rivelatore al grado di azzeramento desiderato. E’ importante che lo strumento possa indicare sia correnti di un segno che dell’altro (sia cioè a zero centrale) e che esista anche la possibilità di regolare lo zero dello strumento

(ciò è sempre necessario lavorando con strumenti sensibili); se il sistema di lettura a leva ottica è realizzato dall'utente con proiettore e scala mobile, si tratterà solo di spostare la scala o il proiettore, se invece si tratta di strumenti "integrati", il controllo viene fatto agendo sull'estremo fisso del filo di torsione, dotato di manopola di aggiustamento.

Come vedremo in numerosi esempi nel seguito, i sistemi di misura di "zero" nei quali questi strumenti trovano impiego, consistono nel rendere nulla la ddp \mathcal{E}_z fra due terminali di una rete lineare che contiene la grandezza da misurare G_x (una resistenza o una fem ad esempio) e almeno un altro componente elettrico P (per esempio una resistenza) che l'utente è in grado di variare.

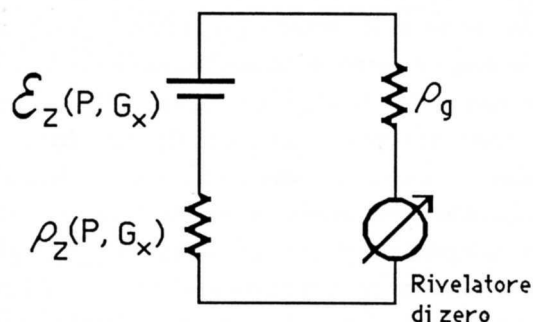


Fig.III.17

Rispetto ai due terminali ove è inserito lo strumento, il circuito potrà sempre mettersi nella forma equivalente di Thévenin (Fig.17) con $\mathcal{E}_z = \mathcal{E}_z(P, G_x)$ e $\rho_z = \rho_z(P, G_x)$ (citando esplicitamente le uniche dipendenze di interesse, quelle da P e da G_x); ρ_g è la resistenza interna del rivelatore di zero. Il metodo di misura è tale che quando P assume il valore P_o per cui $\mathcal{E}_z(P_o, G_x) = 0$, allora sussiste una semplice relazione fra la grandezza G_x e P_o che permette di determinare G_x . Senza entrare in ulteriori dettagli che dipendono dal tipo di misura in esame, notiamo che tanto più è sensibile lo strumento di zero, tanto più piccola sarà l'incertezza con cui potremo stabilire che $\mathcal{E}_z(P_o)$ è effettivamente nulla; in altri termini, tanto più è sensibile lo strumento, tanto più la sua indicazione φ si discosterà da zero per piccole variazioni di P attorno a P_o (e quindi tanto più piccola sarà l'indeterminazione di G_x dovuta alla sensibilità). In generale, dato il circuito di Fig.17, abbiamo (φ indicazione dello strumento, K_r costante reometrica):

$$\varphi = \frac{1}{K_r} \frac{\mathcal{E}_z(P, G_x)}{\rho_z(P, G_x) + \rho_g} \quad (\text{III.22})$$

che nell'intorno di P_o ($\mathcal{E}_z(P_o, G_x) = 0$, $\varphi(P_o, G_x) = 0$) si può scrivere:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{K_r} \frac{\Delta\mathcal{E}_z(P, G_x)}{\rho_z(P_o, G_x) + \rho_g} \quad (\text{III.23})$$

Il rivelatore di zero che, a parità di $\Delta\mathcal{E}_z(P, G_x)$ e $\rho_z(P_o, G_x)$, darà l'indicazione $\Delta\varphi$ più grande sarà da preferire; abbiamo già affrontato questo problema nel Cap.II,§4 e abbiamo visto che, potendo scegliere fra tanti galvanometri tutti uguali fra loro salvo il numero delle spire della bobina, quello con ρ_g uguale a $\rho_z(P_o, G_x)$ è da preferire.

Nel seguito incontreremo anche rivelatori di zero che si basano su strumenti elettronici, caratterizzati da elevatissima sensibilità voltmetrica ($< 1 \mu V/div$) e resistenza interna ($\rho_g \simeq 10^8 \div 10^{10} \Omega$); come vedremo essi sono estremamente utili in situazioni in cui la presenza di una grossa $\rho_z(P, G_x)$ riduce la sensibilità ottenibile con un galvanometro.

Quanto ai simboli per il rivelatore di zero useremo sia la notazione RZ che ND (*Null Detector*).

9.— Strumenti universali a bobina mobile

Gli strumenti universali a bobina mobile (detti anche *multimetri* – o *tester* – *analogici*), sono strumenti che consentono, usando un unico equipaggio mobile, di misurare sia differenze di potenziale che correnti continue (e magari anche le analoghe grandezze in corrente alternata), nonché resistenze. La selezione delle varie funzioni (ddp in continua: DCV -Direct Current Volt-, correnti in continua: DCA -Direct Current Ampère-, resistenze: Ω) viene fatta tramite una manopola che, azionando opportuni commutatori, realizza le varie configurazioni elettriche attorno alla bobina del galvanometro. Ad esempio, quando selezioniamo la misura di corrente continua, la bobina (chiusa sulla resistenza critica) viene collegata in parallelo allo shunt delle correnti, a sua volta inserito fra i due morsetti di ingresso; una volta selezionata la funzione DCA, il cambiamento delle varie portate di corrente (effettuato mediante un selettore) varia le connessioni dello shunt e quindi i relativi rapporti (vedi Fig.6). Analogamente la selezione di funzione DCV inserisce in serie alla bobina le resistenze di valore opportuno, corrispondenti al fondo scala selezionato (vedi Fig.13). Nella configurazione a Ohmetro avremo viceversa un circuito di quelli visti nel §7 e quindi il multimetro deve contenere al suo interno una pila, esclusivamente per questa funzione. Sarà inoltre presente un controllo di *zero-Ohm* per tarare l'Ohmetro nelle varie portate.



Fig.III.18

La scala è in genere multipla, cioè del tipo in Fig.18; vale a dire ci saranno almeno tre scale direttamente tarate in V , mA , Ω ; ognuna di esse sarà a sua volta divisa in più di un modo, per accoppiarsi con i vari fondo scala possibili.

Ovviamente lo strumento dispone di due morsetti di ingresso, che vanno utilizzati per collegarlo al circuito su cui si vogliono compiere le misure. In genere, se si tratta di misure di corrente, il tipo di inserzione è – anche se provvisorio – non proprio immediato: infatti esso richiede l'interruzione del ramo di misura, il ripristino del collegamento tramite lo strumento e quindi la misura vera e propria. Quanto alle misure di differenza di potenziale, esse possono farsi (e di fatto quasi sempre si fanno) senza interrompere il circuito, ma stabilendo un contatto provvisorio fra i morsetti dello strumento e i due terminali del circuito fra cui vogliamo misurare la ddp. Per fare questo si adoperano i cosiddetti *puntali* che sono in dotazione allo strumento: essi nient'altro sono che due cavetti (ognuno collegato a un morsetto del multimetro) che recano all'estremità libera un conduttore rigido (in genere ottone cromato) terminante a punta. Il contatto con il circuito esterno si realizza premendo questa punta contro il terminale di interesse (Fig.19).

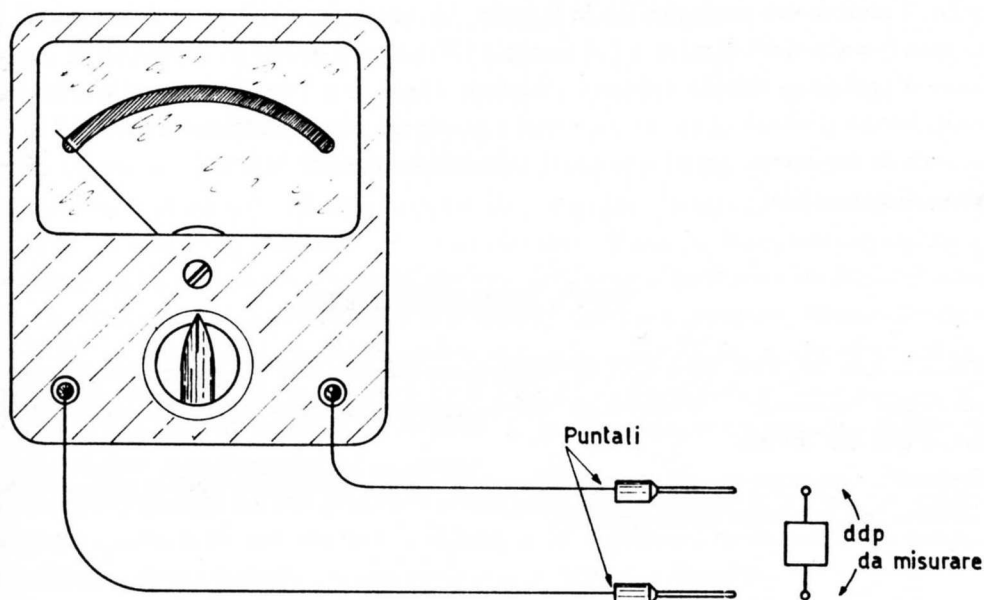


Fig.III.19

Le misure col multimetro sono quelle in cui più spesso si rendono necessarie le correzioni fra valore misurato e valore preesistente alla misura, proprio perché le inserzioni dello strumento sono di tipo provvisorio e non permanente.

Quanto alla misura di resistenze, il collegamento si effettua adoperando i puntali, appoggiandoli (magari con una pressione *decisa* per evitare eccessive resistenze di contatto) ai capi della resistenza da misurare. La configurazione impiegata è quella della Fig.15, dove PP sono i puntali. Prima di

procedere alla misura sarà bene, ponendo gli estremi dei puntali in cortocircuito fra loro, controllare che l'ago vada a fondo scala, ovvero segni $R = 0$; se ciò non si verifica si agisce sul controllo *zero-Ohm* (si varia cioè la resistenza R_V di Fig.15), fino a ottenere la condizione di cui sopra. Ricordiamo che tale controllo si rende necessario sia per correggere un eventuale invecchiamento della pila che per compensare la resistenza non nulla dei puntali (in questo modo infatti la si sottrae automaticamente nelle misure successive). Il multimetro analogico è uno strumento in genere di qualità non eccelsa (difficilmente è di classe inferiore di 2) e di sensibilità non troppo spinta. Queste caratteristiche sono in gran parte dovute al fatto che esso è lo *strumento portatile* per antonomasia, e fra le sue doti la robustezza gioca un ruolo primario; purtroppo quest'ultima non si accompagna quasi mai a grandi sensibilità e precisioni. Difficilmente gli Ω/V dello strumento sono superiori a 10000 (cioè la corrente di fondo scala dello strumento base è $100 \mu A$), molto spesso sono anche inferiori. Multimetri di qualità assai buona possono avere 100000 Ω/V . Essi sono (o *erano*, perché sono oramai soppiantati dagli strumenti elettronici in quasi tutti i loro utilizzi) estremamente utili per fare diagnosi su circuiti elettrici in maniera rapida; misure vere e proprie di accuratezza superiore a qualche percento non sono con essi possibili; tuttavia essi, insieme a un oscillografo, costituiscono molto spesso l'attrezzatura base per misure nel campo dei circuiti elettronici dove, nella maggioranza dei casi, le grandezze da misurare non richiedono precisioni particolarmente spinte.

Qualora si vogliano compiere misure più accurate (diciamo meglio del percento) delle grandezze elettriche, il multimetro analogico lascia il posto o a strumenti a bobina mobile dedicati (voltmetri, amperometri) o a metodi di misura (ad esempio i *Ponti*) o a strumenti universali di tipo elettronico (al giorno d'oggi quasi sempre digitali). Di questi ultimi ve n'è una vastissima gamma: anche i più economici hanno prestazioni spesso superiori a quelle dei vecchi multimetri analogici più sofisticati. Prima però di descrivere questi strumenti esaminiamo metodi "classici" di misura di resistenze e differenze di potenziale.

NOTA BIBLIOGRAFICA

FR 59, LA 38, DA 75 e CO 85 sviluppano ampiamente gli argomenti di questo capitolo. Con un taglio decisamente orientato all'utilizzo pratico degli strumenti, gli argomenti sono anche trattati in **CO 83, ZI 86**.

Si ricorda comunque che gli approfondimenti degli argomenti del capitolo sono di fatto costituiti dalla pratica con le misure in laboratorio.

IV

I PONTI PER LA MISURA DI RESISTENZE

1.- Resistori e campioni di resistenza

I resistori *commerciali* che generalmente vengono impiegati nella costruzione di apparecchiature elettriche e elettroniche sono in genere di piccolo wattaggio (da alcuni *Watt* fino a un minimo tipico di $1/8$ di *Watt*) e si presentano come cilindretti aventi alle estremità due reofori per saldare il resistore al resto del circuito (Fig.1).

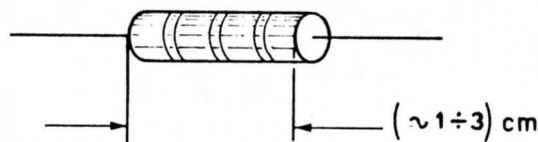


Fig.IV.1

Il cilindretto reca anche delle fascette colorate che, in accordo a un codice adottato internazionalmente, danno il valore della resistenza e la sua tolleranza. Il campo dei valori coperto da questo tipo di resistenze va tipicamente da qualche decimo di Ω a qualche decina di $M\Omega$. Il materiale resistivo vero e proprio è un *impasto di carbone* a coefficiente di temperatura abbastanza contenuto ($\sim 5 \cdot 10^{-4} / ^\circ C$); in resistori di qualità superiore si tratta invece di un sottile *strato di una lega metallica* a piccolo coefficiente di temperatura ($\sim 5 \cdot 10^{-5} / ^\circ C$) depositato su un supporto ceramico e successivamente smaltato all'esterno. In entrambi i casi è realizzato un contatto di tipo ohmico fra l'elemento resistivo vero e proprio e i due reofori.

La tecnica di costruzione dei resistori è altamente affidabile, tanto che in moltissime applicazioni di precisione, come negli strumenti elettronici di misura, le caratteristiche di stabilità e costanza nel tempo dei resistori a strato metallico si confanno ai requisiti più stringenti.

Nelle misure di precisione in laboratorio, i campioni che sono più utili sono quelli che consentono di disporre di un grosso campo di variazione di valori (diciamo 4-6 decadi, cioè 4-6 ordini di grandezza) a passi costanti entro la decade, in modo da coprire praticamente con continuità tutto il campo; si tratta quindi di *cassette di resistenze* e non di semplici resistori (Fig.2).

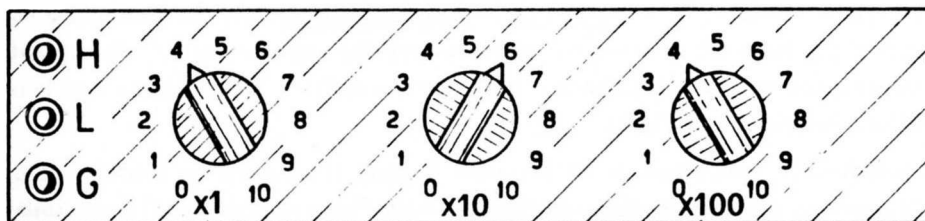


Fig.IV.2

Il valore di resistenza assunto dalla cassetta è dato dalla posizione delle manopole (a undici posizioni), una per decade (nella Fig.2: 3 decadi, una per 10Ω totali, una per 100Ω e l'ultima per 1000Ω). La resistenza impostata compare tra i morsetti H e L; vi è anche un terzo morsetto G sulla cui funzione per il momento non ci soffermiamo, poiché interessa principalmente le applicazioni della cassetta in corrente alternata. Nella Fig.3 è riportato un esempio di come si può realizzare una decade di resistenze del tipo ora descritto:

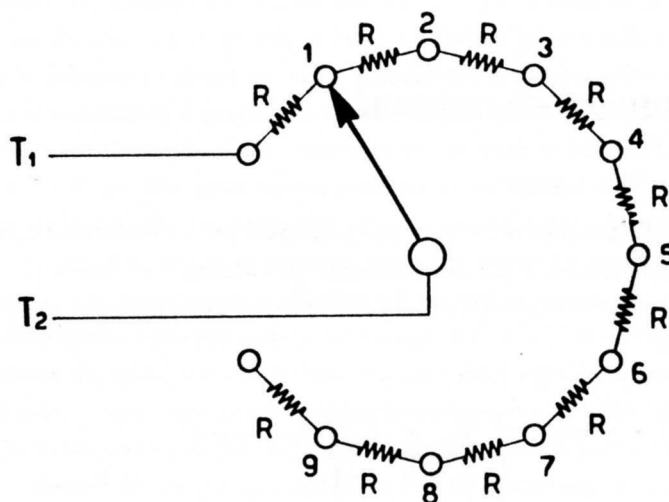


Fig.IV.3

A seconda della posizione del cursore, fra i due terminali T_1 e T_2 è presente una resistenza pari alla serie di n resistenze tutte nominalmente uguali e pari a R , con n variabile fra 0 e 10. Quello di Fig.3 è da considerare il circuito equivalente e non il circuito reale: la configurazione reale infatti si realizza tramite combinazioni leggermente più complesse della semplice serie di resistori tutti uguali. I resistori campione sono resistori a filo e il materiale di cui son fatti è in genere o Manganina o leghe addirittura superiori dal punto di vista della stabilità con la temperatura ($\sim 2 \cdot 10^{-5} / ^\circ C$). La precisione di taratura dei campioni varia da decade a decade ed è più alta quella relativa delle decadi a più alto valore ($0.05\% \div 0.02\%$ per campioni di alta qualità). L'elemento più critico delle cassette campione (soprattutto per le decadi di piccolo valore) è costituito dai commutatori che devono introdurre la resistenza più bassa possibile; essi quindi devono essere stabili e robusti meccanicamente; inoltre non devono introdurre fem di tipo elettrochimico e per questo sono rivestiti con uno strato di grasso inerte che oltre ad assicurare la lubrificazione, protegge la superficie di contatto da aggressioni chimiche. Essendo i commutatori chiusi all'interno della cassetta, essi sono anche protetti dalla polvere.

In laboratorio esistono anche altre cassette campione, decisamente meno moderne, tutte di precisione ragguardevole ($\frac{\Delta R}{R} \sim 5 \cdot 10^{-4}$ per valori da 100Ω in su), che coprono, meno finemente, campi di valori più limitati; al posto dei commutatori essi hanno *cavicchi*, cioè *spinotti conici* che vengono inseriti, con una pressione decisa, in opportune sedi e cortocircuitano così le resistenze che non si vogliono inserire (vedi Fig.4).

Una precauzione fondamentale da prendere quando si adopera un resistore, è quella di non superare la massima potenza dissipabile su di esso, pena il danneggiamento irreversibile del resistore medesimo; lavorando con le cassette campione questa precauzione merita un particolare scrupolo nell'essere rispettata poiché si rischia di danneggiare apparecchiature di particolare pregio. In cor-

rispondenza di ogni decade il costruttore riporta la massima corrente che si può far circolare sulle resistenze della decade (cioè indirettamente il wattaggio). Quindi, prima quindi di montare le resistenze campione si abbia cura di stimare quale sarà la corrente che circolerà in esse una volta montate; per questa valutazione ci si può servire di un multimetro per misurare la tensione dei generatori e la resistenza degli altri resistori del circuito.

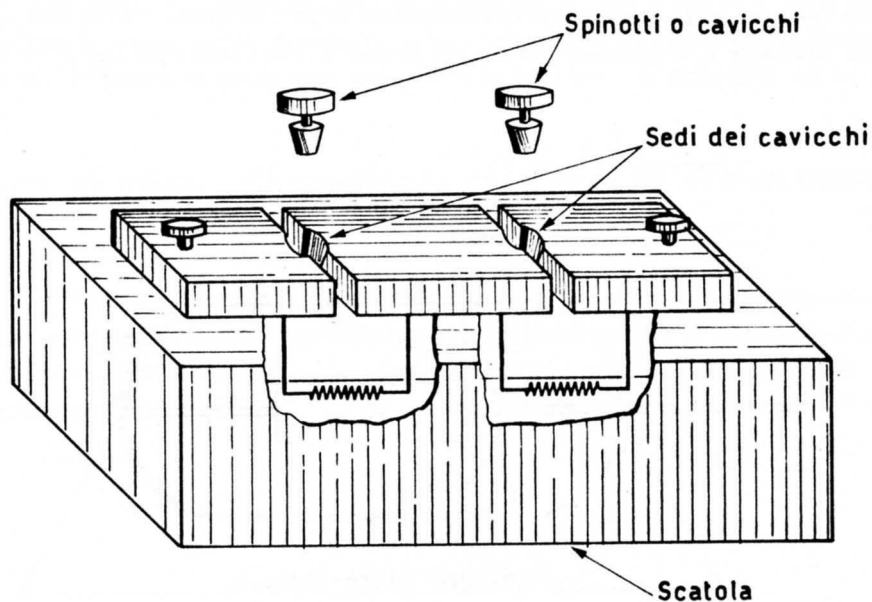


Fig.IV.4

Resistenze campione di piccolo valore ($< 1\Omega$) non vengono realizzate come visto sopra, cioè con due soli terminali di uscita, perché quando sono inserite nel circuito non è più possibile distinguere fra il contributo alla resistenza totale derivante dal resistore vero e proprio e quello dovuto ai collegamenti e ai contatti. Esse sono pertanto realizzate (si ricordi lo shunt da alta corrente del Cap.III,§4) con 4 terminali a morsetto, due particolarmente robusti (*terminali di corrente*, T_C in Fig.5) e due di dimensioni standard (*terminali di tensione*, T_V in Fig.5).

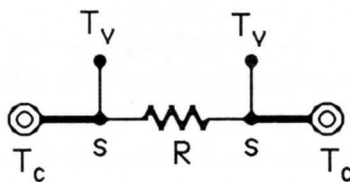


Fig.IV.5

I reofori dei terminali di tensione sono saldati in S all'estremità della resistenza vera e propria. La necessità di realizzare resistori di piccolo valore con questa tecnica può essere compresa in base a quanto detto nel Cap.III, §4 e sarà comunque ancor più evidente quando descriveremo i metodi di

misura di resistenze di piccolo valore.

Campioni di resistenze di valore molto elevato ($> 10^7 \Omega$) sono principalmente curati dal punto di vista dell'isolamento fra i due reofori: infatti perdite superficiali anche piccole fra i due terminali del resistore, possono alterarne il valore in maniera sostanziale. Per questo motivo, resistenze di valore elevato sono generalmente racchiuse in ampole di vetro evacuate, o riempite di gas inerte (Fig.6) e trattate all'esterno con una vernice ai silicani. Così, oltre a proteggere l'elemento resistivo dall'umidità dell'atmosfera, si riducono drasticamente le perdite spurie fra i reofori in quanto il vetro è un ottimo isolante e il rivestimento ai silicani presenta ridottissime perdite superficiali.

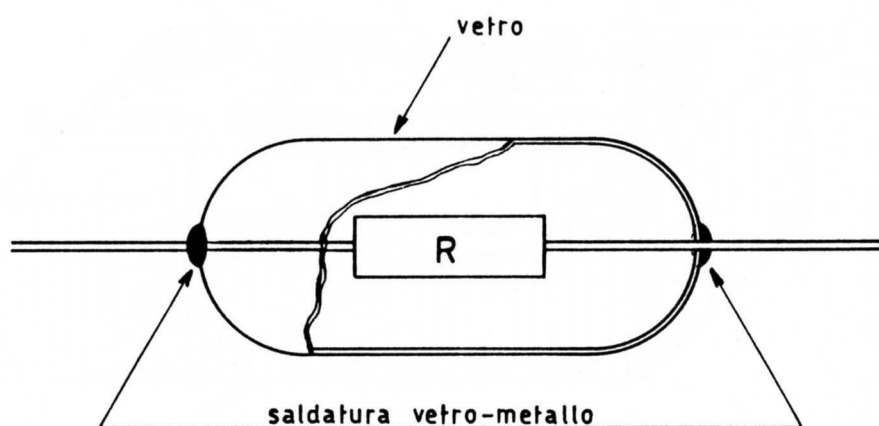


Fig.IV.6

In questo paragrafo abbiamo trattato solo di resistori impiegati in corrente continua; abbiamo cioè sorvolato sui problemi che si incontrano nella realizzazione di resistori che mantengano buone caratteristiche anche in corrente alternata. Questo aspetto sarà trattato in dettaglio nei Capp.IX e X.

Accenniamo ora alle resistenze variabili con continuità e a come esse sono realizzate: un modo tipico è quello di disporre di un filo di lega ad alta stabilità (per esempio Manganina) e di realizzare, mediante un pattino (detto *cursor*) un contatto strisciante (vedi Fig.7).

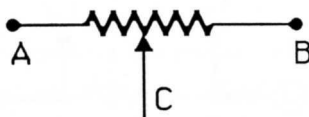


Fig.IV.7

La resistenza fra A e C e fra C e B varia a seconda della posizione di C. Quello in figura è propriamente detto *potenziometro*; per usarlo come *reostato* (cioè come resistenza variabile fra due terminali, per esempio A e B), lo si può montare come in Fig.8).

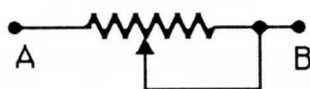


Fig.IV.8

Questa configurazione offre, rispetto a quella precedente, il vantaggio che se durante il movimento di C il contatto peggiora addirittura fino a interrompersi, la continuità è comunque assicurata. Invece di adoperare un contatto strisciante su un filo metallico si può anche usare un contatto strisciante su un sottile supporto conduttore depositato su un blocco di materiale isolante.

2.— Principio di misura di resistenza col Ponte di Wheatstone

Il *Ponte di Wheatstone* è il metodo principe per la misura accurata di resistenze; è interessante studiare il metodo in dettaglio sia per il suo interesse pratico (è un metodo di misura ancora attuale), sia perché rappresenta il *prototipo* di molte altre varianti nel campo delle misure di grandezze elettriche.

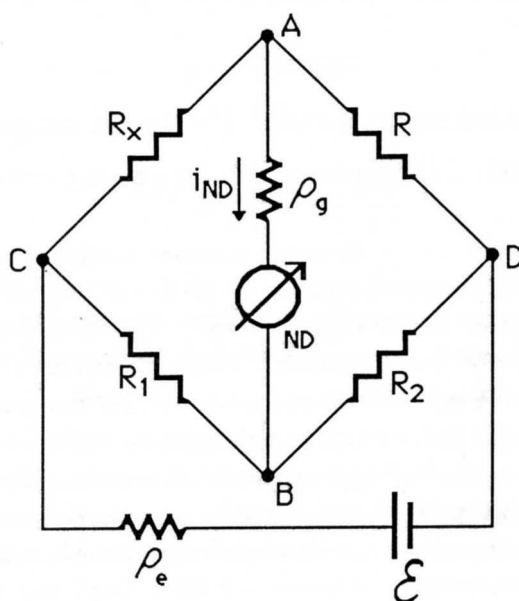


Fig.IV.9

Il circuito corrispondente al Ponte di Wheatstone è mostrato in Fig.9: R_x è la resistenza di cui si vuol misurare il valore, mentre R_1 , R_2 ed R sono resistenze di valore noto. ND è il rivelatore di zero, \mathcal{E} un generatore di forza elettromotrice, mentre ρ_g e ρ_e sono le resistenze interne del rivelatore di zero e del generatore rispettivamente.

Supponiamo che la condizione di zero su ND sia soddisfatta; ciò significa che $i_{ND} = 0$ e pertanto V_A e V_B sono equipotenziali. Prendendo come nodo di riferimento D, possiamo calcolarci la tensione V_A e V_B con la formula del partitore ($i_{ND} = 0$):

$$V_A = V_C \cdot \frac{R}{R_x + R} \quad (\text{IV.1})$$

$$V_B = V_C \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (\text{IV.2})$$

Imponendo la condizione di equilibrio, ovvero l'equipotenzialità di V_A e V_B , si ricava:

$$\frac{R}{R_x + R} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (\text{IV.3})$$

che può mettersi nella forma:

$$\frac{R}{R_x} = \frac{R_2}{R_1} \quad (\text{IV.4})$$

La (4) consente di esprimere il valore della resistenza incognita in funzione di quelle note

$$R_x = \frac{R_1}{R_2} \cdot R \quad (\text{IV.5})$$

La (5) ci dice che la condizione di equipotenzialità fra A e B, non dipende né da ρ_g , né da ρ_e , né da \mathcal{E} , ma solo dal valore delle quattro resistenze che costituiscono il ponte propriamente detto. Essendo non difficile procurarsi resistenze campione di precisione ragguardevole, questo è un obiettivo vantaggioso rispetto agli altri metodi di misura di resistenze visti nel capitolo precedente, per i quali il valore di R_x dipendeva dalla taratura di uno o più strumenti. Tuttavia vedremo fra poco che la sensibilità della misura, che in qualche caso può limitarne la precisione, *dipende* dal valore di *tutte le resistenze* in gioco e anche da \mathcal{E} .

3.— Procedure di azzeramento del Ponte ed errori di misura dovuti alla precisione dei campioni

Nelle realizzazioni pratiche R_1 ed R_2 sono resistenze campione che possono assumere valori diversi, scalati in maniera abbastanza grossolana (1-10-100-1000 Ω), mentre R è una cassetta campione a più decadi. Il rivelatore di zero è generalmente un galvanometro dotato di shunt, cioè con varie portate, o, come si dice, di varie *sensibilità*. Prima di montare il Ponte è bene considerare il wattaggio delle resistenze onde evitarne il danneggiamento; per fare queste valutazioni è necessario avere un'idea del valore di R_x . Per ottenerla si può usare un multimetro. Scelti i parametri \mathcal{E} , R_1 , R_2 ed eventualmente ρ_e in modo da rispettare i limiti di potenza sulle resistenze campione (anche su R_x , se se ne conosce il wattaggio), si può procedere a montare il ponte. Come regola generale si tenga presente che – a meno che non sia specificato diversamente – le resistenze in laboratorio devono essere adoperate in modo da dissiparvi al massimo 0.25W. Dopo aver verificato, ed eventualmente aggiustato, lo zero del galvanometro in assenza di eccitazione, si accende il generatore e si procede all'azzeramento del ponte: partendo da sensibilità basse del galvanometro, si cerca lo zero agendo su R , tenendo fissi i valori di R_1 e R_2 ; quindi si aumenta la sensibilità del rivelatore di zero e si insegue con R la condizione di equilibrio; la procedura si conclude quando il galvanometro, posto nella massima sensibilità, segna zero. L'esistenza di una condizione di zero col galvanometro nella portata più sensibile, presuppone un passo di variazione di R estremamente fine. Viceversa, non di rado la sensibilità del metodo è così buona che l'impostazione di due valori di R , R' e R'' che differiscono per la più piccola variazione effettuabile sulla cassetta (per esempio 0.1 Ω), provoca il posizionamento del galvanometro una volta da una parte rispetto allo zero (l'), un'altra dalla parte opposta (l''). Se ciò si verifica, il valore di R corrispondente allo zero va ottenuto per interpolazione dei due valori R' e R'' e delle due letture l' e l'' . Rinviando momentaneamente il problema della

sensibilità, riprendiamo l'espressione di R_x e valutiamo gli errori *a priori* che commettiamo nella sua determinazione. Considerando gli errori massimi, avremo a causa della (5):

$$\frac{\Delta R_x}{R_x} = \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta R_1}{R_1} + \frac{\Delta R_2}{R_2} \quad (\text{IV.6})$$

dove questi errori sono quelli *a priori*, generalmente forniti dal costruttore. Poiché gli errori relativi sulle decadi delle cassette non sono tutti uguali, dovremo fare un po' di attenzione nel valutarli. Se, ad esempio, R corrispondente all'equilibrio è risultata essere 5417Ω l'errore $\frac{\Delta R}{R}$ si otterrà come

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{1}{R} [5000 \cdot \left(\frac{\Delta r}{r}\right)_3 + 400 \left(\frac{\Delta r}{r}\right)_2 + 10 \left(\frac{\Delta r}{r}\right)_1 + 7 \left(\frac{\Delta r}{r}\right)_0] \quad (\text{IV.7})$$

dove $\left(\frac{\Delta r}{r}\right)_n$ indica l'errore, fornito dal costruttore, sulla decade n -esima, n essendo l'esponente di 10 che individua la decade.

La presenza del rapporto $\frac{R_1}{R_2}$ nella formula (5) che esprime R_x in funzione delle grandezze note, suggerisce una procedura di misura che esalta ulteriormente la precisione del metodo. Infatti, supponiamo di aver compiuto una prima misura con dei valori qualsiasi di R_1 e R_2 ; otterremo all'equilibrio un valore R' per R tale che $R_x = \frac{R_1}{R_2} \cdot R'$. Facciamo quindi una seconda misura che differisce dalla precedente unicamente per lo scambio di R_1 con R_2 . Otterremo lo zero per un valore $R'' \neq R'$, ma tale che $R_x = \frac{R_2}{R_1} \cdot R''$. R_x può allora essere valutata dalla media geometrica delle due misurazioni:

$$R_x = \sqrt{R' \cdot R''} \quad (\text{IV.8})$$

con una indeterminazioni *a priori*:

$$\frac{\Delta R_x}{R_x} = \frac{1}{2} \frac{\Delta R'}{R'} + \frac{1}{2} \frac{\Delta R''}{R''} \quad (\text{IV.9})$$

La precisione non dipende in alcun modo dalla taratura delle resistenze R_1 e R_2 .

Sembrirebbe che il metodo potesse applicarsi indipendentemente dal valore di R_1 e di R_2 . In pratica ciò non è vero e la procedura di fatto richiede che $R_1 \approx R_2$. Infatti, supponiamo che $\frac{R_1}{R_2} \approx 10$.

In questo caso $\frac{R'}{R''} \approx 10^{-2}$ e sarà assai difficile coprire con la cassetta campione, a meno che non abbia un numero di decadi particolarmente elevato, entrambi i valori con sufficiente risoluzione. Inoltre nelle due configurazioni il regime delle correnti nei vari rami è assai diverso e questa dissimmetria non aiuta certo la compensazione di eventuali effetti spuri; la procedura dello scambio di R_1 con R_2 si adotta quindi solo quando R_1 è di valore prossimo a R_2 .

4.— **Sensibilità del Ponte di Wheatstone: misura sperimentale**

Nel paragrafo precedente abbiamo considerato anche il caso in cui la variazione più fine possibile nella resistenza campione R , provocava una deflessione talmente ampia del galvanometro che il valore di R corrispondente all'equilibrio era ottenibile solamente mediante interpolazione. Molto probabilmente in un caso di questo genere l'errore associato alla sensibilità finita del metodo, risulterà inferiore a quello di taratura del campione. Se, ad esempio, la più piccola variazione di R corrisponde a una sua variazione relativa di 10^{-5} , essa sarà trascurabile rispetto all'errore di taratura di R

medesimo (~ 20 o 50 volte maggiore a seconda del campione). In generale però la indeterminazione associata alla sensibilità non sarà trascurabile rispetto agli altri contributi e pertanto occorre sempre darle una valutazione.

Diamo intanto una definizione della sensibilità della misura col Ponte di Wheatstone:

$$S = \lim_{\Delta R_x \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{\frac{\Delta R_x}{R_x}} \quad (\text{IV.10})$$

cioè essa è il rapporto (per $\Delta R_x \rightarrow 0$) fra la variazione dell'elongazione sullo strumento (Δl) e la corrispondente variazione relativa della resistenza R_x da misurare.

Questa definizione consente di valutare l'errore relativo $(\frac{\Delta R_x}{R_x})_S$, dovuto alla sensibilità, nel seguente modo: se Δl_m rappresenta la minima deflessione percepibile (diciamo $\frac{1}{4}$ della divisione più piccola), allora:

$$\left(\frac{\Delta R_x}{R_x}\right)_S = \frac{\Delta l_m}{(S)_{eq}} \quad (\text{IV.11})$$

dove si è usata la notazione $(S)_{eq}$ per indicare che la sensibilità in gioco è quella attorno alla posizione di equilibrio del ponte, ovvero allo zero del galvanometro.

La sensibilità così definita sarebbe assai scomoda da misurare, poiché si tratterebbe di andare ad aggiungere resistenze piccole in serie a R_x ($R_x + \Delta R_x$) o grosse in parallelo ($R_x - \Delta R_x$), dovremmo cioè operare sul ramo di R_x . Si può procedere diversamente, agendo su R che è una cassetta di resistenze: infatti, valendo all'equilibrio la (5) e essendo fissate R_1 e R_2 , abbiamo:

$$\left(\frac{\Delta R_x}{R_x}\right)_{eq} = \left(\frac{\Delta R}{R}\right)_{eq} \quad (\text{IV.12})$$

e pertanto la sensibilità, data dalla (10), può essere valutata, all'equilibrio come:

$$(S)_{eq} = \lim_{\Delta R \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta l}{\Delta R}\right)_{eq} \cdot (R)_{eq} \quad (\text{IV.13})$$

Nel seguito a meno che non sia necessario per evitare equivoci, ometteremo il simbolo eq , ma resta inteso che la sensibilità di cui parleremo è quella nell'intorno dell'equilibrio del ponte.

In pratica per misurare la sensibilità si procede come segue: una volta raggiunto lo zero, o un intorno dello zero, con il galvanometro nella portata più sensibile, si effettua una variazione ΔR_M di R tale che il galvanometro compia una variazione di deflessione Δl_M sufficientemente ampia da poter essere valutata senza eccessiva indeterminazione. La sensibilità, nell'intorno dell'equilibrio, è allora approssimata dall'espressione:

$$S_M \approx \frac{\Delta l_M}{\Delta R_M} \cdot R_M \quad (\text{IV.14})$$

L'indice M sta a ricordare che questa valutazione è il risultato di una misura; l'errore di sensibilità nella misura di R_x verrà quindi valutato come:

$$\left(\frac{\Delta R_x}{R_x}\right)_S = \frac{\Delta l_m}{S_M} \quad (\text{IV.15})$$

Facciamo un esempio: adoperando un galvanometro nella portata più sensibile ($100nA/div$), con $R_x \approx 500\Omega$, $R_1 = R_2 \approx 1000\Omega$ e $\mathcal{E} = 1.2 V$, sperimentalmente si trovano variazioni di $8div/\Omega$ attorno al valore di R corrispondente all'equilibrio; pertanto dalla (14) otteniamo:

$$S_M \approx 8 \cdot 500 = 40 \text{ div}/\% \quad (\text{IV.16})$$

ovvero si ha una variazione di 40 divisioni nel galvanometro per una variazione dell'1% di R ; equivalentemente S_M può essere scritta come

$$S_M = 4 \cdot 10^3 / 100\% \quad (\text{IV.17})$$

Tenendo conto che si può apprezzare fino a $\frac{1}{4}$ di divisione, la (15) ci dice che:

$$\left(\frac{\Delta R_x}{R_x} \right)_S = 6 \cdot 10^{-5} \quad (\text{IV.18})$$

Questo valore va confrontato con l'errore di taratura su R , che coincide con l'indeterminazione finale di R_x se si effettua la procedura di scambio di R_1 e R_2 :

$$\left(\frac{\Delta R}{R} \right)_{tar} \approx 5 \cdot 10^{-4}$$

Non sempre si ottengono delle condizioni di così alta sensibilità; se per esempio avessimo avuto da misurare una resistenza di $500K\Omega$ sicuramente la nostra sensibilità sarebbe stata decisamente inferiore.

Nel prossimo paragrafo studieremo in dettaglio la ricerca delle condizioni di massima sensibilità dal punto di vista teorico; tuttavia anche sperimentalmente è possibile determinare la condizione di migliore sensibilità per la misura di R_x facendo misure con vari rapporti $\frac{R_1}{R_2}$ e misurando, per ognuna di queste configurazioni, la sensibilità. La combinazione $R_1 - R_2$ che dà la migliore sensibilità, cioè il massimo di S_M , è da preferire, purché la riduzione dell'errore di sensibilità non porti contropartite su altri errori: se ad esempio l'ottimizzazione della sensibilità, comporta la scelta di una resistenza campione troppo piccola ($\leq 10\Omega$), questa configurazione è sconsigliabile: l'indeterminazione valutabile a priori infatti aumenta, poiché le resistenze dei cavetti di collegamento diventano non più trascurabili rispetto alla resistenza dei campioni utilizzati.

5.- *Sensibilità del Ponte con un galvanometro come rivelatore di zero. Valutazione teorica.*

Se si vuole dare una valutazione teorica della sensibilità attorno all'equilibrio

$$(S)_{eq} = \left(\frac{\Delta l}{\Delta R_x} \right)_{eq} \cdot R_x$$

occorre innanzitutto esplicitare l'elongazione del rivelatore di zero in funzione o della corrente che lo attraversa o della tensione ai suoi morsetti. Se il rivelatore di zero è un galvanometro, avremo

$$l = \frac{i_g}{K_A} \quad (\text{IV.19})$$

dove K_A è la costante reometrica. Pertanto, sostituendo al rapporto incrementale la derivata parziale avremo:

$$(S)_{eq} = \frac{1}{K_A} \left(\frac{\partial i_g}{\partial R_x} \right)_{eq} \cdot R_x \quad (\text{IV.20})$$

Il problema è a questo punto ricondotto a calcolare i_g .

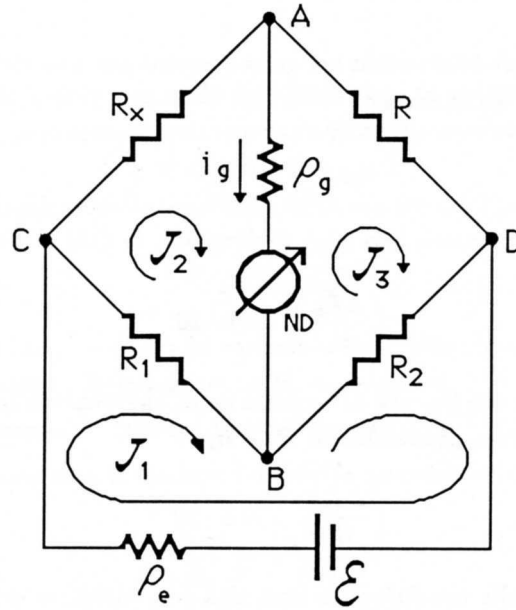


Fig.IV.10

Seguendo il formalismo delle correnti di maglia (Fig.10), si possono calcolare \mathcal{J}_2 e \mathcal{J}_3 e quindi $i_g = \mathcal{J}_2 - \mathcal{J}_3$. Si trova così:

$$i_g = \frac{\begin{vmatrix} \rho_e + R_1 + R_2 & \mathcal{E} & -R_2 \\ -R_1 & 0 & -\rho_g \\ -R_2 & 0 & \rho_g + R + R_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \rho_g + R_1 + R_2 & -R_1 & \mathcal{E} \\ -R_1 & R_1 + R_x + \rho_g & 0 \\ -R_2 & -\rho_g & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \rho_e + R_1 + R_2 & -R_1 & -R_2 \\ -R_1 & R_1 + R_x + \rho_g & -\rho_g \\ -R_2 & -\rho_g & \rho_g + R + R_2 \end{vmatrix}} = \frac{\mathcal{E}(R_1 R - R_x R_2)}{D} \quad (\text{IV.21})$$

con D dato da

$$D = (\rho_e + R_1 + R_2)(R_1 + R_x + \rho_g)(\rho_g + R + R_2) - 2R_1 R_2 \rho_g - R_2^2(R_1 + R_x + \rho_g) - \rho_g^2(\rho_e + R_1 + R_2) - R_1^2(\rho_g + R + R_2) \quad (\text{IV.22})$$

Posto $i_g = \frac{N}{D}$, essendo $N = \mathcal{E}(R_1 R - R_x R_2)$, si ha:

$$\frac{\partial i_g}{\partial R_x} = \frac{\frac{\partial N}{\partial R_x} D - N \frac{\partial D}{\partial R_x}}{D^2} = \frac{\partial N}{\partial R_x} \frac{1}{D} - i_g \frac{\partial D}{\partial R_x} \frac{1}{D} \quad (\text{IV.23})$$

Imporre la condizione di equilibrio $i_g = 0$ porta a:

$$\left(\frac{\partial i_g}{\partial R_x} \right)_{eq} = \left(\frac{\partial N}{\partial R_x} \frac{1}{D} \right)_{eq} \quad (\text{IV.24})$$

se, come si può verificare, non ci sono divergenze in $\frac{\partial D}{\partial R_x} \frac{1}{D}$.

Sviluppando il calcolo per il membro di destra della (24) e tenendo della (5), si trova:

$$\left(\frac{\partial i_g}{\partial R_x}\right)_{eq} = \frac{-\mathcal{E}R_2R_1}{[\rho_e(R_1 + R_x) + R_x(R_1 + R_2)][\rho_g(R_1 + R_2) + R_2(R_1 + R_x)]} \quad (\text{IV.25})$$

Per ottenere il risultato (24), avremmo potuto procedere anche diversamente facendo ricorso al teorema di Thévenin applicato ai terminali A e B della Fig.10. Dette \mathcal{E}_{Th} e ρ_{Th} la fem e la resistenza di Thévenin fra A e B, abbiamo per i_g :

$$i_g = \frac{\mathcal{E}_{Th}}{\rho_g + \rho_{Th}} \quad (\text{IV.26})$$

Pertanto

$$\left(\frac{\partial i_g}{\partial R_x}\right)_{eq} = \left(\frac{\partial \mathcal{E}_{Th}}{\partial R_x}\right)_{eq} \frac{1}{(\rho_{Th})_{eq} + \rho_g} + (\mathcal{E}_{Th})_{eq} \left[\frac{\partial}{\partial R_x} \left(\frac{1}{\rho_{Th} + \rho_g}\right)\right]_{eq} = \left(\frac{\partial \mathcal{E}_{Th}}{\partial R_x}\right)_{eq} \frac{1}{(\rho_{Th})_{eq} + \rho_g} \quad (\text{IV.27})$$

in quanto è nulla $(\mathcal{E}_{Th})_{eq}$.

Per \mathcal{E}_{Th} (la ddp fra A e B quando è assente il galvanometro) si trova:

$$\mathcal{E}_{Th} = \frac{\mathcal{E}}{\rho_e + \frac{(R_x + R)(R_1 + R_2)}{R_x + R + R_1 + R_2}} \cdot \left(\frac{R}{R_x + R} - \frac{R_2}{R_1 + R_2}\right) \cdot \frac{(R_x + R)(R_1 + R_2)}{R_x + R + R_1 + R_2} \quad (\text{IV.28})$$

Quanto a $(\rho_{Th})_{eq}$ essa si può calcolare tenendo presente che all'equilibrio un ponte si comporta simmetricamente nei confronti del generatore e del rivelatore: vale a dire se l'eccitazione è inserita fra A e B, come occorre fare per misurare la nostra ρ_{Th} , C e D risultano equipotenziali. Il calcolo di ρ_{Th} si può allora fare indifferentemente sia cortocircuitando che lasciando aperto il collegamento CD (purché ci si ricordi di inserire nel risultato la condizione di equilibrio, cioè $R = R_x \frac{R_2}{R_1}$). Procedendo così si trova:

$$(\rho_{Th})_{eq} = \frac{R_2(R_1 + R_x)}{R_1 + R_2} \quad (\text{IV.29})$$

Derivando la (28) rispetto a R_x , imponendo la condizione di equilibrio e inserendo il risultato nella (27) si ritrova ovviamente la (25).

Pertanto la sensibilità del Ponte di Wheatstone all'equilibrio vale:

$$(S)_{eq} = \frac{1}{K_A} \left(\frac{\partial i_g}{\partial R_x}\right)_{eq} \cdot R_x = \frac{-\mathcal{E}R_2R_1R_x}{K_A[\rho_e(R_1 + R_x) + R_x(R_1 + R_2)][\rho_g(R_1 + R_2) + R_2(R_1 + R_x)]} \quad (\text{IV.30})$$

Non si dia particolare importanza al segno della (30), poiché quello che interessa è di fatto il modulo di $(S)_{eq}$.

Nelle condizioni pratiche che si incontrano, il galvanometro è dato (e quindi K_A e ρ_g sono fissati) e ottimizzare la misura di R_x significa assegnare agli altri parametri del circuito i valori che massimizzano (in valore assoluto) la sensibilità $(S)_{eq}$. Intanto si nota che la sensibilità aumenta all'aumentare di \mathcal{E} (cosa d'altronde ovvia) e che a parità di \mathcal{E} si ha vantaggio al diminuire di ρ_e . Restano da scegliere R_1 e R_2 che massimizzano $|(S)_{eq}|$. Imponendo le condizioni di stazionarietà $\frac{\partial S_{eq}}{\partial R_1} = \frac{\partial S_{eq}}{\partial R_2} = 0$ si trova, dopo qualche calcolo per la verità un po' laborioso:

$$\begin{cases} R_1 = \sqrt{\frac{R_x \rho_e (R_x + \rho_g)}{R_x + \rho_e}} \\ R_2 = \sqrt{\rho_e \rho_g} \\ R = \sqrt{\frac{R_x \rho_g (R_x + \rho_e)}{R_x + \rho_g}} \end{cases} \quad (\text{IV.31})$$

Queste condizioni, dette di *Heaviside* dal nome di colui che per primo risolve il problema oggetto di questo paragrafo, stabiliscono i valori che nella misura di una certa resistenza R_x , fissato il galvanometro e il generatore, devono essere assegnati a R_1 e R_2 per massimizzare la sensibilità. Esse sono di validità generale, ma nella pratica trovano -come vedremo- scarsa applicazione, poiché in esse non si tiene conto degli altri vincoli cui le resistenze R_1, R_2 e R devono sottostare.

Consideriamo un caso tipico: $\rho_e \ll 1\Omega$, $\rho_g \sim 20\Omega$. A voler rispettare la condizione (31) si incapperebbe nel problema di dover fare R_1 e R_2 assai piccole, dell'ordine di ρ_e , e anche R decisamente inferiore a R_x . In questo caso le condizioni (31) non possono essere soddisfatte: infatti anche se fosse possibile reperire campioni di resistenza di valore piccolo e sufficientemente precisi, tale precisione verrebbe sicuramente compromessa dal contributo, parzialmente erratico, derivante dalle resistenze dei cavetti e dei contatti. Si finirebbe così, nello sforzo acritico di massimizzare la sensibilità, col peggiorare la qualità complessiva della misura di R_x , aumentando gli errori di tipo sistematico. In altre condizioni, prima ancora che intervengano i limiti sopra detti, occorre tener conto del vincolo imposto dal wattaggio finito delle resistenze, che si traduce in un limite superiore alla corrente, in almeno uno dei rami del ponte. Se tale vincolo esiste occorre tenerne conto esplicitamente nella ricerca del massimo di sensibilità, essendo certamente non corretto ricercare il massimo incondizionato della sensibilità come fatto sopra (considerando \mathcal{E} costante) e poi aumentare \mathcal{E} fino a ottenere la massima corrente consentita nel ramo. Supponiamo, per esempio, che esista un limite massimo I_M per la corrente che circola nel ramo di R_x , ovvero un limite di wattaggio su R_x . All'equilibrio la corrente I_M che circola nel ramo $R_x - R$ è data da:

$$I_M = \frac{\mathcal{E}R_1}{\rho_e(R_1 + R_x) + R_x(R_1 + R_2)} \quad (\text{IV.32})$$

e pertanto la sensibilità all'equilibrio può esprimersi come (vedi (30)):

$$(S)_{eq} = -\frac{I_M R_2 R_x}{K_A [\rho_g(R_1 + R_2) + R_2(R_1 + R_x)]} = -\frac{I_M}{K_A \left[\frac{\rho_g}{R_x} \left(\frac{R_1}{R_2} + 1 \right) + \frac{R_1}{R_x} + 1 \right]} \quad (\text{IV.33})$$

Questa espressione ci dice che, fissata I_M al massimo valore possibile, la sensibilità è tanto migliore quanto più $R_1 < R_x, R_2$. Al solito non sarà opportuno diminuire più di un tanto R_1 , pena incontrare i problemi di precisione già detti.

In qualche testo si legge che il massimo assoluto di sensibilità del Ponte di Wheatstone si ha quando $\rho_e = \rho_g = R_x = R_1 = R_2 = R$; questa è una affermazione che va fatta con molte precisazioni. Chiariamo innanzitutto i termini esatti del problema: supponiamo di avere un galvanometro in cui è possibile scegliere il tipo di avvolgimento e di disporre di un numero N molto grande di generatori, ognuno di forza elettromotrice ϵ e resistenza interna ρ_e e poniamoci la seguente domanda: quali sono l'avvolgimento, la disposizione dei generatori e i valori di R_1 e R_2 che massimizzano la sensibilità della misura di R_x ? Sappiamo già che per quanto riguarda il galvanometro (Cap.II, §4) il migliore avvolgimento è quello che ha resistenza pari a quella del circuito su cui è chiuso (ovvero quella data dalla (29)) e pertanto

$$\rho_g = \frac{R_2(R_1 + R_x)}{R_1 + R_2} \quad (\text{IV.34})$$

Per quanto riguarda i generatori, si noti che la soluzione è quella ottenuta nel §10 del Cap.I, cioè che conviene disporre i generatori in configurazioni di serie e paralleli tali che la resistenza interna complessiva ρ_e sia uguale alla resistenza del circuito. Infatti si tratta anche in questo caso di massimizzare la corrente sul carico poiché così facendo si massimizza la fem di Thévenin che viene

poi applicata al galvanometro. Il valore della resistenza del carico vista dal generatore, all'equilibrio vale $\frac{R_x(R_1 + R_2)}{R_1 + R_x}$ e pertanto

$$\rho_e = \frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_x} \cdot R_x \quad (\text{IV.35})$$

che combinata con la (34) dà

$$\rho_e \rho_g = R_2 R_x \quad (\text{IV.36})$$

Abbiamo così fissato la migliore condizione sui parametri \mathcal{E} , ρ_e , K_A e ρ_g , tenendo conto dei vincoli; sappiamo già che ottimizzare i parametri R_1 , R_2 dà luogo alle condizioni (31); queste ultime, insieme alla (36) danno finalmente:

$$\rho_e = \rho_g = R_1 = R_2 = R = R_x \quad (\text{IV.37})$$

E' vera quindi l'affermazione, ma rimane quasi di puro interesse accademico, anche perché non tiene in alcun conto i limiti che possono derivare dal wattaggio finito delle resistenze. In questa medesima prospettiva è bene ricordare che in una misura col Ponte di Wheatstone non ha interesse di per sé la massimizzazione della sensibilità, magari anche con qualche vincolo imposto, quanto piuttosto che l'errore dovuto alla sensibilità sia reso decisamente inferiore a quello di taratura dei campioni (nel nostro caso $\sim 0.05\%$). Si può ad esempio vedere che con $\mathcal{E} = 10V$, $\rho_e < 0.1\Omega$, $\rho_g \approx 20\Omega$, $K_A = 10^{-7}A/div$, e resistenza R_x fino a qualche decina di $k\Omega$, l'errore di sensibilità di fatto non è neppure un problema e anche in condizioni assai lontane dal massimo della sensibilità, l'errore resta dominato dalla taratura dei campioni. Verifichiamo questo punto con qualche esempio:

A) $R_x = 10\Omega$; la condizione (31) imporrebbe $R_1 \approx 1.7\Omega$, $R_2 \approx 1.41\Omega$ quindi valori troppo piccoli. Poniamo quindi R_1 e R_2 a un valore che non comprometta la precisione dei campioni: 10Ω . Otteniamo così $S \approx 8 \cdot 10^3 div/\%$, che dà luogo, supponendo di poter distinguere $\frac{1}{4}$ di divisione, a una incertezza ben inferiore all'errore di taratura; si noti poi che se le resistenze non sono del wattaggio sufficiente ($2.5 W$), dovremo ridurre \mathcal{E} fino a rientrare nei limiti consentiti.

B) per $R_x = 10k\Omega$ dalla (31) otteniamo $R_1 = 31.6\Omega$, $R_2 = 1.41\Omega$; ponendo $R_1 = 100\Omega$, $R_2 = 10\Omega$ abbiamo $S \approx 90 div/\%$ che corrisponde a un errore relativo di sensibilità su R_x : $\approx 0.003\%$, ancora piccolo rispetto all'errore di taratura.

C) per $R_x = 100k\Omega$ la sensibilità che si ottiene ($R_1 = 100\Omega$, $R_2 = 10\Omega$, contro i valori ottimali $R_1 = 100\Omega$ $R_2 = 1.41\Omega$) è $S = 9 div/\%$ (contro $9.7 div/\%$ ottimali e $8.8 div/\%$ con $R_1 = 10 k\Omega$ e $R_2 = 100 \Omega$), corrispondente a $\approx 0.03\%$, che risulta in questo caso confrontabile con l'errore di taratura.

Dagli esempi A), B), C) sopra riportati risulta evidente che dovendo misurare resistenze $R_x < 10^4\Omega$, il metodo del Ponte di Wheatstone realizzato come sopra descritto, cioè con un buon galvanometro a rivelare lo zero, porta a errori su R_x dominati dalla precisione del campione (dell'ordine di qualche parte su 10^4), mentre per $R_x > 10^5\Omega$ il contributo all'errore proveniente dalla sensibilità può facilmente dominare sulle altri indeterminazioni.

6.— *Sensibilità del Ponte con un microvoltmetro come rivelatore di zero*

Il metodo del Ponte di Wheatstone è stato ideato quando gli unici rivelatori di zero utilizzabili erano i galvanometri; al giorno d'oggi è possibile usare rivelatori di zero di prestazioni decisamente superiori, ad esempio misuratori di tensione assai sensibili (*microvoltmetri*) con resistenze di ingresso estremamente elevate, anche $> 10^{11}\Omega$.

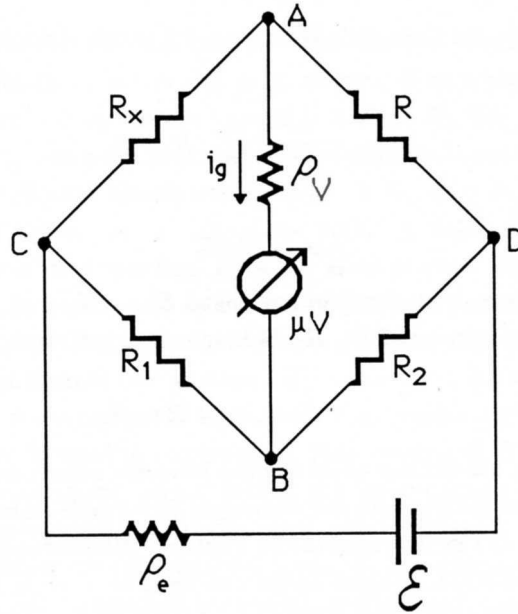


Fig.IV.11

Consideriamo la sensibilità del metodo in questo caso (Fig.11), supponendo di avere un microvoltmetro (μV) che abbia una costante voltmetrica $K_V = 10^{-6} V/div$ e $\rho_V = 10^8 \Omega$.

La sensibilità del metodo in questo caso (vedi (10)) si definisce come

$$(S)_{eq}^{\mu V} = \frac{1}{K_V} \left(\frac{\partial V_g}{\partial R_x} \right)_{eq} \cdot R_x = \frac{\rho_V}{K_V} \left(\frac{\partial i_g}{\partial R_x} \right)_{eq} \cdot R_x \quad (IV.38)$$

e possiamo così sfruttare i risultati precedenti per il calcolo di i_g (30):

$$(S)_{eq}^{\mu V} = \frac{-\rho_V}{K_V} \frac{\mathcal{E} R_x R_2 R_1}{[\rho_e(R_1 + R_x) + R_x(R_1 + R_2)][\rho_V(R_1 + R_2) + R_2(R_1 + R_x)]} \quad (IV.39)$$

Si vede subito che il microvoltmetro si comporta come un galvanometro avente una sensibilità massima estremamente più elevata: $\frac{\rho_V}{K_V} = 10^{14} div/A$ contro $\frac{1}{K_A} = 10^7 div/A$ nel caso del galvanometro precedentemente descritto.

Le condizioni di massima sensibilità (31) su R_1 e R_2 restano applicabili anche in questo caso; questa volta, almeno finché $\rho_e \ll R_x \ll \rho_V$ (quasi sempre cioè, visti i valori di ρ_e e ρ_V) esse danno:

$$R_2 = \sqrt{\rho_e \rho_V} \quad R_1 = R_2 \quad R = R_x \quad (IV.40)$$

Si noti che la prima delle (40) è una relazione sostanzialmente indeterminata e l'unica prescrizione è di fatto l'uguaglianza di R_1 e R_2 . A queste conclusioni si può anche arrivare direttamente osservando che le ipotesi fatte $\rho_e \rightarrow 0$, $\rho_V \rightarrow \infty$, corrispondono ad avere un generatore ideale di tensione e per rivelatore di zero un voltmetro ideale. In queste ipotesi, la ddp V_g ai capi del rivelatore vale:

$$V_g = \mathcal{E} \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R}{R + R_x} \right) \quad (IV.41)$$

Calcolando $\left(\frac{\partial V_g}{\partial R_x} \right)_{eq}$ partendo dalla (41) e sostituendo questa grandezza nella (38) si ottiene una espressione per $(S)_{eq}^{\mu V}$ il cui massimo comporta la condizione (40).

Si può verificare con qualche esempio numerico che la sensibilità di misura risulta ora estremamente elevata e poco dipendente dalla scelta di R_1 e R_2 purché uguali (consideriamo solo casi in cui $R_x > 10^5 \Omega$, perché solo in questi casi è di effettiva utilità l'impiego di un microvoltmetro al posto di un galvanometro).

A) $R_x = 10^6 \Omega$: il valore massimo della sensibilità è di circa $2.5 \cdot 10^4 \text{ div}/\%$ e rimane praticamente costante da $R_1 = R_2 = 10 \Omega$ a $R_1 = R_2 = 10^6 \Omega$.

B) $R_x = 10^8 \Omega$: si ottengono per $R_1 = R_2$ (da 10 a $10^6 \Omega$) sensibilità $S \approx 1.7 \cdot 10^4 \text{ div}/\%$.

Se $R_x > 10^6 \Omega$ le configurazioni in cui $R_1 = R_2$ non sono sempre praticabili, data la difficoltà di reperire per R campioni di valore elevato e sufficientemente accurati. Vanno adottate viceversa configurazioni che consentono l'uso di $R \leq 10^5 \Omega$ ottenibili con le usuali cassette campione. Consideriamo quindi la sensibilità del ponte nell'ipotesi di dover misurare $R_x = 10^6$ e $10^8 \Omega$, rispettando il vincolo ora detto su R .

A') $R_x = 10^6 \Omega$, $R_1 = 1000 \Omega$, $R_2 = 10 \Omega$ ($R = 10000 \Omega$): si ottiene una sensibilità decisamente inferiore ($(S)_{eq}^{\mu V} \approx 10^3 \text{ div}/\%$) rispetto al valore massimo, ma ancora più che sufficiente per non compromettere la qualità della misura di R_x .

B') $R_x = 10^8 \Omega$, $R_1 = 50000 \Omega$, $R_2 = 10 \Omega$ ($R = 20000 \Omega$): $(S)_{eq}^{\mu V} = 20 \text{ div}/\%$ che dà un errore di sensibilità ancora assai inferiore a quello di taratura.

L'uso del microvoltmetro come rivelatore di zero risulta estremamente utile anche quando esiste un limite molto basso per corrente che può circolare in un ramo (si veda il paragrafo successivo), per esempio quello di R_x . Riprendendo il risultato (33), otteniamo:

$$(S)_{eq}^{\mu V} = \frac{-\rho_V}{K_V} \frac{I_M}{\frac{\rho_V}{R_x} \left(\frac{R_1}{R_2} + 1 \right) + \frac{R_1}{R_x} + 1} \quad (\text{IV.42})$$

che per $\rho_V \approx 10^8 \Omega$ può senz'altro approssimarsi come:

$$(S)_{eq}^{\mu V} \approx \frac{-1}{K_V} \frac{I_M R_x}{\left(\frac{R_1}{R_2} + 1 \right)} \quad (\text{IV.43})$$

Tale sensibilità dipende solo dal rapporto $\frac{R_1}{R_2}$ ed è tanto migliore quanto più $R_2 > R_1$.

Vediamo ciò su un esempio, ponendo $I_M = 50 \mu A$, $R_x = 20 \Omega$: per $\frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{10}$ si ha $|(S)_{eq}^{\mu V}| \approx 9 \text{ div}/\%$ che dà $\left(\frac{\Delta R_x}{R_x} \right) \approx 0.03\%$ e quindi comparabile con quello di taratura. Aumentare ancora $\frac{R_2}{R_1}$ migliora al più del 10% il risultato precedente.

Concludendo si può affermare che l'uso del microvoltmetro come rivelatore di zero permette di estendere di alcuni ordini di grandezza il campo di applicazione del metodo del Ponte di Wheatstone, mantenendo per il resto la strumentazione ordinaria, ad esempio senza dover crescere oltre misura la fem del generatore, né far ricorso a valori molto elevati dei campioni di resistenza.

7.— Misure della resistenza interna di un galvanometro

Il procedimento di misura si basa sul circuito riportato in Fig.12 che ricorda molto da vicino un Ponte di Wheatstone:

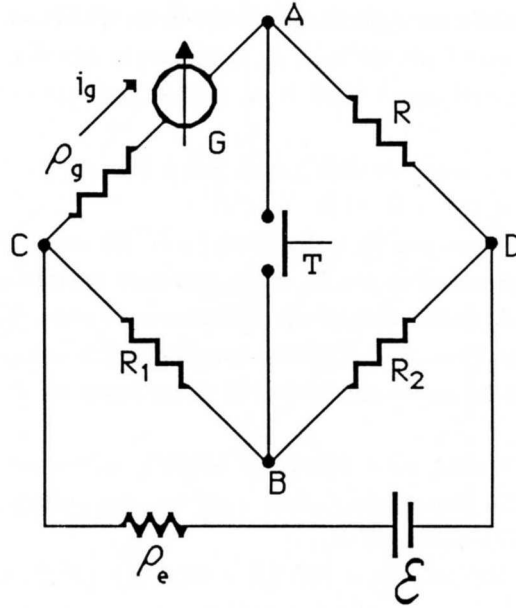


Fig.IV.12

Mantenendo \mathcal{E} sufficientemente piccola e usando una resistenza ρ_e molto grande si fa in modo che la corrente che circola nel galvanometro, posto alla massima sensibilità, lo invii a fondo scala (indifferentemente a destra o a sinistra dello zero). L'equilibrio del ponte, cioè l'equipotenzialità dei terminali A e B sarà individuata da quei valori di R_1 , R_2 e R per i quali l'apertura e chiusura del tasto T non provoca apprezzabili spostamenti dell'indice del galvanometro, cioè della corrente i_g . In queste condizioni varrà:

$$\rho_g = \frac{R \cdot R_1}{R_2} \quad (\text{IV.44})$$

Essendoci un limite per la corrente i_g (diciamo $5\mu A$), la sensibilità della misura sarà corrispondentemente ridotta. Non possiamo però - per calcolarla - usare alcuna delle formule derivate precedentemente, perché questa volta si tratta di calcolare le variazioni di i_g rispetto a $(i_g)_{eq}$, dove i_g non è la corrente nel ramo di rivelazione.

La sensibilità (all'equilibrio) va pertanto definita come

$$(S)_{eq} = \frac{(\Delta i)_T}{\Delta \rho_g} \cdot \rho_g = \frac{1}{K_A} \frac{(\Delta i_g)_T}{\Delta \rho_g} \cdot \rho_g \quad (\text{IV.45})$$

dove K_A è la costante reometrica del galvanometro, $\frac{(\Delta \rho_g)}{\rho_g}$ è la variazione percentuale di ρ_g rispetto al valore di equilibrio e $(\Delta i_g)_T$ rappresenta la variazione di i_g fra quando il tasto è aperto e quando è chiuso. $(\Delta i_g)_T$ risulta:

$$|(\Delta i_g)_T| = (i_g)_{eq} \Delta \rho_g \frac{R_2}{(R_1 + R_2)(R_1 + \rho_g)} \quad (\text{IV.46})$$

come si può dimostrare, calcolando i_g a tasto aperto e a tasto chiuso e prendendo poi la differenza fra i due valori, arrestandosi al primo ordine in $\Delta \rho_g$. Otteniamo così:

$$|(S)_{eq}| = \frac{1}{K_A} (i_g)_{eq} \frac{\rho_g R_2}{(R_1 + R_2)(R_1 + \rho_g)} \quad (\text{IV.47})$$

La sensibilità è quindi tanto migliore quanto più $\frac{R_1}{\rho_g}, \frac{R_1}{R_2} \ll 1$. Nel caso concreto della misura in laboratorio: $\rho_g \approx 20\Omega$ e quindi prendendo $R_1 = 10\Omega$ (valori inferiori creano problemi a causa

della resistenza dei cavetti) e $R_2 = 1k\Omega$ si ha ($K_A = 10^{-7}A/div$, $i_g = 5 \cdot 10^{-6}A$) otteniamo $|S_{eq}| \approx 0.33div/\%$ e quindi l'errore $(\frac{\Delta\rho_g}{\rho_g})_S \approx 0.8\%$ supponendo di apprezzare $\frac{1}{4}$ di divisione.

Se viceversa montiamo al posto del tasto un microvoltmetro e procediamo all'azzeramento come se si trattasse di un Ponte di Wheatstone convenzionale, troveremo (vedi (43)) una sensibilità tale da dare un errore $(\frac{\Delta\rho_g}{\rho_g})_S \approx 0.3\%$ decisamente migliore, ma non ancora perfettamente soddisfacente; la sensibilità si può ulteriormente migliorare aumentando la corrente del galvanometro (basta farlo lentamente in modo da non dare brusche sollecitazioni meccaniche): il galvanometro adesso si comporta davvero come una pura resistenza e pertanto la sua indicazione non è più di interesse. Vedremo più avanti altri sistemi per misurare la resistenza interna di un galvanometro.

Il metodo di misura descritto per primo, quello che fa ricorso al tasto, oltre a non essere particolarmente sensibile soffre anche di un altro problema, dovuto alle forze elettromotrici che si possono avere al contatto di due metalli quando le superfici non siano all'equilibrio termodinamico (per esempio perché è in atto una debole reazione chimica dovuta alla non perfetta pulizia delle superfici dei contatti): effettuando la misura si osserva che il valore di ρ_g cui corrisponde l'indifferenza della corrente i_g rispetto alle commutazioni del tasto, è diverso a seconda della polarità del generatore. Il fenomeno si può spiegare pensando che il tasto chiuso introduca una piccola (anche solo qualche μV) fem E_C . Se così è, quando si è regolata ρ_g fino a ottenere l'equilibrio, in realtà non abbiamo reso A e B equipotenziali, piuttosto abbiamo ottenuto che fra di essi ci sia una ddp $V_A - V_B = E_C$, tale che la chiusura del tasto non altera il regime di corrente. Se si inverte la polarità della batteria, le correnti inviate da essa si invertono, mentre la fem E_C mantiene il suo segno. Prendendo la media dei valori di ρ_g così ottenuti si ha una stima di ρ_g che si può dimostrare esente dall'effetto spurio, a meno di effetti del secondo ordine in $\frac{E_C}{V}$, dove V è la ddp ai capi del ponte.

8.— Fem parassite e azzeramento del rivelatore di zero

La misura di resistenze col Ponte di Wheatstone si basa sulla identificazione di uno zero nel valore della ddp fra due terminali; è chiaro pertanto che la presenza, fra questi due terminali, di forze elettromotrici "spurie" o "parassite", cioè riconducibili a cause diverse dal *non equilibrio* del ponte, potrà compromettere la correttezza del metodo e sarà pertanto da evitare, tanto più quanto meno sensibile è la configurazione di misura. Poiché l'origine fisica di queste forze elettromotrici *parassite* è varia, diverse sono le precauzioni da adottare per ridurne l'entità; di queste precauzioni parleremo ora brevemente, nonché degli accorgimenti da seguire per ridurre gli effetti qualora tali fem non siano state del tutto rimosse.

Fra le precauzioni è fondamentale evitare di toccare durante il montaggio del circuito le superfici dei conduttori (morsetti e cavi) che, pressate l'una contro l'altra, costituiranno poi i contatti fra i conduttori della rete; una simile precauzione riduce sia le fem di contatto dovute ad azioni chimiche, sia le differenze di potenziale termoelettriche dovute all'istaurarsi di gradienti di temperatura fra i conduttori. Le differenze di temperatura, aspettando qualche minuto si riducono notevolmente, ma eventuali fem di contatto possono persistere a lungo: un modo per compensare il loro effetto è quello di aggiustare lo zero del rivelatore, quando quest'ultimo (galvanometro o microvoltmetro) è chiuso sul circuito con il generatore spento e cortocircuitato. Questa procedura, fa cioè coincidere lo zero del rivelatore non con lo zero di tensione ma con lo zero dell'effetto da misurare e compensa le

eventuali fem spurie. Il controllo dell'azzeramento del galvanometro è in genere meccanico e agisce sull'estremo *fisso* del filo di torsione; nel microvoltmetro l'azzeramento si fa tramite il controllo di "offset" che spiegheremo più avanti. Il sistema ora descritto, di compensazione *statica* di fem parassite funziona fintanto che le fem in questione rimangono le stesse sia in presenza che in assenza di eccitazione. Ciò è vero con buona approssimazione nel caso visto prima delle fem di contatto del tasto, poiché anche quando il generatore è acceso le correnti in gioco sono comunque piccole. Tuttavia, in generale, quando circola corrente nel circuito l'effetto Joule provoca innalzamenti di temperatura, rispetto a quella ambiente, non uniformemente distribuiti; anche quando questi gradienti raggiungono una configurazione stazionaria, essi provocano fem di tipo termoelettrico (effetto Seebeck, effetto Thomson) la cui entità, oltre a dipendere dall'intensità dei gradienti, è fortemente legata al tipo di conduttori impiegati. Per eliminare o comunque ridurre gli effetti di queste fem si usa il sistema prima descritto di compiere due misure a polarità del generatore invertite. Il metodo porterebbe a una compensazione esatta degli effetti parassiti qualora questi (cioè le fem elettrochimiche, quelle termoelettriche e le distribuzioni di gradienti di temperatura nel circuito) non dipendessero dal senso della corrente inviata dal generatore: ciò è vero solo per alcuni effetti, ma non tutti. Si pensi ad esempio all'effetto Peltier che produce il riscaldamento o il raffreddamento di una giunzione fra due metalli, a seconda che la corrente attraversi la giunzione in un verso o nell'altro. Se si ha motivo di ritenere che questi effetti non siano predominanti, il metodo delle polarità invertite può essere soddisfacentemente applicato e si hanno drastiche riduzioni degli effetti parassiti.

9.— Misure di piccole resistenze.

Doppio ponte di Thomson

Abbiamo visto che resistori di basso valore in genere sono provvisti di 4 terminali (Fig.13), due cosiddetti di corrente (A e B) e due cosiddetti di tensione (a e b).

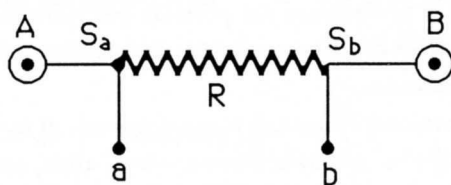


Fig.IV.13

La resistenza di interesse è quella fra i punti di saldatura S_a e S_b .

Supponiamo di dover misurare una resistenza siffatta, disponendo di una resistenza campione R di piccolo valore e conseguentemente a 4 terminali.

Montiamo quindi un Ponte di Wheatstone come in Fig.14:

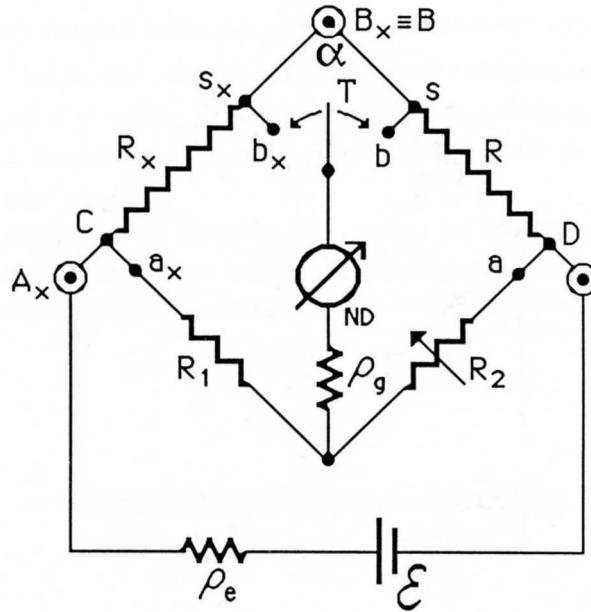


Fig.IV.14

dove R_1 e R_2 sono due resistori di valore assai maggiore di R_x e R ; R_2 è un resistore variabile. All'equilibrio la corrente che circola in R_1 e R_2 è assai inferiore rispetto a quella in R_x e R e le resistenze spurie dei tratti $C - a_x$ e $D - a$ saranno trascurabili rispetto a R_1 e R_2 rispettivamente. A seconda che l'estremo T del rivelatore sia collegato a b_x o a b , l'equilibrio si otterrà per due valori diversi di R_2 : infatti poiché R_x ed R sono di valore assai piccolo, la resistenza associata sia ai reofori che al contatto fra di essi in $B_x = B$, influenzerà l'equilibrio. Collegando T con b_x , detta α la resistenza fra S_x e S avremo:

$$R_x = \frac{R + \alpha}{R_2'} \cdot R_1 \quad (\text{IV.48})$$

Collegando viceversa T con b , avremo:

$$R_x = \frac{R}{R_2''} \cdot R_1 - \alpha \quad (\text{IV.49})$$

Eliminando α fra queste due equazioni si ottiene:

$$R_x = R \frac{R_1 (R_2'' + R_1)}{R_2'' (R_2' + R_1)} \quad (\text{IV.50})$$

Con questo metodo si riesce a eliminare l'influenza della resistenza α che non è nota e non è in genere di alcun interesse; inoltre essa dipende da fattori difficilmente controllabili, quali la tensione al contatto $B_x - B$ e lo stato di pulizia delle superfici.

Nonostante che il metodo ora descritto non sia di larga applicazione e gli venga piuttosto preferito il metodo del *Doppio Ponte di Thomson* che descriveremo fra breve, esso ha il pregio di mettere in chiara evidenza la possibilità di eseguire misure di precisione con resistori a 4 terminali seguendo l'accorgimento di far passare nei terminali di tensione correnti sufficientemente basse - come nel ramo del rivelatore di zero - oppure di porli in serie a resistenze decisamente più grosse - come nel ramo $R_1 - R_2$.

Come anticipato, l'eliminazione dell'influsso di α nella determinazione di R_x , si ottiene in genere mediante l'uso del Doppio Ponte di Thomson, disegnato in Fig.15:

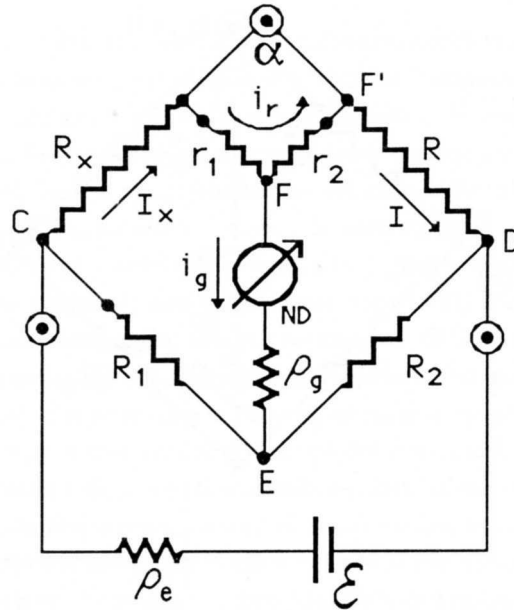


Fig.IV.15

r_1 e r_2 sono due resistenze molto maggiori di R_x e R e conseguentemente anche molto maggiori di α . Dalla condizione per l'equilibrio del ponte ($i_g = 0$, $I_x = I$), si ha $V_F - V_E = 0$. Per V_E abbiamo:

$$(V_E - V_D) = (V_C - V_D) \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (\text{IV.51})$$

Quanto a V_F possiamo scrivere

$$V_F - V_D = (V_{F'} - V_D) + i_r r_2 = I \cdot R + i_r r_2 \quad (\text{IV.52})$$

Per la regola della ripartizione delle correnti in un parallelo, vale:

$$i_r = I \frac{\alpha}{r_1 + r_2 + \alpha} \quad (\text{IV.53})$$

Abbiamo inoltre:

$$I = \frac{(V_C - V_D)}{R_x + R + \frac{(r_1 + r_2)\alpha}{(r_1 + r_2 + \alpha)}} \quad (\text{IV.54})$$

Pertanto dalla (54) e (53), uguagliando i secondi membri di (52) e (51), otteniamo:

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{(R + \frac{r_2 \alpha}{r_1 + r_2 + \alpha})}{R_x + R + \frac{(r_1 + r_2)\alpha}{r_1 + r_2 + \alpha}} \quad (\text{IV.55})$$

e quindi

$$R_x = \frac{RR_1}{R_2} + \frac{R_1 \alpha (\frac{r_2}{R_2} - \frac{r_1}{R_1})}{r_1 + r_2 + \alpha} \quad (\text{IV.56})$$

Quindi se $\frac{r_2}{R_2} = \frac{r_1}{R_1}$ la condizione di equilibrio è la medesima del Ponte di Wheatstone.

Per questo motivo $R_1 - R_2$ e $r_1 - r_2$ sono due resistenze variabili con un unico comando meccanico che provvede a variare contemporaneamente i rapporti $\frac{R_1}{R_2}$ e $\frac{r_1}{r_2}$, mantenendoli sempre uguali fra

loro. L'esatto azzeramento del secondo termine della (56) è tanto meno importante quanto più α è piccolo rispetto a $(r_1 + r_2) \frac{R}{R_2}$ e si cerca sempre di fare in modo che il collegamento dei terminali di corrente introduca la minor resistenza possibile. Un semplice controllo dell'annullamento dell'ultimo termine si compie interrompendo il collegamento α : se il ponte resta in equilibrio la condizione $\frac{r_2}{R_2} = \frac{r_1}{R_1}$ è soddisfatta sufficientemente bene.

In questo come in altri ponti (in quello di Wheatstone ad esempio) spesso il ramo $R_1 - R_2$ è costituito da una unica resistenza (magari a filo) provvista di cursore centrale scorrevole C (Fig.16); esso stabilisce la ripartizione fra R_1 e R_2 della resistenza totale R secondo quanto visto alla fine del §1.

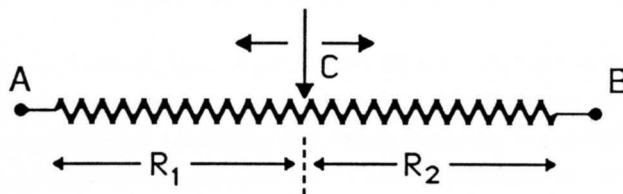


Fig.IV.16

Quest'ultimo è il principio con cui si realizzano resistenze variabili con precisione molto buona: infatti se il filo che costituisce la resistenza è ben calibro (cioè a sezione costante) e il pattino stabilisce il contatto in un tratto sufficientemente breve e ben definito, la resistenza fra un estremo A del filo e il cursore C sarà semplicemente data da $R_1 = R_{CA} = R_{AB} \frac{l}{L}$ dove l è la lunghezza del filo fra A e il cursore C e L è la lunghezza totale. Una tale configurazione di resistenze variabili si indica con il nome di *partitore a filo* o *potenziometro a filo*. Nel Doppio Ponte di Thomson le resistenze $R_1 - R_2$ e $r_1 - r_2$ possono essere realizzate entrambe in questo modo, cioè tramite due partitori a filo che vengono poi agganciati meccanicamente a un unico comando.

Con l'uso del Doppio Ponte di Thomson sono possibili misure di resistenze estremamente basse fino a qualche $\mu\Omega$. Non entriamo nei dettagli del problema della sensibilità del metodo che può essere valutata seguendo la falsariga del procedimento usato per il Ponte di Wheatstone.

10.— Misura di resistenze di isolamento

Abbiamo visto che l'introduzione nel ramo di rivelazione del microvoltmetro ad alta resistenza di ingresso, consente la misura di resistenze elevate (fino a $R_x \approx 10^8 \Omega$) senza compromettere eccessivamente la sensibilità del metodo se la misura viene fatta con generatori di fem nel campo della decina di Volt. Questo metodo è senz'altro opportuno quando si voglia conoscere il valore di una certa resistenza R_x in bassa tensione. Se viceversa si tratta di misurare resistenze di isolamento di strutture contenenti dielettrici e studiate per sopportare grosse differenze di potenziale, allora in questi casi l'informazione ottenuta in bassa tensione è di scarso interesse: infatti all'aumentare della ddp applicata insorgono fenomeni (microscariche superficiali, effluvi) che non possono senz'altro essere descritti come effetti di tipo ohmico, ma che, compromettendo l'isolamento, sono di primario interesse. Per effettuare questo tipo di misure occorrono metodi di misura e tecnologie tutti particolari, studiati per sollecitare l'elemento resistivo con elevate differenze di potenziale. Non descriveremo

queste tecniche e ci limitiamo a osservare che difficilmente esse possono essere considerate misure di resistenza in senso stretto, perché se tali fossero, la grandezza R dovrebbe essere indipendente dalla tensione applicata; viceversa quello che si studia è una $R = R(V)$, la quale non può farsi discendere in alcun modo dalla legge di Ohm.

Più avanti, quando saranno discussi i metodi di misura della carica, impareremo a misurare resistenze di valore elevato sfruttando le proprietà dei circuiti costituiti dalla serie di un condensatore e una resistenza; vedremo che il metodo si presta a compiere misure di R sia in bassa che relativamente alta tensione.

NOTA BIBLIOGRAFICA

FR 59, **LA 38**, **DA 75**, **CO 85** e **ZI 86** trattano ampiamente l'argomento di questo capitolo. Per quanto riguarda le caratteristiche costruttive delle resistenze campione e non, le migliori e più aggiornate informazioni si possono trarre dai cataloghi delle ditte costruttrici. Informazioni aggiornate, ma non così dettagliate, si possono comunque trovare su **ZI 86**, **CO 83**, **BE 82** e in **CO 85**. Tecniche di costruzione in alcuni casi tuttora valide si trovano su **LA 38**. Più aggiornata, ma non ancora completamente attuale, è la trattazione su **TE 50** (sez. 2).

Un ragionevole approccio al problema della sensibilità del Ponte di Wheatstone si può trovare su **DA 75**. Su questo stesso argomento si suggerisce la lettura degli articoli originali:

Heaviside: "Electrical Papers" pagine 3 ÷ 13
(Mac Millan)(1892).

IL METODO POTENZIOMETRICO

1.- Principio di misura

Consideriamo il circuito in Fig.1: la seconda legge di Kirchhoff ci dice che la corrente i è zero se e solo se $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$, indipendentemente dal valore di ρ_1 e ρ_2 ; il circuito consente quindi di confrontare direttamente i valori di due fem di Thévenin.

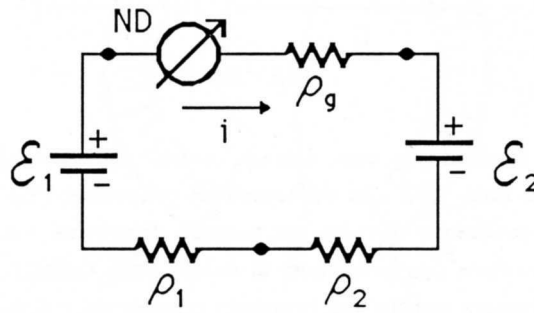


Fig.V.1

Rispetto a una misura con un voltmetro questo metodo presenta il vantaggio di non derivare corrente dai generatori, anzi la misura richiede proprio l'annullarsi di questa corrente. E' chiaro che il metodo ora descritto può essere utilmente impiegato per misurare differenze di potenziale solo quando è disponibile un generatore di fem che copra, con continuità, un campo sufficientemente vasto di differenze di potenziale (cioè un generatore variabile di fem).

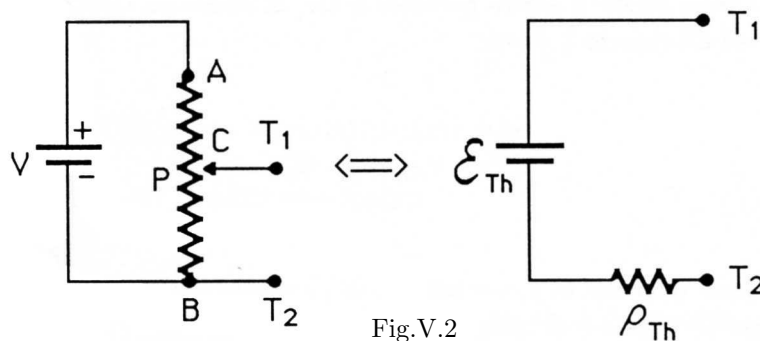


Fig.V.2

Si può realizzare questo generatore mediante un partitore di tensione (Fig.2), poiché nessuna prescrizione è fatta circa il valore della sua resistenza interna (salvo che non sia infinita).

$$\mathcal{E}_{Th} = V \cdot \frac{R_{CB}}{R_{AB}} \quad (V.1)$$

$$\rho_{Th} = R_{CB} \parallel R_{CA} \quad (V.2)$$

Il partitore di tensione in figura consente di ottenere ai terminali T_1 e T_2 una fem variabile con continuità fra 0 e V Volt, con una resistenza equivalente di Thévenin compresa fra zero ($C \equiv B$ o $C \equiv A$) e un massimo di $\frac{P}{4} = \frac{R_{AB}}{4}$ quando C equipartisce la resistenza R_{AB} . Un circuito del tipo in Fig.3 permette pertanto di misurare, senza derivare da essa alcuna corrente, qualunque forza elettromotrice \mathcal{E} (compresa fra 0 e V).

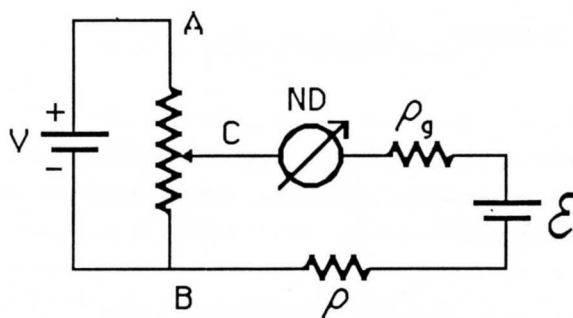


Fig.V.3

La misura si effettua cercando lo zero dell'indicazione del galvanometro agendo sul cursore C. Quando si è ottenuto lo zero, allora la differenza di potenziale ($V_C - V_B$) uguaglia \mathcal{E} . Prima però di poter dire di aver realizzato davvero un metodo di misura occorre mostrare che esiste la possibilità di risalire facilmente e con precisione al valore della differenza di potenziale ai capi del potenziometro C-B: per ottenere questa informazione si costruisce il partitore di tensione con del filo calibro e quindi la relazione fra la resistenza R_{CB} e la lunghezza del filo compresa fra C e B è di pura proporzionalità. Inoltre si fa in modo che lo spostamento l o φ del cursore lungo il filo possa misurarsi mediante una scala rettilinea (se il potenziometro è disposto lungo un segmento di retta (Fig.4a) oppure angolare se, come spesso accade, il filo è disposto lungo una circonferenza (Fig.4b)).* Le lunghezze così misurate sono proporzionali alla ddp fra l'estremo fisso ($l, \varphi = 0$) e il cursore: per avere quindi una vera e propria misura della differenza di potenziale basta conoscere il valore di essa per una posizione qualunque del cursore (E_o, l_o).

Supponiamo di avere tarato il nostro partitore a filo, di conoscere cioè E_o e l_o ; pertanto per una generica posizione del cursore l , varrà:

$$(V_C - V_B) = \frac{l}{l_o} \cdot E_o \quad (V.3)$$

Strumenti che misurano differenze di potenziale, basati su questo principio (dovuto a *Poggendorf*) son detti *potenziometri* e i metodi di misura associati *potenziometrici*.

* nelle Figg.4, 5 e 7 il filo potenziometrico è disegnato con un tratto continuo e non a zig-zag, perché si sono volute mettere in evidenza le caratteristiche *meccaniche* del dispositivo; non si dimentichi per questo che si tratta di un conduttore avente resistenza ben definita e *non nulla*.

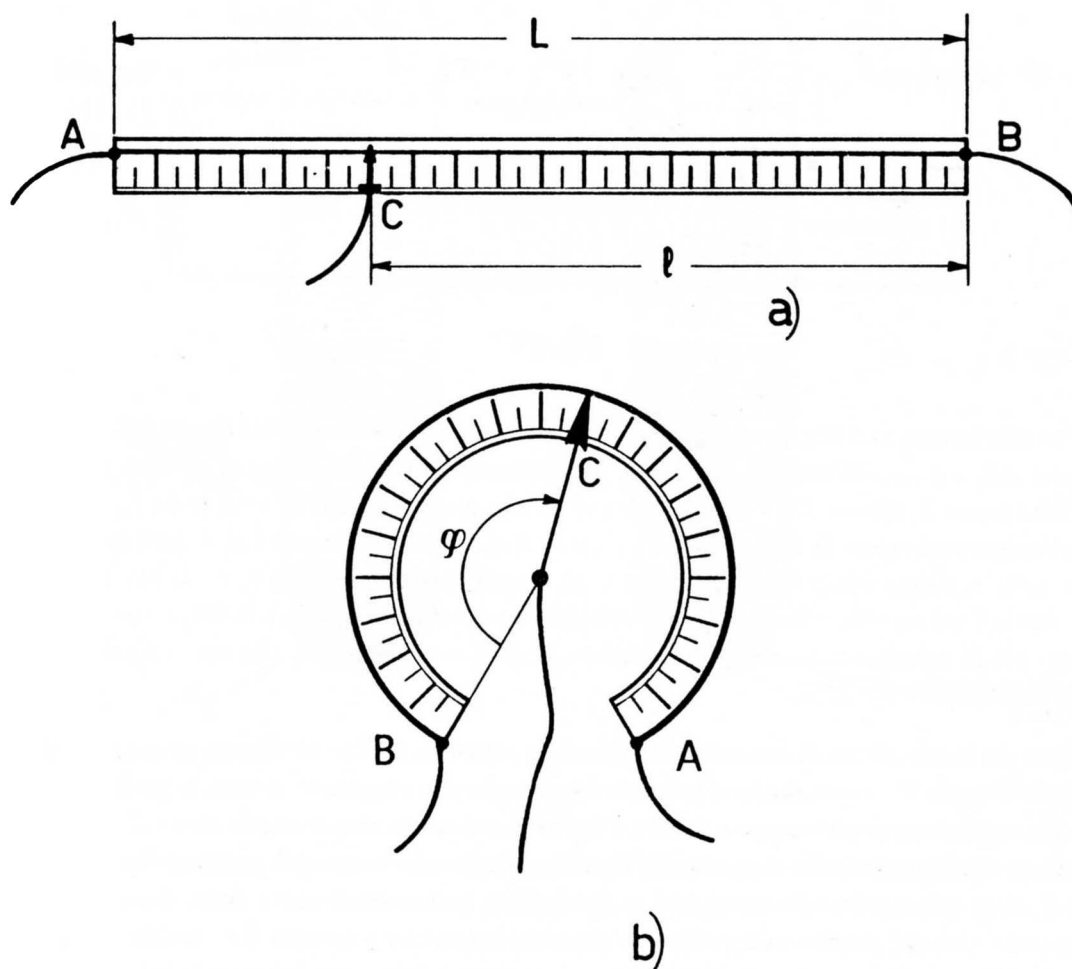


Fig.V.4

2.- *Campioni di forza elettromotrice e taratura di un potenziometro*

Nel paragrafo precedente abbiamo accennato alla necessità di tarare il potenziometro tramite una fem nota, possibilmente con buona precisione. Allo scopo di effettuare questa taratura, il circuito si realizza in modo da poter regolare la corrente che scorre sul filo potenziometrico e la si aggiusta in modo che, con la fem di taratura inserita e il galvanometro a zero, la lettura della distanza del cursore dall'origine coincida numericamente col valore della fem; in questo modo, anche nell'utilizzo successivo, la lettura della posizione del cursore darà direttamente il valore della forza elettromotrice incognita senza dover ricorrere ogni volta alla pur semplice relazione (3).

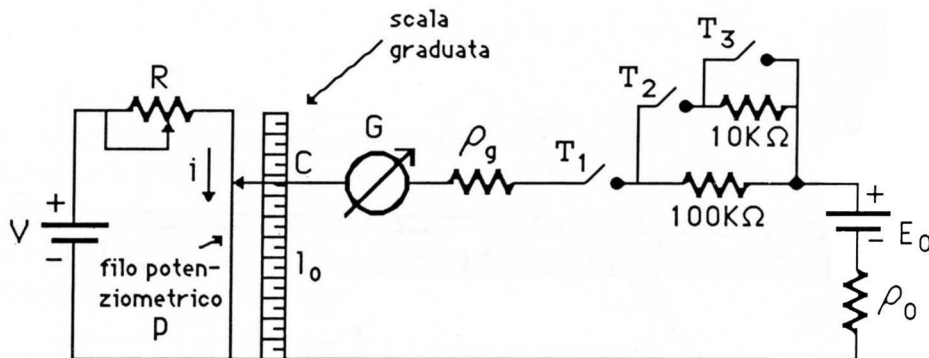


Fig.V.5

Con riferimento alla Fig.5, sia E_o un generatore campione elettrochimico di fem (*pila campione, standard cell*) e ρ_o la sua resistenza interna. La taratura del potenziometro si effettua impostando preventivamente il cursore C in corrispondenza di una precisa posizione sulla scala l_o , coincidente numericamente col valore di E_o ; agendo sul reostato R si regola la corrente i fino a che il galvanometro (posto nella massima sensibilità), con tutti e tre i tasti pressati, non segna 0. Il potenziometro è allora tarato e nel seguito, quando a E_o si sostituisca un generatore (E_x, ρ_x), si dovrà aver cura di non muovere più R , cosicché la lettura della posizione l_x di C , corrispondente allo zero del galvanometro, darà il valore numerico di E_x .

Durante la procedura di azzeramento occorrerà agire con molta attenzione, prima tenendo premuto solo il tasto T_1 , e azzerando il galvanometro; una volta raggiunto lo zero, si premerà *anche* il tasto T_2 ; aggiusteremo nuovamente lo zero e infine si otterrà la massima precisione di azzeramento tenendo premuti *contemporaneamente* T_1, T_2 e T_3 . Si procede in questo modo perché la pila campione E_o è un apparecchio da una parte molto preciso, come vedremo fra poco, da un'altra molto delicato che *non tollera* di erogare correnti superiori a qualche μA , pena il cambiamento semipermanente della fem E_o ; il tasto triplo ha proprio la funzione di limitare la corrente erogata dalla pila campione quando siamo ancora lontani dall'equilibrio, inserendo in serie col circuito resistenze via via decrescenti.

Non entreremo nei dettagli costruttivi di una pila campione; diremo soltanto che si tratta di una pila elettrochimica (Fig.6) nella quale due elettrodi di Platino pescano rispettivamente in una goccia di Mercurio ricoperta da una pasta di Hg_2SO_4 e $CdSO_4$ (polo positivo) e l'altro in un amalgama di Cadmio circondato di cristalli di $CdSO_4$. Una pila del genere, detta pila campione *Weston* dal nome del suo perfezionatore, ha costituito per decenni lo standard fondamentale di fem a motivo dei seguenti fatti:

- il valore della fem E_o è notevolmente costante in funzione della temperatura (coefficiente di temperatura $\simeq -0.004\%/^{\circ}C$ nell'intorno di 20°)
- pila campione Weston costruite con procedure anche assai diverse differiscono fra di loro al più per 10 ppm (parti per milione)
- la fem E_o si mantiene inalterata per lunghi periodi di tempo.

Il valore di E_o a $20^{\circ}C$ vale $E_o = 1.01864 V$ (con una incertezza di un'unità sull'ultima cifra a seconda delle procedure costruttive). Quanto alla resistenza interna essa è abbastanza elevata, dell'ordine del $k\Omega$ e, come vedremo, questo ha un effetto negativo sulla sensibilità della procedura di taratura.

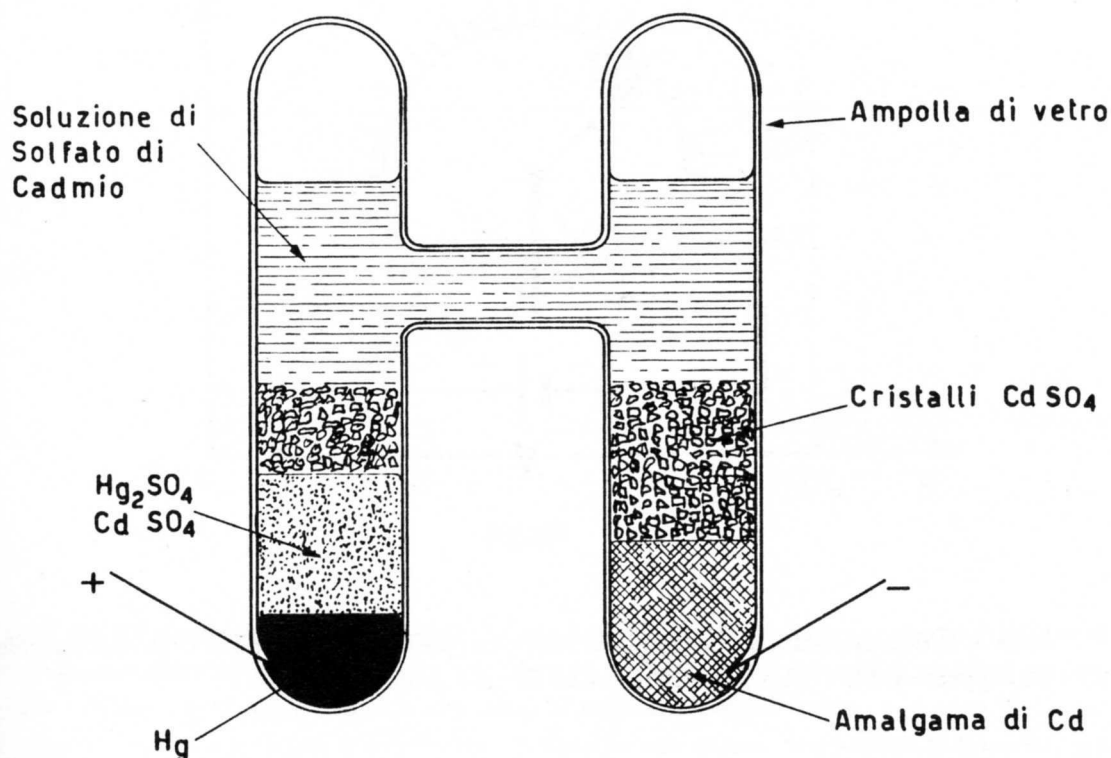


Fig.V.6

La pila campione ora descritta è propriamente detta *saturata*, con riferimento alla soluzione di solfato di Cadmio. Esiste una versione della pila Weston, detta *non-saturata* (nella quale cioè la soluzione di CdSO_4 non è satura) o *secondaria* che, rispetto alla pila saturata, offre il vantaggio di avere un coefficiente di temperatura inferiore di circa un ordine di grandezza. Ciò consente l'uso di tale pila in misure di grande precisione, senza fare ricorso a bagni termostatici; tuttavia la superiorità dal punto di vista termico è accompagnata da una peggiore stabilità rispetto all'invecchiamento. Una pila Weston non-saturata presenta infatti una diminuzione di circa 10^{-4}V/anno , contro una inapprezzabile variazione -anche su periodi di tempo di decine di anni- della versione saturata.

Al giorno di oggi, usando dei sistemi basati su diodi Zener (vedi Cap.XVII, §5) si riescono a fare degli standard di tensione con caratteristiche di stabilità anche superiori alle pile campione e soprattutto senza alcun problema connesso con l'erogazione di correnti anche non piccole.

3.- Linearità di un potenziometro

Abbiamo visto che per utilizzare un partitore resistivo come elemento base di un potenziometro, è necessaria l'esistenza di una relazione di proporzionalità fra la resistenza del tratto di conduttore compreso fra il cursore e l'estremo fisso scelto come origine degli spostamenti, e lo spostamento corrispondente (lineare o angolare) che viene fatto fare al cursore medesimo. Il partitore sarà tanto più adatto allo scopo, quanto più la relazione di proporzionalità fra queste due grandezze sarà accuratamente verificata. Ricorrendo a un esempio (vedi Fig.7) guardiamo cosa accade in pratica:

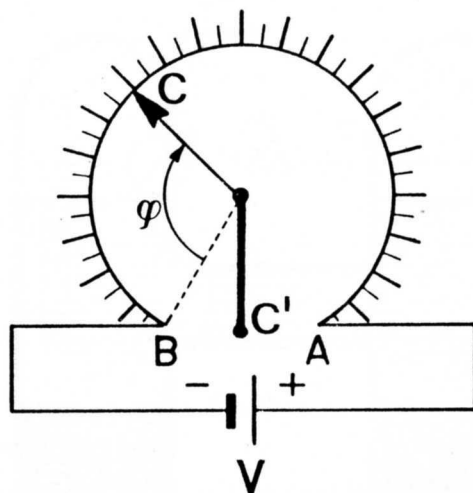


Fig.V.7

detta V la ddp applicata agli estremi del partitore resistivo e v la ddp fra C' (equipotenziale con C) e B , supposto il filo calibro, vale la relazione di pura proporzionalità:

$$\frac{v}{V} = \frac{\varphi}{\varphi_T} \quad (\text{V.4})$$

dove φ misura la posizione del cursore rispetto all'estremo B e φ_T è il valore che tale coordinata assume quando tutto il partitore è inserito ($C \equiv A$). Nella realtà dei fatti questa relazione non è mai esattamente rispettata in quanto:

a) anche quando il cursore *coincide* con la posizione B ($C \equiv B$), la tensione fra C' e B non è esattamente zero e per questo non si può avere pura proporzionalità, ma semplice linearità fra v e φ

b) inoltre il filo non sarà perfettamente calibro per cui la relazione fra v e φ non è esattamente di tipo lineare.

Per quantificare lo scostamento dalla linearità di un partitore (e quindi anche di un potenziometro) si procede come segue: si definisce come *linearità* la deviazione massima (espressa come percento della ddp applicata V) fra la ddp effettivamente presente $v(\varphi)$ e il valore dato della linea retta passante per il minimo e il massimo dei valori di ddp *attesi* a inizio e fondo corsa ($\varphi = 0, \varphi = \varphi_T$). Nel caso del nostro partitore, i valori attesi per v agli estremi sono:

$$v(\varphi = 0) = 0, v(\varphi = \varphi_T) = V.$$

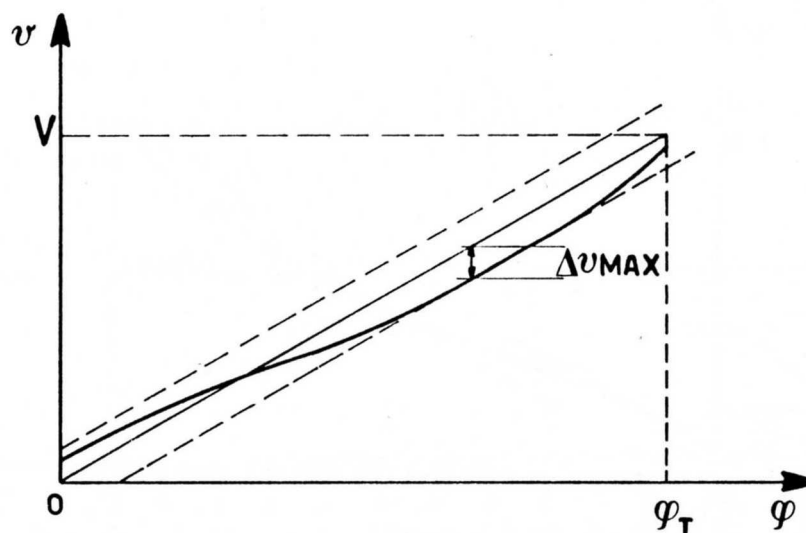


Fig.V.8

Nella Fig.8 è riportata sia la retta ideale che una possibile curva effettiva di risposta: rispetto ai casi di potenziometri reali di qualità anche solo discreta, l'effetto di non linearità è molto esagerato; la massima deviazione Δv_{MAX} definisce una fascia di indeterminazione attorno alla retta ideale cui è associato un errore *a priori* di *non-linearità*. In accordo con quanto detto sopra la *linearità*, nel caso della Fig.8, vale (espressa in percento):

$$l = \frac{\Delta v_{MAX}}{V} \cdot 100 \quad (\text{V.5})$$

I costruttori di partitori resistivi forniscono sempre la linearità l , e quasi mai la curva effettiva v, φ ; l'errore percentuale di linearità per un generico valore v si calcola (in percento) come:

$$\left(\frac{\Delta v}{v} \right)_l = \frac{l}{v} \cdot V \quad (\text{V.6})$$

Poiché $\frac{v}{V}$ è sempre < 1 l'errore percentuale di *linearità* (o meglio di *non linearità*) è sempre maggiore della linearità medesima e solo a fondo corsa le due grandezze coincidono. Quella ora definita si chiama propriamente *linearità ai terminali* (*terminal based linearity*) ed è la grandezza che serve nella maggior parte dei casi. Può essere talvolta utile anche la conoscenza della *linearità assoluta* l_a che è definita con riferimento alla Fig.9.

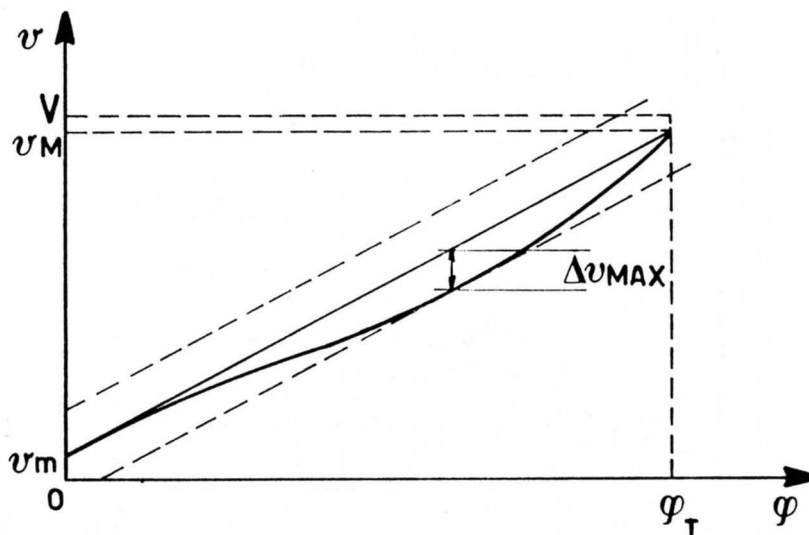


Fig.V.9

La deviazione è misurata questa volta rispetto alla retta passante non per i valori attesi di v per $\varphi = 0$ e $\varphi = \varphi_T$, bensì passante per i valori che la tensione effettivamente assume all'inizio e al fondo corsa. La informazione sulla linearità assoluta serve quando, per motivi di precisione, si vuole risalire alla tensione non tramite la semplice legge di proporzionalità (4): $\frac{v}{V} = \frac{\varphi}{\varphi_T}$, ma piuttosto, noti o misurati $v(\varphi = 0) = v_m$ e $v_M = v(\varphi_T)$, mediante: $v = v_m + \frac{\varphi}{\varphi_T}(v_M - v_m)$. Procedendo in questo modo, poiché la linearità assoluta l_a è più piccola della linearità ai terminali l , si ottiene una riduzione dell'indeterminazione *a priori* delle misure.

4.— Un esempio di potenziometro

Riportiamo in questo paragrafo lo schema (Fig.10) di un potenziometro (Student's Potentiometer della Leeds and Northrup) che contiene in sé molte delle caratteristiche tipiche di potenziometri di buona qualità. Limitiamoci per ora a considerare il ramo dove circola la corrente i_p : esso contiene la resistenza potenziometrica costituita da 16 resistenze tutte nominalmente uguali (50Ω); la sedicesima è costituita da un filo calibro con presa intermedia. La caduta variabile ai capi della resistenza ($E^+ - E^-$) è ottenuta prelevando la differenza di potenziale fra un contatto mobile compreso fra due resistenze fisse contigue e un cursore che ripartisce la caduta sull'ultima resistenza a filo. Il comando meccanico che seleziona la variazione grossa (E^-) presenta (vedi Fig.11) in una finestrella della scatola dell'apparecchio, un numero (1.5, 1.4, \dots , 0.0, vedi Fig.10), che, moltiplicato per 10, coincide col numero di resistenze fisse inserite fra i contatti.

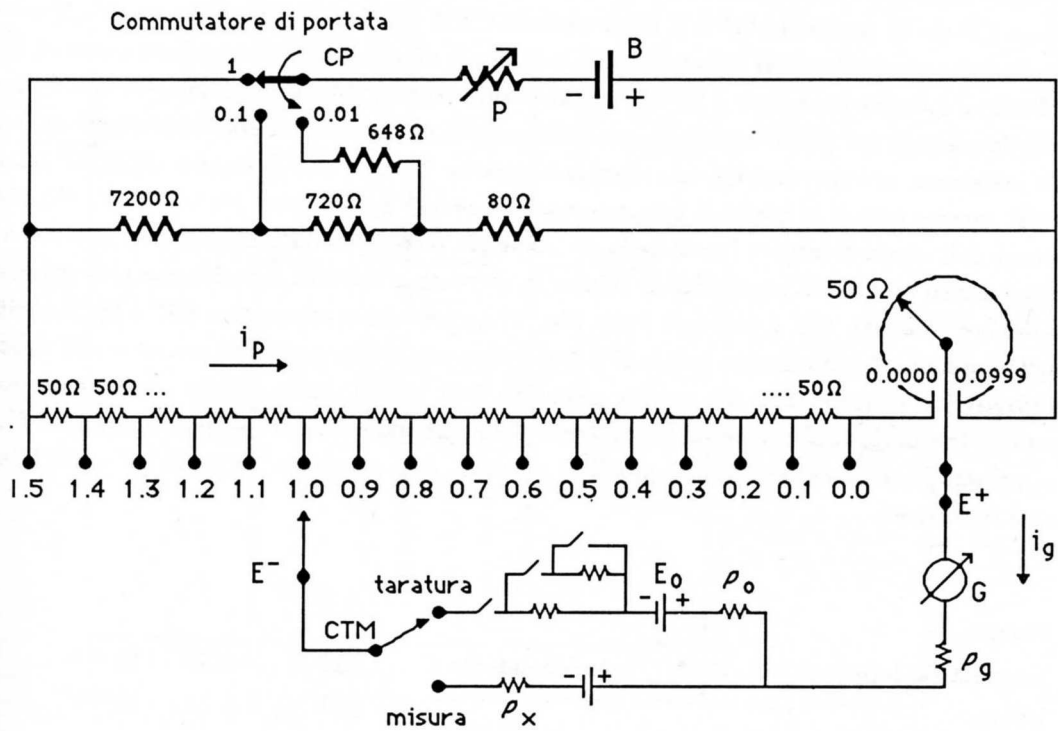


Fig.V.10

Accanto a questo numero compare la scala corrispondente allo spostamento angolare del cursore (E^+). Tale spostamento è suddiviso in 200 parti ognuna delle quali, nelle medesime unità delle divisioni grosse, corrisponde a 0.0005. Il numero che compare così composto nella finestrella è proporzionale alla frazione della resistenza totale (800Ω) compresa fra i due contatti mobili $E^+ - E^-$. Se poi si fa in modo che nella resistenza potenziometrica scorra una corrente di $2.00mA$, allora il numero dà direttamente in Volt la ddp $E^+ - E^-$.

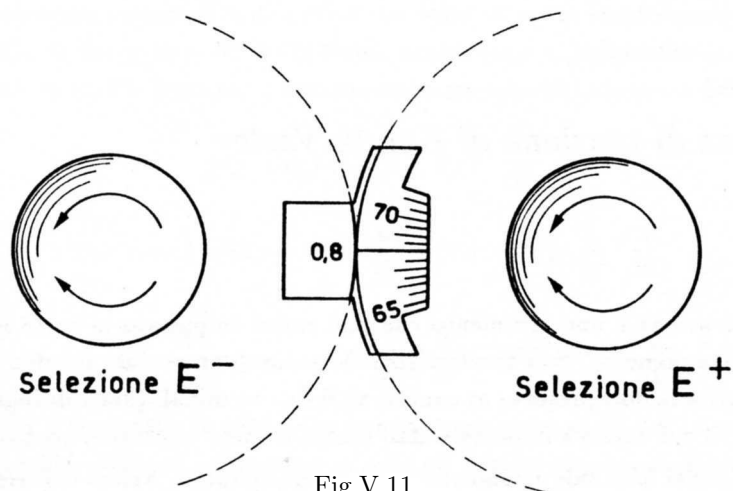


Fig.V.11

Descriviamo ora l'operazione di taratura con riferimento alla Fig.10: supponiamo che il commutatore CP sia in posizione "1" e il commutatore CTM sia in posizione "Taratura". Dopo aver preventivamente impostato sul potenziometro, tramite le manopole che comandano i cursori E^+ ed E^- , il valore 1.01864 (se siamo a $20^\circ C$), agiremo sul tasto $T_1 T_2 T_3$ nonché sul reostato P fino ad azzerare la corrente nel galvanometro, posto nella massima sensibilità; il potenziometro è ora tarato e sulla resistenza potenziometrica scorrono esattamente 2 mA . Commutando CTM su posizione "Misura" saremo quindi in grado di misurare qualunque ddp \mathcal{E}_x compresa fra 0 e 1.6 V . Per ridurre l'influenza dell'errore di lettura (metà della divisione più piccola) nella misura di ddp inferiori a 0.16 V , lo strumento prevede la possibilità di ridurre la corrente attraverso la resistenza potenziometrica di un fattore 10 e 100. Ciò si può fare (vedi Fig.10) agendo sul commutatore CP; è facile verificare che nella posizione 0.1 la corrente totale di 2.2 mA si smista ora in modo che attraverso la resistenza potenziometrica scorrano $200\ \mu A$ e nella posizione 0.01 $20\ \mu A$, tutto questo mantenendo fisso il reostato P. In questo modo, oltre al fondo scala 1.6 V , abbiamo anche quelli di 160 e 16 mV . Nel suo complesso lo strumento consente quindi di misurare ddp comprese fra pochi μV e 1.6 V con le seguenti tolleranze:

Portata 1:

linearità (ai terminali): $3 \cdot 10^{-4}$	corrispondente a	$(\Delta V)_{lin} = 0.50 \cdot 10^{-3} V$
lettura :		$(\Delta V)_{let} = 0.25 \cdot 10^{-3} V$

Portata 0.1:

linearità (ai terminali): $6 \cdot 10^{-4}$	corrispondente a	$(\Delta V)_{lin} = 0.10 \cdot 10^{-3} V$
lettura :		$(\Delta V)_{let} = 0.025 \cdot 10^{-3} V$

Portata 0.01:

linearità (ai terminali): $6 \cdot 10^{-4}$	corrispondente a	$(\Delta V)_{lin} = 0.01 \cdot 10^{-3} V$
lettura :		$(\Delta V)_{let} = 0.0025 \cdot 10^{-3} V$

5.— Il divisore di tensione di Kelvin-Varley

Il *divisore di tensione* è uno strumento che può essere impiegato in tutte le condizioni e tipi di misura di un potenziometro. Sua caratteristica è quella di presentare fra due terminali (detti di uscita) una ddp pari alla ddp presente ai capi di altri due terminali (detti di ingresso) moltiplicata per un fattore < 1 , il cui valore è impostato dall'utente tramite opportuni controlli.

Il principio su cui si basa tale strumento, nella forma dovuta a *Kelvin* e *Varley*, è estremamente semplice.

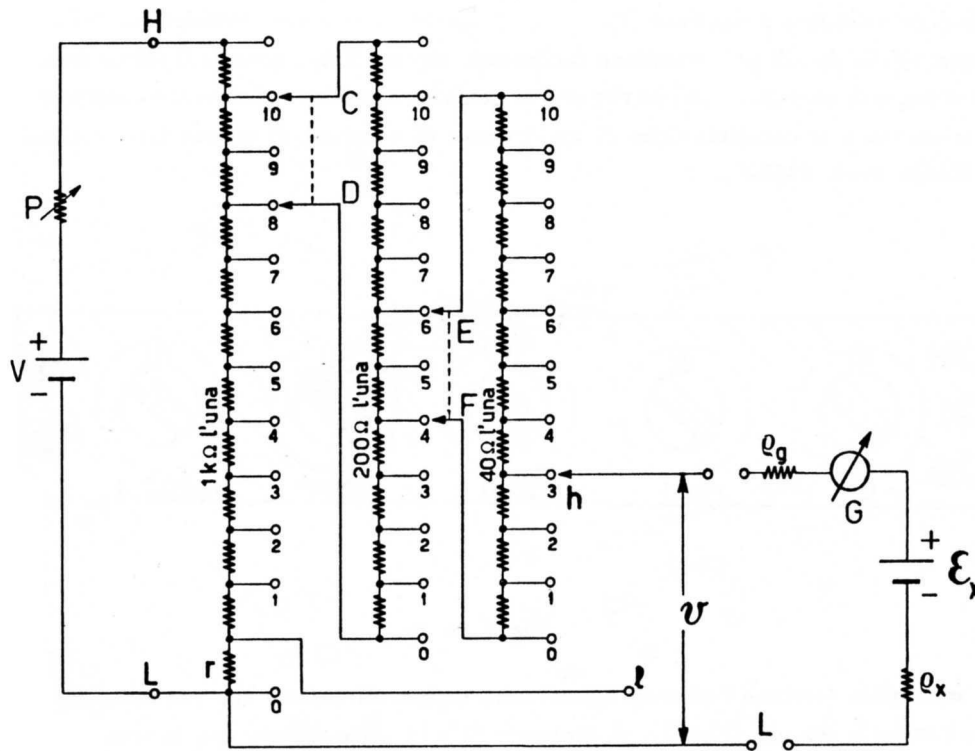


Fig.V.12

Vediamolo con riferimento alla Fig.12, in cui è riportato un esempio di divisore a tre decadi: se nel galvanometro G la corrente è zero, allora $v = \mathcal{E}_x$ con v data da:

$$v = (V_H - V_L) \cdot 0.843 \tag{V.7}$$

Infatti, se nel galvanometro non circola corrente la tensione fra h e L può essere vista come la somma:

$$v = v_h - v_L = (v_D - v_L) + (v_F - v_D) + (v_h - v_F) \tag{V.8}$$

Con riferimento alla prima e seconda serie di resistenze e ammettendo r trascurabile, notiamo che la resistenza complessiva fra H e L è sempre data da $10 \text{ k}\Omega$, indipendentemente dalla posizione del doppio cursore C-D*: infatti fra C e D la resistenza vale comunque $1 \text{ k}\Omega$ in quanto essa è il parallelo di $2 \text{ k}\Omega$ con una resistenza complessiva di $2 \text{ k}\Omega$ a sua volta ottenuta come somma di 9 resistenze da 200Ω più il parallelo di due gruppi da 400Ω l'uno, anche questo, indipendente dalla posizione del secondo doppio pattino (E-F). Pertanto possiamo scrivere, usando la formula del partitore:

$$(v_D - v_L) = (V_H - V_L) \cdot \frac{8}{10} \tag{V.9}$$

$$(v_F - v_D) = (v_C - v_D) \cdot \frac{4}{10} = (V_H - V_L) \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{10} \tag{V.10}$$

* il doppio cursore è realizzato in modo che quando esso viene spostato, la posizione mutua dei due contatti non cambia, cioè essi interessano sempre gli estremi opposti di due resistenze contigue delle serie delle 11 resistenze della decade

$$(v_h - v_F) = (v_E - v_F) \cdot \frac{3}{10} = (v_C - v_D) \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{10} = (V_H - V_L) \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{10} \quad (\text{V.11})$$

e quindi in definitiva il risultato (7).

Il numero delle decadi può estendersi facilmente, almeno fino a quando il valore delle resistenze rimane al di sopra di un valore minimo rispetto al quale la resistenza dei cursori è ancora trascurabile.

Discutiamo ora le caratteristiche di un divisore di tensione di questo tipo a cinque decadi (General Radio, mod. 1455-B):

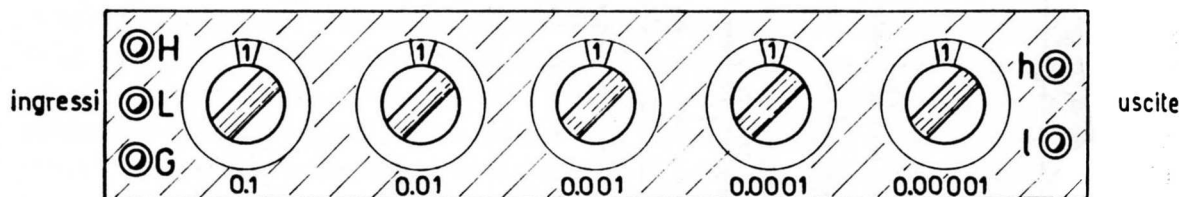


Fig.V.13

ogni manopola (esclusa l'ultima) agisce sulla coppia di cursori che permette le 10 possibili ripartizioni entro la decade (Fig.13). Il morsetto G è in cortocircuito con la scatola metallica ed è utile principalmente nelle applicazioni in corrente alternata. I morsetti a cui si applica la ddp da misurare sono H e L. La ddp pari a quella fra H e L, moltiplicata per il numero composto dalla posizione delle manopole, è presente fra i morsetti h e l. Nella descrizione del principio di funzionamento data precedentemente, la differenza di potenziale in uscita era prelevata fra *h* e *L*. Questo ultimo tipo di configurazione ha il difetto di non tener conto della resistenza (per la verità piccola) dei cursori, mentre la ddp fra *h* e *l* tiene conto di questo fatto in quanto *l* si trova a un potenziale leggermente più alto di *L* grazie alla caduta sulla resistenza r ($\approx 10^{-3}\Omega$) che compensa un analogo innalzamento di tensione al terminale *h* dovuto alla resistenza dei cursori (non disegnata). Conseguentemente le caratteristiche di linearità sono migliori nella configurazione a 4 terminali (H, L ingresso, *h* e *l* uscita) che non a tre (H, L ingresso, *h*, L uscita). La linearità ai terminali dello strumento è diversa a seconda del rapporto impostato e dipende, come detto sopra, anche dal tipo di configurazione (4 o 3 terminali):

rapporto	linearità ai terminali (ppm della ddp in ingresso)		linearità assoluta (ppm della ddp in ingresso)
	4 terminali	3 terminali	
0.1 ÷ 1.0	20	20	20
0.01 ÷ 0.1	10	10	10
0.001 ÷ 0.01	2.0	2.2	2.0
0.0001 ÷ 0.001	0.34	0.5	0.3
0.00001 ÷ 0.0001	0.07	0.23	0.03

Consideriamo la linearità ai terminali: essa è tanto migliore quanto più piccola è la decade in uso, tuttavia l'errore relativo di linearità è maggiore per i rapporti più piccoli, poichè la linearità diminuisce meno rapidamente di un fattore 10 fra decade e decade. Ad esempio per un rapporto

$r = 0.50000$ l'errore relativo su $v = r \cdot V$ dovuto alla linearità (vedi (6))

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{l}{v} \cdot V = \frac{l}{r}$$

vale $4 \cdot 10^{-5}$ (sia per la configurazione a 4 che a 3 terminali), per un rapporto 0.05 l'errore relativo sale a $2 \cdot 10^{-4}$ (4 e 3 terminali) e così via fino a un errore relativo di $1.2 \cdot 10^{-3}$ (4 terminali) o $5 \cdot 10^{-2}$ (3 terminali) per un rapporto di $5 \cdot 10^{-5}$.

Quanto alla linearità assoluta si può osservare che essa differisce tanto di più da quella ai terminali, quanto più piccolo è il rapporto di tensione: ciò corrisponde al fatto che al diminuire della tensione di uscita cresce di importanza l'effetto della differenza di potenziale v_m presente fra i terminali di uscita quando l'impostazione del rapporto è 0.00000. A meno che non interessino precisioni particolarmente spinte anche per piccoli valori del rapporto di tensione, ci si può in genere basare sulla linearità ai terminali, effettuando la taratura su un unico valore di ddp, per esempio con una pila campione di fem E_0 .

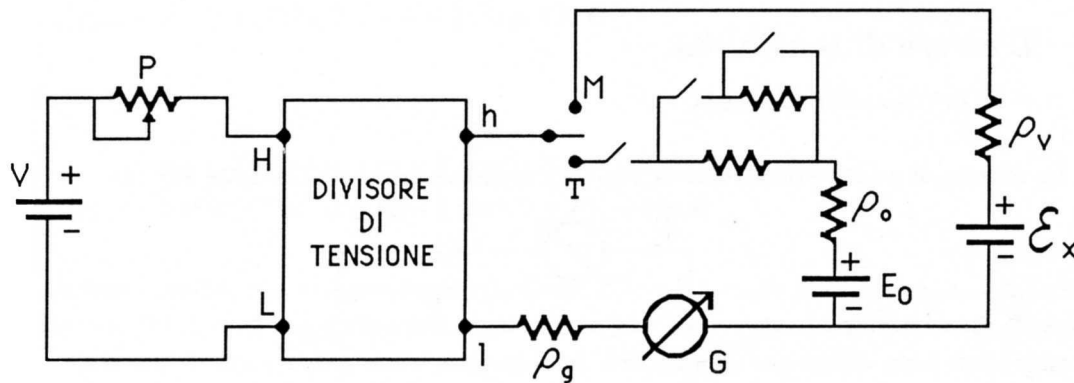


Fig.V.14

Detto r_o il rapporto corrispondente all'azzeramento del galvanometro con la pila campione inserita, e detto r il rapporto per cui si azzerava il galvanometro con il tasto in posizione M, la forza elettromotrice \mathcal{E}_x sarà data da (vedi Fig.14):

$$\mathcal{E}_x = \frac{r}{r_o} \cdot E_0 \quad (\text{V.12})$$

Il reostato P ha la funzione di poter regolare la differenza di potenziale $V_H - V_L$, cioè quella che viene poi ripartita dal divisore: essa sarà data da $V_H - V_L = V \cdot \frac{R_{in}}{P + R_{in}}$, dove R_{in} è la resistenza di ingresso del divisore, pari come abbiamo già visto a $10 \text{ k}\Omega$; tale valore è indipendente dal valore del rapporto impostato, purchè fra i terminali di uscita non sia derivata corrente (in pratica una corrente piccola rispetto al rapporto $(v_h - v_l)/R_u$, essendo R_u la resistenza di Thévenin fra i terminali di uscita h e l . Su questo punto torneremo nel prossimo paragrafo.

I valori della linearità dello strumento sono tali che, almeno in via di principio, la precisione delle misure può essere assai elevata. Altre cause di errore, che possono limitare in pratica la precisione raggiungibile, sono le seguenti: innanzitutto la stabilità (in funzione della temperatura ed eventualmente di altri parametri, ad esempio il tempo) del generatore di tensione V ; infatti ogni instabilità di V si ripercuote sulla tensione di uscita con una uguale instabilità relativa; inoltre le variazioni di P (vedi Fig.14) in funzione della temperatura portano a modificazioni di $V_H - V_L$.

Se il generatore di tensione è di buona qualità e se il reostato è fatto con leghe tipo Manganina, sia per V che per P le stabilità possono essere di qualche $10^{-5}/^{\circ}C$. Gli effetti considerati possono quindi compromettere le precisioni nominali del divisore solo se durante la misura si hanno sbalzi di temperatura di svariati gradi centigradi. Analoga considerazione va fatta sull'influenza della stabilità della resistenza di ingresso R_{in} ($2 \cdot 10^{-5}/^{\circ}C$). Quanto poi alla stabilità dei rapporti di divisione, poiché le resistenze del divisore sono tutte fatte con lo stesso materiale (oltretutto ad alta stabilità: $2 \cdot 10^{-5}/^{\circ}C$), essi risentono estremamente poco degli sbalzi di temperatura e in quasi tutti i casi pratici il problema può francamente dimenticarsi.

Un altro effetto che può compromettere la precisione delle misure può derivare dalla presenza di fem termoelettriche dovute a gradienti di temperatura nel circuito; abbiamo già detto di questi effetti e di alcune precauzioni da prendere per ridurne l'influenza. Nel prossimo paragrafo considereremo un altro contributo alla indeterminazione associata a questo metodo di misura, collegato alla sensibilità finita del rivelatore di zero; in molte situazioni sperimentali questo effetto dà il contributo maggiore agli errori sulla ddp misurata.

6.— L'errore di sensibilità e il rivelatore di zero

Lo schema di principio riportato in Fig.1 e riprodotto per comodità nella Fig.15

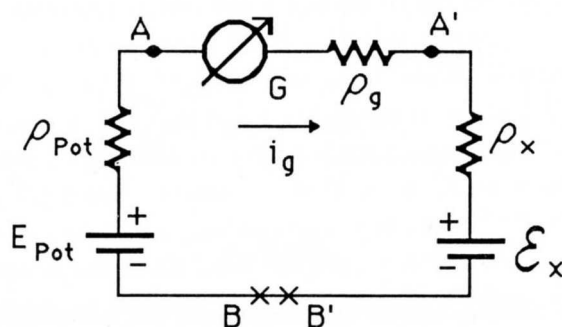


Fig.V.15

può essere interpretato come lo schema equivalente secondo Thévenin di una qualunque misura potenziometrica, indipendentemente dal fatto che essa utilizzi un potenziometro o un divisore di tensione. A e B rappresentano i terminali del potenziometro (o del divisore di tensione), mentre A' e B' quelli fra cui si vuole misurare la ddp \mathcal{E}_x . Questo schema generale consente di mettere bene in evidenza l'effetto della sensibilità finita del galvanometro: infatti, la seconda legge di Kirchhoff applicata al circuito di Fig.15, dà:

$$E_{pot} - \mathcal{E}_x = i_g(\rho_{pot} + \rho_g + \rho_x) \quad (V.13)$$

che garantisce l'uguaglianza fra E_{pot} e \mathcal{E}_x solo se $i_g = 0$. D'altronde sappiamo che esiste un limite per la corrente minima rivelabile (i_{gm}), associato alla più piccola deflessione osservabile e alla costante reometrica dello strumento. Lo sperimentatore cioè non può garantire l'azzeramento esatto della corrente i_g , ma solo un limite superiore i_{gm} per essa. Conseguentemente la (13) ci dà proprio, per $i_g = i_{gm}$, l'errore di sensibilità $(\Delta\mathcal{E}_x)_S$ su \mathcal{E}_x :

$$(\Delta\mathcal{E}_x)_S = i_{gm}(\rho_{pot} + \rho_g + \rho_x) \quad (V.14)$$

Per fare un caso realistico supponiamo che $i_{gm} = 2.5 \cdot 10^{-8} A$ con $\rho_g \simeq 20 \Omega$ e utilizziamo il potenziometro descritto nel §4 (Fig.10). Se vogliamo valutare l'errore dato dalla (14) occorre dare una valutazione di ρ_{pot} , la resistenza equivalente di Thévenin fra E^+ ed E^- ; chiaramente essa dipende dal punto di lavoro, nonché dal valore di resistenza assunto dal reostato P ; per valutare ρ_{pot} consideriamo il potenziometro nelle tre portate (1, 0.1, 0.01) con inserite o solo 10 o tutte e 16 le resistenze da 50Ω (rispettivamente righe "A" e "B" nella tabella), assumendo che $P = 4 k\Omega$ (valore ragionevole se $B \simeq 10V$):

Portata 1:

$$\begin{aligned} A: \quad \rho_{pot} &= 500 \Omega \parallel [300 \Omega + (8000 \Omega \parallel P)] \simeq 430 \Omega && \text{oppure} \\ B: \quad \rho_{pot} &= 800 \Omega \parallel (8000 \Omega \parallel P) \simeq 620 \Omega \end{aligned}$$

Portata 0.1:

$$\begin{aligned} A: \quad \rho_{pot} &= 500 \Omega \parallel [7500 \Omega + (800 \Omega \parallel P)] \simeq 470 \Omega && \text{oppure} \\ B: \quad \rho_{pot} &= 800 \Omega \parallel (7200 \Omega + 800 \Omega \parallel P) \simeq 730 \Omega \end{aligned}$$

Portata 0.01:

$$\begin{aligned} A: \quad \rho_{pot} &= 500 \Omega \parallel [8220 \Omega + 80 \Omega \parallel (648 \Omega + P)] \simeq 470 \Omega && \text{oppure} \\ B: \quad \rho_{pot} &= 800 \Omega \parallel [7920 \Omega + 80 \Omega \parallel (648 \Omega + P)] \simeq 730 \Omega \end{aligned}$$

Se avessimo considerato una posizione dei cursori $E^+ - E^-$ molto ravvicinata, ρ_{pot} si sarebbe avvicinata a 0Ω . I dati sopra riportati ci mostrano che la resistenza equivalente di Thévenin del potenziometro dipende molto dalla posizione dei due cursori, ma molto poco dalla portata: comunque la resistenza si mantiene al di sotto di 730Ω in tutte le configurazioni e in tutte le portate. Pertanto l'errore assoluto di sensibilità dovuto al solo potenziometro e galvanometro (ovvero se $\rho_x \ll (\rho_{pot} + \rho_g)$) si mantiene comunque al di sotto di $\simeq 20 \mu V$ ($2.5 \cdot 10^{-8} \times 8 \cdot 10^2 V$) e quindi in molte situazioni è trascurabile. Se invece, come spesso capita, ρ_x è elevata, allora si possono verificare situazioni di misura in cui l'errore di sensibilità domina rispetto agli altri. Consideriamo il caso della pila campione che ha una resistenza interna $\rho_o \simeq 1 k\Omega$: ciò porta un errore di sensibilità nella taratura di circa $45 \mu V$ ($\rho_o + \rho_g + \rho_{pot} \simeq 1800 \Omega$) maggiore dell'errore con cui è nota E_o . Se poi si usa il divisore di tensione, occorrerà valutare la ρ_{pot} di Thévenin fra h e l (o h e L , ma sono praticamente identiche); in questo caso il calcolo è assai più complicato che nel caso del potenziometro; comunque si trova che tale resistenza è sempre minore di $\simeq 2.9 k\Omega$ (supposto il reostato P di valore $\ll 10 k\Omega$); il valore minimo tende anche in questo caso a zero quando il rapporto impostato tende a 0.

Molto spesso, invece di calcolare ρ_{pot} e l'errore di sensibilità, conviene piuttosto dare una valutazione sperimentale delle medesime quantità: per fare ciò si varia di una quantità finita l'impostazione del potenziometro o del divisore di tensione rispetto al valore di equilibrio e si osserva di quante divisioni si sposta il galvanometro; la variazione corrispondente al minimo spostamento apprezzabile del galvanometro ($\simeq \frac{1}{4}$ di divisione) dà direttamente l'errore di sensibilità sulla tensione (o meglio: sull'impostazione del potenziometro o del divisore e quindi sulla tensione). Se poi, supponendo di conoscere ρ_g , si conosce o si misura ρ_{pot} (sostituendo il generatore V con un cortocircuito), si può anche risalire, almeno approssimativamente a ρ_x . Con questo metodo si può dare per esempio una valutazione approssimata della resistenza interna della pila campione.

Riassumiamo gli errori che si commettono in una misura potenziometrica. La relazione che si sfrutta è:

$$\mathcal{E}_x = \frac{r}{r_o} E_o \quad (\text{V.15})$$

dove r e r_o sono le letture fatte sul potenziometro (o divisore di tensione) in corrispondenza dello zero del galvanometro, quando siano in misura \mathcal{E}_x e E_o rispettivamente. Sarà allora

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \mathcal{E}_x}{\mathcal{E}_x} = & \left(\frac{\Delta r}{r} \right)_{\text{linearità}} + \left(\frac{\Delta r}{r} \right)_{\text{lettura}} + \left(\frac{\Delta r}{r} \right)_{\text{sensibilità}} + \\ & + \left(\frac{\Delta r_o}{r_o} \right)_{\text{linearità}} + \left(\frac{\Delta r_o}{r_o} \right)_{\text{lettura}} + \left(\frac{\Delta r_o}{r_o} \right)_{\text{sensibilità}} + \left(\frac{\Delta E_o}{E_o} \right)_{\text{campione}} \end{aligned} \quad (\text{V.16})$$

qualora $\left(\frac{\Delta r}{r} \right)_{\text{sensibilità}}$ sia valutata sperimentalmente.

Se la valutazione dell'errore di sensibilità è fatta sulla base della conoscenza di ρ_{pot} , ρ_x e ρ_g e di i_{gm} , allora varrà:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \mathcal{E}_x}{\mathcal{E}_x} = & \left(\frac{\Delta r}{r} \right)_{\text{linearità}} + \left(\frac{\Delta r}{r} \right)_{\text{lettura}} + \left(\frac{\Delta r_o}{r_o} \right)_{\text{linearità}} + \left(\frac{\Delta r_o}{r_o} \right)_{\text{lettura}} + \\ & + i_{gm} \left(\frac{\rho_x + \rho_{pot} + \rho_g}{\mathcal{E}_x} + \frac{\rho_o + \rho_{pot} + \rho_g}{E_o} \right) + \left(\frac{\Delta E_o}{E_o} \right)_{\text{campione}} \end{aligned} \quad (\text{V.17})$$

dove i simboli dovrebbero essere sufficientemente eloquenti da non richiedere ulteriori spiegazioni. Le formule ora date valgono ovviamente per gli errori massimi.

Nel caso di una misura col potenziometro del tipo descritto nel §4 sarà opportuno cercare di minimizzare questi errori *a priori*, scegliendo la portata più adatta: come esempio, supponiamo di dover misurare una ddp $\mathcal{E}_x = 10mV$ con una $\rho_x = 1 \Omega$; nelle varie portate la situazione degli errori valutati a priori è la seguente (vedi pagina 110):

Portata 1:

$$\left(\frac{\Delta r}{r} \right)_{\text{linearità}} \simeq 5 \cdot 10^{-2} \quad \left(\frac{\Delta r}{r} \right)_{\text{lettura}} = 2.5 \cdot 10^{-2} \quad \left(\frac{\Delta r}{r} \right)_{\text{sens}} < 10^{-4}$$

Portata 0.1:

$$\left(\frac{\Delta r}{r} \right)_{\text{linearità}} \simeq 1 \cdot 10^{-2} \quad \left(\frac{\Delta r}{r} \right)_{\text{lettura}} = 2.5 \cdot 10^{-3} \quad \left(\frac{\Delta r}{r} \right)_{\text{sens}} \simeq 2 \cdot 10^{-4}$$

Portata 0.01:

$$\left(\frac{\Delta r}{r} \right)_{\text{linearità}} \simeq 1 \cdot 10^{-3} \quad \left(\frac{\Delta r}{r} \right)_{\text{lettura}} = 2.5 \cdot 10^{-4} \quad \left(\frac{\Delta r}{r} \right)_{\text{sens}} \simeq 2 \cdot 10^{-3}$$

Conviene effettuare la misura nella portata 0.01 perché in essa è minimo l'errore $\left(\frac{\Delta r}{r} \right)_{\text{totale}}$. Simili problemi si pongono qualora si misuri con un divisore di tensione.

Dal contesto dovrebbe essere chiaro che ancora una volta -come nel ponte di Wheatstone- il limite della precisione deriva dal rivelatore di zero, qualora le resistenze in gioco siano abbastanza elevate. Ad esempio una resistenza $\rho_x = 10^5 \Omega$ stabilisce, sia nel caso che si utilizzi un potenziometro che un divisore di tensione, un errore (indipendente da \mathcal{E}_x) $\Delta \mathcal{E}_x \simeq 2.5mV$ che in un gran numero di casi vanifica le caratteristiche di precisione degli strumenti. Anche qui, come nel caso del ponte di Wheatstone, l'uso di un microvoltmetro elettronico ($K_V = 10^{-6} V/div, \rho_V > 10^8 \Omega$) porta a dei

miglioramenti sostanziali nella sensibilità della misura: infatti lo schema della misura in questo caso diviene quello di Fig.16:

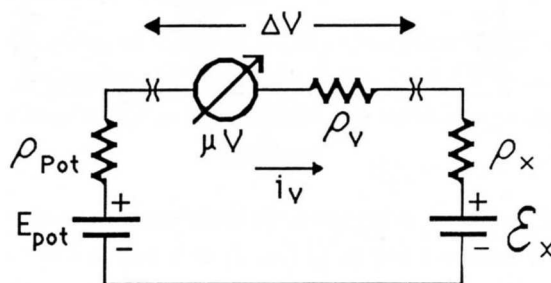


Fig.V.16

e quindi

$$E_{pot} - \mathcal{E}_x = i_V(\rho_V + \rho_x + \rho_{pot}) \simeq \Delta V \left(1 + \frac{\rho_x + \rho_{pot}}{\rho_V}\right) \quad (\text{V.18})$$

dove abbiamo posto $i_V \cdot \rho_V = \Delta V$, ovvero proprio la differenza di potenziale che si legge sul microvoltmetro. Conseguentemente, fintanto che $\rho_V \gg (\rho_x + \rho_{pot})$, l'errore assoluto su \mathcal{E}_x dovuto alla sensibilità corrisponde alla tensione più piccola misurabile dallo strumento; ad esempio $\simeq 0.50 \mu V$ se la divisione più piccola corrisponde a $1 \mu V$.

L'uso di tali rivelatori di zero consente quindi di effettuare accurate misure di ddp a partire da un centinaio di μV in su, essendo la precisione unicamente limitata dalla linearità del potenziometro o del divisore per valori di ddp maggiori di qualche mV , e per tensioni più piccole dalla linearità, più eventualmente altri effetti spuri quali ad esempio le fem di origine termoelettrica e le instabilità intrinseche (rumore) del rivelatore di zero. Su quest'ultimo punto torneremo molto più avanti, nel Cap.XV.

7.— Misure di fem e resistenze equivalenti

di Thévenin fra due terminali

Elenchiamo qui di seguito, schematicamente, alcune misure di differenza di potenziale e resistenza interna fra due terminali.

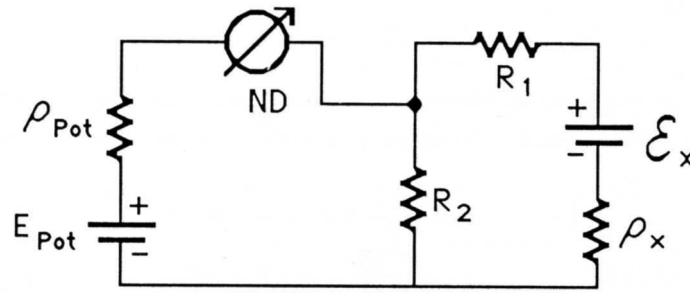


Fig.V.17

Con il Potenziometro, poiché la corrente nella resistenza potenziometrica propriamente detta non deve superare 2 mA , il massimo valore di fem \mathcal{E}_x misurabile direttamente è 1.6 V . Tuttavia è facile risalire al valore di una fem più elevata montando un partitore di tensione realizzato con due resistenze note (vedi Fig.17):

$$\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_{pot} \cdot \frac{R_1 + R_2 + \rho_x}{R_2} \quad (\text{V.19})$$

Se ρ_x non è trascurabile rispetto a R_1 e R_2 , occorre, mediante una coppia diversa $R_1 - R_2$, fare un'altra misura e dal complesso delle due misurazioni ricavare \mathcal{E}_x e ρ_x . L'indeterminazione su \mathcal{E}_x (e ρ_x) risentirà oltre che dei soliti contributi di errore, anche dell'indeterminazione con cui sono note R_1 e R_2 . Un simile metodo si può applicare anche quando \mathcal{E}_x sia $\leq 1.6 \text{ V}$ e si voglia determinare sia \mathcal{E}_x che ρ_x . In questo caso la presenza di R_1 è inessenziale e introduce solo una complicazione. Se ρ_x è piccola e non compromette la sensibilità, una misura diretta, senza R_2 cioè, dà direttamente \mathcal{E}_x . Una seconda misura con R_2 tale che dimezzi \mathcal{E}_x , ci dice subito $\rho_x = R_2$. In questo tipo di misura se ρ_x è piccola occorre verificare che siano rispettati i wattaggi delle varie resistenze e che non si richieda una erogazione eccessiva di corrente da parte del generatore (soprattutto se è una pila).

Se ρ_x è grande, ma ancora non tanto da compromettere la sensibilità del galvanometro come rivelatore di zero, si può compiere una prima misura scegliendo $R_2 \ll \rho_x$, ma tale da dare pur sempre una ddp misurabile con piccolo errore; otterremo così:

$$\mathcal{E}'_{pot} = \mathcal{E}_x \cdot \frac{R_2}{R_2 + \rho_x} \simeq \mathcal{E}_x \cdot \frac{R_2}{\rho_x} = i_{cc} R_2 \quad (\text{V.20})$$

dove i_{cc} rappresenta la corrente di cortocircuito fra i due terminali. In una seconda misura si può aggiungere in serie a R_2 una resistenza R_1 :

$$\mathcal{E}''_{pot} = \mathcal{E}_x \cdot \frac{R_2}{R_2 + \rho_x + R_1} \simeq \frac{\mathcal{E}_x}{\rho_x} \cdot \frac{R_2}{1 + \frac{R_1}{\rho_x}} \quad (\text{V.21})$$

Si regola poi R_1 fino a ottenere $\mathcal{E}''_{pot} = \frac{\mathcal{E}'_{pot}}{2}$; in questa condizione $R_1 = \rho_x$. L'approssimazione introdotta dall'aver trascurato R_2 rispetto a ρ_x dovrà non introdurre un errore di schematizzazione superiore agli altri errori di misura; se ciò non è possibile, sarà opportuno sviluppare i calcoli esattamente, cioè senza approssimazioni.

Se infine ρ_x è così grande che la sensibilità risulta gravemente compromessa, allora occorre impiegare nelle misure precedenti il microvoltmetro come rivelatore di zero (sempre che siano disponibili campioni di resistenza di valore sufficientemente elevato, necessari nell'ultimo metodo descritto).

Osserviamo che molto spesso in questo tipo di misure non occorre ricorrere propriamente a un microvoltmetro, ma basta usare un buon multimetro elettronico con una risoluzione di $100 \mu V$ e una resistenza di ingresso di $10 M\Omega$. Infatti con tale strumento -assai meno delicato da utilizzarsi- si ottiene una precisione nella misura di zero (e cioè una incertezza in ΔV data dal voltmetro) di $10^{-4}V$ quasi sempre sufficientemente piccola, almeno per \mathcal{E}_x dell'ordine del Volt. La resistenza di ingresso $\rho_V = 10 M\Omega$ è inoltre sufficientemente elevata da non provocare forti diminuzioni della sensibilità, a meno che ρ_x non sia molto maggiore di ρ_V .

Quanto al Divisore di tensione, con esso si possono compiere tutte le misure descritte in questo paragrafo, con il vantaggio aggiuntivo che non esiste il limite a $1.6 V$ sulla tensione massima misurabile; il Divisore di tensione disponibile in laboratorio può accettare in ingresso tensioni fino a circa $200 V$.

8.— Taratura di voltmetri e amperometri

La taratura, oppure il controllo della precisione dichiarata, di un voltmetro si può fare con il circuito di Fig.18.

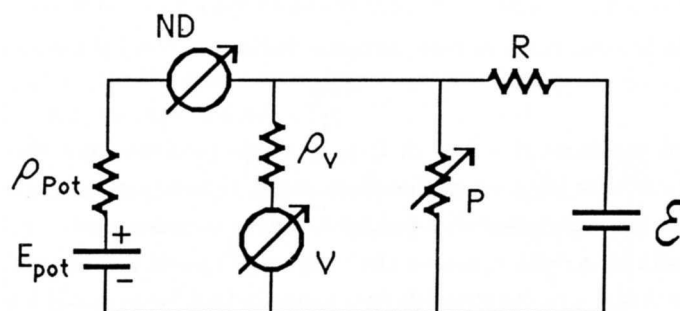


Fig.V.18

Il circuito è estremamente semplice: tramite la regolazione del reostato P si cambia la tensione V ai capi dello strumento; tale ddp è contemporaneamente misurata dal multimetro e dal potenziometro (preventivamente tarato). Con questo metodo si può controllare la precisione dello strumento per tutta la gamma dei valori misurabili. Per quanto riguarda i componenti \mathcal{E} , R , P , occorre che siano stabili, la loro precisione essendo irrilevante. Nel caso che la resistenza di Thévenin ρ_{pot} sia molto minore di ρ_V , lo schema può essere ulteriormente semplificato: lo riportiamo in Fig.19 nell'ipotesi di utilizzare il divisore di tensione anziché il potenziometro:

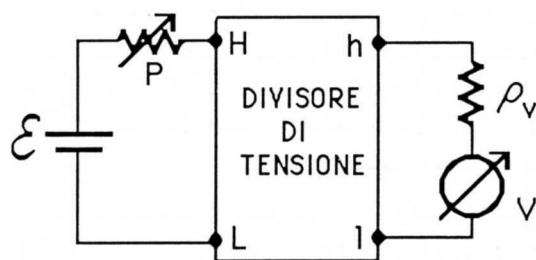


Fig.V.19

Supponiamo che il divisore sia stato preventivamente tarato con una pila campione; variando i rapporti del divisore si tara direttamente il voltmetro.

Dovendo tarare un amperometro, lo schema può essere quello di Fig.20, identico sia che si usi il potenziometro che il divisore di tensione (entrambi dovranno essere stati preventivamente tarati):

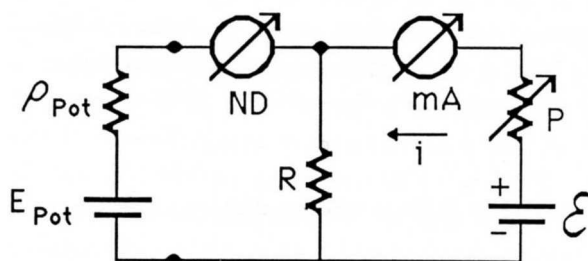


Fig.V.20

Soddisfatta che sia la condizione di zero, avremo, indicando con i il valore della corrente

$$i = \frac{E_{pot}}{R} \quad (\text{V.22})$$

Variando P si può cambiare il valore di i ; se si vuole produrre una curva di taratura dello strumento, detta i_L la corrente letta sul milliamperometro, riporteremo in grafico $i_L - i$ in funzione di i ; se facciamo questo per vari valori di i potremo, nell'utilizzo successivo del milliamperometro, correggere le letture sulla base della spezzata che congiunge i punti sperimentali.

Se lo strumento da tarare è molto sensibile (per esempio $1\mu A$ fondo scala) è necessario aumentare R e P e può accadere che la sensibilità ne risenta fino al punto di compromettere la precisione della misura; al solito, l'uso di un microvoltmetro come rivelatore di zero risolve il problema.

9.— Misura di resistenze

Con riferimento alla Fig.21, quando E^+ ed E^- sono collegati rispettivamente ai morsetti 1 e 2, all'equilibrio si ha:

$$E_{pot}^{12} = R^* \cdot i \quad (\text{V.23})$$

mentre quando sono collegati 3 e 4:

$$E_{pot}^{34} = R_x \cdot i \tag{V.24}$$

e pertanto

$$R_x = \frac{E_{pot}^{34}}{E_{pot}^{12}} \cdot R^* \tag{V.25}$$

e se R^* è una resistenza nota, R_x è così determinata.

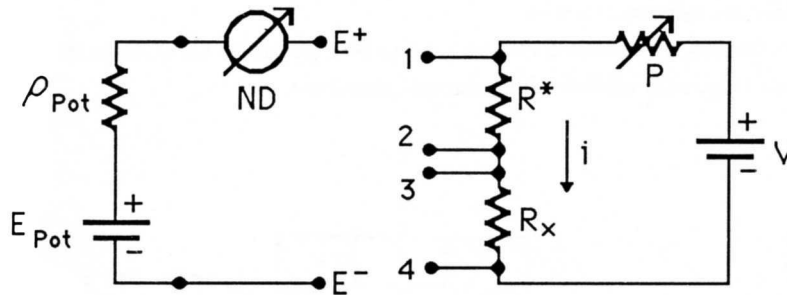


Fig.V.21

Il sistema è particolarmente adatto quando le resistenze R_x e R^* sono di piccolo valore e a 4 terminali: in questo caso i terminali di corrente vengono usati per stabilire i collegamenti con P e V e R^* e R_x fra di loro, mentre i terminali di tensione (due per ogni resistenza) vengono correttamente utilizzati per misurare le cadute ai capi delle resistenze. In questo caso è assai evidente l'utilità di avere 4 terminali: le resistenze dei contatti e dei collegamenti non entrano minimamente in gioco nella misura della caduta ohmica. I terminali di tensione possono essere anche collegamenti con sezione piccola e resistenza relativamente grande rispetto a quella da misurare, in quanto la corrente attraverso di essi è, all'equilibrio, nominalmente nulla o comunque quella corrispondente al limite di sensibilità ($< 10^{-7}A$, se si usa il galvanometro come rivelatore di zero, assai inferiore se si usa il microvoltmetro).

Può essere a questo proposito istruttivo considerare quantitativamente la situazione delle correnti nella misura (Fig.22): supponiamo di avere da

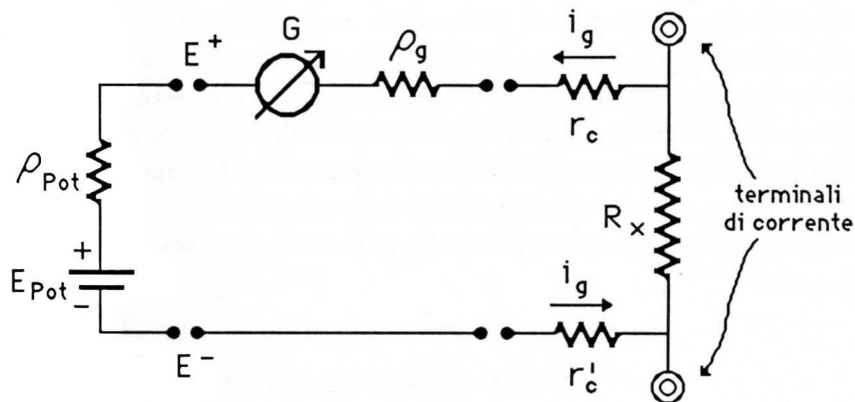


Fig.V.22

misurare una resistenza di $1 \cdot 10^{-2}\Omega$. Una corrente di $10^{-1}A$ provocherà su R_x una caduta di $1mV$ ancora misurabile con buona precisione mediante il potenziometro. Essendo all'equilibrio

$i_g \leq 2.5 \cdot 10^{-8} A$, se vogliamo che la caduta (cioè l'errore di sensibilità) sulla resistenza $(\rho_{pot} + \rho_g + r_c + r'_e + R_x) = R_s$ dovuta a questa corrente sia minore dell' 1% di 1 mV dovremo avere

$$R_s \leq \frac{10^{-5}}{2.5 \cdot 10^{-8}} = 400 \Omega$$

Un limite di tal genere può derivare soltanto da ρ_{pot} , non certo dai collegamenti che introdurranno resistenze di alcuni ordini di grandezza inferiori; tuttavia col potenziometro che abbiamo descritto, trattandosi di misurare una ddp di 1 mV, la resistenza ρ_{pot} risulterà dell'ordine di 50 Ω e quindi non avremo problemi. In ogni caso, qualora ρ_{pot} fosse di valore più elevato, sarà anche in questa misura utile un microvoltmetro.

Prima di concludere, ricordiamo che un'alternativa possibile all'utilizzo di resistenze a 4 terminali, è quella di un razionale utilizzo dei morsetti standard.

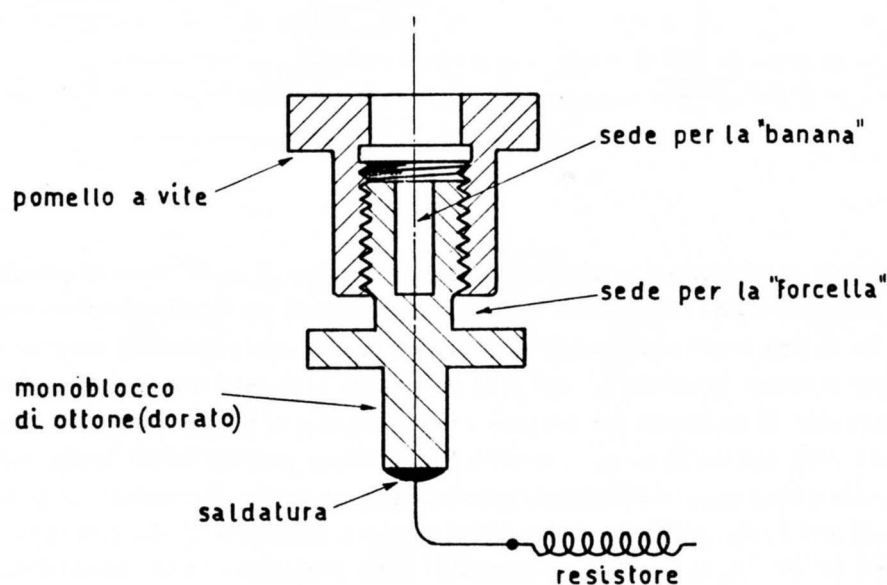


Fig.V.23

Essi sono in genere fatti in modo (Fig.23) da avere la possibilità di accogliere in una sede un terminale di cavo a *spinotto* (o *banana*) e in un'altra un terminale a *forcella*. Il contatto che si può assicurare con la forcella pressata -tramite il pomello a vite- contro il conduttore del morsetto è di qualità senz'altro migliore rispetto a quello del contatto a banana e può quindi essere utilizzato come terminale di corrente. Se come terminale di tensione si utilizza la sede per un terminale a banana, la tensione così misurata non dipende dalla caduta di tensione del contatto dei terminali a forcella e pertanto la resistenza che così determiniamo è ben riproducibile e perfettamente definita, anche se essa contiene la resistenza dei collegamenti fra i morsetti e il resistore vero e proprio disegnato a spirale nella figura.

NOTA BIBLIOGRAFICA

FR 59, LA 38, DA 75, MA 72 e ZI 86 trattano in maniera dettagliata molti degli argomenti del capitolo.

Su **FR 71** si potrà trovare una descrizione del principio di funzionamento delle pile elettrochimiche.

Su **LA 38** sono riportate informazioni sulle pile campione; stesso argomento è trattato su **CO 85** con qualche notizia su campioni di fem più moderni.

Per quanto riguarda gli strumenti e le loro caratteristiche, è opportuno consultare i manuali dei costruttori (“Student Potentiometer” della Leeds & Northrup e “Voltage Divider” della General Radio).

VI

MISURE COL GALVANOMETRO BALISTICO

1.— Concetto di capacità, condensatori

In base alle leggi dell'elettrostatica sappiamo che, dato un conduttore lontano da altri conduttori, è possibile introdurre una quantità detta *capacità* (simbolo C) definita come il rapporto fra la carica q accumulata sul conduttore e il potenziale φ di quest'ultimo:

$$C = \frac{q}{\varphi} \quad (\text{VI.1})$$

C dipende dalla forma del conduttore e dalla costante dielettrica del mezzo in cui è immerso. L'unità di misura della capacità è il *Farad* (F) pari a 1 *Coulomb/Volt*. Molto spesso si usano i sottomultipli, poiché il *Farad* è una unità estremamente grande. A titolo di esempio la capacità di una sfera di raggio R uniformemente carica vale

$$C = \frac{\int_S dq}{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{dq}{R}} = 4\pi\epsilon_0 R \quad (\text{VI.2})$$

Ricordando che $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} F/m$, si trova che se $R = 1 \text{ cm}$, $C = 1.11 \text{ pF}$.

Per aumentare la carica che si può accumulare in un conduttore, si possono porre due conduttori molto vicini l'uno all'altro e applicare ad essi una certa differenza di potenziale V . Se tutte le linee di campo uscenti da uno dei due conduttori sono captate dall'altro (se cioè si ha *induzione completa*), si trova che le cariche sui due conduttori sono uguali in valore assoluto ma di segno opposto e che è possibile definire la capacità di questo insieme di conduttori come il rapporto costante fra il valore assoluto della carica q comune ai due conduttori e la differenza di potenziale V :

$$C = \frac{q}{V} \quad (\text{VI.3})$$

Questo insieme di conduttori costituisce quello che si chiama un *condensatore*; i due conduttori (separati da un dielettrico di costante dielettrica relativa ϵ_r) sono detti *armature* del condensatore. Il motivo per cui si riescono in questo caso a ottenere accumuli di carica sulle armature superiori rispetto a quelli sui due conduttori isolati, si comprende osservando che se si considera una armatura, il valore assoluto del potenziale di essa si abbassa notevolmente, rispetto al caso che fosse isolata, a causa della carica di segno opposto collocata nelle sue immediate vicinanze.

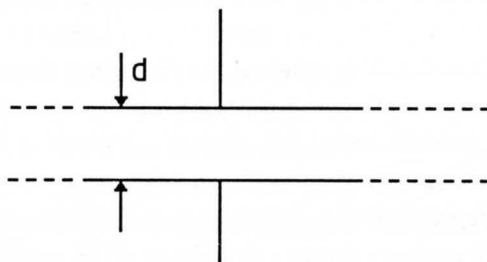


Fig.VI.1

Calcoliamo a titolo di esempio la capacità C di un condensatore costituito da due conduttori piani indefiniti posti a distanza d fra loro (Fig.1). Detta $\pm\sigma$ la densità superficiale di carica sulle armature, si trova che il campo elettrico \vec{E} all'interno è diretto perpendicolarmente alle armature ed è di modulo costante pari a $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0\epsilon_r}$. La ddp fra le armature risulta così $V = \frac{\sigma d}{\epsilon_0\epsilon_r}$. Poiché il modulo della carica accumulata su una delle due armature vale $Q = \sigma S$, la capacità è data da $C = \frac{\epsilon_0\epsilon_r S}{d}$.

I condensatori trovano larga applicazione nei circuiti elettrici e elettronici; il loro simbolo circuitale è quello riportato in Fig.2,



Fig.VI.2

che rappresenta schematicamente il caso di un condensatore a superfici piane e parallele, al quale tutti i condensatori sono riconducibili con una approssimazione generalmente buona. Spesso le armature dei condensatori sono costituite da due fogli conduttori, separati da un dielettrico e avvolti l'uno sull'altro; detta S la superficie delle due armature, d la distanza fra di esse (cioè lo spessore del dielettrico), ϵ_r la costante dielettrica relativa, la capacità di questo condensatore vale: $C \approx \frac{2\epsilon_0\epsilon_r S}{d}$ a patto che la distanza d sia molto minore del raggio di curvatura delle superfici dei conduttori.

I condensatori possono collegarsi fra di loro così come si possono collegare le resistenze; tuttavia se vogliamo calcolare la capacità di condensatori in parallelo troviamo che le capacità si sommano, mentre le capacità di condensatori in serie si ottengono prendendo l'inverso della somma degli inversi. Questo risultato si comprende immediatamente se si osserva che la relazione fra carica e differenza di potenziale

$$Q = CV \quad (\text{VI.4})$$

è di proporzionalità, come fra corrente e tensione, salvo che la capacità è a moltiplicare la tensione e non la corrente e pertanto si comporterà nei confronti della carica e della tensione come una conduttanza nei confronti della corrente e della tensione (principio di dualità: Cap.I,§6). Conseguentemente

se abbiamo due condensatori di cui uno molto maggiore dell'altro ($C_1 \gg C_2$), se li poniamo in serie otteniamo un condensatore avente una capacità $\approx C_2$, mentre se li poniamo in parallelo otteniamo un condensatore $\approx C_1$.

Per quanto riguarda gli ordini di grandezza, i condensatori che normalmente vengono impiegati nei circuiti elettrici e elettronici molto raramente hanno capacità maggiori di qualche centinaio di μF ; spesso hanno valori di qualche ordine di grandezza inferiore, fino a pochi pF .

Un condensatore rappresenta un elemento a *costanti concentrate*, ovvero le due armature sono completamente affacciate l'una all'altra e quindi tutte le linee di campo elettrico vanno da un conduttore all'altro; spesso può capitare che due conduttori di un circuito, per esempio due resistenze, si trovino una in vicinanza dell'altra; anche in questo sistema di conduttori si può pensare di definire una capacità, anche se non si ha induzione completa; in questi casi si parla di *costanti distribuite* e se volessimo trattare correttamente anche questi casi, numerose complicazioni interverrebbero. Nel seguito, forti anche del fatto che queste capacità parassite sono in genere piccole, tratteremo in dettaglio solo condensatori, cioè costanti concentrate, con tutte le semplificazioni che ne derivano. Quando occorrerà, parleremo anche delle capacità distribuite, ma comunque la trattazione resterà estremamente qualitativa.

2.— Circuiti R-C serie

Una conseguenza molto importante del fatto che la capacità sia concentrata in una zona dello spazio limitata e che le due armature si affaccino completamente l'una all'altra, è che si possono continuare a considerare come stazionarie (cioè $\text{div } \vec{j} = 0$) le configurazioni circuitali del tipo in Fig.3.

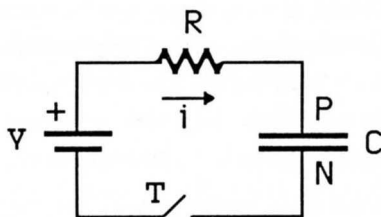


Fig.VI.3

Essa corrisponde ad avere un circuito $R - C$ serie con un generatore di tensione e un tasto che supponiamo di chiudere al tempo $t = 0$, partendo con le condizioni iniziali $q(0) = 0$, cioè condensatore scarico.

Alla chiusura del tasto, il generatore inizia a erogare corrente, provocando un accumulo di carica positiva sull'armatura P e di carica negativa su N; questo processo si interrompe quando la carica

depositatasi sulle armature è tale da garantire una differenza di potenziale $V_C = \frac{q}{C}$ uguale alla fem V del generatore. E' facile rendersi conto che durante la fase di carica la corrente, in un generico istante t , è sempre la stessa in ogni punto del circuito: infatti, a causa dell'induzione completa, la carica che viene depositata su un'armatura è, istante per istante, uguale e contraria a quella che viene sottratta dall'altra. Pertanto l'intensità di corrente è la stessa in ogni sezione del circuito, ovvero varrà $\text{div } \vec{j} = 0$. Tuttavia, se volessimo considerare anche lo spazio occupato dal dielettrico fra le armature, troveremmo che in esso la condizione di stazionarietà non è affatto rispettata: infatti attraverso il dielettrico non circola alcuna corrente vera e, mentre in tutto il resto del circuito non si ha accumulo di cariche ($\text{div } \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$), sulle armature succede esattamente il contrario, cioè su di esse $\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$. L'induzione completa garantisce però che in ogni istante le due cariche sono uguali e contrarie e, pur essendo su ogni armatura considerata singolarmente $\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$, sull'insieme delle due armature $(\frac{\partial \rho_P}{\partial t} + \frac{\partial \rho_N}{\partial t}) = 0$ e la solenoidalità del vettore \vec{j} è garantita in tutto il circuito. Questo fatto è estremamente importante, perché consente, anche nel caso in cui la rete contenga condensatori, di definire un'unica intensità di corrente se il circuito è costituito da una sola maglia e in genere, cioè per un circuito con più maglie, di applicare la legge dei nodi.

Ammettiamo anche che le dimensioni fisiche del circuito siano molto piccole rispetto al prodotto della velocità della luce per l'intervallo di tempo nel quale l'assetto elettrico dei conduttori appartenenti al circuito cambia apprezzabilmente (vedremo fra poco che tale tempo è dell'ordine di $R \cdot C$ e quindi il requisito sarà ampiamente soddisfatto): in questa ipotesi possiamo considerare il campo elettrico dovuto alle cariche del circuito come un campo elettrostatico conservativo e possiamo continuare a sfruttare la seconda legge di Kirchhoff.

Esaminiamo allora il circuito di Fig.3 e, per risolverlo, applichiamo la seconda legge di Kirchhoff, ovvero sfruttiamo la proprietà che il campo elettrostatico è conservativo (vedi (I.52)); essendo la ddp ai capi del condensatore $V_C = V_P - V_N = \frac{q}{C}$, possiamo scrivere:

$$iR + \frac{q}{C} - V = 0 \quad (\text{VI.5})$$

con la condizione $q(0) = 0$. Ricordando che $i = \frac{dq}{dt}$, sostituendo questa espressione nella (5) e riordinando i termini, si ottiene l'equazione differenziale lineare del primo ordine a coefficienti costanti:

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{V}{R} \quad (\text{VI.6})$$

Un integrale particolare è $q_p = CV$ e corrisponde alla situazione a regime, quando cioè la carica sulle armature dà luogo a una ddp pari a quella applicata dal generatore. La soluzione dell'equazione omogenea associata si trova separando le variabili:

$$q_0 = A \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \quad (\text{VI.7})$$

Pertanto la soluzione finale:

$$q = q_p + q_0 = CV + A \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \quad (\text{VI.8})$$

dà, una volta che si soddisfi $q(0) = 0$:

$$q(t) = CV \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right] \quad (\text{VI.9})$$

Per la corrente otterremo, derivando la (9):

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{V}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \quad (\text{VI.10})$$

In Fig.4 è riportato l'andamento di $q(t)$ (scala di sinistra) e di $i(t)$ (scala di destra).

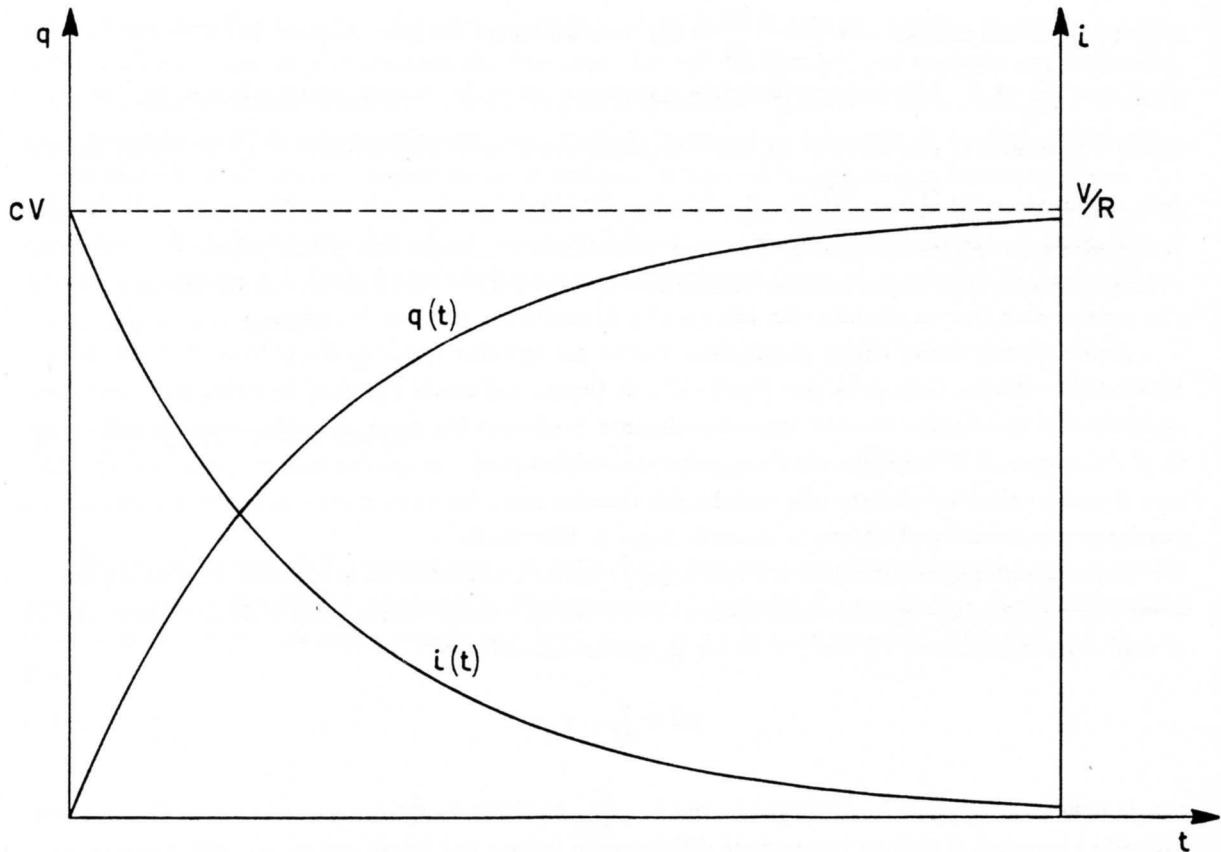


Fig.VI.4

Da notare la discontinuità della corrente che, all'istante di chiusura del tasto, passa bruscamente dal valore 0 al valore $i(0^+) = \frac{V}{R}$; ovvero, all'istante iniziale il condensatore si comporta come un cortocircuito; al passare del tempo la carica si accumula sulle sue armature e la ddp che si viene a creare si oppone a V e tende a ridurre la corrente che circola nella resistenza; dopo un tempo sufficientemente grande rispetto a $RC = \tau$ (detta *costante di tempo*) la corrente è andata praticamente a zero, mentre la carica ha di fatto raggiunto il suo valore asintotico e il condensatore si comporta come un circuito aperto.

Gli andamenti della carica accumulata sul condensatore e della corrente nel circuito danno, a parte una costante, l'andamento della tensione ai capi del condensatore e ai capi della resistenza rispettivamente. Nel Cap.XII, §2 impareremo che circuiti $R - C$ nei quali la ddp è misurata ai capi del condensatore sono detti circuiti *passa-basso*, mentre quelli ove la ddp di interesse è misurata ai capi della resistenza son detti *passa-alto*; studieremo questi circuiti in dettaglio nel caso del regime sinusoidale delle correnti e in quella occasione comprenderemo anche il motivo di tali denominazioni.

Supponiamo ora di avere il circuito di Fig.5

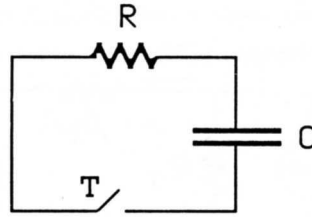


Fig.VI.5

con il condensatore carico a una tensione V ; se al tempo $t = 0$ chiudiamo il tasto, avremo:

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = 0 \quad (\text{VI.11})$$

con $q(0) = CV$. Integrando la (11), troviamo:

$$q = CV \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \quad (\text{VI.12})$$

cioè questa volta la carica decade esponenzialmente con costante di tempo $\tau = RC$. La corrente vale:

$$i(t) = -\frac{V}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \quad (\text{VI.13})$$

ovvero essa ha un comportamento uguale a quello nella fase di carica del condensatore, salvo che è cambiata di segno.

Come conclusione possiamo dire che in un circuito RC serie la carica e la scarica del condensatore avvengono con un tempo caratteristico τ dopo il quale, nella fase di carica la tensione ai capi del condensatore ha raggiunto un valore circa uguale al 63% del suo valore finale, mentre nella fase di scarica la tensione si è ridotta di altrettanto (63%) rispetto a quella di partenza. Gli asintoti -per definizione- si raggiungono solo dopo un tempo infinito, tuttavia dopo un tempo pari a 4 costanti di tempo il residuo di tensione della fase di scarica è meno del 2% del valore iniziale (differisce meno del 2% dal valore finale nel caso della carica); dopo 10τ queste differenze sono ridotte a meno di $5 \cdot 10^{-6}$ e quindi nella maggioranza dei casi gli asintoti potranno considerarsi di fatto raggiunti. Alcuni esempi numerici: se $C = 1\mu F$, $R = 1k\Omega$ allora $\tau = 10^{-3}s$ e quindi $10^{-2}s$ dopo la commutazione del tasto possiamo dire che il condensatore si è o completamente caricato (Fig.3) o completamente scaricato (Fig.5).

3.— *Il galvanometro in regime balistico; il caso di smorzamento nullo*

Consideriamo un galvanometro del tipo descritto nel Cap.II il cui moto è governato dalla equazione differenziale (II.23):

$$\mathcal{J}\ddot{\varphi} + \left(C + \frac{G^2}{R}\right)\dot{\varphi} + E\varphi = Gi$$

Supponiamo ora (Fig.6), che al tempo $t = 0$ sia $i(0) = 0$ e il galvanometro sia fermo e a riposo ($\varphi(0) = 0, \dot{\varphi}(0) = 0$).

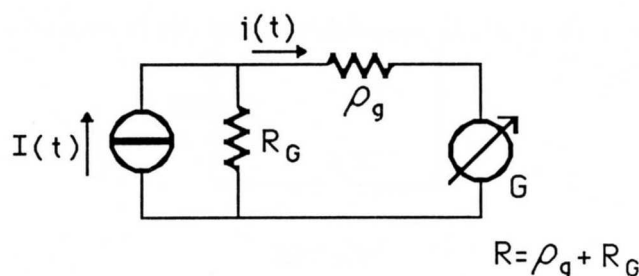


Fig.VI.6

A partire dall'istante $t = 0^+$ un generatore impulsivo di corrente $I(t)$ invia una corrente $i = i(t) = I(t) \cdot \frac{R_G}{R_G + \rho_g}$ per un tempo $\tau \ll T$, dove

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{E}{\mathcal{J}} - \frac{(C + \frac{G^2}{R})^2}{4\mathcal{J}^2}}} \quad (\text{VI.14})$$

è il periodo di oscillazione del galvanometro (vedi II, §3). Se ci chiediamo quali sono i valori di φ e $\dot{\varphi}$ dopo il tempo τ possiamo integrare l'equazione (II.23) fra 0 e τ :

$$\mathcal{J} \int_0^\tau \ddot{\varphi} dt + (C + \frac{G^2}{R}) \int_0^\tau \dot{\varphi} dt + E \int_0^\tau \varphi dt = G \int_0^\tau i dt \quad (\text{VI.15})$$

L'integrale $\int_0^\tau i dt$ è uguale alla carica totale che ha attraversato una qualunque sezione del circuito, quindi in particolare l'avvolgimento del galvanometro. Calcolando gli integrali a primo membro della (15) otteniamo:

$$\mathcal{J} [\dot{\varphi}(\tau) - \dot{\varphi}(0)] + (C + \frac{G^2}{R}) \dot{\varphi}(\theta_V) \tau + E \varphi(\theta_S) \tau = GQ \quad (\text{VI.16})$$

dove, secondo il *teorema della media*, θ_V e θ_S sono due istanti compresi fra 0 e τ . Inoltre, essendo $\dot{\varphi}(0) = 0$, abbiamo:

$$\mathcal{J} \dot{\varphi}(\tau) + (C + \frac{G^2}{R}) \dot{\varphi}(\theta_V) \tau + E \varphi(\theta_S) \tau = GQ \quad (\text{VI.17})$$

e facendo tendere τ (e quindi θ_V e θ_S) a zero, essendo $\dot{\varphi}(\theta_V)$ e $\varphi(\theta_S)$ necessariamente finiti (avendosi $\dot{\varphi}(0) = 0, \varphi(0) = 0$ e $\tau \cdot \ddot{\varphi}(0)$ finito), abbiamo:

$$\dot{\varphi}(\tau) = \frac{GQ}{\mathcal{J}} \quad (\text{VI.18})$$

Pertanto dopo un tempo τ molto piccolo si ha una velocità finita, proporzionale alla carica Q passata nel circuito, mentre $\varphi(\tau)$ sarà dell'ordine di $\dot{\varphi}(\tau) \cdot \tau$ cioè infinitesimo in τ . Se ora quindi consideriamo il moto successivo al passaggio dell'impulso di corrente, scegliendo il tempo τ come nuova origine dei tempi dobbiamo semplicemente integrare l'equazione:

$$\mathcal{J} \ddot{\varphi} + (C + \frac{G^2}{R}) \dot{\varphi} + E \varphi = 0 \quad (\text{VI.19})$$

con

$$\varphi(0) = 0 \quad \dot{\varphi}(0) = \frac{GQ}{\mathcal{J}} \quad (\text{VI.20})$$

Consideriamo dapprima il caso ideale in cui lo smorzamento dell'aria sia trascurabile e R sia così grande che anche lo smorzamento elettrodinamico possa essere considerato nullo. La soluzione della (19), in questo caso semplificato, è la soluzione φ_0 dell'equazione:

$$\mathcal{J}\ddot{\varphi}_0 + E\varphi_0 = 0 \quad (\text{VI.21})$$

e va ricercata nella forma

$$\varphi_0 = A \operatorname{sen} \omega_0 t + B \operatorname{cos} \omega_0 t \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{E}{\mathcal{J}}} \quad (\text{VI.22})$$

Sostituendo le condizioni iniziali (20) abbiamo $B = 0$ e $A = \frac{GQ}{\mathcal{J}\omega_0}$ e quindi

$$\varphi_0 = \frac{GQ}{\mathcal{J}\omega_0} \operatorname{sen} \omega_0 t \quad (\text{VI.23})$$

Il moto è pertanto descritto da una senoide i cui massimi valgono $\varphi_{0M} = \frac{GQ}{\mathcal{J}\omega_0}$. Possiamo quindi scrivere

$$Q = K_B^0 \varphi_{0M} \quad (\text{VI.24})$$

$$K_B^0 = \frac{\omega_0 \mathcal{J}}{G} = \frac{E}{\omega_0 G} \quad (\text{VI.25})$$

K_B^0 è detta *costante balistica in condizioni di smorzamento nullo* e rappresenta la costante di proporzionalità fra la carica che ha attraversato il galvanometro nel tempuscolo τ e l'ampiezza delle oscillazioni del moto successivo. La formula (25) ci dice quindi che, eccitando il galvanometro con un impulso di corrente molto breve ma avente integrale finito Q (*eccitazione balistica*), esso compie delle oscillazioni la cui ampiezza è proporzionale a $\dot{\varphi}(0)$ e quindi a Q (che risulta così misurabile); nel prossimo paragrafo faremo vedere che un simile risultato vale anche quando si ammetta la presenza di uno smorzamento finito. Il galvanometro eccitato con questo tipo di impulsi è detto lavorare in *regime balistico*.

Quando il galvanometro è eccitato con una corrente continua i , la lettura viene fatta sulla posizione segnata dall'indice asintoticamente, mentre quando il galvanometro lavora in regime balistico la lettura è istantanea, riguardando essa l'ampiezza del moto periodico: conseguentemente l'errore di lettura è, a parità di elongazione, più elevato nel caso dell'uso balistico che nel caso di una lettura di corrente.

La relazione (25) suggerisce che la costante balistica a smorzamento nullo K_B^0 può essere scritta (vedi II.9)

$$K_B^0 = \frac{K_r}{\omega_0} = \frac{K_r}{2\pi} \cdot T \quad (\text{VI.26})$$

cioè, nota che sia K_r e il periodo T di un galvanometro, si può risalire direttamente al valore della costante balistica in condizioni di smorzamento nullo.

4.— *Il galvanometro balistico nel caso di smorzamento finito*

Consideriamo ora il caso, molto più realistico, in cui è presente uno smorzamento finito.

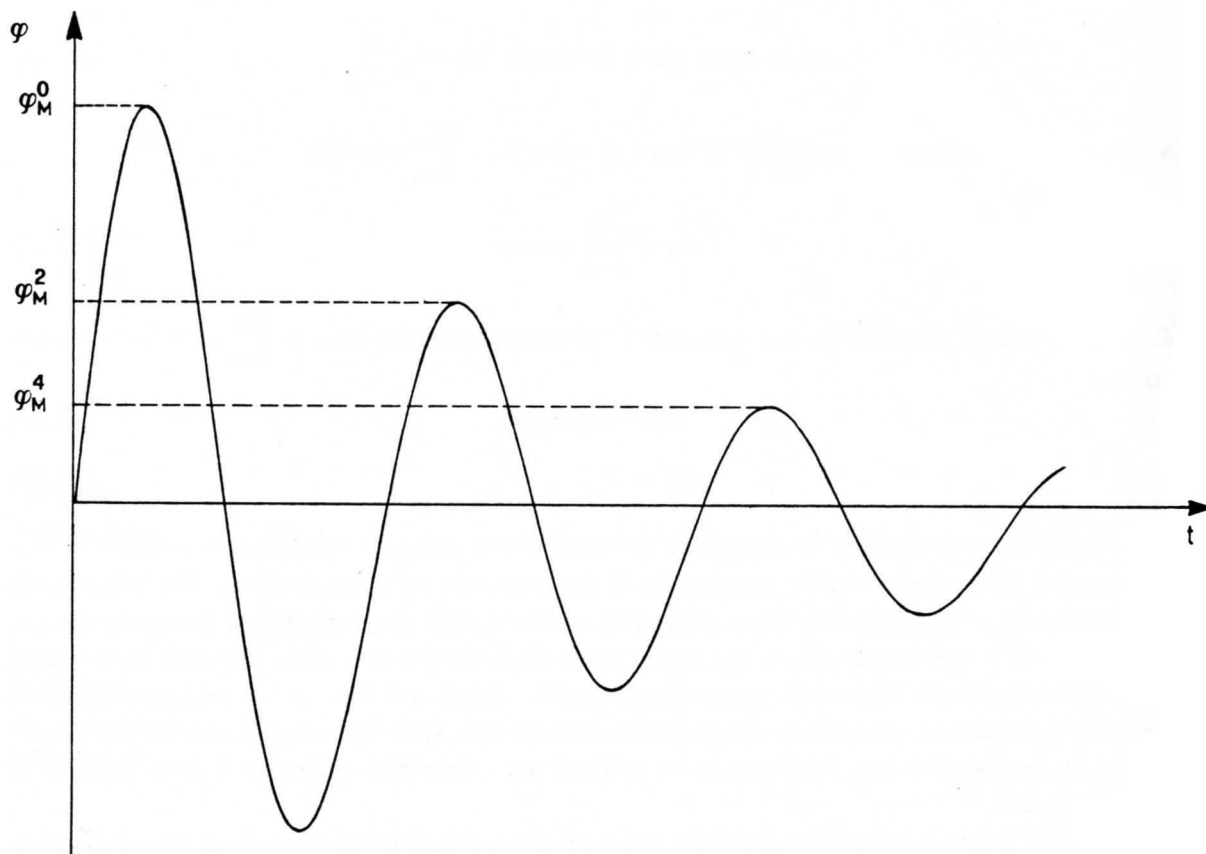


Fig.VI.7

Allora l'equazione differenziale da studiare è la (19) con le condizioni iniziali (20). Supponendo che la resistenza R sia maggiore di quella critica, in base a quanto visto nel Cap.II,§3, la soluzione va ora ricercata nella forma

$$\varphi(t) = \exp(-\sigma_1 t) \cdot (A \sin \sigma_2 t + B \cos \sigma_2 t) \quad (\text{VI.27})$$

con

$$\begin{cases} \sigma_1 = \left(C + \frac{G^2}{R}\right) / (2\mathcal{J}) \\ \sigma_2 = \frac{\sqrt{|4E\mathcal{J} - (C + \frac{G^2}{R})^2|}}{2\mathcal{J}} \\ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 = \frac{E}{\mathcal{J}} = \omega_0^2 \end{cases} \quad (\text{VI.28})$$

In base alle condizioni iniziali si trova:

$$\varphi(t) = \frac{GQ}{\mathcal{J}\sigma_2} \exp(-\sigma_1 t) \operatorname{sen} \sigma_2 t \quad (\text{VI.29})$$

che rappresenta una oscillazione smorzata, come in Fig.7. Rispetto al caso di smorzamento nullo, questa volta l'ampiezza del moto risulta ridotta a causa del termine in $\dot{\varphi}$ nella (19): anche l'ampiezza del primo massimo risente di questo smorzamento, e risulta inferiore a $\frac{GQ}{\mathcal{J}\sigma_2}$ pur rimanendo proporzionale a Q .

Calcoliamoci i valori dei vari massimi a partire dal primo, imponendo nella (19) che $\dot{\varphi}(t) = 0$

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{GQ}{\mathcal{J}\sigma_2} [-\sigma_1 \exp(-\sigma_1 t) \cdot \operatorname{sen} \sigma_2 t + \sigma_2 \exp(-\sigma_1 t) \cdot \cos \sigma_2 t] \quad (\text{VI.30})$$

Indicando con t_S i valori per cui $\dot{\varphi}(t_S) = 0$ abbiamo

$$\tan \sigma_2 t_S = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \quad (\text{VI.31})$$

e pertanto

$$t_S = \frac{1}{\sigma_2} \left[\operatorname{atan} \frac{\sigma_2}{\sigma_1} + n\pi \right] \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{VI.32})$$

La condizione di stazionarietà individua sia i massimi ($n = 0, 2, 4, \dots$) che i minimi ($n = 1, 3, 5, \dots$) e ricordando che il periodo $T = \frac{2\pi}{\sigma_2}$, la (32) può anche scriversi come:

$$t_S = \frac{1}{\sigma_2} \operatorname{atan} \frac{\sigma_2}{\sigma_1} + n \frac{T}{2} \quad (\text{VI.33})$$

Consideriamo ora il primo massimo ($n = 0$) che avviene per $t_S = t_M^0$. Il valore che φ assume è allora ($\operatorname{sen} \left[\operatorname{atan} \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right] = \frac{\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}$):

$$\varphi(t_M^0) = \varphi_M^0 = \frac{GQ}{\mathcal{J}} \exp\left(-\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \operatorname{atan} \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) \frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} = \frac{GQ}{\mathcal{J}\omega_0} \exp\left(-\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \operatorname{atan} \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) \quad (\text{VI.34})$$

Pertanto abbiamo ancora una relazione di proporzionalità fra il valore del primo massimo e la carica che ha attraversato il circuito nel tempuscolo τ :

$$Q = \frac{\mathcal{J}\omega_0}{G} \exp\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \operatorname{atan} \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) \cdot \varphi_M^0 = K_B^0 \exp\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \operatorname{atan} \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) \cdot \varphi_M^0 = K_B \cdot \varphi_M^0 \quad (\text{VI.35})$$

Abbiamo reintrodotta la costante balistica a smorzamento nullo definita nella (25); la (35) ci dice che in condizioni di smorzamento finito la *costante balistica* $K_B = \frac{Q}{\varphi_M^0}$ è maggiore di K_B^0 per un fattore $\exp\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \operatorname{atan} \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) > 1$. La costante balistica di un galvanometro, non essendo come K_r , una caratteristica della soluzione a regime, ma di quella transitoria, *dipende* dallo smorzamento; sembrerebbe quindi che dovesse essere necessario tarare il galvanometro tutte le volte che cambia la resistenza del circuito su cui è chiuso, cambiando con essa lo smorzamento. In pratica ciò non è necessario poiché, per un certo smorzamento, è possibile determinare sperimentalmente il fattore correttivo da apportare a K_B^0 per ottenere K_B : nel prossimo paragrafo troveremo allora che, nota K_B^0 , si può determinare K_B , o viceversa, misurata K_B , si può risalire a K_B^0 .

5.— Il decremento logaritmico

Per determinare il rapporto

$$\frac{K_B}{K_B^0} = \exp\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \operatorname{atan} \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)$$

è sufficiente conoscere il rapporto $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ che in via di principio è noto solo quando lo siano i vari parametri del galvanometro, nonché \bar{R} .

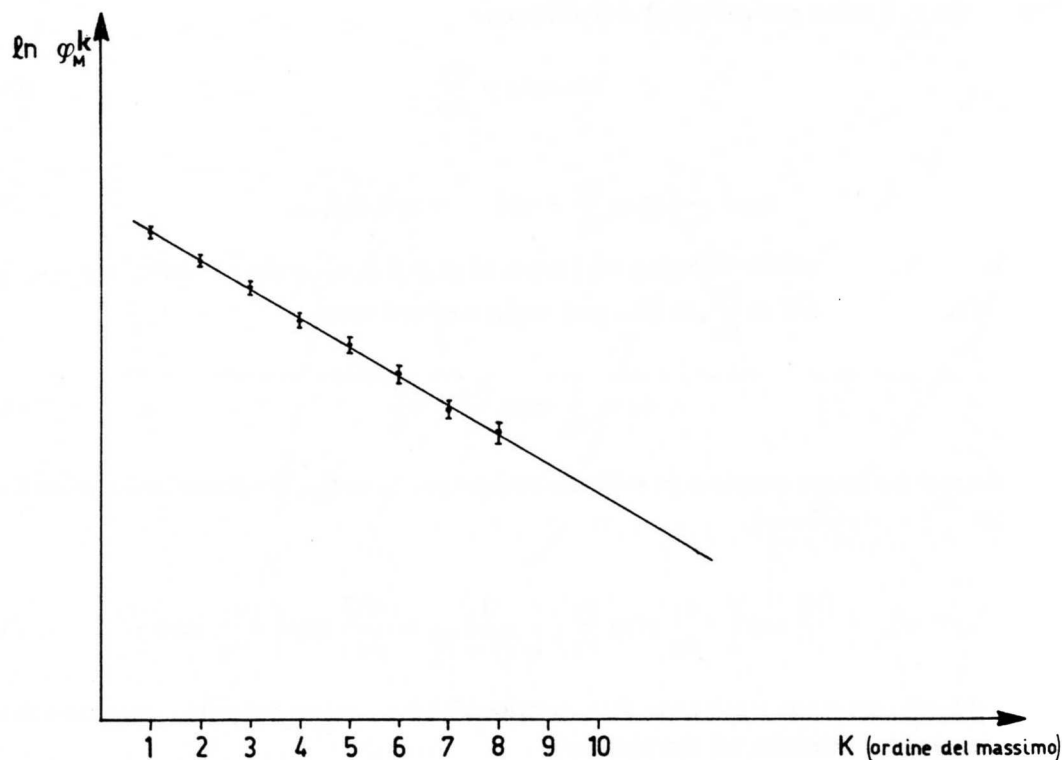


Fig. VI.8

Tuttavia se si considera il rapporto di due massimi (o minimi) successivi, in base alla (33), si ha:

$$\frac{\varphi_M^n}{\varphi_M^{n+2}} = \frac{\exp\left(-\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \operatorname{atan} \frac{\sigma_2}{\sigma_1} - n\pi \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)}{\exp\left(-\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \operatorname{atan} \frac{\sigma_2}{\sigma_1} - (n+2)\pi \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)} = \exp\left(2\pi \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right) \quad (\text{VI.36})$$

e facendone il logaritmo, si ottiene:

$$\Lambda = \ln \frac{\varphi_M^n}{\varphi_M^{n+2}} = 2\pi \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \quad (\text{VI.37})$$

Λ è detto *decremento logaritmico* e palesemente non dipende dall'ordine del massimo (o del minimo) considerato. Inoltre, e questo è il fatto più importante, esso dipende solo dal galvanometro

e dalla resistenza del circuito, non certo dalle condizioni iniziali del moto (cioè da Q). Quanto alla sua determinazione, essa si può ottenere misurando, una volta che il galvanometro abbia ricevuto l'impulso di carica, non solo il primo dei massimi, ma anche il secondo e i successivi. Λ si può ricavare semplicemente dal rapporto fra il primo e il secondo massimo; alternativamente, cercando di sfruttare al meglio l'informazione raccolta, si può riportare in grafico il logaritmo dell'ampiezza dei vari massimi successivi in funzione dell'ordine k del massimo (Fig.8; si noti che l'indice k non coincide con l'indice n).

Essendo $\ln \varphi_M^k = \ln \frac{GQ}{\mathcal{J}\omega_0} - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \operatorname{atan} \frac{\sigma_2}{\sigma_1} - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} 2\pi(k-1) = \operatorname{cost} - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} 2\pi k$, la pendenza della retta è data da $\Lambda = 2\pi \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$, che può determinarsi tramite un minimo di χ^2 . Supponendo di avere ottenuto Λ dall'andamento sperimentale, possiamo riscrivere la (35) come:

$$Q = K_B^0 \exp\left(\frac{\Lambda}{2\pi} \operatorname{atan} \frac{2\pi}{\Lambda}\right) \cdot \varphi_M^0 \quad (\text{VI.38})$$

In genere, di un dato galvanometro balistico si conosce K_B^0 e quindi, misurato Λ , si può risalire a K_B . Viceversa, tarare un galvanometro balistico vuol dire misurare, in presenza di un certo smorzamento, K_B e Λ e quindi determinare K_B^0 . La relazione (38) nel caso in cui lo smorzamento sia assai piccolo, assume una forma più semplice: in questa ipotesi infatti il rapporto fra due massimi successivi è vicino a 1 e pertanto $\Lambda \ll 1$. Conseguentemente

$$\exp\left(\frac{\Lambda}{2\pi} \operatorname{atan} \frac{2\pi}{\Lambda}\right) \rightarrow \exp\left(\frac{\Lambda}{2\pi} \frac{\pi}{2}\right) = \exp\left(\frac{\Lambda}{4}\right) \approx 1 + \frac{\Lambda}{4} \quad (\text{VI.39})$$

Inoltre, essendo $\Lambda \ll 1$, $\Lambda = \ln \frac{\varphi_M^0}{\varphi_M^2} = \ln \left(\frac{\varphi_M^2 + \varphi_M^0 - \varphi_M^2}{\varphi_M^2}\right) = \ln \left(1 + \frac{\varphi_M^0 - \varphi_M^2}{\varphi_M^2}\right) \approx \frac{\varphi_M^0 - \varphi_M^2}{\varphi_M^0}$ e si trova

$$Q \approx K_B^0 \left(1 + \frac{\varphi_M^0 - \varphi_M^2}{4\varphi_M^0}\right) \varphi_M^0 = K_B^0 \left(\varphi_M^0 + \frac{\varphi_M^0 - \varphi_M^2}{4}\right) \quad (\text{VI.40})$$

Una approssimazione ancor migliore si può ottenere sostituendo, al posto di $\exp(\Lambda/4)$, $4\sqrt{\frac{\varphi_M^0}{\varphi_M^2}}$; in ogni caso, queste formule sono sicuramente più facili da maneggiarsi dell'espressione esatta (38); soprattutto per quanto riguarda il calcolo della propagazione dell'errore può essere molto comodo usare la (40) anziché la (38); l'approssimazione che si compie così nel calcolare l'errore è in genere più che buona anche in quei casi dove l'approssimazione che si commetterebbe nell'usarla per calcolare Q sarebbe troppo grossolana.

Per ora abbiamo considerato solo i casi in cui lo smorzamento è finito, ma comunque abbastanza piccolo da garantire un moto oscillatorio; ciò non significa che il galvanometro balistico non si possa usare anche in condizioni critiche (o addirittura per $R < R_c$); così facendo però, la sensibilità di misura si riduce, anche se ci si guadagna in tempo di misura, a causa del molto più rapido ritorno a zero. Qualora la resistenza sia quella critica, potremo trovare la soluzione della (19) come abbiamo fatto nel Cap.II, §3; oppure possiamo prendere la soluzione oscillatoria (29) e farne il limite per $\sigma_2 \rightarrow 0$:

$$\varphi_{crit}(t) = \lim_{\sigma_2 \rightarrow 0} \frac{GQ}{\mathcal{J}\sigma_2} \exp(-\sigma_1 t) \operatorname{sen} \sigma_2 t = \lim_{\sigma_2 \rightarrow 0} \frac{GQ}{\mathcal{J}} \exp(-\sigma_1 t) \frac{1}{\sigma_2} (\sigma_2 t + \dots) = \frac{GQ}{\mathcal{J}} t \cdot \exp(-\sigma_1 t) \quad (\text{VI.41})$$

Riportando la (41) in grafico si trova l'andamento in Fig.9.

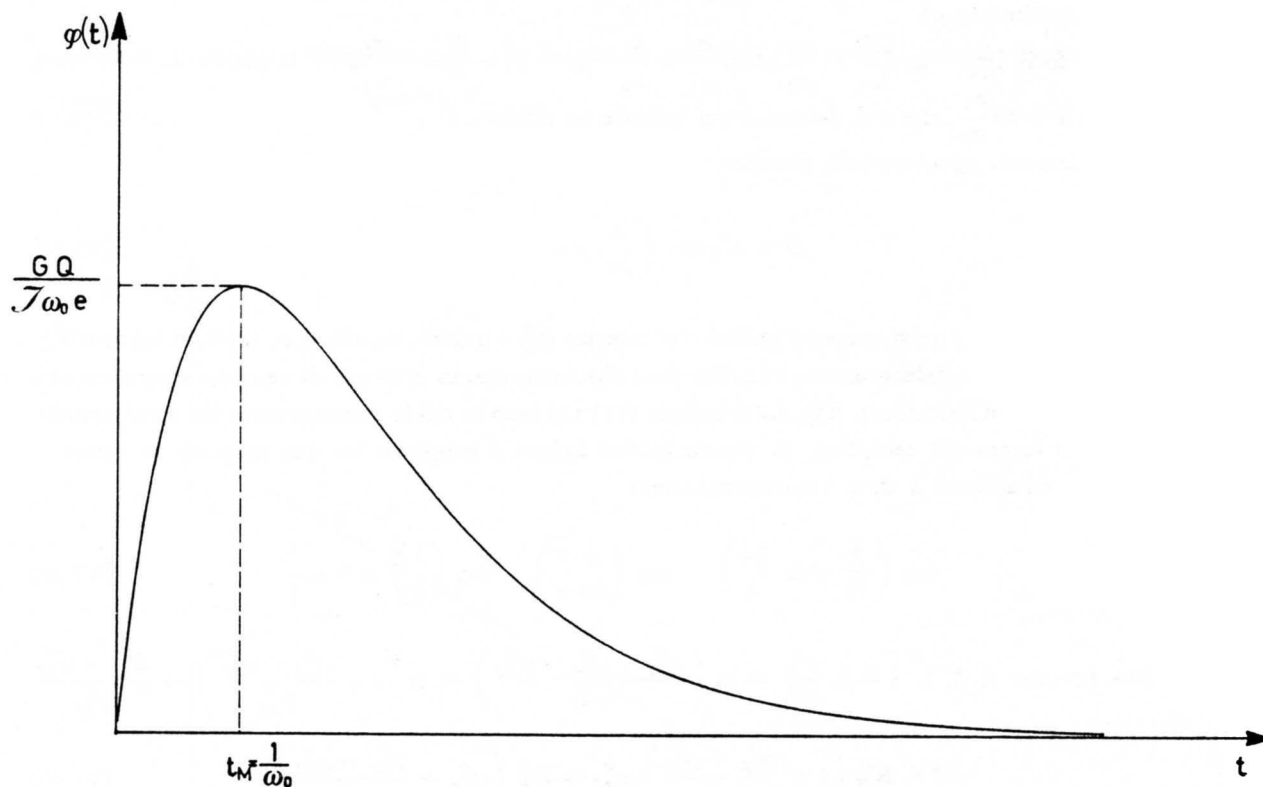


Fig.VI.9

Il massimo, questa volta unico, si ha per $t_M = \frac{1}{\omega_0}$ e il valore del massimo è $\frac{GQ}{\mathcal{J}(\sigma_1)_{crit} \cdot e} = \frac{GQ}{\mathcal{J}\omega_0 \cdot e}$. Pertanto $K_B^{crit} = K_B^0 \cdot e$, cioè la sensibilità nel caso di moto critico è ridotta di un fattore e . Tuttavia non è tanto la ridotta sensibilità a sconsigliare l'utilizzo del galvanometro balistico in condizioni critiche o sottocritiche, quanto il fatto che non è più possibile risalire a K_B anche conoscendo K_B^0 (non è più definibile il decremento logaritmico); occorre allora tarare il galvanometro tutte le volte che si cambia il valore della resistenza su cui esso è chiuso.

6.— Resistenza interna del generatore e risposta del galvanometro balistico

Per ora ci siamo limitati a studiare il caso di un generico impulso di corrente cui è associata una certa carica Q , senza soffermarci particolarmente sulle caratteristiche del generatore (o comunque del dispositivo) che invia questa carica. In pratica i casi che si incontrano più spesso e in cui ha

interesse la misura di carica sono i seguenti: scarica o carica di un condensatore posto in serie al galvanometro, oppure variazioni di flusso di un campo magnetico attraverso una bobina anch'essa collegata in serie al galvanometro. I due circuiti sono schematizzati nella Fig.10 nel caso che il galvanometro sia collegato direttamente, senza shunt:

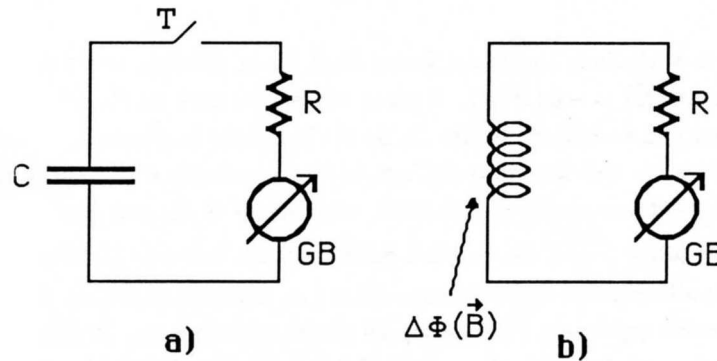


Fig.VI.10

Quanto al circuito della Fig.10a sappiamo (§1) che se si chiude il tasto T e il condensatore è inizialmente carico, la carica accumulata nel condensatore passa in un tempo dell'ordine di $\tau = RC$ attraverso il circuito; se $\tau = RC \ll T$ (periodo del galvanometro) durante la scarica il galvanometro resta fermo, ma acquista, come abbiamo visto nei paragrafi precedenti, una velocità finita. Sappiamo anche che il moto successivo sarà costituito da oscillazioni smorzate, il primo massimo delle quali è legato alla carica Q dalla relazione (35): $Q = K_B \varphi_M^0$. Il moto è smorzato solamente dall'aria; lo smorzamento elettromagnetico è assente poiché il condensatore si comporta come un circuito aperto*: vale a dire nel moto seguente all'eccitazione impulsiva il galvanometro si trova chiuso su un circuito con resistenza praticamente infinita.

La aggiunta di qualunque resistenza r in parallelo al galvanometro comporta una diminuzione dell'ampiezza delle oscillazioni e ciò per due ragioni indipendenti: la prima è che nella fase di scarica, non tutta la carica del condensatore passa nel galvanometro, ma solo la frazione $\frac{r}{r+R}$, in quanto la corrente di scarica segue la solita legge di ripartizione in un parallelo; la seconda ragione è che il galvanometro si trova chiuso su una resistenza totale $R+r$ e la costante balistica risulta aumentata per la presenza dello smorzamento elettrodinamico, assente se $r = \infty$.

Nel caso del circuito di destra (Fig.10b) la situazione è assai differente: L rappresenta un conduttore in forma di numerose spire avvolte concordemente (un po' come la bobina di un galvanometro). Supponiamo che la bobina L sia immersa da un tempo indefinito in un campo magnetico \vec{B} che dia luogo a un certo flusso $\Phi(\vec{B})$ concatenato con le spire della bobina. Al tempo $t = 0$ facciamo variare il flusso di \vec{B} portandolo a 0 in un tempo $\tau \ll T$; ciò si può fare, ad esempio, allontanando la bobina, senza interrompere i collegamenti, e portandola in una zona di campo magnetico nullo. Sappiamo (vedi Cap.II,§1) che durante tutto l'intervallo di tempo in cui il flusso di \vec{B} cambia si genera nel circuito una fem $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$ che invia una corrente $i = \frac{\mathcal{E}}{R}$ nel galvanometro. E' questa la corrente che costituisce l'impulso di eccitazione. Quando l'impulso si è esaurito sarà passata nel

* in realtà si trova che questo è vero solo se $\tau = RC \ll T$; d'altronde questa è anche la condizione richiesta per un corretto funzionamento balistico e quindi ammettiamo che essa sia soddisfatta.

galvanometro una carica Q pari a

$$Q = \int_0^\tau i(t)dt = \frac{-1}{R} \int_0^\tau \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} dt = -\frac{\Delta\Phi(\vec{B})}{R} \quad (\text{VI.42})$$

dove $\Delta\Phi$ rappresenta la variazione totale del flusso di \vec{B} fra la condizione a $t = \tau$ e quella a $t = 0$; se $\Phi(\vec{B}(\tau)) = 0$ allora $\Delta\Phi(\vec{B}) = -\Phi(\vec{B}(0))$. Il moto successivo sarà quello solito del galvanometro balistico, chiuso però su una resistenza totale R . Se ci chiediamo in questo caso se si ha vantaggio, dal punto di vista del valore del massimo dell'ampiezza, a crescere o diminuire di R , dobbiamo, come nel caso precedente, tener conto di due fatti: aumentare R da una parte porta alla diminuzione della carica totale $|Q| = |\frac{\Delta\Phi}{R}|$, da un'altra della costante balistica (tramite la riduzione dello smorzamento) e quindi all'aumento dell'ampiezza del moto, a parità di carica. Per sapere quale dei due effetti prevale, occorre esprimere l'ampiezza del primo massimo φ_M in funzione di R tenendo fissi gli altri parametri fra cui, in particolare, $\Delta\Phi$. Nel caso di $R \geq R_C$ abbiamo (vedi (38))

$$\varphi_M = \frac{1}{K_B^0} \exp\left(-\frac{\Lambda(R)}{2\pi} \operatorname{atan} \frac{2\pi}{\Lambda(R)}\right) \frac{\Delta\Phi}{R} \quad (\text{VI.43})$$

con

$$\Lambda(R) = 2\pi \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 2\pi \frac{C + \frac{G^2}{R}}{\sqrt{|4EJ - (C + \frac{G^2}{R})^2|}} \quad (\text{VI.44})$$

Per $R = R_C$ abbiamo $\Lambda \rightarrow \infty$ e quindi

$$\varphi_M = \frac{1}{K_B^0 \cdot e} \frac{\Delta\Phi}{R_C} \quad (\text{VI.45})$$

Per $R < R_C$ procedendo come nel §4 per la ricerca della soluzione del moto (questa volta sottocritico), troviamo per il massimo:

$$\varphi_M = \frac{1}{K_B^0} \exp\left(-\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \ln \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\omega_0}\right) \frac{\Delta\Phi}{R} \quad (\text{VI.46})$$

Se riportiamo in grafico φ_M in funzione di $\frac{R}{R_C}$ troviamo un andamento del tipo in Fig.11 (smorzamento dell'aria nullo)

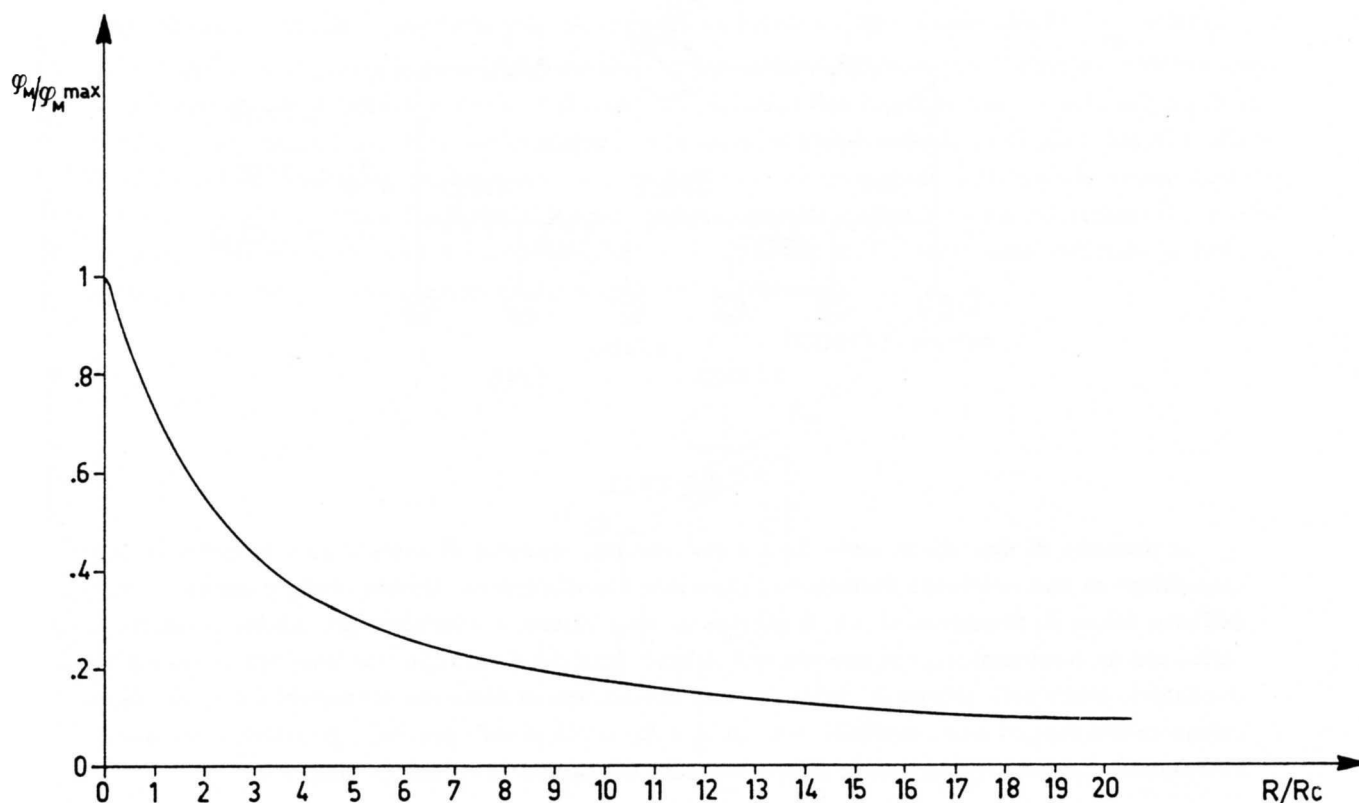


Fig. VI.11

vale a dire che per quanto riguarda l'ampiezza si avrebbe vantaggio a diminuire R . Si nota però che il miglioramento non è particolarmente forte (per $R \rightarrow 0$ il massimo è circa 5 volte più ampio che per $R = 10R_C$) e in genere ciò non ripaga del fatto che per $R \leq R_C$, per ogni misura occorre tarare lo strumento, anche se si conosce K_B^0 e non semplicemente misurare Λ , come invece basta fare quando il moto è oscillatorio. Esiste anche un'altra contropartita a diminuire eccessivamente R (che oltretutto non scenderà mai sotto il valore di $\rho_g + \rho_L$, cioè la serie delle resistenze interne dello strumento e della bobina): la valutazione di $\Delta\Phi$ viene a dipendere da una resistenza (R) che risulta nota con precisione modesta, come inevitabilmente accade quando si tratta della resistenza interna di uno strumento o di una bobina, non fosse altro perché, essendo dovuta a un avvolgimento di rame, dipende non debolmente dalla temperatura.

Concludendo, possiamo affermare che in entrambi i casi di una eccitazione del tipo *generatore di corrente* (condensatore, resistenza interna molto grande) o del tipo *generatore di tensione* (bobina, resistenza interna molto piccola), il funzionamento del galvanometro balistico in regime oscillatorio è conveniente, nel secondo caso principalmente per semplicità nella procedura di taratura.

Nel suo impiego pratico il galvanometro è spesso accoppiato a uno shunt del tipo "universale" che consente l'adeguamento della sensibilità alle specifiche esigenze. Un tipico esempio di complesso *galvanometro balistico - shunt* è mostrato in Fig.12 e si riferisce alla configurazione effettivamente disponibile in laboratorio:

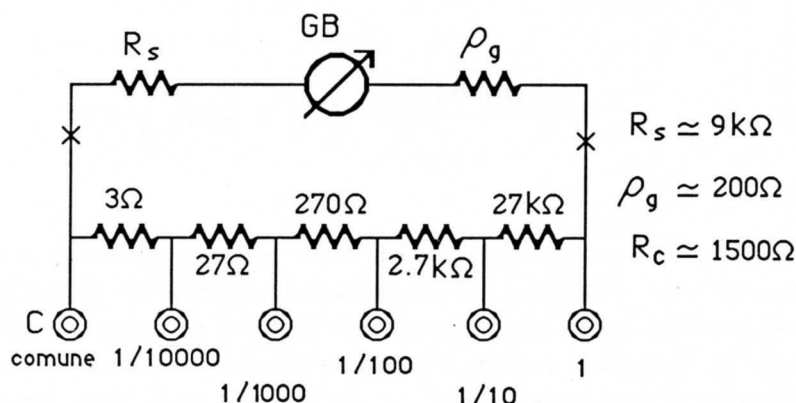


Fig. VI.12

la presenza di una R_S in serie, fissa e così elevata, consente di avere il galvanometro in ogni caso chiuso su una resistenza decisamente superiore a quella critica. Questa configurazione, a causa dell'alto valore di resistenza su cui il galvanometro è chiuso, è senz'altro più adatta a misure di carica con un condensatore, che non con una bobina. Infatti è sì vero che conviene lavorare in regime oscillatorio anche nelle misure di carica con una bobina, ma va detto che converrebbe disporre di un galvanometro magari meno sensibile, ma con ρ_g e R_C le più piccole possibile; giustificheremo questa affermazione quando tratteremo la misura assoluta del campo di induzione magnetica.

7.— *L'approssimazione balistica e gli accorgimenti per rispettarla*

Tutti i calcoli sviluppati fino a qui sono fatti nelle ipotesi che la durata τ dell'impulso di corrente sia così piccola rispetto al periodo del galvanometro T , che il moto si possa studiare con le condizioni iniziali $\dot{\varphi}(0) \neq 0$, $\varphi(0) = 0$. Tutto questo comporta una approssimazione: infatti, dopo il passaggio della carica, φ sarà sì molto prossimo a zero, ma non esattamente nullo. Ciò ha come conseguenza che il massimo del moto successivo φ_M non vale esattamente quanto abbiamo calcolato, ma leggermente meno. Si trova tuttavia che, detta τ la durata dell'impulso di corrente, la differenza fra il massimo "balistico" φ_M^* e quello reale φ_M è un infinitesimo del secondo ordine in $\frac{\tau}{T}$:

$$\varphi_M \approx \varphi_M^* \left(1 - \alpha \frac{\tau^2}{T^2}\right) \quad (\text{VI.47})$$

Il coefficiente α dipende dalla forma dell'impulso e per forme realistiche dell'impulso di corrente $\alpha < 1$. Nell'Appendice A è svolto il calcolo per un impulso di corrente rettangolare di durata τ e per un impulso di tipo esponenziale con costante di tempo τ e stessa carica del precedente.

Il risultato (47) ci dice che l'approssimazione balistica può essere buona anche nel caso in cui $\frac{\tau}{T}$ non è poi molto piccolo; si pensi infatti che se $\frac{\tau}{T} \approx 0.1$, l'ampiezza reale differisce da quella balistica per meno dell'1%. Anche la posizione del massimo risulta spostata (dell'ordine di τ), ma ciò è assolutamente inessenziale per quanto riguarda la misura della carica.

Nonostante che l'effetto sul valore del massimo sia dell'ordine di $\frac{\tau^2}{T^2}$, in molti casi può essere problematico riuscire a soddisfare l'approssimazione balistica. Ricordando che $T = \frac{2\pi}{\sigma_2} \approx 2\pi\sqrt{\frac{\mathcal{J}}{E}}$ si vede che per realizzare galvanometri da usare preferenzialmente in regime balistico conviene avere momenti di inerzia elevati e costanti di richiamo piccole: i due requisiti sono conflittuali fra di loro poiché aumentare \mathcal{J} significa anche aumentare la massa e quindi sollecitare di più il filo di torsione. Molto spesso l'aumento del momento di inerzia è ottenuto montando delle piccole masse, lontane il più possibile dall'asse (vedi Fig.13); ciò comporta una particolare cura nel bilanciamento, poiché piccole dissimmetrie nella disposizione tendono a spostare dall'allineamento verticale la bobina, compromettendo lo scorrimento di questa nel sottile traferro.

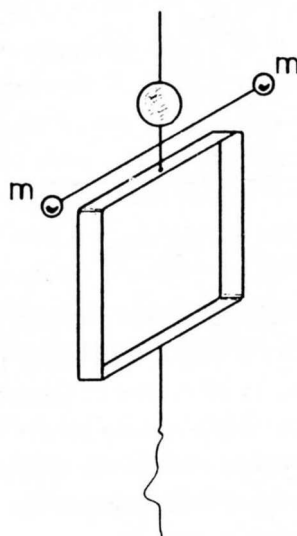


Fig.VI.13

Con accorgimenti di questo tipo sono stati realizzati galvanometri balistici con periodi fino a varie centinaia di secondi. Un'altra particolarità costruttiva di un galvanometro balistico è di possedere un buon isolamento fra i fili dell'avvolgimento: infatti poiché esso funziona con una breve eccitazione di corrente –cui corrisponde però una carica finita– le intensità istantanee possono essere assai elevate, con grosse cadute di tensione ai capi del galvanometro. Per questo l'isolamento deve essere tale da garantire la possibilità di sostenere ddp di svariati ordini di grandezza superiori a quelle che lo stesso strumento deve sostenere quando lavora da misuratore di corrente.

8.— *Taratura di un galvanometro balistico*

Misura di capacità

L'operazione di taratura di un galvanometro usato in condizioni balistiche consiste nella determinazione di K_B e, tramite la misura del decremento logaritmico, di K_B^0 . L'operazione richiede la conoscenza della quantità di carica che passa nel circuito e ciò è ottenuto facendo scaricare sul galvanometro un condensatore noto C_0 a cui è stata applicata una ddp nota V_0 : allora $Q_0 = C_0V_0$ ed è possibile tarare lo strumento. Il circuito che si può utilizzare è quello in Fig.14:

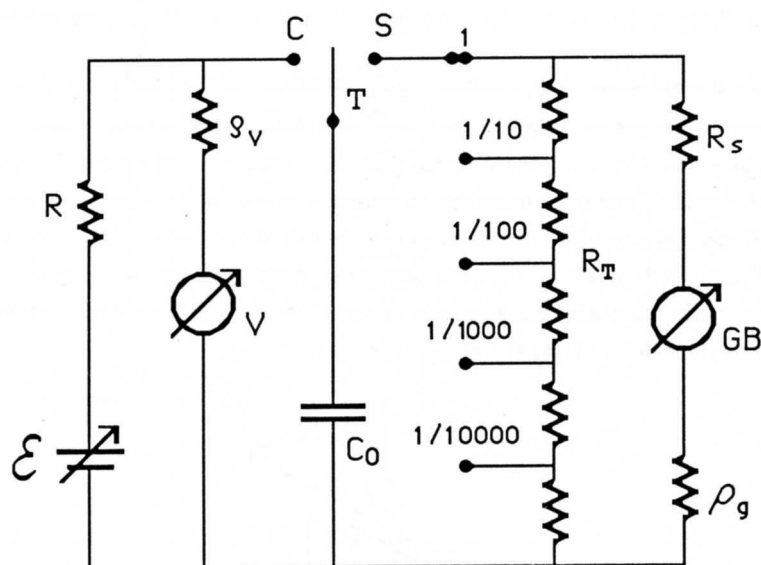


Fig.VI.14

\mathcal{E} è un generatore di fem variabile e può essere ottenuto con un partitore o con un generatore elettronico variabile. Supponiamo che il tasto T sia nella posizione C da un tempo indefinito. Al condensatore sarà quindi applicata la differenza di potenziale V_0 misurata dal voltmetro. Si commuta quindi il tasto nella posizione S. Da questo istante comincia la scarica del condensatore, ed essa avviene con una costante di tempo $\tau = C_0 \cdot R_T \parallel (R_S + \rho_g)$, se, come in figura, lo shunt è collegato in posizione 1 ($R_T \parallel (R_S + \rho_g) \approx 7K\Omega$ nel caso del laboratorio). Se C_0 è dell'ordine del μF , $\tau \approx 7 \cdot 10^{-3} s$ e in qualche centesimo di secondo, ovvero in un intervallo di tempo $\ll T (\approx 6s)$ praticamente tutta la carica sarà passata nel galvanometro. In realtà solo la frazione $\frac{R_T}{R_S + R_T + \rho_g}$ della carica totale sarà passata nel galvanometro; tuttavia se consideriamo lo shunt e il galvanometro come un tutt'uno, possiamo tarare lo strumento complessivo, schematizzandolo come in Fig.15 con R'_g dipendente dal rapporto di shunt adottato.

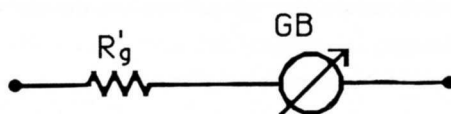


Fig.VI.15

Del moto successivo del galvanometro registreremo il primo e il secondo massimo e magari anche i successivi, almeno fino a che l'errore di lettura non sarà diventato così grande da rendere non significativa la misura. Avremo quindi (vedi (38)):

$$Q_0 = C_0 V_0 = K_B \varphi_M = K_B^0 \exp\left(\frac{\Lambda}{2\pi} \operatorname{atan} \frac{2\pi}{\Lambda}\right) \varphi_M$$

dove Λ sarà stato determinato o dal rapporto dei primi due massimi o da un fit dei vari massimi in funzione del loro ordine; φ_M è il valore del primo massimo. Se ci interessa K_B^0 sfrutteremo questa informazione, altrimenti, se nel seguito useremo il galvanometro con lo stesso smorzamento, sarà sufficiente conoscere K_B . Finché si ecciterà il galvanometro con questo metodo, cioè scaricando un condensatore e adoperando lo stesso shunt (indipendentemente dal rapporto in uso), avremo davvero sempre lo stesso smorzamento poiché il condensatore contribuisce con una resistenza infinita e la resistenza su cui è chiuso il galvanometro è sempre data da $\rho_g + R_S + R_T$.

Se la lettura della deflessione della bobina viene fatta con il metodo della leva ottica, detto l_M lo spostamento massimo sulla scala, avremo una relazione del tipo $Q_0 = k_B l_M$ dove k_B è legato a K_B da una semplice legge di proporzionalità finché l'angolo è piccolo. Altrimenti occorrerà usare la relazione esatta $Q_0 = k_B \cdot d \operatorname{atan} \frac{l_M}{d}$ dove d è la distanza fra lo strumento e la scala graduata su cui si legge l_M . Si veda a questo proposito quanto detto nel Cap.II,§2. Poiché la determinazione del massimo è affetta da un errore di lettura che può essere relativamente grosso e poiché in letture diverse tale errore interviene indipendentemente dai precedenti, può convenire, dato un certo valore della tensione V_0 , ripetere la misura varie volte e prendere poi la *media del campione* l_{M_i} e come errore la *standard deviation* o 3 volte la standard deviation se vogliamo considerare gli errori massimi. Per ridurre i tempi morti fra una misura e l'altra, cioè per abbreviare il tempo che il galvanometro impiega per tornare nell'origine e fermarsi, esiste sulla scatola dello shunt un contatto che cortocircuita la resistenza R_T dello shunt e massimizza lo smorzamento.

Ripetendo la misura per vari valori di V_0 , si può anche verificare la costanza di K_B , ovvero la linearità dello strumento; questo controllo si può fare indipendentemente dalla precisione con cui è noto C_0 che è sempre lo stesso; la accuratezza di questa misura dipenderà però dalla precisione su V_0 e dall'errore di lettura.

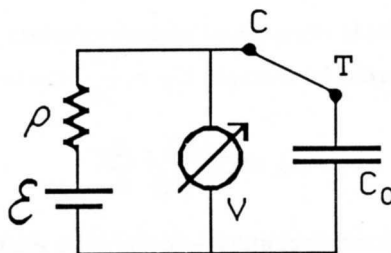


Fig.VI.16

Una domanda che è ragionevole porsi riguarda la durata dell'intervallo di tempo durante il quale il tasto deve essere lasciato nella posizione C per essere sicuri che il condensatore si sia caricato. Una prima risposta viene dalla misura stessa di V_0 : quando l'indicazione del voltmetro è stazionaria, evidentemente la carica su C_0 ha raggiunto il valore di regime. D'altronde la costante di tempo di carica τ_c è facilmente trovata tramite l'equivalente di Thévenin del circuito di carica (lo strumento

disegnato in Fig.16 rappresenta un voltmetro ideale con resistenza infinita, vedi anche Fig.14):

$$\begin{cases} \rho = \frac{R\rho_V}{R + \rho_V} \\ \mathcal{E}_{Th} = \mathcal{E} \frac{\rho_V}{R + \rho_V} \end{cases} \quad (\text{VI.48})$$

Ricordando le conclusioni del §2 si trova che $\tau_c = \rho C_0 \approx RC_0$ poiché in genere $\rho_V \gg R$. Il motivo della presenza di R è che all'istante iniziale (quando cioè si chiude il tasto su C) la corrente vale: $i(0) = \frac{\mathcal{E}}{R}$, limitata proprio dalla presenza di una R finita. In assenza di R la corrente iniziale assumerebbe valori estremamente elevati (nominalmente ∞) che rischierebbero di danneggiare il contatto C del tasto.

Supponendo ora di avere misurato K_B (o k_B) e K_B^0 , possiamo utilizzare il galvanometro per determinare la capacità C_X di un condensatore: infatti basterà sostituire C_0 con C_X e misurare la prima elongazione, magari variando o \mathcal{E} o i rapporti di shunt o entrambi per ottenere una elongazione sufficientemente ampia. Detta φ_{MX} l'elongazione corrispondente al primo massimo (risultato di una media su varie misure) avremo (se il rapporto di shunt è 1 in entrambi i casi):

$$VC_X = K_B \varphi_{MX} \quad (\text{VI.49})$$

con

$$K_B = \frac{C_0 V_0}{\varphi_M} \quad (\text{VI.50})$$

e quindi

$$C_X = \frac{C_0 V_0}{V} \frac{\varphi_{MX}}{\varphi_M} \quad (\text{VI.51})$$

Se i valori di C_X e C_0 lo consentono e abbiamo avuto l'accortezza di usare lo stesso valore di V in entrambi i casi (non abbiamo cioè mosso il controllo che regola la tensione \mathcal{E} e abbiamo sufficienti garanzie sulla stabilità del generatore), possiamo eliminare ogni dipendenza dalla tensione:

$$C_X = C_0 \frac{\varphi_{MX}}{\varphi_M} \quad (\text{VI.52})$$

Se questa condizione, con entrambe le elongazioni ragionevolmente ampie, si riesce a soddisfare solo per differenti rapporti di shunt (perché ad esempio $C_X > \frac{C_0}{10}$) dovremo tenerne esplicitamente conto:

$$C_X = C_0 \frac{\varphi_{MX}}{\varphi_M} \frac{S_0}{S_X} \quad (\text{VI.53})$$

dove S_0 e S_X rappresentano i rapporti di shunt impiegati nella misura con C_0 e C_X rispettivamente (se $C_0 = 1\mu F$, $C_X \approx 10\mu F$ converrà fare $S_0 = 1$ e $S_X = \frac{1}{10}$).

La definizione dei parametri ottimali della misura in genere non è immediata, anzi si tratterà di fare preventivamente delle misure "di sondaggio" volte a determinare almeno approssimativamente C_X ; solo a questo punto si potrà decidere la migliore misura di C_X tramite la scelta dei rapporti di shunt e della ddp \mathcal{E} .

9.— Misura di resistenze di valore elevato

Resistenza di fuga

Supponiamo di dover misurare il valore di una resistenza R_X di valore elevato. Una valutazione di R_X si può ottenere col circuito di Fig.17:

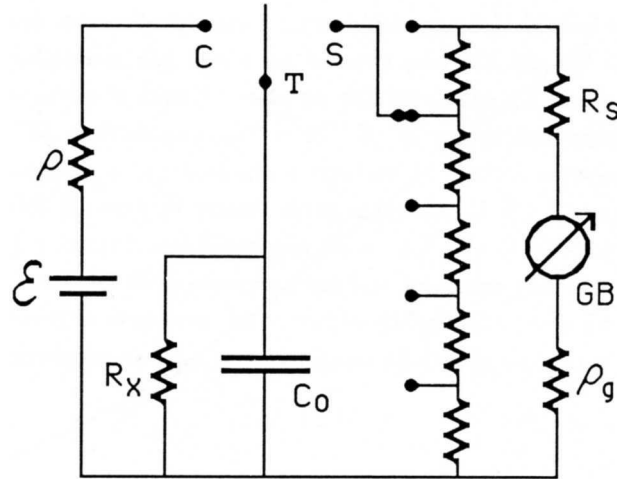


Fig.VI.17

La resistenza R_X è posta in parallelo a un condensatore di capacità nota C_0 , in modo che $\tau = R_X C_0$ sia almeno dell'ordine di qualche decina di secondi. Poniamo il tasto in C; in un tempo pari a qualche costante di tempo $\tau_C \approx \rho C_0$ (se $R_X \gg \rho$) il condensatore si carica fino a possedere una carica pari a

$$C_0 \cdot V = Q_0 \quad (\text{VI.54})$$

dove

$$V = \frac{\mathcal{E} R_X}{R_X + \rho} \approx \mathcal{E} \quad (\text{VI.55})$$

Se ora commutiamo in un tempo $\theta \ll \tau$ il tasto dalla posizione C alla posizione S, la carica Q_0 viene misurata dal galvanometro; senza particolari accorgimenti il tempo θ che occorre per effettuare la commutazione manuale del pulsante, risulta $< 10^{-1} s$. Chiamiamo l_{M0} il primo massimo del moto successivo del galvanometro balistico.

Riportiamo quindi in C il tasto e successivamente, quando il galvanometro si sarà fermato, apriamo il contatto C e lasciamo ora il tasto nella posizione intermedia I per un tempo t_1 , con il condensatore C_0 e la resistenza R_X isolati dal resto del circuito. A partire dall'istante $t = 0$ in cui si interrompe il collegamento in C, il condensatore inizia a scaricarsi attraverso R_X con la seguente legge:

$$Q(t) = Q_0 \exp\left(\frac{-t}{R_X C_0}\right) \quad (\text{VI.56})$$

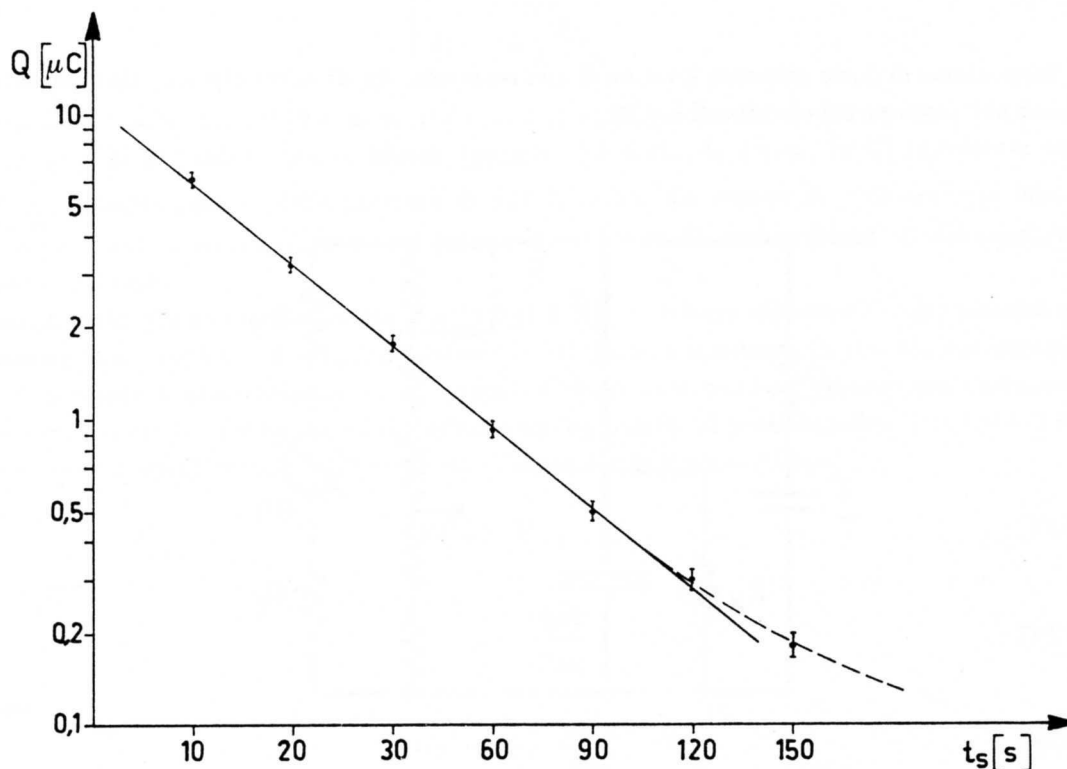


Fig. VI.18

Al tempo t_1 portiamo il tasto in S; nel galvanometro passerà una carica $Q_1 = Q_0 \exp\left(\frac{-t_1}{R_X C_0}\right)$ alla quale corrisponderà una elongazione massima l_{M1} . Si trova così:

$$\frac{l_{M0}}{l_{M1}} = \exp\left(\frac{t_1}{R_X C_0}\right) \quad (\text{VI.57})$$

quindi

$$R_X = \frac{1}{C_0} \frac{t_1}{\ln \frac{l_{M0}}{l_{M1}}} \quad (\text{VI.58})$$

Anche in questo caso è opportuno ripetere la misura varie volte per ridurre l'indeterminazione di t_1 , di l_{M0} e di l_{M1} .

Per diminuire l'errore su t_1 conviene anche operare con t_1 più grande possibile, ma ciò significa che $l_{M1} \ll l_{M0}$ e quindi una elongazione molto piccola con conseguenti grossi errori relativi di lettura. L'uso dello shunt consente di ovviare a questo problema: la misura di Q_0 si può fare, aumentando opportunamente \mathcal{E} , con lo shunt posto su un rapporto < 1 , mentre la lettura al tempo t_1 può effettuarsi riducendo la partizione dello shunt. Con questo semplice metodo è possibile prendere misure per vari valori di tempo di scarica t_S e riportare poi in un grafico $Q(t_S)$ in funzione di t_S (Fig. 18). E' utile usare una carta semilogaritmica (asse Y logaritmico). La pendenza della retta migliore che passa per i punti sperimentali dà: $-\tau = -R_X C_0$ e consente la migliore determinazione di R_X fra tutte quelle ottenibili dai dati sperimentali. Se la curva segue il decadimento per varie

costanti di tempo e se il condensatore non è di ottima qualità, si potrà anche osservare una deviazione dall'andamento previsto (curva tratteggiata in figura). Esso corrisponde al fenomeno della *ritenzione di carica* da parte del dielettrico fra le armature. Tale fenomeno dipende dalla qualità del condensatore e quanto più è piccolo l'effetto, tanto più il condensatore sarà adatto a misure di carica di alta precisione.

Guardando più in dettaglio il circuito di Fig.17 ci si accorge che la resistenza effettivamente misurata non è R_X , ma il parallelo di R_X e la resistenza di fuga del condensatore C_0 : infatti ogni condensatore reale usato in continua può schematizzarsi come un condensatore ideale di capacità C_0 con in parallelo una resistenza R_f (generalmente molto grande). L'origine fisica di questa resistenza va ricercata sia nel dielettrico, che non è un isolante perfetto, sia nel fatto che delle perdite possono anche avvenire tramite le superfici esterne dell'involucro del condensatore. Per condensatori commerciali $R_f > 10^9\Omega$, tipicamente $10^{10} - 10^{11}\Omega$. E' opportuno quindi, dopo aver misurato la resistenza posta in parallelo a C_0 , toglierla e ripetere la misura seguendo una analoga procedura per stimare R_f . Poiché R_f sarà in genere assai maggiore di R_X i tempi di attesa saranno scelti corrispondentemente più lunghi; se ad esempio $C_0 = 1\mu F$, $R_f = 10^9\Omega$, $\tau = 10^3 s$ e quindi per avere una riduzione di ampiezza del 50% occorre attendere qualcosa come un quarto d'ora. D'altronde per tempi di scarica brevi le ampiezze del massimo differiscono poco da quelle fatte con tempo di scarica $t = 0$ e conseguentemente le misure risultano affette da un errore molto grosso. Infatti da:

$$R_f = \frac{t_1}{C_0} \frac{1}{\ln \frac{l_{M0}}{l_{M1}}} \quad (\text{VI.59})$$

si ha

$$\frac{\Delta R_f}{R_f} = \frac{\Delta t_1}{t_1} + \frac{\Delta C_0}{C_0} + \frac{\frac{\Delta l_{M0}}{l_{M0}} + \frac{\Delta l_{M1}}{l_{M1}}}{\ln \frac{l_{M0}}{l_{M1}}} \quad (\text{VI.60})$$

e se $\frac{l_{M0}}{l_{M1}} \approx 1$ avremo un forte innalzamento del contributo di errore associato alle elongazioni. Per misurare grosse R_f con $R_f C_0 \gg 100s$ conviene, anziché procedere come sopra, misurare direttamente la quantità di carica che serve a ripristinare il valore di carica posseduta dal condensatore per $t = 0$ (vedi Fig.19)

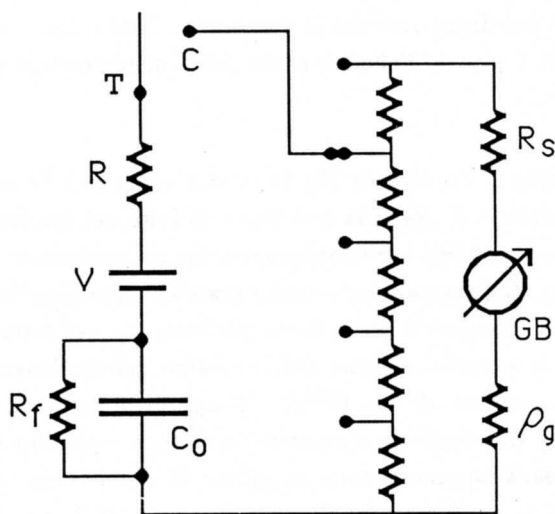


Fig.VI.19

Si carica il condensatore con il tasto T in C; avendo cura di usare una ddp V sufficientemente elevata, si fa la misura con un rapporto di shunt $S_0 = \frac{1}{10}$ o $\frac{1}{100}$. Si misura così Q_0 (in quanto il tempo di carica sarà $\ll T$) e varrà:

$$Q_0 = k_B \cdot l_{M0} \cdot \frac{1}{S_0} \quad (\text{VI.61})$$

Si apre quindi il contatto in C, si fa partire il cronometro; si cambia il rapporto di shunt ponendo il galvanometro nella massima sensibilità ($S_f = 1$). Dopo un tempo di attesa t , durante il quale la carica su C_0 diminuisce di

$$\Delta Q = Q_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{R_f C_0}\right) \right] \quad (\text{VI.62})$$

si ripristina il collegamento C; nel galvanometro passa la carica ΔQ e la prima elongazione ci darà

$$\Delta Q = k_B \cdot l_{M1} \frac{1}{S_f} \quad (\text{VI.63})$$

Combinando le due informazioni abbiamo:

$$\frac{l_{M0} S_f}{l_{M1} S_0} = \frac{1}{1 - \exp\left(-\frac{t}{R_f C_0}\right)} \quad (\text{VI.64})$$

e quindi

$$R_f = \frac{t}{C_0} \frac{1}{\ln \frac{l_{M0} S_0}{l_{M0} - l_{M1} \frac{S_0}{S_f}}} \quad (\text{VI.65})$$

È facile rendersi conto che in questo caso gli errori di lettura su l_{M0} e l_{M1} non compromettono particolarmente la misura di R_f . Infatti se $t \ll R_f C_0$, come in genere sarà, altrimenti avremmo adoperato l'altro metodo, la (64) ci dice che:

$$\frac{l_{M1} S_0}{S_f l_{M0}} \approx \frac{t}{R_f C_0} \quad (\text{VI.66})$$

e quindi

$$R_f \approx \frac{t}{C_0} \frac{l_{M0}}{l_{M1}} \frac{S_f}{S_0} \quad (\text{VI.67})$$

Abbiamo così

$$\frac{\Delta R_f}{R_f} = \frac{\Delta t}{t} + \frac{\Delta C_0}{C_0} + \frac{\Delta l_{M0}}{l_{M0}} + \frac{\Delta l_{M1}}{l_{M1}} + \frac{\Delta S_f}{S_f} + \frac{\Delta S_0}{S_0}$$

senza alcun particolare innalzamento degli errori relativi su l_{M0} e l_{M1} .

10. – Misure di forza elettromotrice con grosse resistenze in serie

Se abbiamo un generatore di forza elettromotrice \mathcal{E} con una resistenza in serie ρ , possiamo determinare \mathcal{E} caricando un condensatore C_0 e misurando poi $Q_\infty = \mathcal{E}C_0$ col galvanometro balistico. Il simbolo Q_∞ sta a ricordare che il tempo di carica t_c dovrà essere $\gg \rho C_0$. Si tratta cioè di una misura in tutto e per tutto simile a quella descritta nel §8. Se poi la resistenza ρ è sufficientemente elevata, si può scegliere C_0 in modo tale che $\tau = \rho C_0$ cada nel campo delle decine di secondi o più e per avere una discreta misura di ρ si procede così: anziché caricare C_0 per un tempo $t_c \gg \tau$ fino a Q_∞ , lo si carica per tempi confrontabili con τ e poi si scarica C_0 sul galvanometro balistico. Riportando in grafico $\ln(Q_\infty - Q(t_c))$ si ha una retta di pendenza $-1/\rho C_0$ e quindi si può risalire a ρ (vedi Fig.20).

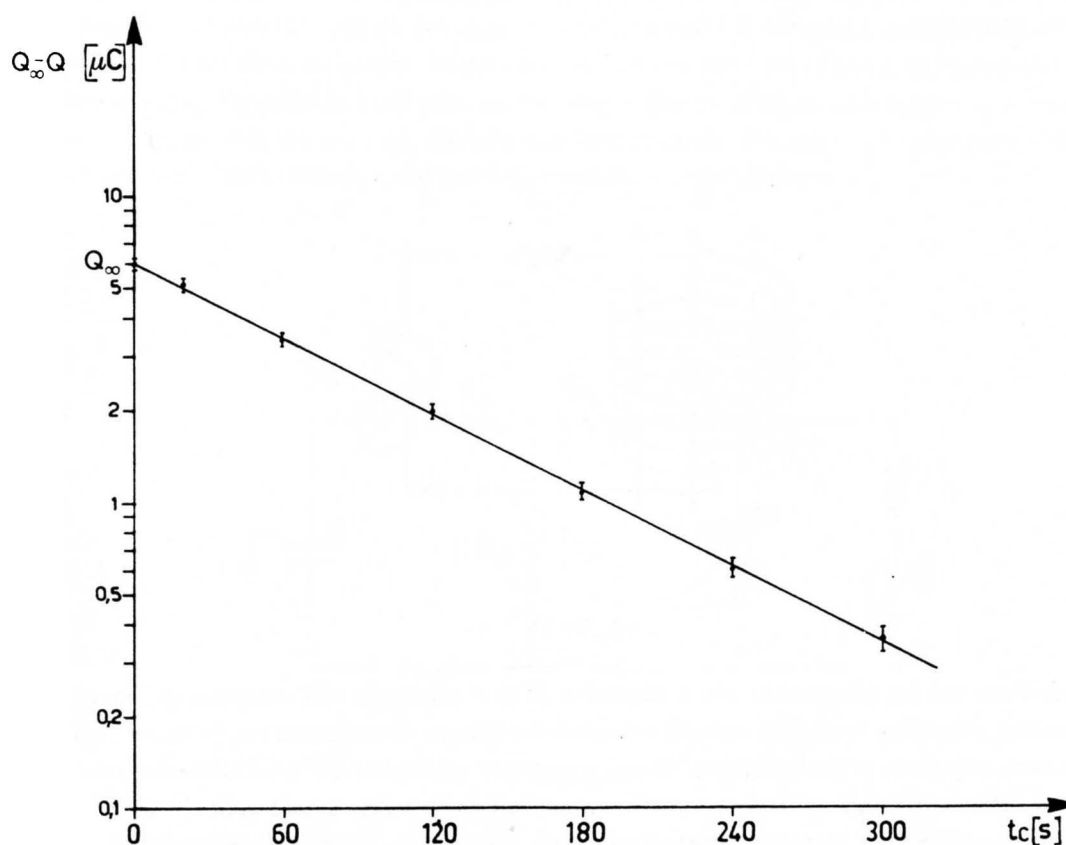


Fig. VI.20

11.— Misura assoluta del campo di induzione magnetica

Supponiamo di voler misurare il campo di induzione magnetica \vec{B} presente in una regione limitata dello spazio, per esempio fra le espansioni polari di un magnete. Una sonda costituita da numerose spire di filo di rame sottile avvolte concordemente su un supporto di geometria nota (*sonda di Felici*, dal nome del suo ideatore) e un galvanometro balistico consentono una misura assoluta di \vec{B} . Infatti (vedi Fig.21) detta S la superficie di una spira e n il numero delle spire, il flusso $\Phi(\vec{B})$ concatenato con la bobina, supponendo \vec{B} omogeneo, vale: $\Phi(\vec{B}) = nSB \cos \theta$ dove θ è l'angolo fra \vec{B} e la normale alle spire, ammesso che le spire siano piane e parallele fra loro. Supponendo di poter fare in modo che $\theta = 0$, abbiamo

$$\Phi(\vec{B}) = nSB \quad (\text{VI.68})$$

Ammettiamo che la sonda si trovi in questa configurazione da un tempo sufficientemente lungo col galvanometro fermo nell'origine, ed estraiamo la sonda dalle espansioni polari portandola in una zona di campo residuo $|\vec{B}_r| \ll |\vec{B}|$: abbiamo allora un cambiamento del flusso $|\Delta\Phi| \approx nSB$. Questo, come sappiamo, provoca nel circuito il passaggio di una carica $Q = \frac{\Delta\Phi}{R}$ e se la variazione di $\Delta\Phi$ è avvenuta in un tempo $\tau \ll T$, allora la prima elongazione del galvanometro varrà:

$$l_M = \frac{\Delta\Phi}{R} \frac{1}{k_B^0 \exp\left(\frac{\Lambda}{2\pi} \operatorname{atan} \frac{2\pi}{\Lambda}\right)} \quad (\text{VI.69})$$

nell'ipotesi che R sia $> R_c$. Come al solito Λ sarà determinato sperimentalmente in base alle elongazioni successive.

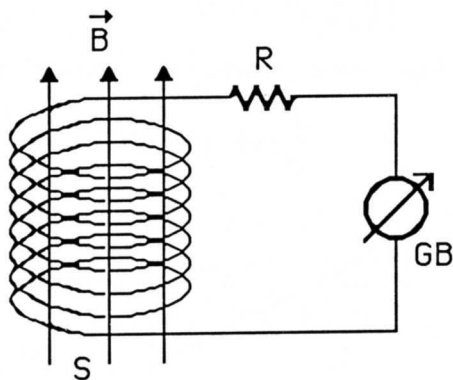


Fig.VI.21

Come detto nel §6, nonostante che a diminuire R ci si guadagni nell'ampiezza del moto, altre considerazioni, prima fra le quali la necessità di poter facilmente determinare k_B , portano a scegliere una resistenza superiore a quella critica. Occorre pertanto conoscere Λ e possibilmente con piccolo errore. Ciò richiede che almeno il secondo massimo sia sufficientemente ampio in modo che l'errore di lettura non ne pregiudichi la accurata determinazione. Uno studio dettagliato del problema mostra

che per ottimizzare la misura di $\Delta\Phi$, cioè minimizzare l'errore relativo su $\Delta\Phi$, occorre scegliere $R \approx 4R_c$ e dedurre Λ dall'ampiezza di almeno 3 o 4 massimi successivi tramite il *fit* del loro andamento; comunque, anche prendendo solo il secondo massimo, la condizione ottimale per R è sempre $R \approx 4R_c$, anche se l'errore su Λ necessariamente cresce. Pertanto se ci chiediamo quale è l'avvolgimento ottimale per un galvanometro balistico usato in questo modo troviamo, in base alla (69) e ricordando che $k_B^0 \propto \frac{1}{\sqrt{\rho_g}}$, $R_c \propto \rho_g$ (ρ_g è la resistenza dell'avvolgimento) che si ha una ampiezza del primo massimo tanto più grande quanto più ρ_g è piccola: $l_M \propto \frac{1}{\sqrt{\rho_g}}$. La precisione della determinazione di $|\vec{B}|$

$$B = \frac{l_M \cdot R}{nS} k_B^0 \exp\left(\frac{\Lambda}{2\pi} \operatorname{atan} \frac{2\pi}{\Lambda}\right) \quad (\text{VI.70})$$

dipende, oltre che dalla precisione di l_M e di Λ , anche da quella di S . Anzi non di rado se S è piccola (alcuni cm^2) come è necessario per avere una informazione la più puntuale possibile su B , ΔS può essere l'errore predominante.

12. — Determinazione dei parametri di un galvanometro

Riportiamo qui alcuni dei metodi per la misura della resistenza interna, della costante reometrica e della resistenza critica di un galvanometro; il valore di queste grandezze insieme a quello della costante balistica a smorzamento nullo K_B^0 (oppure del periodo T dello strumento, sempre in condizioni di smorzamento nullo) definiscono completamente il comportamento del galvanometro. Quanto alla misura della resistenza critica, essa si può compiere eccitando il galvanometro (balisticamente o no) e, variando la resistenza su cui esso è chiuso, studiandone il ritorno a zero oppure il raggiungimento dell'asintoto, se si eccita con una corrente costante. La resistenza critica R_c è individuata come limite inferiore del moto sovracritico cioè oscillatorio.

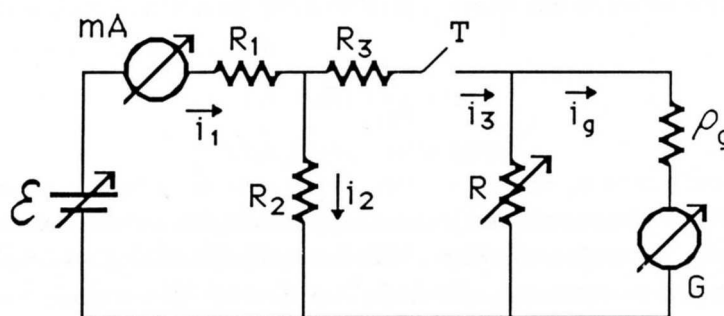


Fig. VI.22

Con riferimento alla Fig.22, essendo $R_3 \gg R_2$ per avere una grossa ripartizione della corrente ($i_3 \ll i_2$), si può eccitare il galvanometro chiudendo T per un istante e poi riaprendolo: il ritorno a

zero avverrà in modo oscillatorio se $R + \rho_g > R_c$; variando R si determinerà R_c . Tale determinazione non sarà mai particolarmente precisa, ma d'altra parte la conoscenza di R_c — sia perdonato il gioco di parole — non è mai critica per la determinazione delle grandezze (i e q) che un galvanometro consente di misurare.

Quanto alla determinazione della costante reometrica si può procedere usando il circuito di Fig.22 (con R soppressa per semplicità e T chiuso), misurando i_1 ; note R_3 e R_2 si può risalire a $i_3 = i_g$. La deflessione a regime l_r sarà data da:

$$l_r = \frac{i_3}{k_r} \quad (\text{VI.71})$$

Sappiamo che per la misura di k_r valgono precauzioni simili a quelle per k_B ; le correzioni sono necessarie se l'angolo corrispondente a l_r non è abbastanza piccolo.

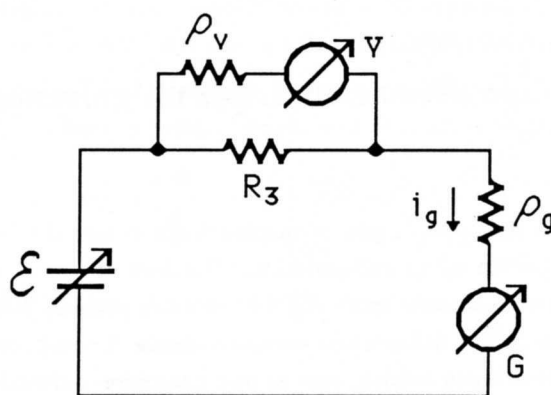


Fig.VI.23

Alternativamente a questo metodo, se R_3 è un buon resistore campione potremo misurare la ddp ai suoi estremi (vedi Fig.23) e da questa risalire a i_3 e quindi a k_r . Ovviamente la misura deve essere fatta o con un potenziometro e un rivelatore di zero che abbia una $i_{gm} \ll i_3$ o meglio con uno strumento elettronico con resistenza di ingresso o tanto elevata da poter essere trascurata o elevata (ad esempio $10M\Omega$) e nota con una discreta precisione; in quest'ultimo caso avremo

$$i_g = \frac{V}{R_3 \rho_v} (R_3 + \rho_v) \quad (\text{VI.72})$$

La precisione con cui è nota ρ_v non è poi tanto importante se $\rho_v \gg R_3$, come si può facilmente verificare. Si noti che la misura di V non può essere effettuata con un voltmetro analogico; se infatti ρ_v non è sufficientemente grande non sarà possibile limitare la corrente i_3 a valori da dare elongazioni nel campo di misura del galvanometro. Ad esempio se $\mathcal{E} \approx 10^{-1}V$ per avere $i_3 \approx 10^{-6}A$ occorrerà $R_3 \approx 10^5\Omega$. Voltmetri analogici molto sensibili e di pregio hanno al più $10^5\Omega/V$ e conseguentemente, posti sul fondo scala $0.1V$ presenterebbero $\rho_v = 10^4\Omega$, troppo piccola per le esigenze richieste. Quanto alla misura della resistenza interna ρ_g , abbiamo già descritto un metodo che utilizza il Ponte di Wheatstone. Vediamo ora un metodo che può dare risultati anche più precisi e soprattutto è più semplice da realizzare. Si tratta sostanzialmente del circuito precedente con un piccolo cambiamento: in parallelo a ρ_g è posta una resistenza R variabile (Fig.24)

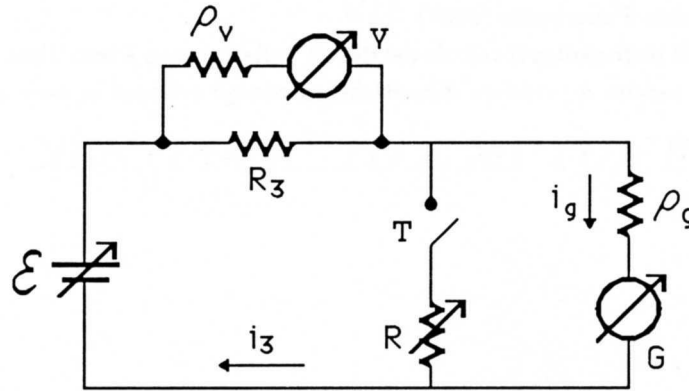


Fig. VI.24

Detta i_g^∞ la corrente con $R = \infty$, cioè con T aperto, varrà:

$$i_g^\infty = \frac{\mathcal{E}}{R_3 \parallel \rho_v + \rho_g} \quad (\text{VI.73})$$

Se poniamo ora R in parallelo a ρ_g , chiudendo il tasto T, otteniamo:

$$i_g = \frac{\mathcal{E}}{R_3 \parallel \rho_v + \rho_g \parallel R} \cdot \frac{R}{\rho_g + R} \quad (\text{VI.74})$$

I valori di i_g^∞ e i_g sono dati dalla lettura delle elongazioni sul galvanometro e non occorre che esso sia tarato, basta essere sicuri della sua linearità; infatti il rapporto delle correnti sarà uguale al rapporto delle elongazioni e varrà:

$$\frac{i_g^\infty}{i_g} = \frac{R_3 \parallel \rho_v + \rho_g \parallel R}{R_3 \parallel \rho_v + \rho_g} \cdot \frac{\rho_g + R}{R} = \frac{1 + \frac{\rho_g \parallel R}{R_3 \parallel \rho_v}}{1 + \frac{\rho_g}{R_3 \parallel \rho_v}} \quad (\text{VI.75})$$

Se $R_3 \parallel \rho_v \gg \rho_g$ e $R = \rho_g$, avremo $\frac{i_g^\infty}{i_g} = 2$ e il metodo prende il nome di *metodo del dimezzamento*. Se la condizione di $i_3 = \text{cost}$, corrispondente a dire e $R_3 \parallel \rho_v \gg \rho_g$, non è soddisfatta occorrerà, dalla (75) ricavare $\rho_g = \rho_g(R, R_3, \rho_v, \frac{i_g^\infty}{i_g})$.

NOTA BIBLIOGRAFICA

Per il galvanometro balistico valgono i suggerimenti dati nella nota del Cap.II. Ai testi di Fisica generale (**FR 71, JA 75, PA 62, FE 63**) si rimanda per le definizioni di capacità e condensatori. Quanto al problema della ritenzione di carica nei dielettrici si può vedere ad esempio (sono trattazioni assai ponderose):

- a) Tareev: "Physics of Dielectric Materials"
MIR (1975)
- b) Zwicker: "Physical Properties of Solid Materials"
Pergamon (1954) Cap. 7

- c) Anderson: "Dielectrics"
Science Paperbacks (1967)

L'Appendice A del testo svolge il calcolo del deficit balistico; non è senz'altro una amena lettura, ma può, se non altro, servire a prendere dimestichezza con gli sviluppi in serie arrestati agli ordini superiori al primo.

VII

I COEFFICIENTI DI AUTO E MUTUA INDUZIONE

1.— Definizioni

Consideriamo due circuiti rigidi e fissi nello spazio, ognuno costituito da una sola maglia, posti a distanza finita l'uno dall'altro. Supponiamo che in uno di essi (1) circoli la corrente i_1 . Essa dà luogo nello spazio circostante a un campo di induzione magnetica $\vec{B}_1(P)$: se il mezzo in cui i due circuiti sono immersi è isotropo, indefinito, omogeneo e caratterizzato da una permeabilità magnetica μ_r , $\vec{B}_1(P)$ vale:

$$\vec{B}_1(P) = \frac{\mu_r \mu_0}{4\pi} \oint_1 \frac{i_1 d\vec{l}_1 \wedge \text{vers } \vec{r}}{r^2} = \frac{\mu_r \mu_0 i_1}{4\pi} \oint_1 \frac{d\vec{l}_1 \wedge \vec{r}}{r^3} \quad (\text{VII.1})$$

\vec{r} rappresenta il vettore che unisce il trattino $d\vec{l}_1$ del circuito considerato e il punto P ; i_1 è stato portato fuori dal segno di integrazione poiché, nell'ipotesi implicitamente ammessa di stazionarietà ($\text{div } \vec{j} = 0$), i_1 , pur potendo dipendere dal tempo, è la stessa istante per istante in tutto il circuito. Questo campo di induzione magnetica si concatena sia con il circuito 1 medesimo che con il circuito 2, dando luogo a due flussi in genere non nulli; tali flussi, nelle ipotesi sopradette riguardo al mezzo circostante, valgono:

$$\begin{cases} \Phi_{11} = \int_{S_1} \vec{B}_1(P) \cdot \vec{n} dS_1 = \frac{\mu_r \mu_0 i_1}{4\pi} \int_{S_1} \left(\oint_1 \frac{d\vec{l}_1 \wedge \vec{r}}{r^3} \right) \cdot \vec{n} dS_1 = i_1 L_1 \\ \Phi_{12} = \int_{S_2} \vec{B}_1(P) \cdot \vec{n} dS_2 = \frac{\mu_r \mu_0 i_1}{4\pi} \int_{S_2} \left(\oint_1 \frac{d\vec{l}_1 \wedge \vec{r}}{r^3} \right) \cdot \vec{n} dS_2 = i_1 L_{12} \end{cases} \quad (\text{VII.2})$$

dove S_1 e S_2 sono due superfici *qualunque* che abbiano come contorno il circuito 1 e 2 rispettivamente. La possibilità di scrivere i due flussi come grandezze proporzionali alla corrente i_1 deriva dal fatto che la *complicata* espressione a fattore della corrente è una costante, qualora la geometria dei due circuiti sia fissata. Se avessimo considerato gli effetti dovuti alla presenza di una corrente i_2 nel circuito 2 avremmo trovato:

$$\begin{cases} \Phi_{22} = i_2 L_2 \\ \Phi_{21} = i_2 L_{21} \end{cases} \quad (\text{VII.3})$$

Nelle ipotesi ammesse è facile dimostrare che $L_{12} = L_{21}$. I coefficienti L_1 , L_2 e $M = L_{12} = L_{21}$ sono detti rispettivamente *coefficienti di autoinduzione* del circuito 1, del circuito 2 e di *mutua induzione* dei circuiti 1 e 2. Si trova che i coefficienti di autoinduzione sono positivi, mentre il segno del coefficiente di mutua induzione dipende dalla scelta del verso positivo delle correnti nei due circuiti.

Supponiamo ora che le correnti i_1 e i_2 siano dipendenti dal tempo; pertanto anche i flussi di induzione magnetica a essi associati varieranno nel tempo e nei due circuiti si osserveranno delle fem indotte del tipo

$$\begin{cases} \mathcal{E}_1 = -\frac{d}{dt}(\Phi_{11} + \Phi_{21}) = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \\ \mathcal{E}_2 = -\frac{d}{dt}(\Phi_{22} + \Phi_{12}) = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} \end{cases} \quad (\text{VII.4})$$

Si osservi che la costanza della geometria e quindi di L_{ij} permette di considerare la sola derivata della corrente; qualora la geometria non fosse fissa si osserverebbero anche variazioni nell'assetto meccanico dei due circuiti (vedi Capp. XI e XX) e avremmo dovuto considerare anche la derivata temporale dei coefficienti di auto e mutua induzione.

La unità di misura dei coefficienti di auto e mutua induzione è lo *Henry* (H) che vale:

$$[H] = \frac{\text{Weber}}{\text{Ampère}} = \frac{\text{Tesla} \cdot \text{m}^2}{\text{Ampère}} = \frac{\text{Volt} \cdot \text{secondo}}{\text{Ampère}}$$

come si può facilmente verificare in base alle relazioni sopra riportate.

2.— *Le induttanze e le induttanze mutue*

Le ipotesi semplificative ammesse nel paragrafo precedente in pratica non si verificano quasi mai e pertanto nella valutazione dei coefficienti di auto e mutua induzione intervengono altri fattori fondamentali, quali ad esempio le proprietà magnetiche (e in particolare ferromagnetiche) dei corpi posti nelle vicinanze dei due circuiti. Si può tuttavia dimostrare con ragionamenti basati sul calcolo dell'energia associata a questi sistemi di correnti, che $L_{12} = L_{21}$ sempre, anche nei casi reali. I coefficienti di autoinduzione e mutua induzione, che si vengono a creare fra circuiti posti nelle vicinanze l'uno dell'altro, sono generalmente piccoli (diciamo dell'ordine dei μH). Come nel caso della resistenza di un ramo che è concentrata in un preciso elemento fisico appositamente costruito (il resistore) e non distribuita uniformemente, o quasi, lungo tutto il ramo, così per il coefficiente di autoinduzione (e mutua induzione) si fa in modo che esso sia concentrato in una particolare porzione del ramo (o di due rami). Tale elemento fisico, nel caso del coefficiente di autoinduzione, è detto *induttore o induttanza o bobina* ed è generalmente realizzato avvolgendo numerose spire di filo conduttore (generalmente rame) su un supporto; quest'ultimo è di materiale ferromagnetico qualora si vogliano ottenere coefficienti di autoinduzione elevati senza aumentare eccessivamente il numero di spire. E' abbastanza ovvio che il coefficiente di autoinduzione cresca all'aumentare del numero n delle spire poiché così facendo si moltiplica per n sia il valore di \vec{B} prodotto dalla corrente che l'area della superficie con cui esso si concatena; altrettanto chiaro è che l'inserzione di materiale ad alta permeabilità magnetica μ_r entro queste spire aumenta il coefficiente di autoinduzione *. Pertanto, nella geometria ora detta (a *solenoide*) L aumenta approssimativamente come il quadrato del numero delle spire e dipende linearmente dalla permeabilità μ_r del supporto (o *nucleo*). Quanto alla realizzazione di coefficienti di mutua induzione si opera similmente, per esempio avvolgendo su uno stesso supporto, spesso di materiale ad alta permeabilità magnetica, due fili conduttori

* anche gli L definiti nelle (2) e (3) crescono proporzionalmente a μ_r , ma il confronto col caso in esame va fatto con molta cautela, date le ipotesi con cui quelle formule erano ricavate.

ognuno costituente un ramo delle due maglie che devono presentare il coefficiente di mutua induzione desiderato; un tipico esempio di circuiti aventi un elevato coefficiente di mutua induzione è costituito dal *trasformatore*.

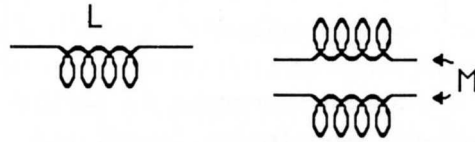


Fig.VII.1

I simboli circuitali per indicare le induttanze e le mutue induttanze sono quelli in Fig.1 se sono avvolte su supporto con $\mu_r \approx 1$ oppure quelli di Fig.2, se il supporto è ad alta permeabilità magnetica.

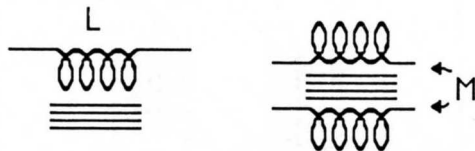


Fig.VII.2

Se due circuiti presentano un coefficiente di mutua induzione finito, ognuno di essi ha un coefficiente di autoinduzione non nullo. Si trova che vale la seguente relazione: $M \leq \sqrt{L_1 L_2}$. Nel caso in cui valga la relazione di uguaglianza (o comunque si sia molto vicini a questa condizione) si dice che fra i due circuiti c'è un accoppiamento *stretto*, in caso contrario l'accoppiamento è detto *lasco*.

Mentre idealmente una induttanza (o una mutua induttanza) è completamente caratterizzata dal corrispondente coefficiente di autoinduzione L (o dai coefficienti di autoinduzione L_1 , L_2 e mutua induzione M), nei casi reali almeno un contributo di resistenza in serie sul ramo deve essere considerato; esso è dovuto al conduttore, in genere sottile e di lunghezza non trascurabile, che costituisce l'avvolgimento (o gli avvolgimenti).

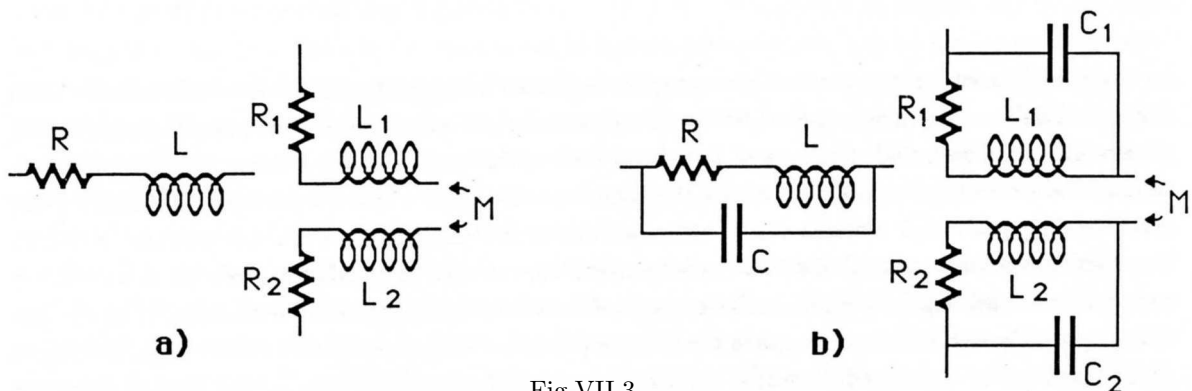


Fig.VII.3

Pertanto una induttanza e una mutua induttanza reali sono approssimate, con una schema-

tizzazione spesso sufficientemente accurata, nel modo di Fig.3a. Occorre fin d'ora osservare che il passaggio della corrente nell'induttanza provoca due tipi di fenomeni fisici completamente differenti, uno *reversibile*, ovvero la creazione del campo magnetico e quindi l'immagazzinamento di energia ($W_R = \frac{1}{2}Li^2$), un altro tipicamente *irreversibile*, ovvero l'effetto Joule sulla parte resistiva. Vedremo, quando tratteremo le correnti alternate, che, data una induttanza, è possibile introdurre il cosiddetto *parametro di qualità* Q che dice quanto il componente in questione si avvicina al caso ideale: $\frac{L}{R}$ il più grande possibile. Oltre alla inevitabile presenza di una resistenza, un altro problema che si incontra nella costruzione di induttanze e di induttanze mutue, è la capacità che si forma fra i vari strati di spire, sovrapposti l'uno sull'altro; conseguentemente, in certe condizioni (vedi Cap. IX sulle correnti alternate e Cap. XIII sui circuiti risonanti), non è più sufficientemente accurata la schematizzazione adottata in Fig.3a, ma occorre tener conto almeno di una capacità in parallelo all'induttanza come in Fig.3b.

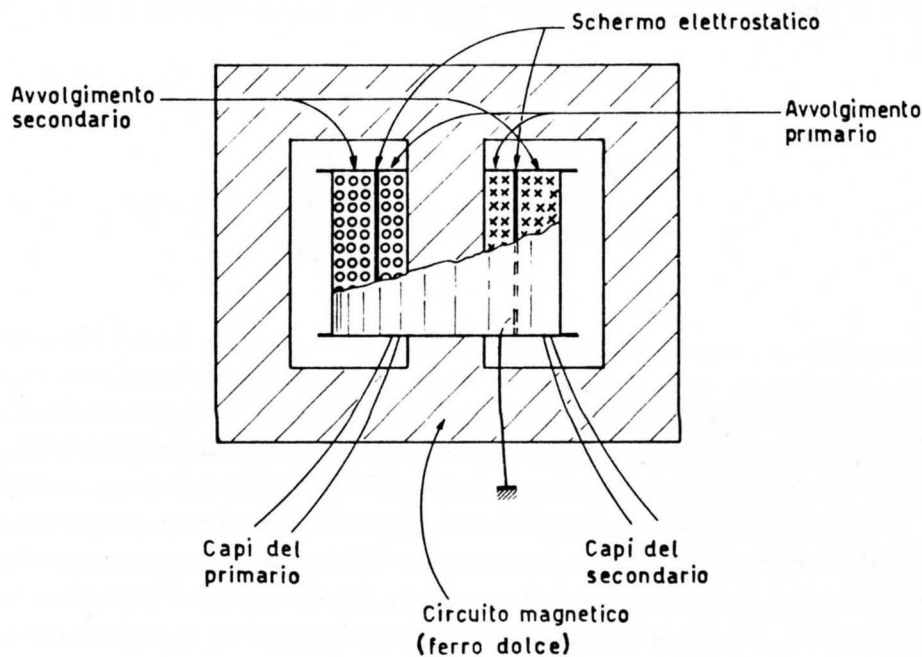


Fig. VII.4

In realtà la situazione è ancor più complicata poiché queste capacità risultano distribuite fra i vari strati dell'avvolgimento che costituisce l'induttanza; per evitare o almeno ridurre questi effetti gli avvolgimenti delle induttanze non sono mai fatti nella banale forma a solenoide, ma piuttosto vengono scelte configurazioni particolari che minimizzano queste capacità parassite. In maniera del tutto simile, quando si realizza un alto coefficiente di mutua induzione fra due circuiti, si forma inevitabilmente una capacità fra i due avvolgimenti, soprattutto se questi sono avvolti su uno stesso supporto; un caso tipico è quello della capacità fra avvolgimento primario e secondario di un trasformatore. Un sistema assai semplice per ridurre praticamente a zero questo effetto è quello (Fig.4) di interporre fra i due avvolgimenti il cosiddetto schermo elettrostatico cioè un conduttore riferito a un potenziale opportuno (per esempio a terra). Un altro sistema è quello di avvolgere primario e secondario sul medesimo circuito magnetico per permettere la concatenazione dei flussi di induzione, ma su due rami distinti della struttura (Fig.5).

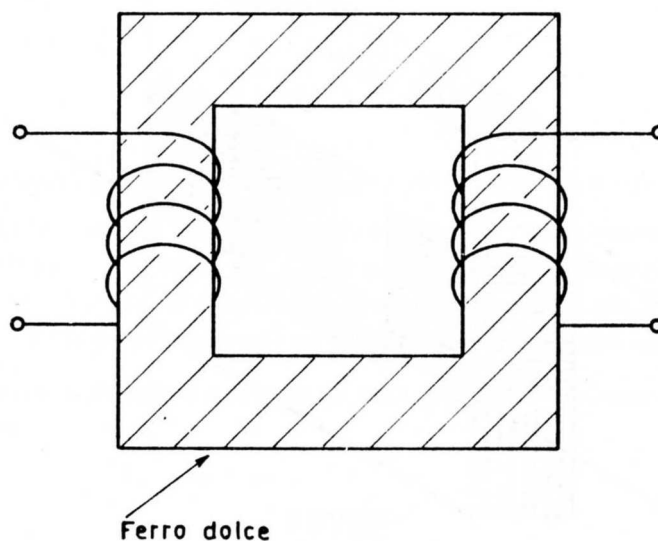


Fig. VII.5

Ritorniamo sulla dipendenza del coefficiente di induzione dalla permeabilità magnetica μ_r del nucleo su cui l'induttanza è avvolta. Nei *materiali ferromagnetici*, che sono quelli di maggior interesse a causa dell'alto valore di μ_r ($10^2 - 10^5$), la magnetizzazione avviene mediante il meccanismo dell'orientazione dei *domini magnetici* e si trova che la magnetizzazione, e quindi μ_r , dipende fortemente dal campo magnetizzante, cioè da i : la magnetizzazione è particolarmente elevata, e così μ_r , per piccoli (ma non piccolissimi) valori della corrente e decresce all'aumentare dell'eccitazione fino a tendere a 1, ovvero si assiste a un fenomeno di saturazione corrispondente al fatto che quando nel materiale tutti i domini si sono orientati, ulteriori aumenti della magnetizzazione non sono più possibili. Conseguentemente, una certa induttanza o induttanza mutua ha un campo di correnti di funzionamento in cui L o M sono ragionevolmente costanti, ma al di fuori di questi valori di corrente i coefficienti decrescono; a parità di L o M , tanto maggiore è la sezione del nucleo della bobina, tanto maggiore sarà la corrente a cui la bobina può operare, poiché corrispondentemente aumenta il numero di domini magnetici in grado di cooperare alla magnetizzazione. Altri problemi connessi con l'uso di induttanze o mutue induttanze con nuclei ferromagnetici, sono costituiti dalle *correnti parassite* e dalla *isteresi*. Le prime sono dovute al fatto che se il materiale del nucleo è conduttore, le variazioni del flusso di \vec{B} attraverso di esso provocano correnti parassite indotte che sottraggono energia al sistema dissipandola per effetto Joule e riscaldando il nucleo. Il loro effetto si riduce interrompendo il più possibile la continuità elettrica del nucleo, preservandone le caratteristiche magnetiche: tipicamente si ricorre a lamierini impacchettati e isolati fra di loro, anziché a un unico blocco di materiale, come in Fig.6. In altre condizioni si usano nuclei ferromagnetici a bassa conducibilità elettrica (*ferriti*). Quanto all'isteresi (vedi Cap.XIX sulle misure di campi magnetici), essa, in quanto fenomeno tipicamente irreversibile, provoca dissipazione di energia all'interno del nucleo sotto forma di calore. Su questi argomenti torneremo quando parleremo dell'utilizzo delle induttanze nei circuiti in alternata.

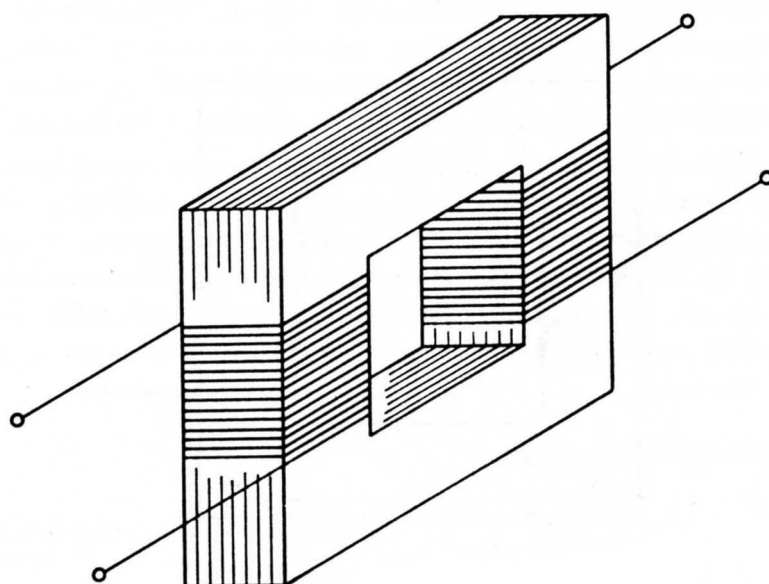


Fig. VII.6

3.— Il regime transitorio delle correnti e delle tensioni in presenza di coefficienti di auto e mutua induzione

Supponiamo di disporre del circuito L-R serie di Fig. 7 costituito da un generatore di fem, una induttanza L con in serie una resistenza di avvolgimento R , un tasto T e una ulteriore resistenza ρ .

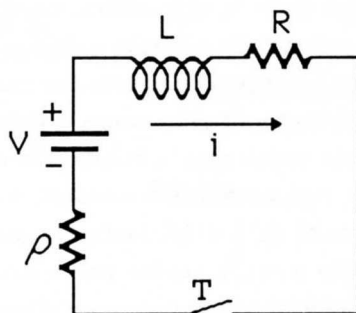


Fig. VII.7

Qui, come nel seguito ove non ingeneri confusione, si designerà con lo stesso simbolo L sia l'elemento circuitale (l'induttanza) che il valore del coefficiente di autoinduzione (così come usualmente facciamo per le resistenze e per le capacità).

Il problema da risolvere è quello di trovare l'andamento della corrente i a partire da certe condizioni iniziali prefissate. Nel caso in questione supponiamo che $i(0^-) = 0$, cioè tasto aperto. A $t = 0^+$ supponiamo di chiudere il tasto. La seconda legge di Kirchhoff ci permette di trovare la relazione fra le grandezze in esame (continuiamo ad ammettere $\text{div } \vec{j} = 0$):

$$V - L \frac{di}{dt} = i(R + \rho) \quad t > 0 \quad (\text{VII.5})$$

dove abbiamo considerato la presenza di due fem nel circuito, quella del generatore di tensione continua e quella di autoinduzione. Si tratta di risolvere l'equazione differenziale del primo ordine, lineare a coefficienti costanti

$$\frac{L}{R + \rho} \frac{di}{dt} + i = \frac{V}{R + \rho} \quad (\text{VII.6})$$

Se supponiamo che la funzione $i(t)$ sia continua, allora $i(0^+) = i(0^-) = 0$. Questa condizione inserita nella (6) dà per $\frac{di}{dt}(0)$ un valore finito che conforta l'ipotesi di avere ammesso la continuità di $i(t)$. Sulla base di considerazioni energetiche è possibile dare una giustificazione *fisica* della continuità di i : all'atto della chiusura del tasto il generatore comincia a fornire energia a ritmo finito e pertanto l'energia magnetica $\frac{1}{2}Li^2$ non può variare di un valore finito in un tempo infinitesimo.

Troviamo dapprima la soluzione a regime i_R della (6), cioè il cosiddetto integrale particolare. E' facile verificare che:

$$i_R = \frac{V}{R + \rho} \quad (\text{VII.7})$$

rappresenta tale soluzione; essa ci dice che dopo un tempo sufficientemente lungo, una induttanza reale si comporta come una pura resistenza R . L'integrale dell'equazione omogenea associata i_A , è ottenibile separando le variabili

$$\frac{di_A}{i_A} = -\frac{R + \rho}{L} dt \quad (\text{VII.8})$$

Ne segue

$$i_A = I_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (\text{VII.9})$$

dove $\tau = \frac{L}{R + \rho}$, avente le dimensioni di un tempo, è detta *costante di tempo*.

La soluzione per i si ottiene sommando i_A e i_R e determinando I_0 in base alle condizioni iniziali $i(0) = 0$:

$$I_0 = -\frac{V}{R + \rho} \quad (\text{VII.10})$$

Si ottiene così

$$i(t) = \frac{V}{R + \rho} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] \quad (\text{VII.11})$$

Nella Fig.8 è riportato l'andamento di $i(t)$:

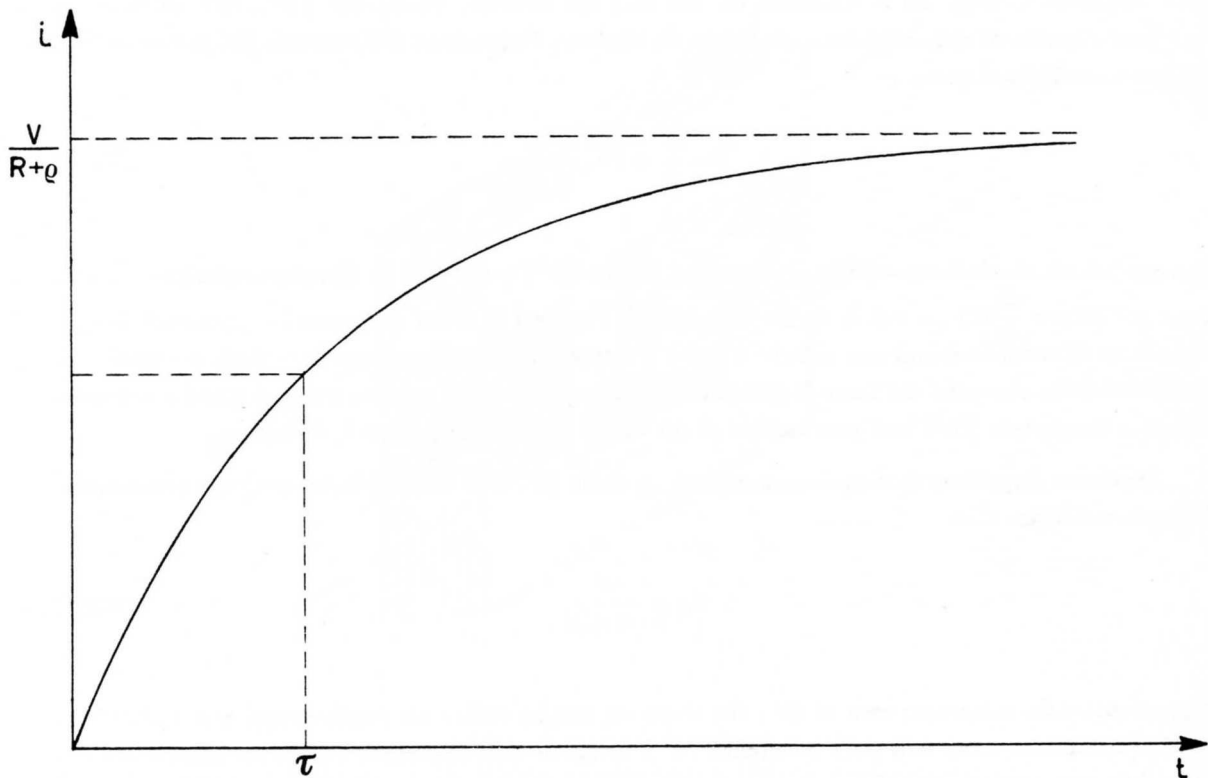


Fig.VII.8

Si noti che per $t = \tau$ la corrente ha raggiunto un valore pari a $\frac{V}{R + \rho} \left(1 - \frac{1}{e}\right) \approx \frac{V}{R + \rho} \cdot 0.632$. Possiamo chiederci ora cosa accadrebbe se V passasse bruscamente a 0 partendo da una situazione di regime in cui $i = cost = \frac{V}{R + \rho}$. Si troverebbe

$$i = \frac{V}{R + \rho} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (\text{VII.12})$$

con τ ancora dato da $\frac{L}{R + \rho}$. Si faccia attenzione che il brusco passaggio di V da un valore finito a 0 non si ottiene certo aprendo il tasto T di Fig.7; infatti in questo caso sarebbe la corrente a passare bruscamente a zero. Le brusche variazioni di corrente portano a delle *discontinuità fisiche* nel sistema in quanto corrispondono a brusche variazioni dell'energia accumulata sotto forma di campo magnetico. Ad esempio l'apertura del tasto T, facendo variare i da un valore finito a zero in un tempo Δt estremamente breve (con un tasto opportuno si può anche avere $\Delta t \approx 10^{-9}s$), comporta una derivata di i molto elevata e conseguentemente una fem indotta $-L \frac{di}{dt}$ così grande da far scoccare una scintilla fra i contatti del tasto e da provocare una emissione di onde elettromagnetiche. L'energia associata a questa scintilla e a questo irraggiamento è proprio parte di quella che prima dell'apertura del tasto si trovava immagazzinata sotto forma di campo magnetico ($\frac{1}{2}Li^2$).

Riprendendo le soluzioni (11) e (12), si vede che la corrente tanto più rapidamente raggiunge il valore asintotico, a parità di L , quanto più grande è la resistenza del circuito; si osservi la differenza rispetto al caso del circuito R-C serie dove il circuito rispondeva tanto più lentamente alle variazioni di tensione quanto più grande era R , a parità di C .

Consideriamo ora il caso di due circuiti accoppiati tramite un coefficiente di mutua induzione M (Fig.9).

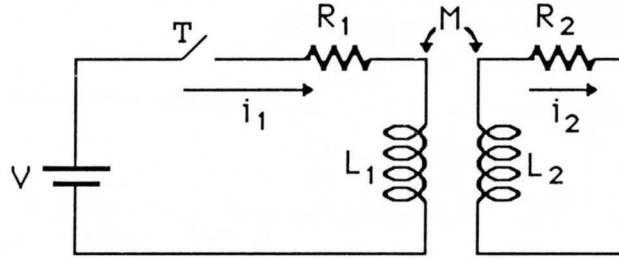


Fig.VII.9

R_1 e R_2 rappresentano la somma complessiva delle resistenze in serie nel circuito 1 e 2 rispettivamente. Supponiamo di chiudere il tasto T al tempo $t = 0^+$ avendo $i_1(0^-) = i_2(0^-) = 0$. La seconda legge di Kirchhoff applicata alle due maglie ci consente di scrivere il seguente sistema di equazioni differenziali (per $t > 0$):

$$\begin{cases} i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = V \\ i_2 R_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = 0 \end{cases} \quad (\text{VII.13})$$

Manipolando opportunamente il sistema si ottengono le due seguenti equazioni differenziali, separate nelle variabili i_1 e i_2 :

$$\begin{cases} i_1 + \frac{di_1}{dt}(\tau_1 + \tau_2) + \frac{d^2 i_1}{dt^2}(\tau_1 \tau_2 - \theta^2) = \frac{V}{R_1} \\ i_2 + \frac{di_2}{dt}(\tau_1 + \tau_2) + \frac{d^2 i_2}{dt^2}(\tau_1 \tau_2 - \theta^2) = 0 \end{cases} \quad (\text{VII.14})$$

dove

$$\tau_1 = \frac{L_1}{R_1} \quad \tau_2 = \frac{L_2}{R_2} \quad \theta^2 = \frac{M^2}{R_1 R_2} \quad (\text{VII.15})$$

Le soluzioni analitiche dettagliate per $i_1(t)$ e $i_2(t)$ con riguardo anche al tipo di accoppiamento stretto o lasco sono ricavate nell'Appendice B; in tale appendice si discute anche il problema delle condizioni iniziali, che nel caso in esame risulta assai più delicato che non nel caso di una sola induttanza. Riportiamo qui di seguito la soluzione per $i_1(t)$ e $i_2(t)$:

$$\begin{cases} i_1(t) = I_0 - \frac{I_0}{2} \left[\frac{(L_1 R_2 - R_1 L_2)}{\sqrt{(L_1 R_2 + L_2 R_1)^2 - 4 R_1 R_2 (L_1 L_2 - M^2)}} + 1 \right] \cdot \exp \rho_1 t + \\ \quad + \frac{I_0}{2} \left[\frac{(L_1 R_2 - R_1 L_2)}{\sqrt{(L_1 R_2 + L_2 R_1)^2 - 4 R_1 R_2 (L_1 L_2 - M^2)}} - 1 \right] \cdot \exp \rho_2 t \\ i_2(t) = \left[\frac{-I_0 M R_1}{\sqrt{(L_1 R_2 + L_2 R_1)^2 - 4 R_1 R_2 (L_1 L_2 - M^2)}} \right] \cdot (\exp \rho_1 t - \exp \rho_2 t) \end{cases} \quad (\text{VII.16})$$

essendo

$$\begin{cases} I_0 = \frac{V}{R_1} \\ \rho_1 = \frac{-(L_1 R_2 + R_1 L_2) + \sqrt{(L_1 R_2 + L_2 R_1)^2 - 4 R_1 R_2 (L_1 L_2 - M^2)}}{2(L_1 L_2 - M^2)} \\ \rho_2 = \frac{-(L_1 R_2 + R_1 L_2) - \sqrt{(L_1 R_2 + L_2 R_1)^2 - 4 R_1 R_2 (L_1 L_2 - M^2)}}{2(L_1 L_2 - M^2)} \end{cases} \quad (\text{VII.17})$$

In Fig.10 si riportano gli andamenti di $i_1(t)$ e $i_2(t)$ per il caso $L_1 = 0.4 H$, $L_2 = 0.005 H$, $M = 0.042 H$, $R_1 = 100 \Omega$, $R_2 = 5 \Omega$ e $V = 10 V$ che corrisponde a una situazione ottenibile in laboratorio con componenti effettivamente disponibili.

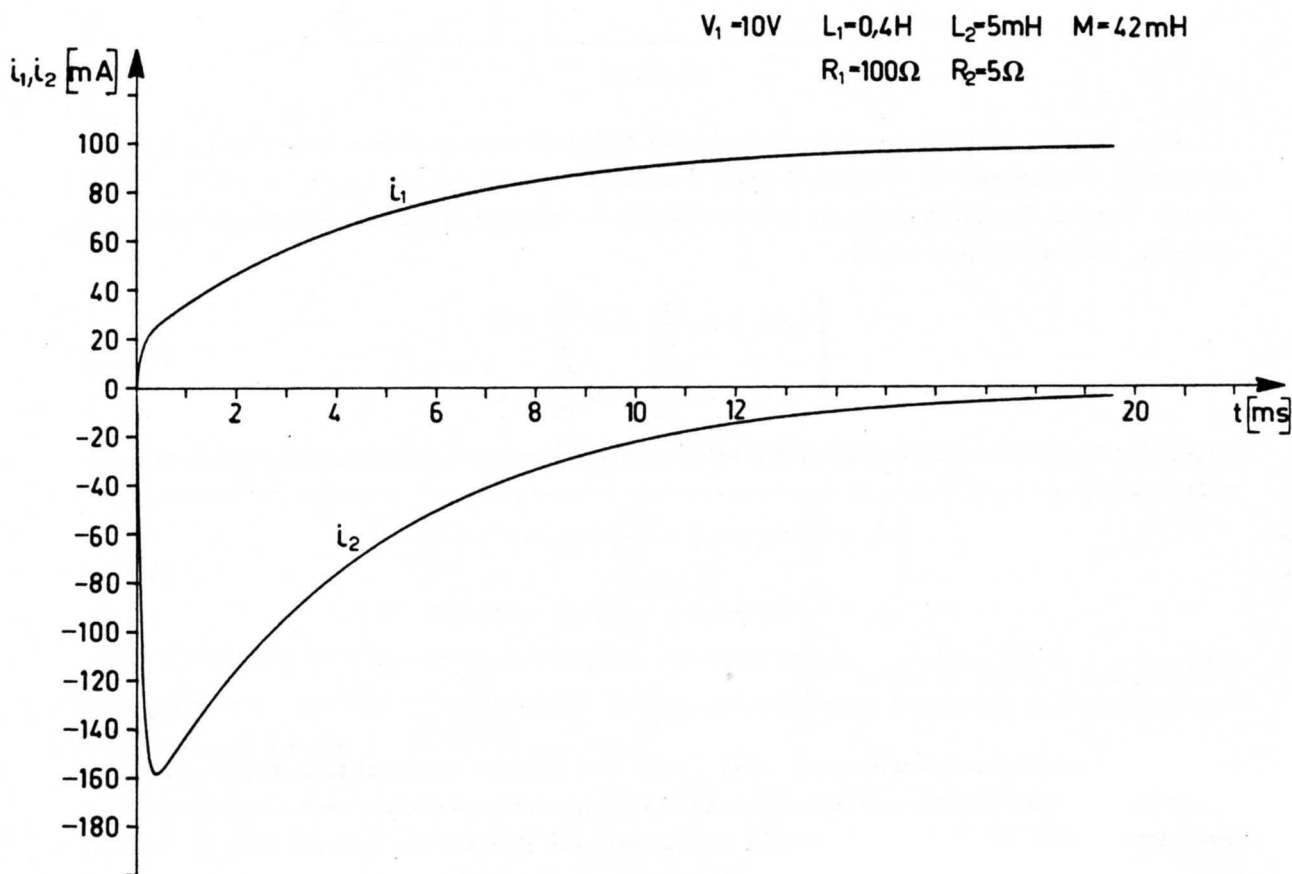


Fig.VII.10

Senza entrare nei dettagli che si possono comunque trovare nell'Appendice B, si osservi che dopo un tempo t molto maggiore di $1/\rho_1$ e di $1/\rho_2$, i_1 ha praticamente raggiunto il valore asintotico $\frac{V}{R_1}$ e i_2 è tornata a zero.

Consideriamo ora l'andamento di $i_2(t)$ quando, partendo dalla situazione stazionaria a tasto chiuso ($i_1 = \frac{V}{R_1}$ e $i_2 = 0$), si apre il tasto T (Fig.9). Preso l'istante di apertura del tasto come nuova origine dei tempi, la corrente i_1 in un tempo Δt estremamente piccolo, andrà a zero. Supponiamo che l'intervallo di tempo Δt che la corrente i_1 impiega ad andare a zero sia molto più piccolo delle costanti di tempo in gioco; possiamo allora trovare la soluzione per i_2 ragionando nel seguente modo:

durante il tempo Δt , $\frac{di_1}{dt}$ è estremamente elevata e dovendo continuare a valere:

$$i_2 R_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = 0 \quad (\text{VII.18})$$

con i_2 finita, durante la breve transizione di i_1 varrà, quasi esattamente:

$$\frac{di_2}{dt} \approx -\frac{M}{L_2} \frac{di_1}{dt} \quad (\text{VII.19})$$

La (19), integrata fra i due estremi della transizione $(0, \Delta t)$, dà:

$$i_2(\Delta t) = \frac{M}{L_2} i_1(0) = \frac{M}{L_2} \frac{V}{R_1} \quad (\text{VII.20})$$

Si osservi che il valore di $i_2(\Delta T)$ non dipende dalla resistenza del circuito 2. Per $t > \Delta t$, essendo $i_1(t) = 0$, deve essere soddisfatta l'equazione differenziale:

$$i_2 R_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} = 0 \quad (\text{VII.21})$$

con $i_2(\Delta t) = \frac{M}{L_2} \frac{V}{R_1}$ che ha come soluzione:

$$i_2(t) = i_2(\Delta t) \exp\left[-\frac{(t-\Delta t)}{\tau_2}\right] \approx i_2(\Delta t) \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right) \quad t > \Delta t \quad (\text{VII.22})$$

essendo $\tau_2 = \frac{L_2}{R_2}$.

Nel prossimo paragrafo vedremo che è possibile misurare il coefficiente di mutua induzione fra due circuiti, proprio sfruttando il comportamento dei circuiti eccitati e diseccitati nel modo ora descritto.

4.- Misura di un coefficiente di mutua induzione mediante un galvanometro balistico

Un metodo per misurare il coefficiente di mutua induzione M fra due circuiti, usando un galvanometro balistico è quello mostrato in Fig.11.

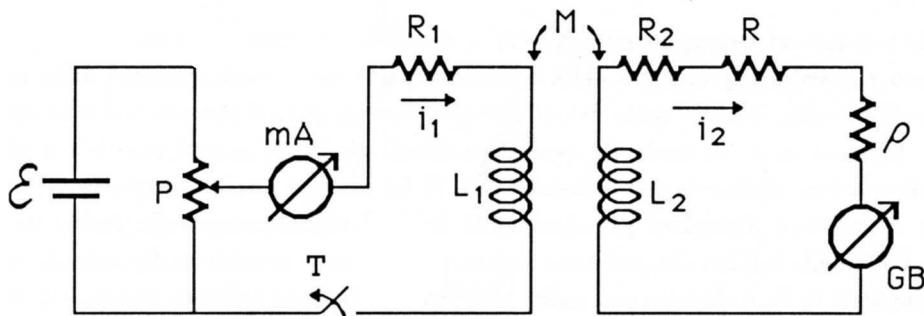


Fig.VII.11

Supponiamo che il tasto T sia chiuso da un tempo indefinitamente lungo: la corrente i_1 si trova a un valore di regime $i_1 = i_{10}$ ed è misurata dal milliamperometro. Apriamo ora il tasto T. Conosciamo già l'andamento di $i_2(t)$ (vedi (22)) nell'ipotesi che l'apertura del tasto avvenga in un tempo estremamente breve. A noi interessa però una relazione che faccia comparire piuttosto l'integrale $Q_2 = \int_0^\infty i_2 dt$, in quanto questa è la quantità che il galvanometro è in grado di misurare; oltretutto troveremo che l'espressione di Q_2 in funzione di M non dipende dai dettagli dell'andamento di $i_2(t)$. Infatti, consideriamo l'equazione di Kirchhoff applicata al circuito 2:

$$(R + \rho + R_2)i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = 0 \quad (\text{VII.23})$$

e integriamola fra l'istante immediatamente precedente all'apertura del tasto ($t = 0^-$) e il tempo θ quando anche l'impulso di corrente $i_2(t)$ si sia esaurito, in pratica ridotto a una intensità estremamente piccola. Avremo quindi: $i_1(0^-) = i_{10}$, $i_1(\theta) = 0$, $i_2(0^-) = 0$ e $i_2(\theta) = 0$. Dopo l'integrazione otteniamo:

$$(R + \rho + R_2) \int_{0^-}^{\theta} i_2 dt + L_2 \int_{0^-}^{\theta} \frac{di_2}{dt} dt + M \int_{0^-}^{\theta} \frac{di_1}{dt} dt = 0 \quad (\text{VII.24})$$

e cioè

$$(R + \rho + R_2)Q_2 + L_2 [i_2(\theta) - i_2(0^-)] + M [i_1(\theta) - i_1(0^-)] = 0 \quad (\text{VII.25})$$

Conseguentemente:

$$M = \frac{(R + \rho + R_2)Q_2}{i_{10}} \quad (\text{VII.26})$$

Resta da vedere ora se la carica Q_2 transita in un tempo sufficientemente breve, cosicché l'eccitazione del galvanometro si possa considerare balistica e $Q_2 = K_B \varphi_M$. Per rispondere a questa domanda ci aiutano le considerazioni svolte nel paragrafo precedente su $i_2(t)$: l'impulso di corrente è un esponenziale decrescente con $\tau = \frac{L_2}{R + \rho + R_2}$; sappiamo già (vedi Cap. VI, §7 e Appendice A) che se τ è molto minore del periodo T del galvanometro, le ipotesi balistiche sono rispettate e la (26) può essere messa sotto la forma

$$M = \frac{(R + \rho + R_2)K_B \varphi_M}{i_{10}} \quad (\text{VII.27})$$

Qualora sia nota K_B^0 occorrerà determinare il decremento logaritmico Λ per ottenere

$$K_B = K_B^0 \exp\left(\frac{\Lambda}{2\pi} \operatorname{atan} \frac{2\pi}{\Lambda}\right)$$

magari usando una formula approssimata (VI.40) se Λ è sufficientemente piccolo.

Per quanto riguarda la precisione della misura, a parte ovvie ottimizzazioni della misura di i_{10} (il più possibile verso il fondo scala del milliamperometro), si noti che sembrerebbe opportuno diminuire il più possibile R , in modo da avere Q_2 e quindi φ_M i più grandi possibile e quindi col minimo errore relativo. Tuttavia la diminuzione di R ha almeno due contropartite: l'incertezza su $(R_2 + \rho + R)$ viene a dipendere principalmente dall'indeterminazione sulla resistenza interna del galvanometro e della bobina che non sono mai note con grande precisione dipendendo esse dalla temperatura; inoltre, se L_2 è elevata, può anche accadere che l'ipotesi balistica non sia più verificata, perché al diminuire di R cresce la costante di tempo $\tau = \frac{L_2}{R_2 + \rho + R}$.

La misura si può anche effettuare col tasto T in chiusura; in questo caso rimane vera la (26), salvo che ora i_{10} è la corrente i_1 finale; occorre tuttavia un po' più di attenzione nel soddisfare la condizione di eccitazione balistica poiché questa volta la forma dell'impulso di corrente non è più

un semplice esponenziale con $\tau = \frac{L_2}{R_2 + \rho + R}$, ma è la combinazione di due esponenziali che come visto precedentemente può essere assai più lenta (vedi la prima delle (16)).

5.— Misura di un coefficiente di mutua induzione mediante un integratore di Miller

In questo paragrafo si suppone che sia noto allo studente il principio di funzionamento di un *integratore di Miller* (o *integratore operazionale*) che si trova illustrato nel Cap.XV, §§4,5.

La sostituzione del galvanometro balistico con un integratore di Miller porta senza dubbio vantaggi nella sensibilità e anche nella precisione della misura, purché si abbia cura di scegliere un amplificatore con *tensione di offset* sufficientemente piccola e *guadagno senza reazione* sufficientemente elevato. Inoltre con l'integratore operazionale viene a cadere la necessità di eccitazione balistica. Tuttavia alcune caratteristiche dell'integratore di Miller fanno sì che il suo impiego richieda precauzioni particolari, non solo per utilizzarlo al meglio, ma anche per non danneggiarlo. Per prima cosa notiamo che l'integratore di Miller funziona correttamente solo se la corrente da integrare si mantiene al di sotto di un certo valore massimo determinato dallo stadio di uscita dell'amplificatore (tipicamente 10-20mA); se la corrente di ingresso supera questo valore, l'amplificatore non è più in grado di mantenere la massa virtuale al suo ingresso "−" e cessa di funzionare correttamente. Se la corrente è molto elevata può anche succedere che la tensione dell'ingresso "−" si allontani assai dal valore della tensione dell'ingresso "+", tanto da danneggiare irreversibilmente l'amplificatore. Inoltre la tensione di offset fa sì che anche in assenza di eccitazione, una corrente pari a $\frac{V_{off}}{R_i}$ (si veda la Fig.12) entri nell'ingresso "−" e venga pertanto integrata su C dando così luogo a una variazione della tensione V_0 in funzione del tempo (*deriva*).

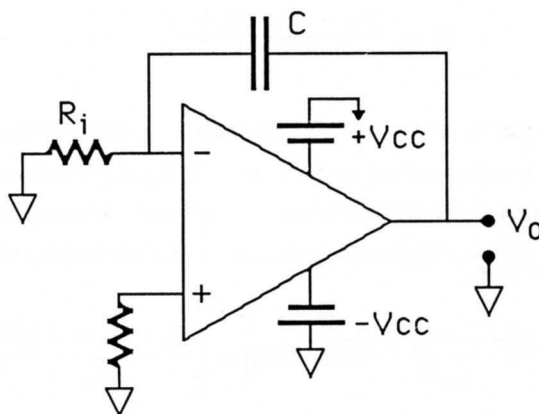


Fig.VII.12

Tale corrente si somma a quella del segnale e quindi può dar luogo a un errore sistematico nel valore dell'integrale; va detto però che misurando la deriva di V_0 in assenza di segnale, è possibile poi apportare le correzioni in presenza di segnale. Tenendo presente questi fatti, un circuito che si adatta particolarmente alla misura di M con un integratore operazionale è quello di Fig.13:

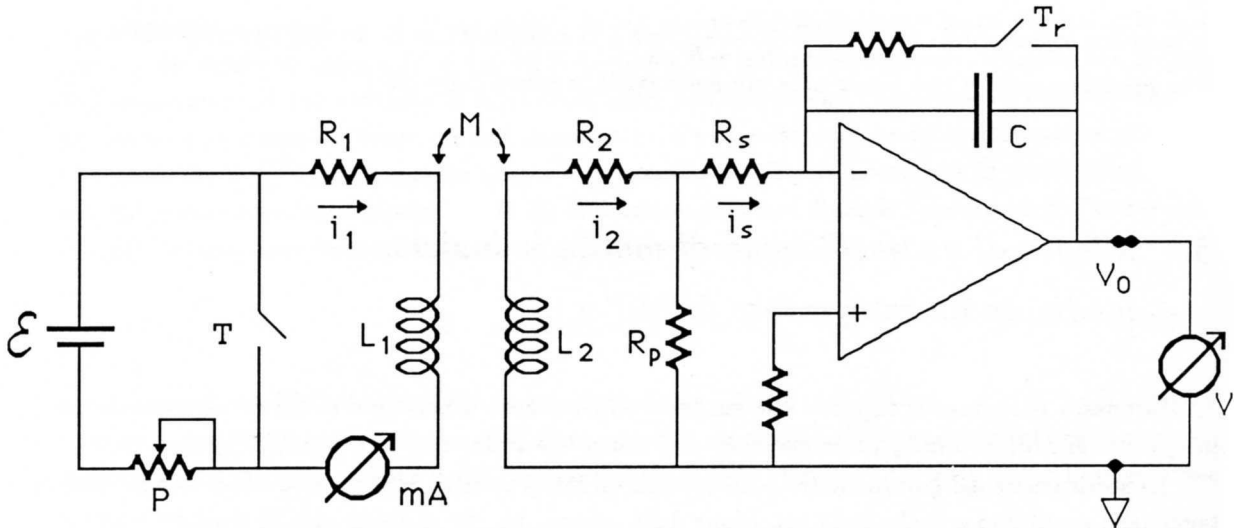


Fig.VII.13

Si osservino le seguenti variazioni rispetto al caso precedente del galvanometro balistico: il tasto T non interrompe mai la corrente i_1 , bensì in chiusura manda a zero la *tensione* applicata alla bobina e in apertura fa passare la tensione da 0 a un valore $\neq 0$. Evitando bruschi cambiamenti in i_1 , si evitano impulsi di corrente i_2 con intensità troppo elevate (vedi (22)); questo avviene a spese di una durata maggiore dell'impulso, ma nel caso dell'integratore operazionale ciò non ha rilevanza. Si osservi anche che la costante di tempo τ_1 del circuito 1 è diversa in apertura e in chiusura. Solo la frazione $\frac{R_P}{R_P + R_S}$ della carica Q_2 viene misurata dall'integratore e questo consente un comodo controllo sulla sensibilità della misura; R_P sarà generalmente piccola rispetto a R_S e varieremo R_S per ottimizzare le letture di $V_0 \propto Q_S$ sul voltmetro V (che per sfruttare la precisione del metodo sarà preferibilmente un voltmetro elettronico di precisione, Cap.XIV).

Quanto all'espressione che lega M alle grandezze misurate, ragionando analogamente al paragrafo precedente si trova (l'ingresso "–" è una *massa virtuale*):

$$M = \frac{(R_2 + R_P \parallel R_S) \cdot Q_2}{i_{10}} \quad (\text{VII.28})$$

dove $i_{10} = \frac{\mathcal{E}}{P + R_1}$ è la corrente di regime. Tale relazione vale indipendentemente dal fatto che la misura sia effettuata aprendo o chiudendo il tasto T, purché i_{10} sia il valore di regime della corrente i_1 letto dopo l'apertura o prima della chiusura rispettivamente. L'integratore poi dà una risposta $V_0 = -\frac{Q_S}{C}$ dove $Q_S = Q_2 \frac{R_P}{R_P + R_S}$. Pertanto la relazione che dà il risultato voluto è:

$$|M| = \left| \frac{R_2(R_P + R_S) + R_P R_S}{i_{10} R_P} C V_0 \right| = \left| \frac{R_2 + R_S + \frac{R_S R_2}{R_P}}{i_{10}} C V_0 \right| \quad (\text{VII.29})$$

dove, per semplicità, sono stati riportati i valori assoluti, essendo il segno di M dipendente dalle convenzioni adottate.

Vale ancora la pena di osservare che misurando con un oscillografo (Cap.VIII) la differenza di potenziale fra il nodo in cui confluiscono i rami di R_2, R_P e R_S e la massa, si possono osservare le forme degli impulsi di corrente e verificare, almeno qualitativamente, gli andamenti teorici previsti per $i_2(t)$. Inoltre si può controllare la bontà o meno del tasto, soprattutto in chiusura, andando a

vedere se il segnale di corrente mostra un andamento regolarmente monotono oppure seghettato; se il segnale ha un andamento irregolare, ciò significa che il tasto, all'atto della chiusura, compie dei rimbalzi, cioè una rapida successione di aperture e chiusure. Questa "struttura fine" della chiusura è, per il presente scopo, solo antiestetica, poiché essa non influisce sul risultato finale; infatti le relazioni adottate per la deduzione di M dipendono solo dai valori che le correnti assumono immediatamente prima della commutazione e molto dopo che questa è avvenuta.

6.— *Altri metodi per la misura di coefficienti di mutua induzione*

I metodi sopra esposti misurano il valore di M *in continua*, ovvero essi danno una misura del valore *statico* di M . In moltissime applicazioni, per esempio nell'utilizzo dei trasformatori, ha interesse conoscere il coefficiente di mutua induzione in alternata. Su possibili misure di M a frequenze $\neq 0$, torneremo nel Cap. XIII, §9.

NOTA BIBLIOGRAFICA

Oltre ai soliti **FR 59**, **LA 38**, **CO 85**, merita di essere citato **LA 57**, principalmente per quanto riguarda le tecniche costruttive dei trasformatori (in generale dei circuiti accoppiati induttivamente). Per simili ragioni si suggerisce anche il Cap. 2 di **TE 57**.

Per la soluzione dettagliata del transitorio di due circuiti accoppiati induttivamente e la discussione delle condizioni iniziali si veda l'Appendice B.

VIII

L'OSCILLOGRAFO

1. – Introduzione

L'oscillografo è in sostanza un voltmetro che visualizza *in tempo reale* su uno schermo luminoso l'andamento, in funzione del tempo, della differenza di potenziale presente fra due terminali cosiddetti di *ingresso*. Tramite appropriati controlli è possibile variare le scale degli assi verticale, tipicamente da qualche mV/cm a qualche decina di V/cm , e orizzontale, da circa $1 s/cm$ fino al limite superiore dello strumento che in alcuni modelli particolarmente sofisticati può arrivare fino a $5 \times 10^{-10} s/cm$). Il limite superiore è determinato da una caratteristica fondamentale dello strumento, la cosiddetta *banda passante*, cioè la gamma di frequenze delle ddp sinusoidali in ingresso che l'oscillografo è in grado di riprodurre senza ridurne sostanzialmente l'ampiezza (per una trattazione estesa del regime sinusoidale delle correnti e della banda passante si vedano i Capp. IX e XII). Molto brevemente possiamo qui ricordare che una ddp sinusoidale è una differenza di potenziale che varia in funzione del tempo, oscillando attorno a un valor medio nullo; il suo andamento è del tipo

$$v = v_0 \cos(2\pi ft + \varphi) \quad (\text{VIII.1})$$

con t che rappresenta il tempo e v_0 , f e φ costanti; f è detta frequenza ed è misurata in *Hertz* (Hz); la (1) ci dice fra l'altro che tanto maggiore è f tanto più rapidamente varia in funzione del tempo la ddp v .

Tornando all'oscillografo, poiché il limite *inferiore* della sua banda passante è sempre dato dalla *continua* ($f = 0$), il numero che si cita per individuare la banda passante è sempre l'estremo *superiore*: “un oscillografo da $100 MHz$ ” significa con banda passante da $0 Hz$ a $10^8 Hz$.

Fra le altre funzioni che un oscillografo è in grado di svolgere, una è quella cosiddetta “X-Y”; quando l'oscillografo opera in X-Y, la differenza di potenziale applicata a un ingresso (ingresso Y) dello strumento è presentata sullo schermo non in funzione del tempo, bensì in funzione della differenza di potenziale presente a un'altra coppia di terminali (ingresso X). Su queste e su altre funzioni espletate dall'oscillografo torneremo più avanti nel capitolo, dopo aver descritto il principio di funzionamento dello strumento.

I blocchi funzionali di un oscillografo possono, molto schematicamente, elencarsi come segue: 1) il *tubo a raggi catodici* con i relativi sistemi di controllo (*intensità e fuoco*); 2) il sistema di controllo della *deflessione elettrostatica*, comprendente gli *amplificatori di ingresso* e gli *amplificatori finali* per la tensione delle *placchette*; 3) la *base dei tempi* e il *circuito di trigger*.

Quelle che noi descriveremo nel seguito sono le caratteristiche di uno strumento di medie prestazioni e non hanno la pretesa di descrivere in dettaglio né come funziona un certo modello di oscillografo, né come sono costruiti gli oscillografi in genere, ma di far vedere come certe prestazioni e funzioni possono essere ottenute.

2.— Il tubo a raggi catodici

Il tubo a raggi catodici è un dispositivo che consente di presentare l'andamento in funzione del tempo di una differenza di potenziale; il pregio maggiore di questo sistema di registrazione è la sua estrema rapidità. Sistemi di registrazione grafica di tensioni si ottengono anche fissando solidalmente alla bobina di un galvanometro, che misuri la tensione di interesse, un pennino appoggiato sopra un foglio di carta che a sua volta si muova a velocità costante *; le bande passanti ottenibili con tale sistema di registrazione sono però assai limitate a causa delle masse in gioco (pennino + bobina); le frequenze più elevate che si possono registrare sono dell'ordine dell'inverso del periodo proprio del sistema e facendo un galvanometro con equipaggio particolarmente leggero e costante di richiamo abbastanza energica (e quindi non particolarmente sensibile) si possono ottenere periodi al più dell'ordine del decimo di secondo.

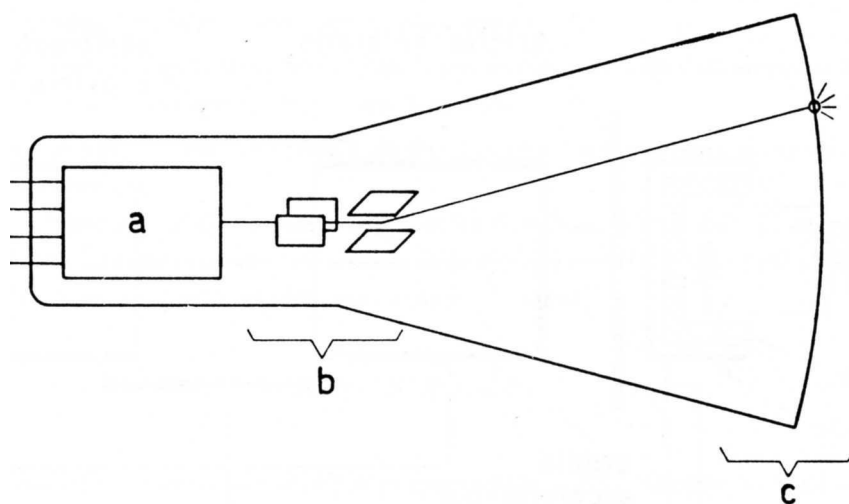


Fig.VIII.1

Nel tubo a raggi catodici un fascetto di elettroni subisce deflessioni elettriche proporzionali alla ddp da misurare e lascia una traccia luminosa nel punto del suo impatto con uno schermo di vetro rivestito di sostanze fosforescenti. L'inerzia in gioco è questa volta quella degli elettroni del fascetto ed è palese il guadagno in tempo di risposta rispetto a qualunque sistema di registrazione elettromeccanico.

* in pratica il pennino non poggia continuamente sul foglio di carta, perché ciò aggiungerebbe un attrito eccessivo al movimento dell'equipaggio; il pennino è usualmente sollevato e, periodicamente, un martelletto lo preme per un istante sul foglio, dando luogo a una registrazione a punti e non continua.

Il tubo a raggi catodici che noi descriveremo è del tipo a *deflessione elettrostatica*, usato al giorno d'oggi quasi esclusivamente negli oscillografi; in altre applicazioni, ad esempio negli schermi televisivi, i sistemi di deflessione sono di tipo magnetico.

Il tubo a raggi catodici (*Cathode Ray Tube - CRT*) consiste in un recipiente di vetro (dimensione maggiore dell'ordine di alcune decine di *cm*) entro il quale è stato praticato il vuoto ($\leq 10^{-4} Pa$) e fornito di passanti conduttori per applicare dall'esterno le tensioni ai vari elettrodi interni; nel CRT si possono identificare i seguenti blocchi funzionali (si veda Fig.1):

- a) il *cannone elettronico* propriamente detto, costituito a sua volta dalla *sorgente di elettroni*, dal sistema di *estrazione e focalizzazione*
- b) il sistema delle *placchette deflettrici*
- c) il sistema di *post-accelerazione* e lo *schermo*.

La sorgente di elettroni è quella parte del cannone elettronico che emette gli elettroni che poi, sollecitati dai campi elettrici prodotti dagli elettrodi di estrazione e focalizzazione, vanno a costituire il fascetto. Nella Fig.2 è disegnata una sezione del cannone elettronico con il circuito di alimentazione degli elettrodi o *circuito di polarizzazione*; tale sezione passa per l'asse di simmetria del sistema che coincide con l'asse del fascetto elettronico.

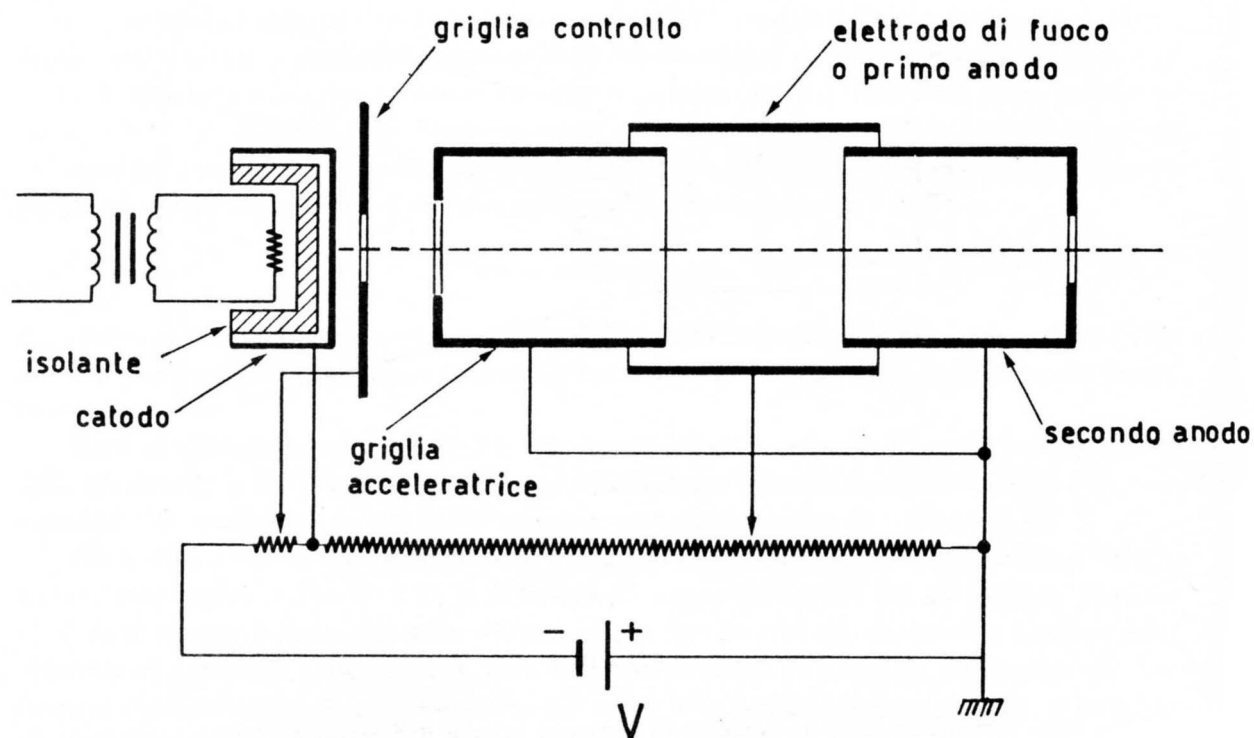


Fig.VIII.2

Tutte le strutture disegnate hanno simmetria cilindrica attorno all'asse del fascetto; ovvero gli elettrodi sono cilindri fra di loro coassiali. La struttura di sinistra è la vera e propria sorgente di elettroni. Essa è costituita dal catodo, un bicchierolo di Nichel rivestito di ossidi di Bario o Stronzio. Esso è tenuto a una temperatura fra 800 e $900^{\circ}C$ da una resistenza, dalla quale è isolato elettricamente, mantenuta a sua volta a una temperatura di circa $1000^{\circ}C$ per effetto Joule. A queste

temperature di esercizio il catodo è in grado di emettere una corrente, anche copiosa, di elettroni. Tale emissione, detta *termoionica*, è legata intimamente alla struttura del legame metallico; pertanto, allo scopo di comprendere le caratteristiche salienti dell'emissione termoionica, è necessario studiare con qualche dettaglio in più, rispetto a quanto fatto nel Cap.I, la dinamica degli elettroni di conduzione all'interno del materiale. Dato un campione macroscopico di un metallo, quale ad esempio il catodo in questione, sappiamo che a temperatura ambiente, e a maggior ragione a temperature inferiori, gli elettroni di conduzione, pur essendo liberi di muoversi al suo interno, non sono in grado di abbandonarlo. In maniera del tutto fenomenologica, l'effetto si può attribuire alla presenza di un campo elettrico di doppio strato, ortogonale alla superficie del conduttore e diretto dall'interno verso l'esterno, corrispondente a una barriera di potenziale di altezza E_B che gli elettroni non sono in grado di superare, perché essi, a temperatura ambiente, non possiedono una energia cinetica sufficientemente elevata. L'altezza di questa barriera di potenziale è presa rispetto alla minima energia che un elettrone libero all'interno del metallo può possedere, assunta come zero. Esistono metodi sperimentali in grado di valutare E_B che risulta dell'ordine della decina di Volt; ma si faccia attenzione, ciò non significa che basta applicare dall'esterno una ddp E_B in senso contrario per estrarre elettroni dal metallo: infatti la barriera agisce a livello microscopico, ovvero su dimensioni molto piccole, dell'ordine delle distanze interatomiche e corrisponde quindi a campi estremamente più elevati di quelli che è possibile applicare con normali tecniche di laboratorio. Quanto alla dinamica degli elettroni di conduzione, la meccanica quantistica insegna che:

1) gli elettroni, essendo confinati entro la buca di potenziale costituita dal campione di materiale, possono accedere solo a un numero finito di stati di energia;

2) degli elettroni presenti nel campione, solo due possono avere la stessa energia, cioè trovarsi nello stesso stato energetico.

Conseguentemente il numero $\rho(E)$ di elettroni per unità di volume e intervallo di energia* è esprimibile come prodotto della densità degli stati accessibili $N(E)$ (*punto1*) e della probabilità $f(E)$ che lo stato, in condizioni di equilibrio termico, sia occupato (*punto2*):

$$\rho(E) = N(E)f(E) \quad (\text{VIII.2})$$

La meccanica quantistica mostra che $N(E)$ è proporzionale a $E^{\frac{1}{2}}$. Quanto a $f(E)$ essa è detta *funzione di probabilità di Fermi-Dirac* e vale:

$$f(E) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{(E-E_F)}{kT}\right)} \quad (\text{VIII.3})$$

dove k è la costante di Boltzmann ($= 8.62 \cdot 10^{-5} eV/K = 1.38 \cdot 10^{-23} J/K$); T è la temperatura assoluta (K); E_F è il cosiddetto *livello di Fermi*, caratteristico di quel certo metallo. La (3) ci mostra che E_F , indipendentemente dal suo valore numerico diverso da metallo a metallo, rappresenta la energia dello stato che, per qualunque temperatura, ha probabilità del 50% di essere occupato. Sofferamoci sulla dipendenza di $f(E)$ dalla temperatura, con riferimento alla Fig.3.

* in tutte queste espressioni e anche nelle seguenti l'unità di energia adoperata è lo *elettron-Volt* (eV) che corrisponde all'energia che una carica elementare e acquista attraversando la ddp di 1 V: $1 eV \approx 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ Joule}$.

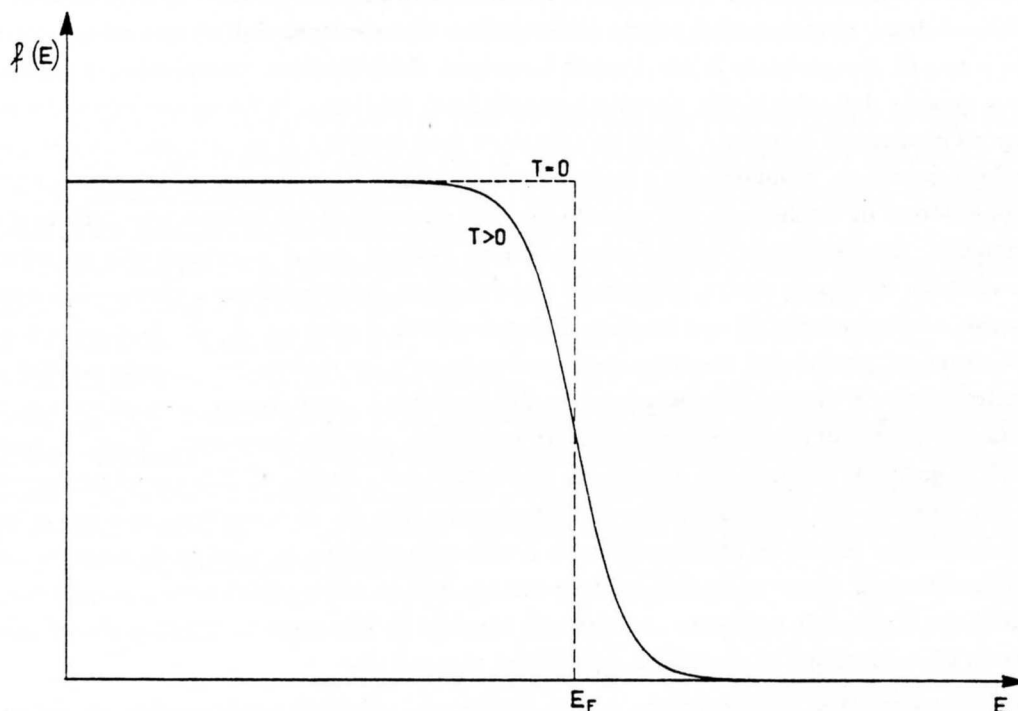


Fig.VIII.3

Per $T = 0 \text{ K}$ si vede che gli stati con energia $E < E_F$ sono occupati, mentre non lo sono quelli con energia $> E_F$. Questo è un risultato tipicamente quantistico, poiché classicamente ogni particella di un gas (quale è questo insieme di elettroni) a temperatura $T = 0 \text{ K}$ avrebbe energia cinetica nulla. A temperatura $T \neq 0$ si vede invece che la curva si smussa e che esiste una probabilità diversa da zero che anche gli stati con energia $> E_F$ siano occupati. L'effetto è stato estremamente esagerato nel disegno, se T corrisponde a una temperatura vicina a quella ambiente. Quanto al valore numerico di E_F esso è dell'ordine dei Volt, e si trova che dipende solo dal numero n di elettroni di conduzione per m^3 del metallo:

$$E_F = 3.64 \cdot 10^{-19} n^{\frac{2}{3}} \text{ eV}$$

Per il Tungsteno (densità $\rho = 18.8 \text{ g/cm}^3$, numero di massa $A=184$, due elettroni liberi per atomo) si trova $E_F = 8.95 \text{ eV}$. Tornando a $\rho(E)$ (numero di elettroni per cm^3 e per eV) si ha la seguente espressione, essendo γ la costante di proporzionalità fra $N(E)$ e $E^{\frac{1}{2}}$:

$$\rho(E) = \frac{\gamma E^{\frac{1}{2}}}{1 + \exp\left(\frac{(E-E_F)}{kT}\right)} \quad (\text{VIII.4})$$

che ha la forma riportata nella Fig.4. Essendo $E_F < E_B$, a 0 K nessun elettrone può abbandonare il metallo, poiché nessuno di essi possiede una energia sufficiente a superare la barriera ai bordi della buca, ovvero alla superficie del metallo. La differenza $E_B - E_F = E_W$ è detto *potenziale di estrazione* (in inglese *work function*). A temperatura $T > 0 \text{ K}$ la (4) ci dice che esiste una coda di elettroni con energia $> E_F$ e che essa si estende indefinitivamente e quindi anche oltre E_B ; pertanto un certo numero di elettroni ha energia sufficiente per abbandonare il metallo e dobbiamo quindi correggere la osservazione fatta prima, quando abbiamo escluso che gli elettroni di conduzione, a temperatura ambiente, potessero abbandonare un corpo conduttore; tuttavia, sperimentalmente, si

trova che per tutti i metalli questo numero è estremamente basso: ad esempio, per il Tungsteno si calcola che, a 300 K , escono dalla superficie $\approx 1.7 \cdot 10^{-50}$ elettroni $/(s \cdot cm^2)$. Aumentando la temperatura sufficientemente si può ottenere una emissione di elettroni affatto apprezzabile. La legge che dà l'intensità di corrente per unità di superficie a una certa temperatura è detta di *Dushman-Richardson*:

$$I = \mathcal{A}T^2 \exp\left(\frac{-eE_W}{kT}\right) \quad (\text{VIII.5})$$

con $\mathcal{A} \approx 10^2 A/(cm^2 K^2)$. Ad esempio per il tungsteno si trova che mentre per $T = 300\text{ K}$ $I = 2.5 \cdot 10^{-69} A/cm^2$, a 2500 K si possono ottenere $0.56 A/cm^2$.

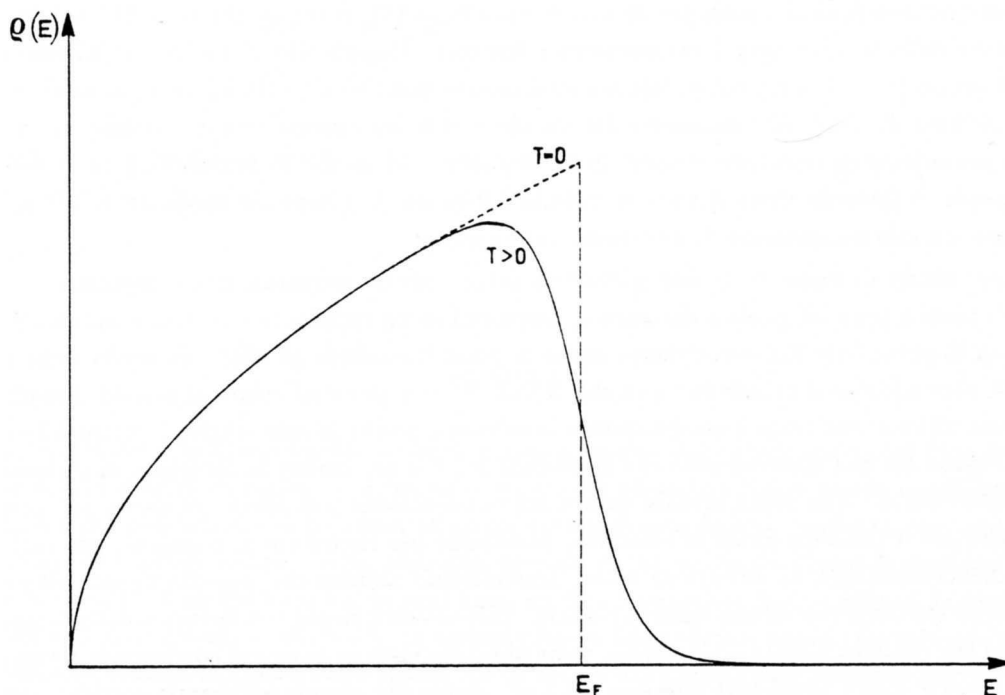


Fig.VIII.4

I metalli alcalino-terrosi, in particolare se sotto forma di ossidi, presentano delle ottime caratteristiche come emettitori di elettroni; a causa del piccolo valore di E_W sono sufficienti temperature dell'ordine di 1000 K per avere una resa di corrente confrontabile con quella del tungsteno a 2500 K . La relativamente bassa temperatura di esercizio consente loro vite molto lunghe (decine di migliaia di ore) e l'impiego del riscaldamento indiretto, illustrato precedentemente, vantaggioso per la migliore definizione del potenziale del catodo. Notiamo per inciso che l'emissione termoionica avviene secondo la legge di Dushman-Richardson (5), purché il metallo sottoposto a riscaldamento venga continuamente rifornito di una corrente di elettroni di intensità pari a quella termoionica, per esempio tramite un collegamento elettrico col conduttore che riceve gli elettroni emessi; se non si facesse così, ma si riscaldasse un corpo isolato, l'intensità della emissione termoionica si andrebbe rapidamente riducendo, in quanto l'ulteriore fuoriuscita di elettroni sarebbe contrastata dal campo elettrico dovuto all'accumulo di carica positiva sul conduttore, formatasi subito dopo l'emissione dei "primi" elettroni.

In base alla distribuzione riportata nella Fig.4, risulta che gli elettroni che escono dal metallo

hanno una distribuzione continua di energia, con un minimo di zero, corrispondente a una energia nell'interno del metallo uguale a E_B , e un massimo teoricamente esteso all'infinito. Si trova che l'energia cinetica media degli elettroni che lasciano il conduttore dipende solo dalla temperatura del medesimo e vale:

$$\bar{E} = 2kT = eV_T \quad (\text{VIII.6})$$

dove k è la costante di Boltzmann. Ad esempio, per $T = 1000 \text{ K}$, $\bar{E} = 0.17 \text{ eV}$, una energia che, come vedremo nel seguito, può essere quasi sempre trascurata, date le differenze di potenziale utilizzate nel cannone elettronico per il trasporto del fascio.

La resa di corrente data dalla (5) è in genere esorbitante rispetto alle intensità richieste da un tubo oscillografico (qualche μA); per di più, sempre dalla (5), si evince che la stabilità di emissione in funzione della temperatura è estremamente limitata. Disponendo di un catodo siffatto e di un altro elettrodo (anodo) a un potenziale moderatamente positivo rispetto a esso (da qualche decina a un centinaio di Volt), se l'emissione del catodo è sufficientemente elevata, si osserva la nascita di un meccanismo di *auto regolazione*, in conseguenza del quale, la corrente raccolta sull'anodo non dipende di fatto da nient'altro se non dalla differenza di potenziale applicata ai due elettrodi. Studiamo ora tale meccanismo di *emissione autoregolata*.

Supponiamo di disporre di una geometria catodo-anodo estremamente semplificata, cioè due elettrodi piani e paralleli posti a distanza d , contenuti in un recipiente evacuato e mantenuti a una differenza di potenziale V_a ; supponiamo anche di poter trascurare gli effetti di bordo e che tutti gli elettroni abbandonino il catodo con una stessa velocità u_{0T} perpendicolare al catodo. Sappiamo già che questa ultima condizione è assolutamente irrealistica, poiché la velocità degli elettroni è viceversa caratterizzata da una distribuzione che si estende fra 0 e ∞ ; inoltre la direzione di emissione non è senz'altro unica. Allo stato attuale questa schematizzazione può sembrare anche più pesante di quello che poi il risultato finale ci mostrerà; comunque per rispettare al massimo, pur nell'ambito della schematizzazione, la situazione reale, ammettiamo almeno che u_{0T} sia uguale alla velocità media degli elettroni che escono dalla superficie. Tale velocità cresce con la radice della temperatura e nei casi che effettivamente si incontrano, come abbiamo visto poco sopra, corrisponde a una energia $\frac{1}{2}mu_{0T}^2 = eV_T = 2kT$ (vedi (6)) inferiore a 0.2 eV , molto più piccola all'energia corrispondente alla tensione che stiamo applicando fra catodo e anodo. Facendo riferimento alla Fig.5a dove è riportato l'andamento della ddp fra catodo e anodo per varie temperature, ammettiamo che i potenziali di catodo e anodo siano fissi e mantenuti tali da un opportuno generatore di fem (Fig.5b); la corrente fra anodo e catodo sarà costituita dagli elettroni che lasciano il catodo e vengono attratti dal potenziale positivo dell'anodo. Il generatore di fem riporterà gli elettroni al catodo, mantenendo la neutralità elettrica di questo, nonché di tutti i conduttori del circuito. La presenza della corrente fra catodo e anodo comporta un gradiente nella densità spaziale di elettroni fra catodo e anodo; infatti, a regime, dovendo la corrente essere la stessa attraverso ogni sezione parallela ai due elettrodi ($\text{div } \vec{j} = 0$), essa risulterà dal moto di *pochi elettroni veloci* nelle vicinanze dell'anodo, e di *molti elettroni lenti* nelle vicinanze del catodo; infatti la velocità degli elettroni nello spazio interelettrodo è determinata dalla differenza di potenziale fra il punto ove essi si trovano e il catodo e quindi essa va aumentando via via che gli elettroni si avvicinano all'anodo. Si noti la differenza di questo meccanismo di conduzione rispetto al moto degli elettroni all'interno di un conduttore: in quest'ultimo la densità ρ degli elettroni è costante e gli elettroni possiedono una velocità proporzionale al campo elettrico, mentre nel caso attuale gli elettroni partono praticamente fermi dal catodo e poi accelerano via via che si avvicinano all'anodo. In questo caso cioè, è la dinamica del moto che stabilisce la densità dei portatori.

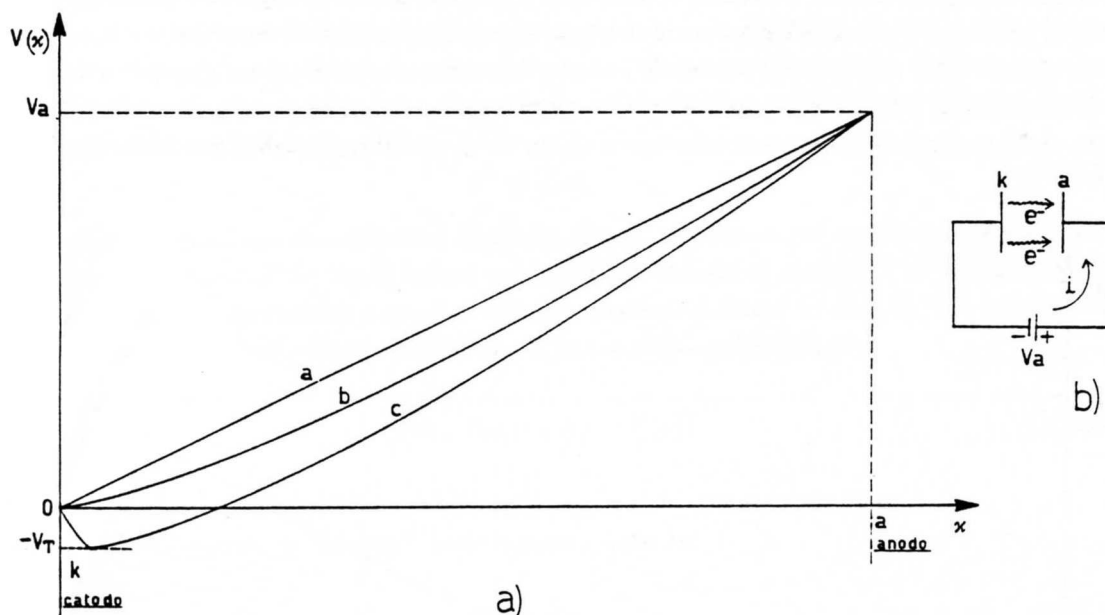


Fig.VIII.5

Per temperature sufficientemente basse le correnti emesse dal catodo sono così piccole che la presenza di una densità di carica negativa nello spazio fra gli elettrodi non altera sensibilmente la distribuzione del potenziale, che continua a essere caratterizzata da una pendenza costante (curva a)). Tuttavia se la temperatura cresce, aumenta, secondo la (5), anche il numero di elettroni emessi e poiché la velocità degli elettroni ha, in ogni caso, un limite superiore u_M , raggiunto in prossimità dell'anodo e dato da $\frac{1}{2}mu_M^2 = eV_a + eV_T$, la corrente fra gli elettrodi può aumentare soltanto tramite un aumento di densità di carica nello spazio tra di essi; d'altra parte tale aumento comporta una riduzione del potenziale nello spazio fra gli elettrodi, mentre restano costanti i valori del potenziale sul catodo e sull'anodo (vedi curva b)). In tali condizioni tutta la corrente che lascia il catodo continua a essere raccolta dall'anodo, poiché ogni elettrone che abbandona il catodo risale senza ostacoli la differenza di potenziale, e raggiunge l'anodo. Aumentare ulteriormente la temperatura può dar luogo a una concavità così pronunciata da produrre un minimo del potenziale, inferiore anche a quello del catodo (curva c)); è facile convincersi che tale minimo diventa sempre più profondo all'aumentare di T fino a che raggiunge, per $T = T'$, il valore $-V_{T'}$, che corrisponde proprio all'energia $eV_{T'} = \frac{1}{2}mu_{0T'}^2$ degli elettroni emessi; infatti supponiamo che questo minimo sia ancora più profondo di $-V_{T'}$: tutti gli elettroni verrebbero allora respinti da questa zona e ritornerebbero sul catodo, col che la densità locale di carica nella zona del minimo andrebbe rapidamente attenuandosi a causa del drenaggio di elettroni che parte dall'anodo; ciò riporterebbe il potenziale del minimo al valore opportuno per far rifluire corrente dal catodo (cioè proprio $-V_{T'}$).

Aumentare ulteriormente la temperatura fino a T'' oltre quella T' per cui si è ottenuto il minimo $-V_{T'}$ "agganciato alla temperatura", non altera sostanzialmente niente nel meccanismo anzidetto; cambierà solo il valore assoluto del minimo che sarà pari a $-V_{T''} = -\frac{2kT''}{e}$ ed eventualmente la sua collocazione; esso resta comunque confinato nelle vicinanze del catodo a causa del fatto che in questa zona, a causa della bassa velocità degli elettroni, si ha un maggior addensamento di carica.

La situazione di regime è pertanto la seguente: la barriera che si crea fa sì che la maggior parte degli elettroni che abbandonano il catodo, vi ritornino e che solo alcuni la superino; questi ultimi sono proprio nel numero giusto per mantenere la situazione autoconsistente di densità di carica e corrente nella regione dello spazio fra il minimo e l'anodo; la coesistenza di elettroni che, pur avendo tutti la stessa energia, passano o non passano la barriera stabilita dal minimo del potenziale è dovuta al fatto che il minimo del potenziale costituisce un punto di equilibrio instabile per il sistema.

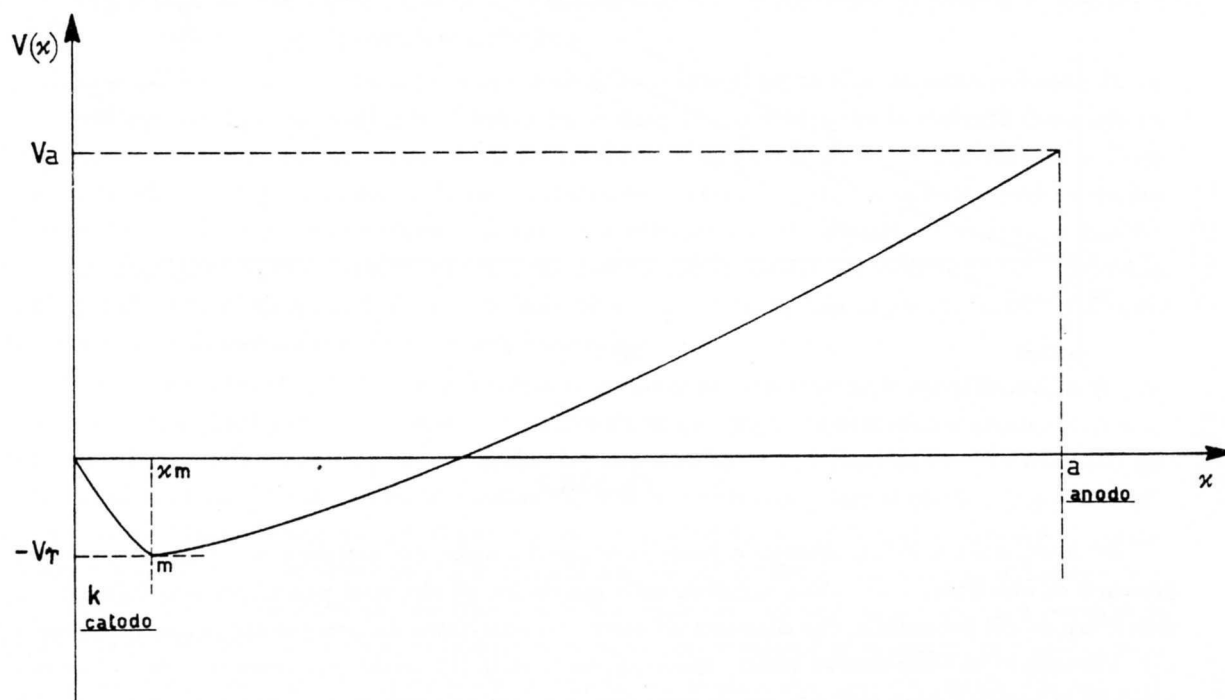


Fig.VIII.6

Inoltre alla coordinata x_m del minimo del potenziale $V(x_m) = -V_T$, si avranno elettroni con velocità nulla conseguentemente una densità localmente infinita di carica, dovendosi avere una corrente finita. Si tenga presente che in realtà gli elettroni non sono monoenergetici, bensì hanno una distribuzione continua di velocità: pertanto il minimo assume la profondità $-V_B(T)$ tale che gli elettroni con energia superiore a $eV_B(T)$ sono proprio nel numero giusto per mantenere nello spazio fra il minimo e l'anodo la situazione autoconsistente per quella corrente e quella densità di carica. Oltretutto per quest'ultima, avendosi una distribuzione continua di energia degli elettroni, non si hanno più divergenze in corrispondenza del minimo. Purtroppo questo tipo di trattazione del fenomeno, assai più aderente alla realtà dei fatti, richiede per essere affrontata quantitativamente un apparato matematico notevolmente più complicato; si preferisce esaminare il caso più schematico, anche se irrealistico, di una emissione di elettroni monoenergetici e unidirezionali, poiché esso consente ugualmente di cogliere i fatti salienti del fenomeno in studio e di stilare almeno la traccia della procedura di soluzione del problema applicabile anche al caso più realistico.

Procediamo quindi alla soluzione del problema, supponendo che la temperatura T del catodo sia superiore rispetto a quel valore limite T' per cui il minimo del potenziale nello spazio interelettrodo assume il valore $-V_{T'} = -\frac{2kT'}{e}$ aganciato alla temperatura. Dividiamo lo spazio fra gli elettrodi in due regioni (Fig.6), una, k-m, fra catodo e il punto di minimo del potenziale e un'altra, m-a, fra

il minimo del potenziale e l'anodo. Nella zona k-m gli elettroni emessi dal catodo, normalmente a esso e tutti con velocità u_{0T} , viaggeranno verso la zona del minimo del potenziale e ivi giunti verranno per la maggior parte respinti indietro verso il catodo; la differenza di queste due correnti di "andata" e "ritorno" costituisce la corrente \vec{j} che viene effettivamente raccolta dall'anodo e che è l'unico contributo di corrente nella zona m-a. Perciò nella zona k-m possiamo definire una densità di corrente di elettroni * di "andata":

$$j^+ = \rho_x^+ u_x^+ \quad (\text{VIII.7})$$

costituita dagli elettroni che abbandonano il catodo. Entrambi i fattori del membro di destra dipendono dalla coordinata x ; ρ^+ indica il valore assoluto della densità di carica (C/m^3) associata agli elettroni che viaggiano da sinistra verso destra (verso positivo dell'asse x) e u_x^+ la loro velocità che dipende dal potenziale $V(x)$ secondo il principio di conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2} m u_x^{+2}(x) = e [V_T + V(x)] \quad (\text{VIII.8})$$

dove $eV_T = \frac{1}{2} m u_{0T}^2$ con u_{0T} velocità iniziale degli elettroni diretta secondo l'asse x .

La densità di corrente di "ritorno", sarà viceversa data da:

$$j^- = \rho_x^- u_x^- \quad (\text{VIII.9})$$

E' facile convincersi che $u_x^- = -u_x^+$; infatti j^- è dovuta agli elettroni che, giunti con velocità 0 in $x = x_m$, ritornano verso il catodo e riacquistano la velocità perduta nella fase di avvicinamento al minimo del potenziale. Pertanto j , la densità totale di corrente di elettroni nel tratto m-a sarà data da:

$$j = j^+ + j^- = (\rho_x^+ - \rho_x^-) u_x^+ \quad (\text{VIII.10})$$

Nella regione m-a la corrente è esprimibile semplicemente come $j = \rho_x u_x$ con $u_x(x)$ data da una formula identica alla (8):

$$\frac{1}{2} m u_x^2(x) = e [V_T + V(x)]$$

Tenendo presente che il segno corretto per le densità di carica è opposto a quello finora adottato, per le due regioni, l'equazione di Poisson dà rispettivamente (caso unidimensionale):

$$k - m : \quad \frac{d^2 V(x)}{dx^2} = \frac{\rho_x^+ + \rho_x^-}{\epsilon_0} \quad (\text{VIII.11a})$$

$$m - a : \quad \frac{d^2 V(x)}{dx^2} = \frac{\rho_x}{\epsilon_0} \quad (\text{VIII.11b})$$

Dalle (7), (9), (10) e (11) abbiamo:

$$\rho_x^+ + \rho_x^- = \frac{j^+}{u_x^+} + \frac{j^-}{u_x^-} = \frac{2j^+ - j}{u_x^+} = \frac{2j^+ - j}{\left(\frac{2e}{m}\right)^{\frac{1}{2}} [V_T + V(x)]^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{VIII.12})$$

$$\rho_x = \frac{j}{u_x} = \frac{j}{\left(\frac{2e}{m}\right)^{\frac{1}{2}} [V_T + V(x)]^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{VIII.13})$$

* per ottenere la densità di corrente vera e propria occorre cambiare il segno delle (7),(9) e (10).

Come già accennato precedentemente, $\text{div } \vec{j} = 0$ in questa geometria comporta: $\vec{j} = \text{cost}$. Anche j^+ è, fissata la temperatura, una costante. Dalle (11), (12) e (13) si ottiene il seguente sistema di equazioni differenziali:

$$k - m : \quad \frac{d^2V(x)}{dx^2} = \frac{2j^+ - j}{\epsilon_0} \left(\frac{m}{2e}\right)^{\frac{1}{2}} [V_T + V(x)]^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{VIII.14a})$$

$$m - a : \quad \frac{d^2V(x)}{dx^2} = \frac{j}{\epsilon_0} \left(\frac{m}{2e}\right)^{\frac{1}{2}} [V_T + V(x)]^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{VIII.14b})$$

con la condizione che

$$\left(\frac{dV(x)}{dx}\right)_{x=x_m} = 0 \quad V(x_m) = -V_T = \frac{-2kT}{e} \quad (\text{VIII.15})$$

La (14a) si può anche scrivere:

$$2 \frac{d(V_T + V)}{dx} \cdot \frac{d^2(V_T + V)}{dx^2} = 2 \frac{2j^+ - j}{\epsilon_0} \left(\frac{m}{2e}\right)^{\frac{1}{2}} [V_T + V(x)]^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{d(V_T + V)}{dx} \quad (\text{VIII.16})$$

che integrata dà:

$$\left(\frac{d(V_T + V)}{dx}\right)^2 = 4 \frac{2j^+ - j}{\epsilon_0} \left(\frac{m}{2e}\right)^{\frac{1}{2}} [V_T + V(x)]^{\frac{1}{2}} + \text{cost} \quad (\text{VIII.17})$$

La costante vale 0 a causa del fatto che $\frac{d(V + V_T)}{dx} = 0$ per $V = -V_T$ e pertanto:

$$\frac{d(V_T + V)}{dx} = -2 \left(\frac{2j^+ - j}{\epsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{2e}\right)^{\frac{1}{4}} [V_T + V(x)]^{\frac{1}{4}} \quad x < x_m \quad (\text{VIII.18})$$

La (18) può essere integrata separando le variabili:

$$\int_0^V \frac{d(V + V_T)}{(V + V_T)^{\frac{1}{4}}} = -2 \left(\frac{2j^+ - j}{\epsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{2e}\right)^{\frac{1}{4}} x \quad (\text{VIII.19})$$

ottenendo così :

$$(V + V_T)^{\frac{3}{4}} - V_T^{\frac{3}{4}} = -\frac{3}{2} \left(\frac{2j^+ - j}{\epsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{2e}\right)^{\frac{1}{4}} x \quad x < x_m \quad (\text{VIII.20})$$

La (20) può anche porsi nella forma:

$$(V + V_T)^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{2} \left(\frac{2j^+ - j}{\epsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{2e}\right)^{\frac{1}{4}} (x_m - x) \quad x < x_m \quad (\text{VIII.20a})$$

Procedendo analogamente per $x > x_m$ si trova

$$(V + V_T)^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{2} \left(\frac{j}{\epsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{2e}\right)^{\frac{1}{4}} (x - x_m) \quad x > x_m \quad (\text{VIII.21})$$

Valutando la (20a) per $x = 0$ e la (21) per $x = d$ si ottiene:

$$\frac{d}{x_m} - 1 = \left(\frac{V_a}{V_T} + 1\right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{2j^+}{j} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{VIII.22})$$

da cui si vede che in tutti quei casi in cui $j^+ \gg j$, cioè per temperature $T > T'$, la distanza del minimo del potenziale (x_m) dal catodo risulta estremamente più piccola di d ; comunque anche nel

caso limite $j^+ = j$ resta $d \gg x_m$ in quanto generalmente $V_a \geq 100V_T$ per temperature attorno a 1000 K. Pertanto possiamo dire che nella zona fra catodo e anodo la (21), anche trascurando V_T rispetto a V e x_m rispetto a x , rappresenta con buona approssimazione l'andamento di V in funzione di x . Possiamo allora scrivere:

$$V^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{2} \left(\frac{j}{\epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{2e} \right)^{\frac{1}{4}} x \quad (\text{VIII.23})$$

Questa formula coincide con quella che avremmo ottenuto assumendo $u_{0T} = 0$; se avessimo però fatto questa ipotesi, avremmo perduto una buona parte della fisica del problema legata proprio al meccanismo di produzione e riassorbimento degli elettroni. Valutando la (23) per $x = d$ e tenendo conto che $I = Sj$ con S area dei due elettrodi, otteniamo:

$$I = \alpha V_a^{\frac{3}{2}} \quad (\text{VIII.24})$$

dove α è una costante che dipende dalla geometria e da costanti universali, non dalla temperatura. La (24) afferma che nel regime di funzionamento ora descritto, detto di *carica spaziale*, cioè di corrente non saturata ($j \leq j^+$), la corrente fra i due elettrodi varia come la potenza $\frac{3}{2}$ della ddp applicata ed è indipendente dalla temperatura del catodo. (*Legge di Langmuir-Child, Legge di V a $\frac{3}{2}$ o Equazione della carica spaziale*). Non è difficile mostrare che questo risultato vale anche in geometria differente, per esempio quando anodo e catodo sono due elettrodi cilindrici coassiali; sperimentalmente questa legge si può verificare proprio in una geometria di questo tipo, misurando l'andamento di V in funzione di I , cioè la *curva caratteristica* di un *diodo a vuoto*, costituito da un catodo caldo e da un anodo che raccoglie la carica degli elettroni.

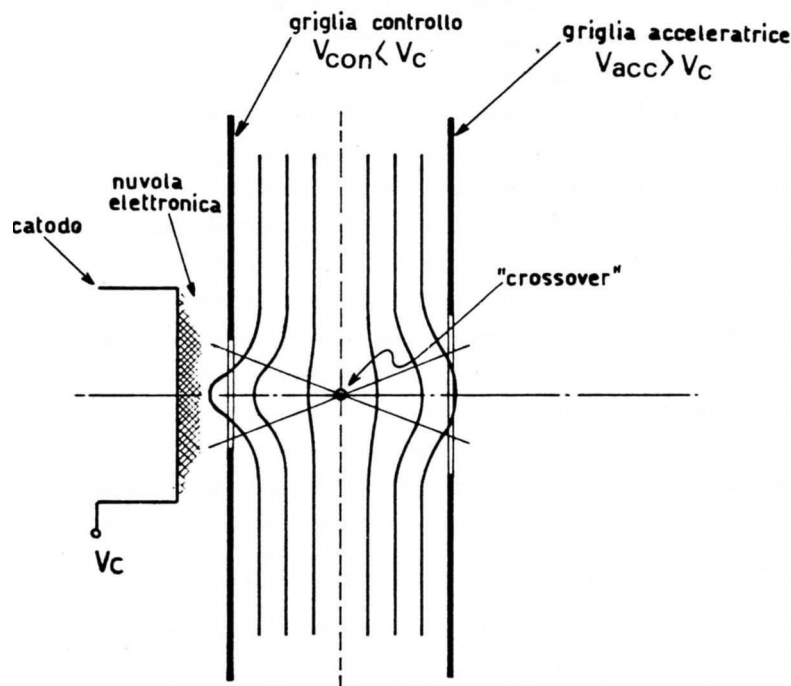


Fig. VIII.7

Tornando ora alla sorgente di elettroni del cannone elettronico, è evidente che la geometria (Fig.2) è assai diversa da quella ora descritta, non fosse altro perché è presente un elettrodo in

più; le conclusioni di sopra, non possono quindi trasferirsi rigidamente a questo caso. Tuttavia anche nel caso del cannone elettronico, si trova che la corrente estratta dal catodo dipende solo dalla geometria e dalla elettrostatica associata, non dalla temperatura del catodo, cioè il sistema lavora in un regime autoregolato di carica spaziale. Guardiamo, almeno qualitativamente, quello che accade, ridisegnando (Fig.7) il particolare del catodo, della griglia controllo e griglia acceleratrice. Prendiamo come riferimento la tensione V_C del catodo e indichiamo con V_{con} e V_{acc} la tensione degli altri due elettrodi; valori tipici delle tensioni V_{con} e V_{acc} sono la prima negativa e dell'ordine di una decina di Volt e la seconda positiva dell'ordine del migliaio di Volt. La zona a linee ombreggiate rappresenta la nube elettronica che insiste sopra il catodo, ovvero la zona a più alta densità di carica spaziale. E' questa la zona in cui gli elettroni sono presenti in gran numero e in cui si ha la situazione di regime in cui coesistono due correnti pressoché identiche, una di elettroni che fuoriescono dal catodo per effetto termoionico, un'altra di quelli che vi rientrano respinti proprio dalla carica negativa che sovrasta l'elettrodo. Come abbiamo visto prima queste correnti saranno identiche qualora la corrente estratta dagli elettrodi successivi sia nulla. Sono anche disegnate qualitativamente le linee equipotenziali (in figura la dimensione del foro della griglia controllo è stato assai esagerato rispetto alla realtà). La griglia controllo funge da schermo elettrostatico per il campo dovuto alla griglia acceleratrice. L'efficacia di questo schermo dipende dalla ddp V_{con} : quando la tensione della griglia controllo è inferiore a un determinato valore negativo, le superfici equipotenziali con $V > 0$ non riescono a penetrare nel foro e gli elettroni della nuvola elettronica non sentono alcun effetto da parte della griglia acceleratrice; aumentando la tensione della griglia controllo, le equipotenziali riescono a penetrare (come in Fig.7) nella zona della nuvola elettronica e un corrente di elettroni diversa da zero abbandona la zona del catodo. Si può così regolare l'intensità della corrente di elettroni, permettendo che una maggiore o minore frazione della nuvola elettronica venga interessata dall'effetto di estrazione. La geometria è tale che gli elettroni estratti da zone diverse della nuvola elettronica siano sospinti dalle linee di forza (vedi Fig.7) verso una unica zona, là dove il fascetto ha la sua minima sezione. Tale punto, detto di *crossover*, costituisce l'*oggetto* del sistema ottico di focheggiamento successivo; l'*immagine* del crossover si forma sullo schermo e appare all'esterno come un puntino luminoso. In conclusione, anche nel caso del cannone elettronico la estrazione del fascetto avviene secondo il meccanismo della carica spaziale; quello che cambia, rispetto al caso degli elettrodi piani e paralleli, è la elettrostatica "lontana" dal catodo, assai più complessa del caso precedente.

Dopo aver superato il crossover il fascetto di elettroni presenta una divergenza finita (esagerata nel disegno) e gli elettroni che lo costituiscono sono in fase di accelerazione. Una volta che gli elettroni sono giunti all'interno della griglia acceleratrice si trovano a un potenziale costante e possiederanno una energia cinetica data da

$$\frac{1}{2}mv^2 = eV_{acc} \quad (\text{VIII.25})$$

Supponendo $V_{acc} = 2000V$, la velocità dell'elettrone vale $v = \sqrt{\frac{2eV_{acc}}{m}} = 2.7 \cdot 10^7 m/s$, ovvero circa $\frac{1}{10}$ della velocità della luce (e pertanto il conto sarebbe stato più corretto farlo usando la cinematica relativistica).

Il sistema di elettrodi successivi (vedi Fig.8) ha la funzione di rendere il fascetto convergente; ciò è ottenuto tramite l'azione di lente elettrostatica compiuta dai tre elettrodi: *griglia acceleratrice*, *primo e secondo anodo* (quest'ultimo allo stesso potenziale della griglia acceleratrice). Il primo anodo (o *elettrodo di fuoco*) è posto a un potenziale (variabile) inferiore a quello degli altri due. Per ragioni di simmetria un elettrone che viaggia lungo l'asse (tradizionalmente detto asse z) subirà solo forze dirette come l'asse, ovvero un rallentamento passando dalla zona della griglia acceleratrice a quella

del primo anodo e una successiva accelerazione nel passaggio dal primo al secondo anodo, dopo di che proseguirà il suo moto lungo l'asse del sistema con velocità pari a quella che aveva nella zona della griglia acceleratrice.

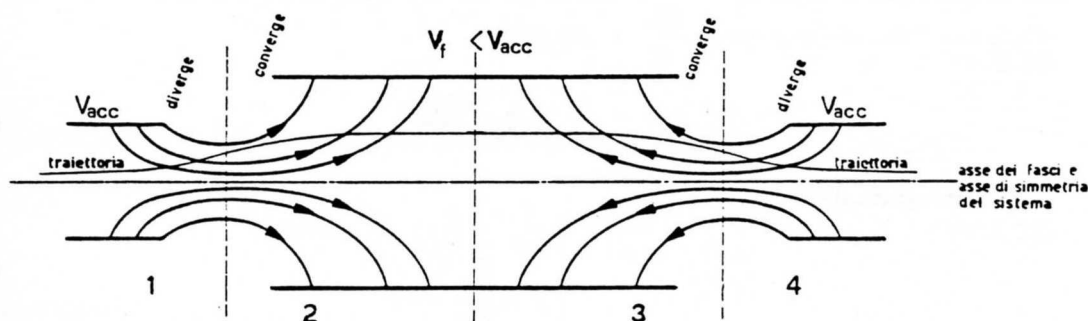


Fig.VIII.8

Con riferimento alla Fig.8, si nota che su un elettrone che procede fuori dall'asse agiscono, oltre le forze che lo rallentano e poi lo accelerano lungo z , anche delle componenti di forza perpendicolari a questa direzione; tali forze nelle zone 1 e 4 tendono a farlo divergere e nelle zone 2 e 3 a farlo convergere (nella Fig.8 sono disegnate le linee del campo). L'azione complessiva è convergente a motivo del fatto che nelle zone 2 e 3 l'elettrone procede più lentamente e quindi riceve, a parità di forze, un maggior trasferimento di impulso. Inoltre nelle zone 2 e 3 l'elettrone si trova più lontano dall'asse, là dove le linee di forza sono più incurvate e questo aiuta ulteriormente l'azione convergente. La tensione dell'elettrodo di fuoco viene regolata dall'utente durante il funzionamento dell'oscillografo fino a ottenere l'immagine sullo schermo la più definita possibile; tale immagine sarà tanto più piccola quanto più piccole sono le dimensioni del crossover (tipicamente qualche decimo di mm); si osservi anche che ritoccare l'intensità, cioè il potenziale della griglia controllo, provoca modifiche dell'elettrostatica nelle zone del crossover e quindi uno spostamento di quest'ultimo; pertanto un ritocco della tensione del fuoco si rende necessario dopo una modifica dell'intensità.

All'uscita del secondo anodo abbiamo un fascetto di elettroni con una convergenza abbastanza piccola (lo schermo è ancora assai distante) e tutti aventi un'energia pari a eV_{acc} . Nel seguito, per semplicità, considereremo gli elettroni come aventi divergenza nulla, cioè come se si trattasse di un fascetto molto collimato costituito da elettroni aventi tutti la stessa velocità diretta unicamente lungo z .

Nel tratto successivo il fascetto entra nella zona dove, in successione, subisce le deflessioni verticale e orizzontale. La deflessione del fascio è ottenuta nel seguente modo (Fig.9).

Chiamando y l'asse verticale, positivo verso l'alto, l'elettrone può acquistare una componente di velocità in questa direzione qualora il generatore V_{pv} applichi una ddp alla coppia di elettrodi. Nella Fig.9 la ddp è applicata da un generatore, mentre in pratica, e vedremo più tardi come ciò si realizza, questa tensione è proporzionale alla ddp istantanea presente all'ingresso Y dell'oscillografo, cioè alla ddp che vogliamo vedere riprodotta sullo schermo. I due elettrodi sono piani e paralleli, centrati sull'asse e sono detti *placchette deflettrici verticali*. La dimensione delle placchette lungo z sia b ,

mentre la distanza fra di loro sia a . Si noti che il potenziale medio delle placchette è sempre allo stesso valore di quello del secondo anodo (che è collegato a massa), per cui l'elettrone non subisce accelerazioni lungo z . Supponiamo ora che la tensione V_{pv} sia diversa da zero e mantenga questo valore per tutto il tempo che l'elettrone transita fra le placchette, ovvero che gli intervalli di tempo in cui la ddp V_{pv} varia apprezzabilmente il suo valore, siano molto maggiori del tempo di transito dell'elettrone fra le placchette. Trascurando gli effetti di distorsione del campo ai bordi, l'elettrone subirà una forza lungo y pari a $\frac{V_{pv}}{a} \cdot e$, per cui:

$$m\ddot{y} = \frac{eV_{pv}}{a} \quad (\text{VIII.26})$$

La (26) integrata dà

$$\begin{cases} \dot{y} = \frac{e}{m} \frac{V_{pv}}{a} t \\ y = \frac{1}{2} \frac{e}{m} \frac{V_{pv}}{a} t^2 \end{cases} \quad (\text{VIII.27})$$

mentre lungo z (vedi (25)):

$$z = z_0 + v_z t = z_0 + \sqrt{\frac{2eV_{acc}}{m}} t \quad (\text{VIII.28})$$

dove z_0 è la coordinata corrispondente all'estremo sinistro delle placchette.

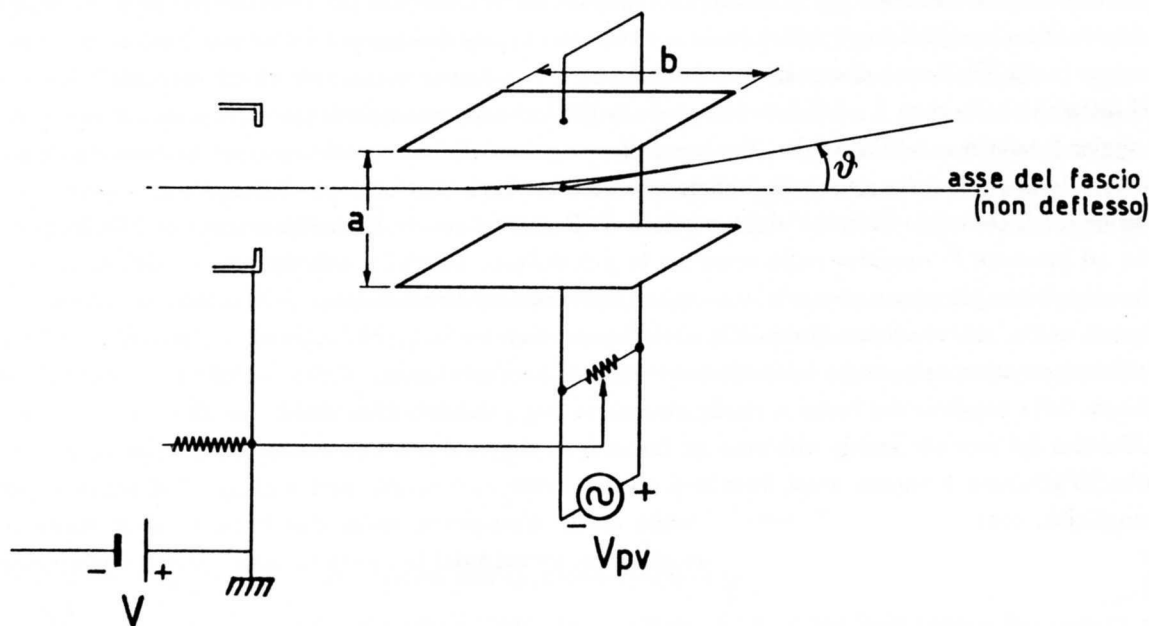


Fig. VIII.9

Si può anche calcolare il tempo t_{pp} che l'elettrone impiega per attraversare le placchette:

$$t_{pp} = \frac{b}{v_z} = b \sqrt{\frac{m}{2eV_{acc}}} \quad (\text{VIII.29})$$

In base alla (27) e alla (29) si può ricavare lo spostamento lungo y , y_{pp} che l'elettrone ha subito nell'attraversamento delle placchette:

$$y_{pp} = \frac{1}{2} \frac{e}{m} \frac{V_{pv}}{a} t_{pp}^2 = \frac{1}{4} \frac{V_{pv}}{V_{acc}} \frac{b^2}{a} \quad (\text{VIII.30})$$

e anche la componente di velocità acquistata lungo y :

$$\dot{y}_{pp} = \frac{e}{m} \frac{V_{pv}}{a} \frac{b}{v_z} \quad (\text{VIII.31})$$

La tangente dell'angolo di deflessione si può calcolare dal rapporto:

$$\tan \theta = \frac{\dot{y}_{pp}}{v_z} = \frac{e}{m} \frac{V_{pv}}{a} \frac{b}{v_z^2} = \frac{1}{2} \frac{V_{pv}}{V_{acc}} \frac{b}{a} \quad (\text{VIII.32})$$

Dalle (32) e (30) si ottiene allora:

$$\tan \theta = \frac{1}{2} \frac{V_{pv}}{V_{acc}} \frac{b}{a} = \frac{y_{pp}}{\frac{b}{2}} \quad (\text{VIII.33})$$

Ciò significa che, indicando con L la distanza, lungo z , dello schermo dal centro delle placchette, lo spostamento d lungo y sullo schermo si può calcolare semplicemente come (vedi Fig.10):

$$d = L \tan \theta = \frac{Lb}{2V_{acc}a} V_{pv} \quad (\text{VIII.34})$$

In maniera del tutto simile operano le placchette deflettrici orizzontali, che il fascetto incontra successivamente.

Per una coppia di placchette la cosiddetta *sensibilità di deflessione* è data da:

$$\frac{d}{V_{pv}} = \frac{Lb}{2V_{acc}a} \quad (\text{VIII.35})$$

e perciò a parità di b , a e V_{acc} è maggiore per la coppia di placchette più lontane dallo schermo (quasi sempre quelle di deflessione verticale). Facciamo un caso numerico: se $a = 1 \text{ cm}$, $b = 2 \text{ cm}$, $V_{acc} = 2000 \text{ V}$, $L = 40 \text{ cm}$, otteniamo $\frac{d}{V_{pv}} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ cm/V}$, cioè per avere una deflessione $d = 1 \text{ cm}$ sullo schermo occorre applicare una ddp di 50 V . Si vede così che se vogliamo mettere in evidenza differenze di potenziale, presenti all'ingresso dell'oscillografo, molto inferiori al *Volt* occorre interporre un amplificatore di tensione fra l'ingresso e le placchette. Torneremo su questo punto nel prossimo paragrafo.

Dalla (34) si potrebbe arguire che convenisse diminuire la tensione di accelerazione V_{acc} per migliorare la sensibilità verticale. Il sistema sarebbe senz'altro efficace, ma comporterebbe un aumento del tempo di transito degli elettroni fra le placchette con la contropartita di una riduzione della banda passante dell'oscillografo, ovvero della capacità di riprodurre fedelmente di differenze di potenziale rapidamente variabili. Infatti, come è stato precedentemente osservato, affinché lo spostamento del punto di impatto del fascetto sullo schermo riproduca il valore *istantaneo* della tensione, occorre che t_{pp} sia il più piccolo possibile rispetto ai tempi in cui la ddp varia, per esempio rispetto al periodo della forma d'onda sinusoidale che deve essere riprodotta.

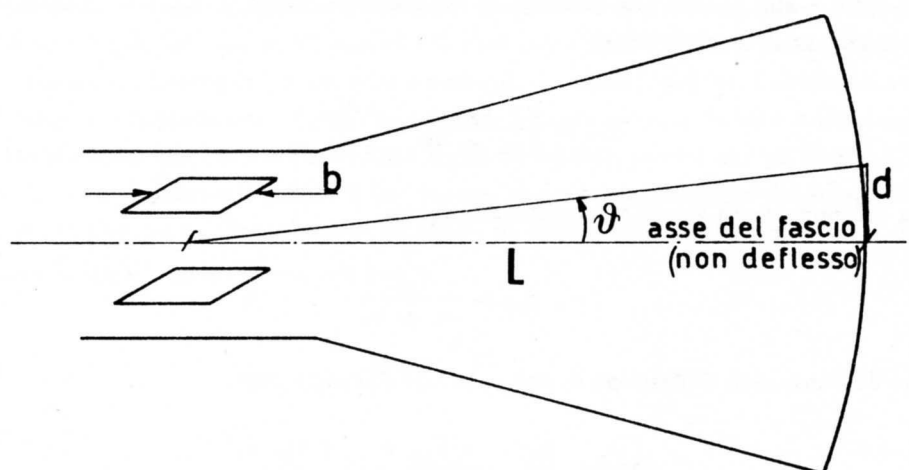


Fig.VIII.10

Calcolando questo tempo t_{pp} (vedi (29)), con i nostri dati numerici, risulta:

$$t_{pp} \approx 0.74 \cdot 10^{-9} s$$

cioè dell'ordine del ns , il che vuol dire, ad esempio, che ddp sinusoidali con periodo $T = 100ns$ ($f = 10MHz$) non possono essere riprodotte con una accuratezza molto migliore del percento. Oscillografi con bande passanti di questo ordine devono ricorrere a tensioni di accelerazione superiori (ma non eccessivamente superiori per mantenere una buona sensibilità di deflessione) e guadagnare nella geometria delle placchette, ad esempio avvicinandole. Per avere poi delle bande passanti particolarmente elevate, si ricorre a sistemi di deflessione in cui vi sono più coppie di placchette in successione e la ddp non viene applicata a tutte le coppie contemporaneamente, ma viene applicata in modo che essa “insegua” l'elettrone durante il suo tragitto attraverso di esse (sistema a *onda viaggiante*).

Dopo aver attraversato entrambe le coppie di placchette di deflessione verticale e orizzontale, il fascetto, dopo un tragitto di 30-40 cm va a colpire la parte interna dello schermo; esso, come d'altronde tutto l'involucro, è di vetro ed è ricoperto all'interno di particolari sostanze che hanno la proprietà di emettere luce quando sono colpite da elettroni energetici. La zona di impatto appare all'esterno come un puntino luminoso, se il fascio è fermo, oppure una traccia continua se esso si muove rapidamente rispetto ai tempi di persistenza dell'immagine sulla retina. Le sostanze che emettono luce sono detti *fosfori* (ma hanno poco o nulla a che vedere con il Fosforo elemento chimico, in genere si tratta di ortosilicati di zinco con alcune appropriate impurezze). Queste sostanze emettono luce non solo in tempi brevissimi dopo l'urto degli elettroni (*fluorescenza*) ma anche mostrano un contributo di luce lento, con decadimento esponenziale (*fosforescenza*). A seconda dei fosfori usati si possono avere persistenze sullo schermo che durano da pochi microsecondi a alcuni secondi (che si vanno a sommare ai tempi di persistenza dell'immagine sulla retina).

L'intensità della luce aumenta, oltre che con la intensità della corrente del fascetto, anche con l'energia degli elettroni. Durante la rappresentazione di una ddp rapidamente variabile il fascetto percorre i relativi spostamenti in tempi corrispondentemente brevi e pertanto insiste brevemente sul fosforo; la capacità di dare, ciò nonostante, una immagine percepibile all'occhio umano (o in grado

di impressionare una pellicola fotografica) è data dalla cosiddetta *velocità di scrittura*, misurata in cm/s (in genere cm/ns); essa dice cioè quanto lungo è il tratto “sufficientemente” illuminato che l'oscillografo può tracciare in una certa unità di tempo, col controllo di intensità al massimo. Ovviamente la velocità di scrittura deve essere tanto più grande quanto più ampia è la banda passante dell'oscillografo. Alte velocità di scrittura potrebbero ottenersi aumentando la energia degli elettroni tramite la tensione di accelerazione, ma abbiamo già visto che questo comprometterebbe la sensibilità di deflessione. Si usa allora il sistema della post-accelerazione che in qualche caso è realizzato ponendo a un potenziale dell'ordine della decina di migliaia di *Volt* un sistema di elettrodi disposti sulla superficie interna del tubo nella zona compresa fra le placchette deflettrici e lo schermo; al medesimo potenziale è posto anche un elettrodo sottilissimo di alluminio evaporato sulla superficie interna del fosforo. Gli elettroni del fascio sono sufficientemente energetici da passare attraverso questo sottile strato di alluminio senza perdere molta velocità. Oltre a quello ora detto, lo strato di alluminio ha altri due importanti scopi: esso impedisce l'accumulo della carica negativa sul fosforo depositata dal fascetto di elettroni e inoltre riflette verso l'esterno la luce che viene emessa all'indietro, guadagnando così un fattore circa 2 nella intensità luminosa della traccia.

Infine, affinché gli elettroni durante il loro moto dal catodo verso lo schermo seguano esattamente la traiettoria definita dai campi elettrici degli elettrodi, essi devono essere schermati dai campi magnetici esterni, fra i quali anche quello terrestre. Ciò è particolarmente necessario nel tratto entro il cannone elettronico, dove gli elettroni sono più lenti; pertanto intorno al “collo” del CRT, là dove c'è il cannone elettronico, è posto un schermo magnetico, costituito da un cilindro cavo di materiale ad alta permeabilità (vedi Appendice D per il calcolo dell'efficacia di tale tipo di schermi).

3.— *Gli stadi di ingresso e gli amplificatori delle placchette deflettrici*

In questo paragrafo vengono accennati argomenti e usati concetti (*impedenza*, ad esempio) che sono svolti o introdotti nei capitoli successivi. Consigliamo pertanto il lettore a riconsiderare con maggiore attenzione questi argomenti una volta che abbia acquistato familiarità col seguito del corso.

Abbiamo visto che per avere deflessioni dell'ordine dei centimetri (che sono poi quelle normalmente utilizzate, essendo in genere lo schermo delle dimensioni di $10\text{ cm} \times 10\text{ cm}$) occorre applicare alle placchette delle ddp dell'ordine di varie decine di *Volt*. Affinché l'oscillografo sia utilizzabile per presentare sullo schermo sia differenze di potenziale di alcune decine di *Volt* che di pochi *milliVolt*, fra l'ingresso vero e proprio dell'oscillografo (consideriamo l'ingresso Y) e le placchette è interposto il dispositivo che consente il cambio di portata, cioè dei V/cm riferiti all'ingresso; tale sistema consiste generalmente in una rete puramente passiva (*attenuatore*) seguita da un sistema di *preamplificazione* e *amplificazione finale* (Fig.11). Il commutatore DC-AC serve a disinserire o inserire in serie all'ingresso un condensatore di valore attorno a qualche centesimo di μF (abbastanza grosso cioè, da costituire una impedenza piccola rispetto alla resistenza del partitore seguente); generalmente è preferibile usare la posizione DC (accoppiamento in continua), mentre la posizione AC va usata tutte le volte che si vuole eliminare dal segnale che vogliamo osservare all'oscillografo un piedistallo di tensione continua. La rete che segue è un partitore compensato (descritto ampiamente nel Cap.XII,§4) di resistenza complessiva pari a $1\text{ M}\Omega$ e capacità dell'ordine di 1–2 decine di pF ; in genere l'attenuatore divide per fattori 10, 1-10-100 tipicamente.

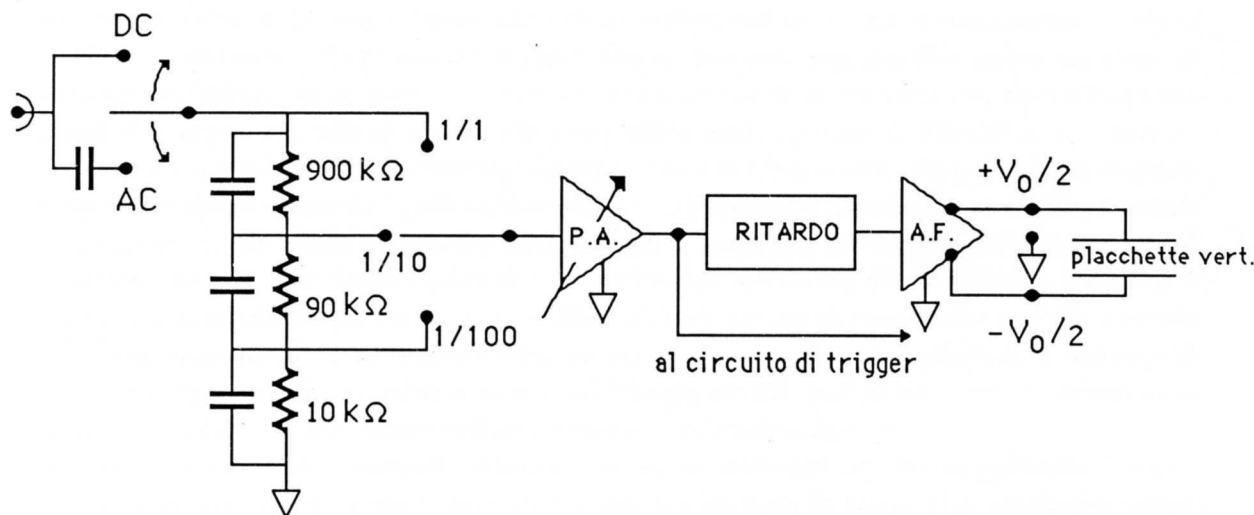


Fig.VIII.11

La manopola che seleziona la sensibilità del canale, commuta il deviatore su 1 o 1/10 o 1/100 a seconda che si scelga una sensibilità compresa fra 5 mV/cm e 20 mV/cm , oppure fra 50 mV/cm e 200 mV/cm oppure, infine, fra 100 mV/cm e 2 V/cm . Questo viene fatto per limitare al massimo gli ulteriori controlli di guadagno all'interno del preamplificatore P.A.. Lo stadio attivo di preamplificazione e amplificazione lavora presso a poco sempre allo stesso modo, cioè con ddp in ingresso ricondotte tutte a un medesimo campo di valori (da 0 a $\pm 100 \text{ mV}$ circa). Brevemente descriviamo la funzione degli stadi di amplificazione: gli amplificatori di tensione sono dei dispositivi elettronici (basati cioè su transistori bipolari, transistori a effetto di campo, valvole termoioniche) che hanno la caratteristica di avere due terminali di ingresso e due terminali di uscita e di presentare fra i terminali di uscita una ddp $V_0 = A_v V_i$ dove A_v è una costante caratteristica del dispositivo detta *guadagno o fattore di amplificazione*, e V_i è la ddp presente fra i terminali in ingresso; molto spesso uno dei terminali di ingresso e uno di uscita sono collegati insieme e costituiscono l'elettrodo comune di riferimento per le tensioni degli altri due; un'altra caratteristica di un amplificatore ideale di tensione è che l'impedenza fra i terminali di ingresso tende all'infinito, mentre quella di uscita, cioè l'impedenza interna di Thévenin fra i terminali di uscita, tende a zero. Il dispositivo rappresentato con un triangolo "P.A." in Fig.11 rappresenta uno di questi amplificatori, nel quale il guadagno A_v può essere variato, agendo sulla manopola che seleziona la sensibilità; più propriamente si tratta di un preamplificatore in quanto esso fornisce un primo contributo alla amplificazione complessiva e tratta quindi differenze di potenziale di valore ancora moderatamente basso rispetto ai valori finali che è necessario ottenere. L'impedenza di ingresso del preamplificatore, grande rispetto a $1 \text{ M}\Omega$, fa sì che, indipendentemente dalla posizione del partitore, l'impedenza di ingresso del canale Y sia sempre la stessa, vale a dire $1 \text{ M}\Omega$.

La funzione del "ritardo" (Fig.11) è proprio quella di ritardare la trasmissione del segnale; la necessità di questa funzione sarà chiara nel prossimo paragrafo, così come quella della derivazione verso il circuito di trigger. Il preamplificatore P.A. è seguito dallo stadio finale di amplificazione che moltiplica per un ulteriore fattore la tensione, fino a portarla ai valori necessari per la deflessione. Una particolarità di questo stadio finale è che la ddp V_0 è fornita alle placchette come $\frac{V_0}{2}$ e $-\frac{V_0}{2}$ rispetto al comune in modo tale che il potenziale medio delle placchette rimanga a zero (si veda il paragrafo precedente, Fig.9).

Torniamo brevemente sul problema delle bande passanti: le placchette deflettrici, essendo due

conduttori estesi e affacciati, costituiscono un carico capacitivo per l'amplificatore finale, dell'ordine della decina di pF ; tale carico è senz'altro trascurabile a frequenze basse, ma a frequenze alte può essere non indifferente: per $f = 100MHz$, $|\frac{1}{j\omega c}| = \frac{1}{2\pi \cdot 10^8 \cdot 10^{-11}} \approx 150\Omega$. Pertanto l'amplificatore finale oltre a dover trattare ddp elevate deve anche avere una impedenza di uscita sufficientemente bassa, così da contenere l'effetto del carico capacitivo che tende a provocare una attenuazione del segnale e anche un suo slittamento di fase; tutto ciò andrebbe a compromettere la fedeltà della riproduzione dei segnali alle alte frequenze.

In genere un oscillografo possiede almeno due canali di ingresso; nel funzionamento X-Y, un canale comanda le placchette verticali (Y) e un altro comanda quelle orizzontali (X). Nell'impiego più frequente, il segnale di interesse è inviato al canale Y, mentre sul canale X è l'oscillografo medesimo a inviare una ddp opportuna in modo da riprodurre l'andamento della ddp sul canale Y in funzione del tempo. Guardiamo come questo è realizzato.

4.— *La base dei tempi e il circuito di trigger*

Nella Fig.12 sono rappresentate, con lo stesso asse dei tempi, due forme d'onda di cui la prima rappresenta la ddp applicata dagli amplificatori alle placchette verticali, proporzionale quindi alla ddp all'ingresso, e l'altra è invece la ddp applicata alle placchette di deflessione orizzontale. Supponiamo che l'ampiezza della ddp inviata alle placchette orizzontali sia quella corrispondente a uno spostamento di tutta la dimensione x dello schermo (generalmente 10 cm). Consideriamo per ora l'intervallo di tempo fra T_1 e T_2 ; poiché la ddp applicata alle placchette orizzontali cresce linearmente col tempo, il fascetto si sposta nella direzione x con la stessa legge, mentre lungo l'asse y esso compie gli spostamenti dovuti alla sinusoide presente all'ingresso Y. Pertanto la porzione di sinusoide compresa fra T_1 e T_2 comparirà sullo schermo, esattamente così come è disegnata in figura se le placchette orizzontali sono collegate in modo che una ddp V_x positiva produca una deflessione verso destra guardando lo schermo (l'ampiezza lungo y dipenderà ovviamente anche dalla selezione effettuata sulla manopola della portata Y, oltre che dall'ampiezza del segnale). Al tempo T_2 il fascetto, giunto al bordo destro dello schermo, tornerà rapidamente all'estremo sinistro. Al tempo T_3 l'operazione si ripete, iniziando come si vede dallo stesso valore che la forma d'onda sull'asse y aveva assunto in T_1 , cioè quando la ddp ha lo stesso valore e anche la stessa pendenza. Pertanto da T_3 a T_4 avviene una seconda *spazzolata* dello schermo che traccia una immagine esattamente identica alla precedente. Si ottiene così, ripetendo continuamente l'operazione, una immagine persistente sullo schermo. La forma d'onda rappresentata nella parte inferiore della Fig.12 è la ddp che un circuito dell'oscillografo, detto *base dei tempi*, applica alle placchette orizzontali per avere la rappresentazione della ddp all'ingresso Y in funzione del tempo; essa è detta, a causa della sua forma, *dente di sega* (*saw-tooth*). Si osservi intanto che con una forma d'onda periodica si può avere un'immagine ben visibile sullo schermo anche con una modesta velocità di scrittura, perché lo spazzolamento della stessa porzione di segnale viene continuamente ripetuto; velocità di scrittura elevate servono soprattutto quando si vogliono vedere impulsi di breve durata che siano o singoli o a cadenza molto lenta.

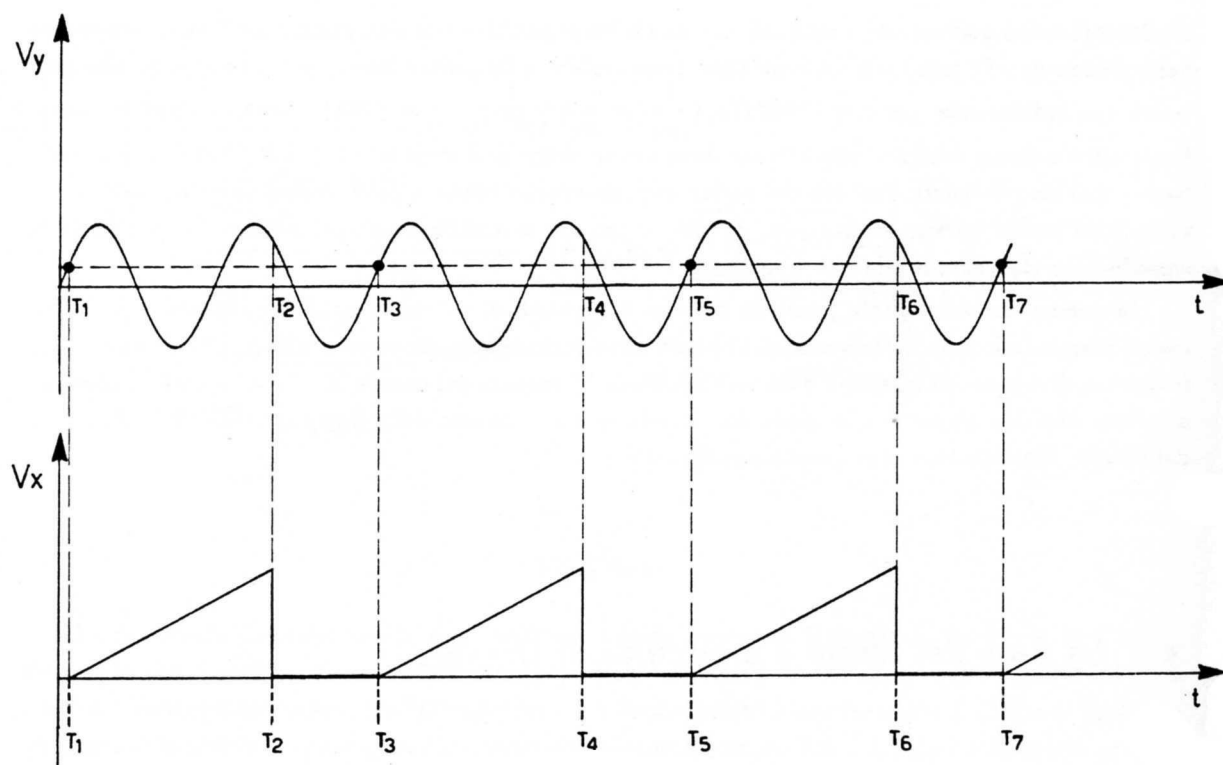


Fig.VIII.12

E' opportuno avere la possibilità di variare la velocità di scansione sull'asse x, a seconda della frequenza del segnale sull'asse y; per far ciò il circuito della base dei tempi varia la pendenza del dente di sega, lasciando l'ampiezza inalterata; è così possibile avere una spazzolata completa dell'asse delle x in tempi diversi. La manopola che controlla questa funzione (comando della base dei tempi) reca appunto indicati i "s/cm" che corrispondono alle varie posizioni. Tipicamente si va da circa 1 s/cm fino a un valore che corrisponde in genere alla massima velocità di scrittura dell'oscillografo (ad esempio 20 ns/cm per un oscillografo da 50 MHz è un valore tipico). Per realizzare la forma d'onda a dente di sega, un metodo è quello di usare un integratore di Miller al cui ingresso sia inviata una corrente costante; cambiare il tempo di scansione significa in questo caso variare o il condensatore di reazione o la corrente che lo carica. La frazione del dente di sega a pendenza costante è detta *rampa* (*ramp* in inglese); poiché solo durante la rampa viene prodotta l'immagine di interesse, un circuito apposito (circuito di *blanking*) fa in modo che, durante tutte le fasi del dente di sega diverse dalla rampa, l'intensità del fascio sia ridotta a zero; ciò viene fatto polarizzando negativamente, in maniera pressoché istantanea, la griglia controllo del cannone elettronico; si evitano così indesiderati illuminamenti durante il ritorno del fascetto all'origine e una sgradevole intensità nel punto dell'origine stessa. La frequenza del dente di sega non può essere fissa; abbiamo già visto che essa deve essere "agganciata" alla frequenza di ripetizione del segnale presente all'ingresso Y; infatti, qualora la rampa, in presenza di un segnale periodico, non partisse sempre in coincidenza con lo stesso valore e la stessa pendenza del segnale sull'ingresso Y, sullo schermo, anziché un'immagine persistente (somma di tante immagini ognuna identica all'altra), avremmo una presentazione di immagini più o meno incoerenti. Il cosiddetto *circuito di trigger* (grilletto) dell'oscillografo ha proprio questa funzione: esso riconosce quando il segnale Y supera una certa soglia (*level*) e ha una determinata pendenza (*slope*) e, se non è già in atto una scansione, fa partire la rampa. Sul circuito di trigger si può agire dall'esterno scegliendo la pendenza (+ o -) e il livello; il

circuito di trigger opera su un segnale derivato da una uscita dal primo stadio di amplificazione prima del ritardo sul canale Y (vedi Fig.11). La funzione del ritardo (circa $100 ns^*$) è proprio quella di fare in modo che almeno ai tempi di scansione più brevi la immagine contenga anche la porzione di segnale che ha dato luogo alla partenza della rampa; infatti, dall'istante di riconoscimento delle condizioni di trigger valido alla partenza della rampa, intercorre necessariamente un certo lasso di tempo e la presentazione dell'immagine sullo schermo risulterebbe troncata all'inizio della scansione. Il ritorno a zero della tensione massima della rampa è in genere molto breve, principalmente per ridurre i tempi morti nella presentazione; il ritorno a zero nel caso che la base dei tempi sia realizzata con un integratore di Miller, corrisponde alla scarica veloce del condensatore caricato a corrente costante durante la salita della rampa medesima.

5.— I comandi dell'oscillografo

In questo paragrafo descriveremo alcuni controlli essenziali o almeno molto utili per un intelligente utilizzo dell'oscillografo. Tralasciamo la descrizione di molti altri o perché di scarso utilizzo nelle applicazioni più correnti o perché particolari di certi strumenti e non diffusi universalmente.

Abbiamo già visto che fra i vari controlli riguardo all'immagine, vi sono la intensità (che regola il potenziale della griglia controllo), il fuoco (che regola il potenziale del primo anodo). Abbiamo anche già descritto i controlli di sensibilità sull'ingresso Y; analogo comando, ma talvolta più limitato come gamma, si trova sull'ingresso X, attivo quando è esclusa la base dei tempi interna. Della base dei tempi è già stato detto, così come della possibilità di regolare la soglia e la pendenza per l'intervento del trigger. Quanto al comando di trigger, esso ha almeno altre tre posizioni che sono assai utili: la posizione "LINE", ovvero la sincronizzazione della base dei tempi con l'alimentazione della rete (cioè la tensione a $50 Hz$ $220 V$, in inglese *line*), la posizione "AUTO" e la posizione "EXT". Nel primo caso la rampa parte quando la tensione alternata di alimentazione dell'oscillografo, ovvero la rete, assume, ad esempio, il valore di zero *Volt*; una ddp sinusoidale qualsiasi avrà una relazione di fase completamente a caso e non stabile con la ddp di rete; la sincronizzazione con la rete darà luogo a scansioni scorrelate col segnale all'ingresso Y, a meno che non esista nel segnale almeno una componente che sia direttamente dovuta alla rete; questo ad esempio può accadere se il circuito fra due terminali del quale è prelevata la tensione applicata all'ingresso Y, presenta un accoppiamento induttivo o capacitivo con il circuito di distribuzione della rete; in questo caso il segnale, o almeno una sua componente, risulterà in fase con il trigger e darà luogo a una immagine persistente sullo schermo; poiché questi effetti spuri dovuti agli accoppiamenti con la rete sono indesiderati e vanno eliminati, la sincronizzazione con la frequenza di rete aiuta enormemente la diagnosi e quindi anche la cura del problema. Nella posizione di trigger AUTO, se all'ingresso dell'oscillografo è presente una ddp che dà luogo a segnali di trigger, un circuito opportuno forza il livello della soglia a zero, cosicché la scansione parte non appena la ddp supera il valore di zero *Volt*, indipendentemente dal valore del livello impostato dall'utente; in assenza di segnali di trigger, oppure quando la loro frequenza è inferiore a qualche decina di *Hz*, il trigger AUTO fa partire la rampa a cadenza fissa. Questa posizione del trigger è particolarmente utile quando con l'oscillografo si vogliono osservare livelli di tensione continua, che non sono in grado di far scattare il circuito di trigger, sensibile solo alle variazioni della ddp di ingresso. Quando il comando del trigger è nella posizione "EXT", il

* ritardi di valore molto maggiore comportano distorsioni del segnale e non sono quindi utilizzati.

trigger non interviene sulla ddp all'ingresso Y, ma su un ulteriore segnale applicato dall'utente a due terminali contrassegnati da una analoga sigla (EXT). Vedremo nel seguito del corso l'utilità di questo comando.

La posizione dell'origine degli assi x e y, che in assenza di segnale è nel centro dello schermo, può essere controllata tramite due comandi che agiscono indipendentemente sulle due coppie di placchette applicando delle tensioni di "polarizzazione" continue, alle quali poi si vanno a sommare i segnali veri e propri (controlli di *Posizione X* e *Posizione Y*). Ad esempio il dente di sega vero e proprio non è esattamente come mostrato nella Fig.12, ma in realtà è la somma di due tensioni, una negativa che sposta tutto a sinistra il fascetto e un'altra, il dente di sega come noi abbiamo disegnato, con la rampa che inizia dal livello zero di tensione. I controlli di posizione sono utilissimi, in quanto consentono di disporre la forma d'onda dove l'utente ritiene più opportuno, per esempio allo scopo di ridurre gli errori di lettura delle tensioni: la lettura delle ampiezze lungo x e y si fa infatti confrontando l'immagine che si forma sullo schermo con un reticolo inciso sul medesimo; il controllo dello spostamento dell'immagine consente di sfruttare meglio le divisioni del reticolo.

Talvolta accade che, proprio a causa di questi gradi di libertà, il segnale sia fuori del campo visivo; riottenere l'immagine, lavorando alla cieca, potrebbe non essere banale; esiste però un pulsante ("*beam finder*") che, premuto, riporta il segnale entro il campo visivo, mantenendolo pur sempre fuori centro e mostrando così in quale verso occorre muovere i controlli di posizione X e Y; l'effetto è ottenuto diminuendo di un fattore costante tutte le tensioni applicate alle placchette.

Tutti i moderni oscillografi di un livello anche solo discreto hanno almeno due ingressi Y_1 e Y_2 , cioè, come si dice, sono oscillografi a doppia traccia; il cannone continua a essere singolo, ma l'oscillografo può presentare sullo schermo due tracce, con lo stesso asse dei tempi, ognuna riferita a uno dei due canali Y_1 e Y_2 . Ciò può essere ottenuto in due maniere diverse: in un modo di funzionamento (*ALternato*) l'oscillografo in una spazzolata lungo x riproduce sull'asse y la ddp applicata al canale Y_1 , nella successiva quella del canale Y_2 e poi nuovamente Y_1 e così via. In questo tipo di funzionamento, quando viene presentato Y_1 , all'amplificatore verticale viene applicata, tramite un commutatore elettronico, la ddp presente all'ingresso Y_1 e viceversa per Y_2 . I due canali hanno il partitore di ingresso e il preamplificatore ognuno indipendente dall'altro. Se il tempo di una spazzolata è breve rispetto al tempo di persistenza dell'immagine sulla retina (o sul fosforo), si ottengono due tracce apparentemente contemporanee ed entrambe chiaramente visibili. Per tempi di scansione così lenti che percepiremmo questa alternanza della scansione e la contemporaneità della presentazione non sarebbe neppure apparente, conviene usare il modo (*CHOPped*) durante il quale, all'interno di una singola spazzolata l'oscillografo commuta sull'asse y i segnali Y_1 e Y_2 in rapida successione, spegnendo il fascio durante le commutazioni; se la cadenza con cui l'oscillografo commuta fra un canale e l'altro è molto alta rispetto all'inverso del tempo di scansione prescelto, i segnali appaiono continui; solo per tempi di scansione molto brevi, dove è da preferire il funzionamento "alternato", si osserva la seghettatura dei segnali.

6.— *L'oscillografo digitalizzatore*

Descriviamo ora un apparecchio di progettazione assai recente, che ha funzioni estremamente simili all'oscillografo e che potrebbe in un futuro prossimo anche soppiantarne come strumento di utilizzo generale nei laboratori: l'*oscillografo digitalizzatore*. In breve, si tratta di un rapidissimo convertitore analogico-digitale (*fast digitizer*), in genere a pochi bit (6-8), che campiona la tensione

di ingresso in continuazione e a intervalli di tempo molto ravvicinati (in alcuni modelli fino a 10^9 campionamenti al secondo) e immagazzina il risultato degli ultimi N campionamenti precedenti a quello in corso in una memoria aggiornabile in maniera molto rapida; N può essere fino a qualche migliaio, tipicamente 512 o 1024. L'informazione numerica così immagazzinata è poi presentata, dietro comando di un opportuno circuito di trigger, su uno schermo televisivo o oscillografico. La presentazione, soprattutto se i bit di conversione sono 6 ($\frac{1}{64}$ di risoluzione) può soffrire di qualche problema di quantizzazione, ma a parte questo il segnale viene presentato come in un oscillografo tradizionale. Fra i vantaggi rispetto a un oscillografo tradizionale, c'è il fatto che il raggiungimento della banda passante voluta è ottenuto quasi esclusivamente agendo sulla parte elettronica (fast digitizer e memoria veloce) e non richiede tubi catodici di caratteristiche altrettanto spinte; progressi in termini di banda passante non sono quindi inattesi, perché l'evoluzione della tecnica negli ultimi anni lascia pensare che gli sviluppi dell'elettronica consentiranno ulteriori progressi e riduzione dei costi, mentre nel campo dei tubi oscillografici le prospettive non sembrano oramai più promettenti. Inoltre, nell'oscillografo digitalizzatore l'informazione immagazzinata in forma numerica, anche se con precisione per ora limitata dai pochi bit del convertitore, può essere successivamente acquisita e trattata quantitativamente da altri sistemi di elaborazione, e non solo presentata sullo schermo; infine, il fatto che il convertitore lavori in continuazione e aggiorni solo parte della memoria a ogni campionamento, consente, una volta dato l'assenso alla presentazione con un circuito analogo a quello di trigger dell'oscillografo convenzionale, di presentare sullo schermo non solo i campionamenti successivi al trigger, ma anche numerosi campionamenti a esso precedenti (fino a qualche centinaio, comunque limitato solo dalle prestazioni della memoria del dispositivo). Quest'ultima operazione, detta di *pre-trigger*, è di fatto praticamente irrealizzabile negli oscillografi tradizionali, almeno su tutta la gamma della base dei tempi; in essi infatti il ritardo introdotto prima dell'amplificatore finale (vedi §4) è efficace solo per scansioni molto rapide e di fatto inessenziale per la presentazione con scansioni lente.

NOTA BIBLIOGRAFICA

Buone trattazioni dell'argomento si possono trovare su **TE 57** e **LA 57**. Un approccio particolarmente curato dal punto di vista didattico si trova su "La Fisica di Berkeley" – Laboratorio 2 – Zanichelli (1977). Orientate più che altro per gli studenti di ingegneria, ma non per questo non consigliabili, sono le trattazioni di **MA 78**, **BE 82**; particolarmente curato sull'argomento è il Cap. 2 di **CO 83**. Una ottima descrizione del funzionamento dell'oscillografo si trova su **CO 85**. Un possibile campo di approfondimento può essere lo studio degli articoli originali sul meccanismo della carica spaziale:

- a) Child: "Discharge from hot CaO"
Phys. Rev. XXXII (1911) **492**
- b) Langmuir: "The effect of space charge and residual gas
on thermionic currents in high vacuum"
Phys. Rev. II serie, vol II (1913) **450**

Per sapere qualcosa di più sulle lenti elettrostatiche si può consultare **TE 50** (sect. 4.15).

IX

LE CORRENTI ALTERNATE

1. – Definizioni

Fino a ora abbiamo studiato approfonditamente le reti lineari solo nel caso in cui erano presenti generatori di tensione (o corrente) continua; tutt'al più abbiamo considerato i casi in cui i generatori venivano accesi o spenti e abbiamo studiato il comportamento del sistema nel cosiddetto *transitorio*. In questo capitolo vedremo che disponendo di una rete lineare, nella quale cioè siano presenti solo resistori, induttanze, mutue induttanze e condensatori e eccitando il sistema con un generatore di fem del tipo $v(t) = v_0 \cos(\omega t + \alpha)$ posto in un ramo qualsiasi (v_0 , ω e α costanti), si ottiene una soluzione a regime per la corrente nel ramo generico r del tipo $i_r = i_{r0} \cos(\omega t + \alpha + \varphi_r)$ con i_{r0} e φ_r costanti e esprimibili in funzione di v_0 e delle varie resistenze, induttanze, mutue induttanze e capacità presenti nella rete.

Le correnti e le fem che variano sinusoidalmente in funzione del tempo sono anche dette *correnti e fem alternate*; più in generale una grandezza si dice *alternata* quando gode delle seguenti proprietà:

$$\begin{cases} g(t+T) = g(t) \\ \bar{g} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} g(t') dt' = 0 \end{cases} \quad (\text{IX.1})$$

cioè è una funzione periodica del tempo (con periodo T) e a media nulla. Tornando al caso in cui $v = v_0 \cos(\omega t + \alpha)$, diamo qualche definizione: v_0 è detta *ampiezza* o *valore di picco*, ω è detta *pulsazione* e vale $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (*rad/s*), $f = \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}$ è detta *frequenza* (*oscillazioni al secondo* o *Hertz*, simbolo *Hz*), α è detta *fase iniziale* o *angolo di fase* o *sfasamento*, $\omega t + \alpha$ è la *fase*. In argomento di definizioni, il *valore quadratico medio* o *valore efficace* di v , v_{eff} (in inglese v_{rms} , *root mean square*) è dato dalla seguente relazione:

$$v_{eff}^2 = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} v^2(t') dt' = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} v_0^2 \cos^2(\omega t' + \alpha) dt' = \frac{v_0^2}{2} \quad (\text{IX.2})$$

Si noti che le medie fatte su un periodo coincidono con le medie fatte su un tempo $\theta \gg T$; infatti il contributo alla media derivante dalla frazione incompleta del periodo dà un contributo che tende a zero come $\frac{T}{\theta}$. L'importanza di studiare in dettaglio il comportamento delle reti in presenza di eccitazioni sinusoidali (nel seguito dove non ci sia ambiguità diremo anche noi "alternate") deriva principalmente da due fatti, uno di ordine pratico e un altro di carattere fondamentale. Il fatto pratico è che non è possibile procedere in qualunque campo dell'elettrotecnica e dell'elettronica senza conoscere approfonditamente questo argomento, poiché la tensione alternata, principalmente a causa della sua facile *trasformabilità* e relativa semplicità di produzione, è quella che viene quasi

universalmente adottata per la distribuzione di energia elettrica per uso industriale e domestico. Il motivo di carattere più fondamentale è che qualunque grandezza periodica $f(t)$ con periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$ purché soddisfi a certi requisiti di continuità, che nei casi di nostro interesse supporremo soddisfatti, può essere messa sotto forma (sviluppo in serie di Fourier):

$$\begin{cases} f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \operatorname{sen}(n\omega t) + b_n \operatorname{cos}(n\omega t)] \\ a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(t') \operatorname{sen}(n\omega t') dt' & n = 1, 2, \dots \\ b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(t') \operatorname{cos}(n\omega t') dt' & n = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (\text{IX.3})$$

cioè $f(t)$ può sempre esprimersi come somma di contributi ognuno puramente sinusoidale, con frequenza pari a multipli della frequenza fondamentale ω (*armoniche*)*. Ciò in particolare vale se $f(t)$ è una fem applicata in un ramo di una certa rete lineare; vedremo che questo fatto, insieme alla *linearità* delle equazioni che regolano l'andamento delle correnti, fa sì che, per avere la soluzione per la corrente nei vari rami della rete, è sufficiente conoscere lo sviluppo di Fourier della $f(t)$ e risolvere il circuito separatamente per le varie armoniche. La corrente complessiva in un ramo qualunque sarà data dalla somma delle varie correnti in quel ramo, ognuna associata alle rispettive armoniche. La semplicità del metodo risiede nel fatto che la soluzione per ognuna delle armoniche si basa su metodi standard (che impareremo nei prossimi paragrafi), sostanzialmente identici per ognuna di esse. Concludendo possiamo quindi dire che conoscere la risposta di una rete lineare a una eccitazione sinusoidale di fatto corrisponde a conoscere la risposta della rete a qualunque eccitazione periodica.

2.— Le leggi di Kirchhoff e le correnti alternate

Supponiamo di disporre di una rete *lineare*, che contenga cioè solo resistori, induttanze, mutue induttanze e condensatori; ammettiamo anche che le costanti siano concentrate, ovvero che nelle bobine non ci sia flusso di campo magnetico disperso e fra le armature dei condensatori l'induzione sia completa; infine le dimensioni della rete siano piccole rispetto a cT dove c è la velocità della luce e $T = \frac{2\pi}{\omega}$ è il periodo della tensione alternata $v(t) = v_0 \operatorname{cos}(\omega t + \alpha)$ applicata da un generatore di fem in un ramo della rete. In queste ipotesi si può far vedere che vale ancora la prima legge di Kirchhoff o dei nodi, cioè siamo in un caso quasi-stazionario ($\operatorname{div} \vec{j} = 0$) e che la circuitazione del campo elettrico lungo una qualunque linea chiusa che passi all'esterno del circuito è nulla, ed è quindi possibile trovare una estensione della seconda legge di Kirchhoff o delle maglie.

Senza entrare in dettagli, possiamo notare che la condizione sulle dimensioni della rete è collegata al fatto che, se così non fosse, non si potrebbe più ammettere come istantanea la propagazione del campo elettrico e magnetico; non si potrebbe, in particolare, trattare il nostro sistema di conduttori in maniera quasi statica e non potremmo considerare il campo elettrico fuori dei conduttori come elettrostatico e quindi irrotazionale. Il fatto che le costanti siano concentrate significa, per quanto riguarda le capacità, che $\operatorname{div} \vec{j} \neq 0$ si può verificare solo in un volume finito di un ramo di una rete

* lo sviluppo (3) se la $f(t)$ è alternata non contiene il termine con $n = 0$ che è invece presente se la $f(t)$ è a media non nulla.

(fra le armature di un condensatore) mentre all'esterno di questi volumi "singolari" \vec{j} è solenoidale, in particolare nei nodi; per le induttanze la presenza di costanti concentrate implica che il campo di induzione magnetica è confinato nell'induttanza e così il campo elettrico rotazionale dovuto alla variazione del flusso di \vec{B} .

Un'altra condizione per poter trattare in maniera quasi statica il problema, è che i tempi di ridistribuzione delle cariche superficiali, quelle che assicurano i campi elettrici nel nostro sistema di conduttori, siano trascurabili rispetto ai tempi ($\approx \frac{1}{\omega}$) in cui le correnti e le tensioni macroscopiche cambiano apprezzabilmente. Si tenga presente che i tempi caratteristici per l'adeguamento delle cariche in un conduttore sono dell'ordine di $10^{-18}s$ e quindi la condizione di cui sopra è molto facilmente soddisfatta anche per pulsazioni elevate.

In un qualunque nodo, in cui confluiscono n correnti, della rete lineare che stiamo considerando dovrà allora essere, come nel caso delle correnti continue:

$$\sum_k i_k = 0 \quad (\text{IX.4})$$

con la solita convenzione di prendere con un segno le correnti entranti nel nodo e con l'altro quelle uscenti. Come abbiamo già anticipato e come dimostreremo un po' più avanti, la soluzione per le varie correnti nei rami è del tipo:

$$i_k = i_{k0} \cos(\omega t + \varphi_k)$$

Quindi, supponendo di avere un nodo in cui confluiscono 3 rami (Fig.1), avremo:

$$\begin{cases} i_1 = i_{10} \cos(\omega t) \\ i_2 = i_{20} \cos(\omega t + \varphi) \\ i_3 = i_{30} \cos(\omega t + \psi) \end{cases} \quad (\text{IX.5})$$

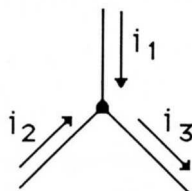


Fig.IX.1

Senza perdere in generalità, l'origine dei tempi è stata scelta in modo da avere la fase iniziale di i_1 uguale a zero. Supponiamo di conoscere i_1 e i_2 (cioè i_{10} , i_{20} , φ) e di voler determinare i_3 (cioè i_{30} e ψ). La legge dei nodi (4) è in grado di risolvere il problema; infatti la relazione $i_1(t) + i_2(t) = i_3(t)$ deve valere per ogni t e considerando allora $t = 0$ e $t = \frac{\pi}{2\omega}$, otteniamo:

$$\begin{cases} i_{10} + i_{20} \cos \varphi = i_{30} \cos \psi \\ i_{20} \sin \varphi = i_{30} \sin \psi \end{cases} \quad (\text{IX.6})$$

Da queste si ricava la soluzione cercata:

$$\begin{cases} i_{30}^2 = i_{10}^2 + i_{20}^2 + 2i_{10}i_{20} \cos \varphi \\ \tan \psi = \frac{i_{20} \sin \varphi}{i_{10} + i_{20} \cos \varphi} \end{cases} \quad (\text{IX.7})$$

3.— Rappresentazione delle grandezze alternate tramite vettori rotanti e numeri complessi

Poiché le grandezze alternate, per esempio le correnti dell'ultimo esempio, sono definite da due numeri (ampiezza e fase) è possibile associare a ognuna di esse un vettore che, opportunamente definito, ci consente notevoli semplificazioni nelle operazioni fra queste grandezze.

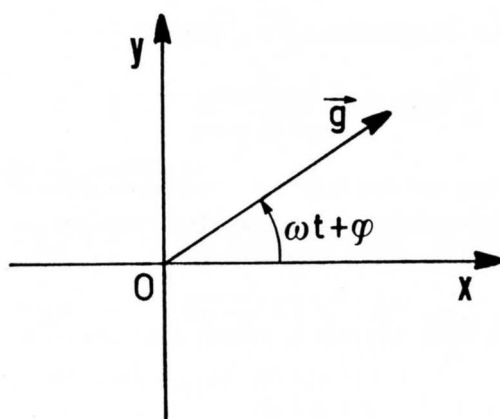


Fig.IX.2

Ciò viene fatto ricorrendo ai cosiddetti vettori rotanti: a ogni grandezza alternata nella forma $g(t) = g_0 \cos(\omega t + \varphi)$ si associa un vettore \vec{g}_0 di modulo uguale a g_0 e applicato nell'origine di un sistema di coordinate cartesiane ortogonali x, y e formante un angolo (crescente antiorario) con l'asse delle x pari a $(\omega t + \varphi)$, cioè alla fase (Fig.2). La proiezione di \vec{g}_0 sull'asse delle x dà, istante per istante, il valore di $g(t)$.

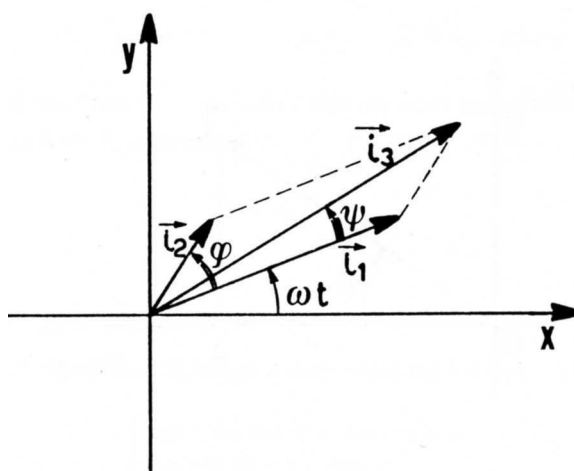


Fig.IX.3

L'utilità del metodo dei vettori rotanti si comprende quando si vogliono sommare o sottrarre

grandezze alternate omogenee, come ad esempio accade applicando la legge dei nodi. Con riferimento all'esempio del paragrafo precedente, determiniamo i_3 con questo metodo. Costruendo \vec{i}_1 e \vec{i}_2 secondo le regole dette prima, abbiamo la situazione in Fig.3. Si vede che i_3 si ottiene facendo proprio la somma dei due vettori \vec{i}_1 e \vec{i}_2 e poi proiettando \vec{i}_3 così ottenuto sull'asse x, ovvero come se la legge dei nodi si applicasse direttamente ai vettori associati alle correnti (vedi Fig.1); infatti dal teorema di Carnot discende:

$$i_{30}^2 = i_{10}^2 + i_{20}^2 - 2i_{10}i_{20} \cos(\pi - \varphi) = i_{10}^2 + i_{20}^2 + 2i_{10}i_{20} \cos \varphi \quad (\text{IX.8})$$

e proiettando i vettori su \vec{i}_1 prima e ortogonalmente a \vec{i}_1 poi si ha:

$$\tan \psi = \frac{i_{20} \sin \varphi}{i_{10} + i_{20} \cos \varphi} \quad (\text{IX.9})$$

La (8) e la (9) coincidono rispettivamente con la prima e la seconda delle (7).

Il metodo dei vettori rotanti trova vasto impiego nell'elettrotecnica; per lo studio delle correnti alternate che ci proponiamo di fare è però più adatto il metodo seguente che fa ricorso ai *numeri complessi*.

Richiamiamo intanto alcune nozioni riguardo ai numeri complessi. Un numero complesso nella sua *forma algebrica* si scrive come

$$z = a + jb \quad (\text{IX.10})$$

dove $j = \sqrt{-1}$, unità immaginaria, e a e b sono reali. a è detta parte reale e b parte immaginaria del numero complesso: $a = \text{Re}(z)$, $b = \text{Im}(z)$.

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0 \quad (\text{IX.11})$$

è detto *modulo*. Si definisce *coniugato* di z , $\bar{z} = a - jb$.

Al numero complesso z si può far corrispondere un vettore (P-O) applicato nell'origine di un sistema di assi cartesiani e avente componente a sull'asse delle x (detto *asse reale*) e componente b sull'asse y (detto *asse immaginario*); la stretta parentela con i vettori rotanti è evidente.

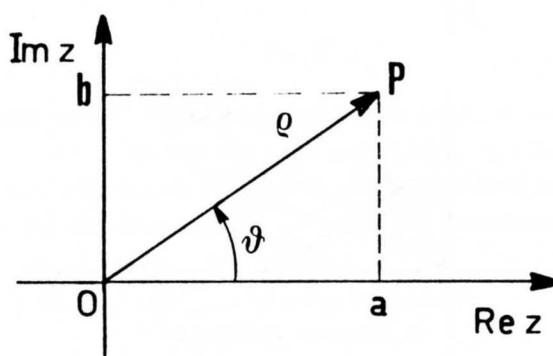


Fig.IX.4

Indicando (Fig.4) con θ l'angolo fra l'asse reale e il vettore così costruito, si può scrivere:

$$z = a + jb = \rho(\cos \theta + j \sin \theta) \quad (\text{IX.12})$$

Ricordando le formule di Eulero, il fattore fra parentesi può essere messo nella forma:

$$\exp j\theta = \cos \theta + j \operatorname{sen} \theta \quad (\text{IX.13})$$

e pertanto:

$$z = \rho \exp j\theta \quad \theta = \operatorname{atan} \frac{b}{a} \quad (\text{IX.14})$$

θ è detta *fase* del numero complesso z . Dati due numeri complessi $z_1 = a + jb$ e $z_2 = c + jd$

$$\begin{cases} \rho_1 = \sqrt{a^2 + b^2} & \rho_2 = \sqrt{c^2 + d^2} \\ \theta_1 = \operatorname{atan} \frac{b}{a} & \theta_2 = \operatorname{atan} \frac{d}{c} \end{cases} \quad (\text{IX.15})$$

si possono definire le seguenti operazioni

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = (a + c) + j(b + d) = \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2} \cdot \exp i\theta_s & \theta_s = \operatorname{atan} \frac{b + d}{a + c} \\ z_1 - z_2 = (a - c) + j(b - d) = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2} \cdot \exp i\theta_d & \theta_d = \operatorname{atan} \frac{b - d}{a - c} \\ z_1 \cdot z_2 = ac - bd + j(ad + bc) = \rho_1 \rho_2 \cdot \exp i(\theta_1 + \theta_2) \\ \frac{z_1}{z_2} = [ac + bd + j(bc - ad)] / (c^2 + d^2) = \frac{\rho_1}{\rho_2} \exp i(\theta_1 - \theta_2) \end{cases} \quad (\text{IX.16})$$

A una grandezza alternata $g(t) = g_0 \cos(\omega t + \alpha)$ può essere associato il numero complesso $\mathcal{G} = g_0 \exp j(\omega t + \alpha)$ tale che la sua parte reale $\operatorname{Re}(\mathcal{G}) = g_0 \cos(\omega t + \alpha)$ sia proprio la grandezza di interesse. Nel seguito le grandezze complesse saranno sempre indicate con lettere maiuscole corsive. Sempre riferendosi all'esempio precedente si possono associare alle correnti i_1 , i_2 e i_3 le grandezze complesse

$$\mathcal{I}_1 = i_{10} \exp j\omega t \quad \mathcal{I}_2 = i_{20} \exp j(\omega t + \varphi) \quad \mathcal{I}_3 = i_{30} \exp j(\omega t + \psi) \quad (\text{IX.17})$$

che possono anche scriversi fattorizzando la dipendenza temporale:

$$\mathcal{I}_1 = i_{10} \exp j\omega t \quad \mathcal{I}_2 = i_{20} \exp j\varphi \cdot \exp j\omega t \quad \mathcal{I}_3 = i_{30} \exp j\psi \cdot \exp j\omega t \quad (\text{IX.18})$$

Vediamo ora che l'applicazione della legge dei nodi alle correnti complesse così definite, consente di ottenere direttamente il risultato (7); infatti:

$$\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 = \mathcal{I}_3 \quad (\text{IX.19})$$

comporta

$$i_{10} + i_{20} \exp j\varphi = i_{30} \exp j\psi \quad (\text{IX.20})$$

Questa relazione fra numeri complessi dà luogo a due relazioni fra quantità reali:

$$\begin{cases} i_{10} + i_{20} \cos \varphi = i_{30} \cos \psi \\ i_{20} \operatorname{sen} \varphi = i_{30} \operatorname{sen} \psi \end{cases} \quad (\text{IX.21})$$

che coincidono con la (7).

Per la verità, non è tanto in esempi come questo che si vede l'utilità di introdurre le correnti e le differenze di potenziale complesse, quanto piuttosto nelle semplificazioni che si ottengono nella risoluzioni delle reti in alternata. Questo è quanto verrà mostrato nel paragrafo successivo.

4.— Le impedenze complesse

Guardiamo ora quali sono le relazioni che intercorrono fra le ddp alternate ai capi di una resistenza, una induttanza, un condensatore e la corrente che circola in questi elementi. Col simbolo di Fig.5

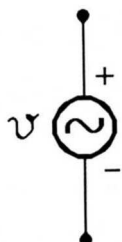


Fig.IX.5

si indica un *generatore ideale di fem alternata* del tipo $v = v_0 \cos \omega t$ (la fase iniziale del generatore si assume generalmente uguale a zero), cioè un dispositivo in grado di mantenere ai suoi capi (morsetti) una ddp pari appunto a $v_0 \cos \omega t$, indipendentemente dal circuito su cui esso è chiuso (il *carico*). I simboli “+” e “-”, che specificano quale dei due terminali è positivo rispetto all’altro quando v è positiva, in genere sono omissi, almeno quando non sorgono problemi di ambiguità. Un modo molto semplice, almeno concettualmente, di realizzare un generatore del genere, almeno per piccoli valori della corrente erogata, è quello di far ruotare a velocità angolare costante $\vec{\omega}$ una o più spire piane di sezione complessiva S , costituite di filo di resistenza trascurabile, in una regione dove è presente un campo magnetico \vec{B} omogeneo. Se \vec{B} è diretto come l’asse z e si sceglie la normale positiva alla spira e l’origine degli angoli come nelle Figg.6 a e b, in serie alle spire compare, secondo la legge di Faraday, una forza elettromotrice:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = \frac{d}{dt} BS \sin \omega t = BS\omega \cos \omega t \quad (\text{IX.22})$$

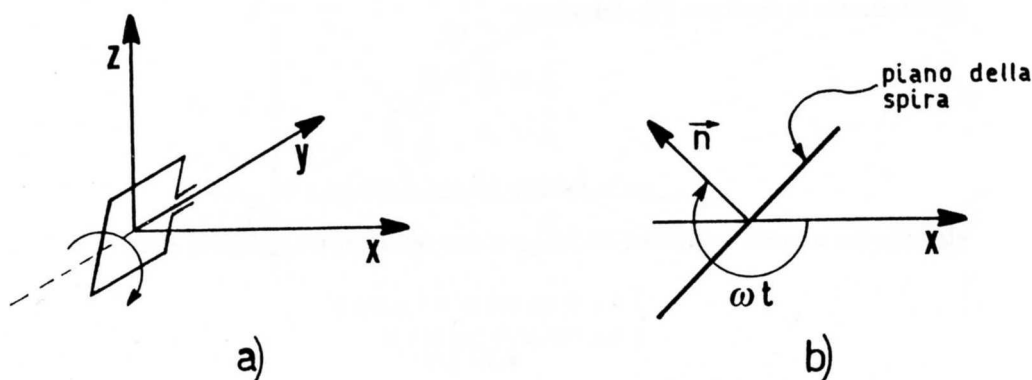


Fig.IX.6

In pratica un generatore di fem alternata da laboratorio non è mai fatto così; i generatori

a turbina nelle centrali elettriche si basano invece su questo principio e qualche dettaglio in più sull'argomento verrà dato nel Cap.XX,§5.

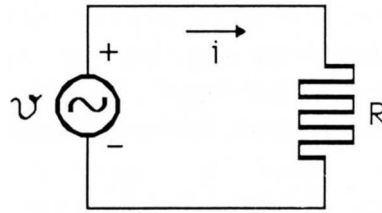


Fig.IX.7

Costruiamo con questo generatore la maglia di Fig.7. Il simbolo per R usato nella figura è quello più corretto per indicare una resistenza pura (per esempio esente da componenti induttive). Quando non ci sia ambiguità useremo il simbolo usuale a *zig-zag*. Poiché abbiamo supposto di poter trattare il nostro sistema di conduttori in maniera quasi-statica, varrà la seconda legge di Kirchhoff. Dovrà cioè essere:

$$v = iR \quad (\text{IX.23})$$

dove $v = v_0 \cos \omega t$ e R è il numero reale positivo che caratterizza la resistenza. Da questa equazione algebrica si ottiene:

$$i = \frac{v_0}{R} \cos \omega t \quad (\text{IX.24})$$

ovvero i è una corrente alternata di ampiezza pari al rapporto fra l'ampiezza di v e R e avente fase uguale a quella di v .

Avremmo anche potuto usare il formalismo dei numeri complessi, introducendo la fem complessa $\mathcal{V} = v_0 \exp j\omega t$, la cui parte reale è la fem effettivamente applicata e avremmo ottenuto:

$$\mathcal{J} = \frac{\mathcal{V}}{R} = \frac{v_0}{R} \exp j\omega t \quad (\text{IX.25})$$

con

$$i = \text{Re}(\mathcal{J}) = \frac{v_0}{R} \cos \omega t \quad (\text{IX.26})$$

esattamente come la (24). Si vede così che anche usando il formalismo dei numeri complessi, continua a valere per le resistenze la legge di Ohm nella sua forma usuale (23).

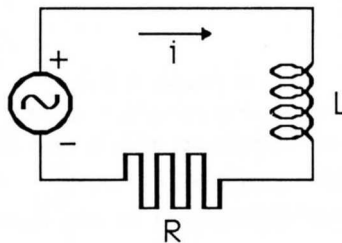


Fig.IX.8

Consideriamo ora il caso in cui in serie a R sia posta anche una induttanza L (Fig.8). Questa volta la seconda legge di Kirchhoff non ci fornisce una equazione algebrica, ma piuttosto una

equazione differenziale, lineare a coefficienti costanti:

$$v_0 \cos \omega t - L \frac{di}{dt} = iR \quad (\text{IX.27})$$

A noi interessa la soluzione di regime, in quanto la soluzione dell'equazione omogenea associata, il *transitorio*, dopo un tempo più o meno breve successivo all'accensione del generatore, va a zero a causa del termine esponenziale $\exp(-\frac{R}{L}t)$ (vedi Cap.VII, §3). L'integrale particolare, corrispondente al termine forzante sinusoidale con pulsazione ω , lo ricerchiamo nella forma

$$i = i_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (\text{IX.28})$$

Sostituendo la (28) nella (27) si ottiene:

$$v_0 \cos \omega t = Ri_0 \cos(\omega t + \varphi) - i_0 L \omega \sin(\omega t + \varphi) \quad (\text{IX.29})$$

Consideriamo i tempi $t = 0$ e $t = \frac{\pi}{2\omega}$; otteniamo allora due equazioni:

$$\begin{cases} v_0 = Ri_0 \cos \varphi - i_0 L \omega \sin \varphi \\ 0 = -Ri_0 \sin \varphi - i_0 L \omega \cos \varphi \end{cases} \quad (\text{IX.30})$$

che danno le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} i_0 = \frac{v_0}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \\ \tan \varphi = -\frac{\omega L}{R} \end{cases} \quad (\text{IX.31})$$

Per giungere al risultato (31), potevamo procedere anche in un altro modo, usando le grandezze complesse $\mathcal{V} = v_0 \exp j\omega t$ e $\mathcal{I} = i_0 \exp j(\omega t + \varphi) = \mathcal{I}_0 \exp j\omega t$ ($\mathcal{I}_0 = i_0 \exp j\varphi$) e risolvere l'equazione differenziale che lega fra loro queste grandezze. Possiamo seguire questo metodo poiché, essendo l'equazione differenziale *lineare*, il contributo aggiuntivo rispetto al termine forzante effettivo, cioè la parte immaginaria di $\mathcal{V} = jv_0 \sin \omega t$ resterà associato alla parte immaginaria della soluzione \mathcal{I} , mentre la parte reale di \mathcal{I} continuerà a coincidere con la nostra soluzione; la linearità dell'equazione differenziale comporta infatti che se il termine forzante è del tipo $F(t) = a \cdot F_1(t) + b \cdot F_2(t)$, la soluzione dell'equazione è data da $i(t) = a \cdot i_1(t) + b \cdot i_2(t)$ con i_1 soluzione dell'equazione con il solo termine forzante F_1 e i_2 soluzione con il solo F_2 .

Guardiamo i vantaggi che derivano da questo formalismo; l'equazione differenziale diventa ($\frac{d}{dt} \exp j\omega t = j\omega \exp j\omega t$):

$$\mathcal{V} = j\omega L \mathcal{I} + R \mathcal{I} = (j\omega L + R) \mathcal{I} \quad (\text{IX.32})$$

che può anche semplificarsi per dare

$$v_0 = j\omega L \mathcal{I}_0 + R \mathcal{I}_0 \quad (\text{IX.33})$$

cioè un'equazione algebrica nel campo complesso, vale a dire due equazioni nel campo reale che, come è immediato verificare, coincidono con le (30).

L'aver trasformato una equazione differenziale in una equazione algebrica è sicuramente un vantaggio; ma c'è di più: la relazione (32) è infatti passibile di una interpretazione dalla quale conseguono notevoli semplificazioni. La (32) può essere considerata infatti l'estensione alle correnti alternate della legge di Ohm, nel caso in cui, oltre a una resistenza, sia presente in serie a essa una induttanza L ; la "resistenza" da associare all'induttanza è $j\omega L$, cioè una grandezza puramente immaginaria che dipende anche da ω . Dovrebbe essere chiara la diversa prospettiva con cui la

relazione (32) interpreta la funzione dell'induttanza: mentre nella seconda legge di Kirchhoff come da noi scritta (27), la ddp ai capi di L era interpretata come una fem, qui essa assume il ruolo di una caduta dovuta alla corrente, a essa proporzionale. Rimarchiamo che questa proporzionalità fra \mathcal{J} e \mathcal{V} vale solo per le grandezze complesse (per convincersene si provi a trovare la relazione fra i e la ddp "vera" ai capi di L).

Nel caso che si abbiano due circuiti accoppiati induttivamente accade qualcosa di simile, cioè nel circuito 2 si ha una caduta complessa $\mathcal{V}_{M2} = j\omega M \mathcal{J}_1$ dovuta alla corrente complessa $\mathcal{J}_1 = i_{10} \exp j(\omega t + \varphi_1)$ sul circuito 1 e reciprocamente una caduta nel circuito 1 $\mathcal{V}_{M1} = j\omega M \mathcal{J}_2$ dovuta alla corrente $\mathcal{J}_2 = i_{20} \exp j(\omega t + \varphi_2)$ che circola nel circuito 2; vale a dire si mantiene una relazione di proporzionalità fra una corrente e una ddp (entrambe complesse). Rimandiamo ancora di poco l'illustrazione degli altri vantaggi inerenti all'adozione di questo formalismo e piuttosto, per completare il quadro, consideriamo cosa accade quando un condensatore sia inserito in serie nel nostro circuito (Fig.9):

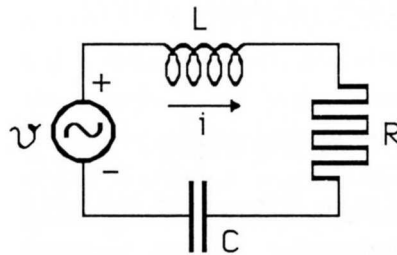


Fig.IX.9

L'equazione differenziale che si ottiene applicando la seconda legge di Kirchhoff, è:

$$v_0 \cos \omega t - L \frac{di}{dt} - \frac{Q}{C} = iR \quad (\text{IX.34})$$

che derivata una volta dà:

$$-v_0 \omega \sin \omega t = \frac{i}{C} + R \frac{di}{dt} + L \frac{d^2 i}{dt^2} \quad (\text{IX.35})$$

Anche in questo caso interessa la soluzione a regime, cioè l'integrale particolare, che ricerchiamo nella solita forma $i = i_0 \cos(\omega t + \varphi)$. Sostituendo questa espressione nella (35) si ottiene

$$-v_0 \omega \sin \omega t = \frac{i_0}{C} \cos(\omega t + \varphi) - R i_0 \omega \sin(\omega t + \varphi) - L i_0 \omega^2 \cos(\omega t + \varphi) \quad (\text{IX.36})$$

Considerando i tempi $t = 0$ e $t = \frac{\pi}{2\omega}$ si ha:

$$\begin{cases} 0 = \frac{i_0}{\omega C} \cos \varphi - R i_0 \omega \sin \varphi - L i_0 \omega^2 \cos \varphi \\ -v_0 = -\frac{i_0}{\omega C} \sin \varphi - R i_0 \omega \cos \varphi + L i_0 \omega^2 \sin \varphi \end{cases} \quad (\text{IX.37})$$

che danno per i_0 e φ :

$$\begin{cases} i_0 = \frac{v_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2}} \\ \tan \varphi = \frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R} \end{cases} \quad (\text{IX.38})$$

Guardiamo ora che forma assume la (34) quando si sostituisce $v = v_0 \cos \omega t$ con $\mathcal{V} = v_0 \exp j\omega t$ e $i = i_0 \cos(\omega t + \varphi)$ con $\mathcal{J} = i_0 \exp j\varphi \cdot \exp j\omega t = \mathcal{J}_0 \exp j\omega t$. Abbiamo allora:

$$\mathcal{V} = \frac{\mathcal{J}}{j\omega C} + j\omega L\mathcal{J} + R\mathcal{J} \quad (\text{IX.39})$$

Si noti che l'integrazione di $\mathcal{J}_0 \exp j\omega t$ dà $\mathcal{J}_0 \cdot \frac{\exp j\omega t}{j\omega}$. È facile vedere, portando avanti il conto algebrico e prendendo alla fine la parte reale di \mathcal{J} , che si ritrovano le (38).

La (39) ci dice che anche per un condensatore, nel caso di corrente sinusoidale, la ddp ai suoi estremi può essere espressa come la parte reale di una ddp complessa \mathcal{V}_C proporzionale a \mathcal{J} ; il fattore di proporzionalità è immaginario puro e dipende inversamente da ω .

A questo punto il quadro è completo e possiamo definitivamente illustrare le conseguenze dell'introduzione delle grandezze complesse per trattare il regime sinusoidale delle correnti. La (39) intanto può essere scritta nella forma di una *Legge di Ohm estesa alle correnti alternate*, trattate con i numeri complessi, o come si dice, col *Metodo simbolico*:

$$\mathcal{V} = \mathcal{J}\mathcal{Z} \quad (\text{IX.40})$$

$$\mathcal{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad (\text{IX.41})$$

La quantità complessa \mathcal{Z} prende il nome di *impedenza*. Nel caso di una induttanza, l'impedenza vale $\mathcal{Z}_L = j\omega L$, nel caso di un condensatore $\mathcal{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{\omega C}$, mentre nel caso di una resistenza si ha, ovviamente, $\mathcal{Z}_R = R$. Data l'identità formale fra l'espressione $\mathcal{V} = \mathcal{J}\mathcal{Z}$ e la legge di Ohm, nel campo delle correnti alternate, trattate col formalismo dei numeri complessi, varranno tutte le conseguenze che dalla legge di Ohm discendevano nel campo delle reti lineari in continua. In particolare le impedenze in serie si sommano e per le impedenze in parallelo si sommano gli inversi $\mathcal{Y} = \mathcal{Z}^{-1}$ detti *ammettenze*. Data una combinazione qualunque di resistenze, condensatori e induttanze, è sempre possibile definire l'impedenza complessiva \mathcal{Z} rispetto a due terminali ed essa può mettersi in ogni caso nella forma generale $\mathcal{Z} = R + jX$ cioè come somma di una parte reale (*resistenza*) e una parte immaginaria detta *reattanza*.

Ora possiamo anche dare una semplice dimostrazione del fatto che, posto un generatore di fem sinusoidale $v = v_0 \cos(\omega t + \alpha)$ in un ramo qualunque in una rete lineare, che contenga cioè resistenze, induttanze, induttanze mutue e condensatori, la corrente in un qualunque ramo k della rete avrà un andamento del tipo $i_k = i_{k0} \cos(\omega t + \varphi_k)$. Infatti la relazione fra la corrente complessa \mathcal{J}_k nel ramo in studio e la fem complessa del generatore \mathcal{V} sarà del tipo $\mathcal{J}_k = \frac{\mathcal{V}}{\mathcal{Z}_k}$ poiché una analoga relazione sussiste nelle reti resistive in continua alle quali si applicava un identico formalismo nel campo reale. La relazione sopra scritta comporta, esattamente come la (40), che la dipendenza dal tempo di \mathcal{J}_k è la stessa di \mathcal{V} , a meno di uno sfasamento, che è appunto ciò che dovevamo dimostrare.

Ricorrendo all'analogia con le reti in continua è stato banale dimostrare l'assunto; tuttavia non ci si faccia sfuggire la "vera" ragione di questo risultato, che va ricercata nel fatto che gli operatori che collegano le differenze di potenziale ai capi delle resistenze, induttanze e condensatori con le correnti che li attraversano sono *operatori lineari* (prodotto, derivata, integrale) e che pertanto la conoscenza delle correnti nei vari rami della rete comporta la soluzione di un sistema di *equazioni differenziali lineari e a coefficienti costanti*; da ciò consegue che l'equazione differenziale che collega i_k con v dovrà essere lineare e a coefficienti costanti; la soluzione a regime infine, cioè l'integrale particolare, avrà la forma $i_k = i_{k0} \cos(\omega t + \varphi_k)$ che sappiamo soddisfare l'equazione differenziale in studio, quando il termine forzante è sinusoidale con pulsazione ω .

Tornando all'analogia con i risultati che valevano in corrente continua, ricordiamo che fra le conseguenze della legge di Ohm e delle leggi di Kirchhoff ci sono tutti i teoremi sulle reti lineari che abbiamo ampiamente adoperato nel caso delle correnti continue; pertanto, considerando le correnti e le fem alternate come le parti reali di grandezze complesse definite come visto sopra, potremo trasferire tutto questo bagaglio di tecniche di calcolo e di risultati nel campo delle reti lineari eccitate da generatori di tensione o di corrente sinusoidali. *Mutatis mutandis*, in particolare sostituendo al concetto di resistenza quello di impedenza e associando alle grandezze alternate quelle complesse corrispondenti, varranno teoremi quali quello di Thévenin, di Norton, il Principio di Sovrapposizione, di Reciprocità e così via. Tutti i calcoli si potranno fare come nel caso delle correnti continue e solo alla fine, quando, ad esempio, vorremo sapere il valore effettivo di una corrente in un certo ramo k prenderemo la parte reale della corrente complessa \mathcal{J}_k calcolata per quel ramo. In particolare il Principio di Sovrapposizione assicura che in una rete lineare, contenente cioè solo resistenze, condensatori, induttanze e mutue induttanze e nella quale agiscano più generatori di tensione o sinusoidale o continua (di cui quelli sinusoidali non necessariamente tutti con la stessa pulsazione ω), la soluzione per le correnti nel generico ramo k potrà trovarsi come somma delle correnti associate a ogni generatore singolo (con gli altri cortocircuitati). Ricordando lo sviluppo in serie di Fourier (3), che cioè ogni fem periodica, con periodo T , può sempre scriversi come la somma di una fem continua e di (in genere infinite) fem sinusoidali con pulsazione pari alle armoniche superiori della pulsazione base $\omega = \frac{2\pi}{T}$, possiamo dire di essere in grado di calcolare la risposta di una generica rete lineare all'eccitazione di un *qualsiasi generatore di fem periodica*.

Applichiamo su qualche esempio il formalismo delle impedenze e delle tensioni e correnti complesse. Tornando alla (40) con $\mathcal{V} = v_0 \exp j\omega t$ e $\mathcal{J} = i_0 \exp j\varphi \cdot \exp j\omega t$ e \mathcal{Z} generica:

$$\mathcal{Z} = R + jX \quad (\text{IX.42})$$

troviamo la relazione fra le ampiezze di \mathcal{V} e \mathcal{J} . Essendo il modulo di $\exp j\alpha = 1$ con α qualsiasi e valendo per i moduli: $|\mathcal{V}| = |\mathcal{Z}||\mathcal{J}|$, si ha:

$$v_0 = \sqrt{R^2 + X^2} \cdot i_0 \quad (\text{IX.43})$$

La (43) ci mostra in particolare che se una determinata impedenza \mathcal{Z} è costituita, a una certa pulsazione ω , da una resistenza e una reattanza in valore assoluto uguali $R = |X|$, allora la ampiezza della corrente nell'impedenza \mathcal{Z} è $\sqrt{2}$ volte più piccola di quella che si avrebbe se, a parità di ddp, l'impedenza fosse costituita dalla sola R o dalla sola jX . Quanto allo sfasamento φ della corrente rispetto alla tensione, esso è ricavabile dalla (40) scritta come:

$$\mathcal{J} = \frac{\mathcal{V}}{\mathcal{Z}} \quad (\text{IX.44})$$

La fase di \mathcal{J} è quindi uguale alla fase del numeratore meno la fase del denominatore. \mathcal{Z} può porsi nella forma:

$$\mathcal{Z} = |\mathcal{Z}| \exp j\varphi_z \quad (\text{IX.45})$$

e quindi

$$i_0 \exp j\varphi = \frac{v_0}{|\mathcal{Z}|} \exp(-j\varphi_z) \quad (\text{IX.46})$$

da cui:

$$\varphi = -\varphi_z = -\text{atan} \frac{X}{R} \quad (\text{IX.47})$$

vale a dire lo sfasamento della corrente rispetto alla tensione è pari alla fase dell'impedenza cambiata di segno. Nel caso visto prima che $R = |X|$, allora lo sfasamento della corrente rispetto alla tensione sarà pari a $\pm \frac{\pi}{4}$, a seconda del segno di X . Consideriamo i seguenti casi particolari delle (43) e (47):

a) una induttanza pura:

$$\mathcal{J}_L = \frac{\mathcal{V}}{j\omega L} \quad (\text{IX.48})$$

per cui

$$\begin{cases} i_0 = \frac{v_0}{\omega L} \\ \varphi = -\text{atan } \infty = -\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (\text{IX.49})$$

cioè

$$\text{Re}(\mathcal{J}) = i = \frac{v_0}{\omega L} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{v_0}{\omega L} \text{sen } \omega t \quad (\text{IX.50})$$

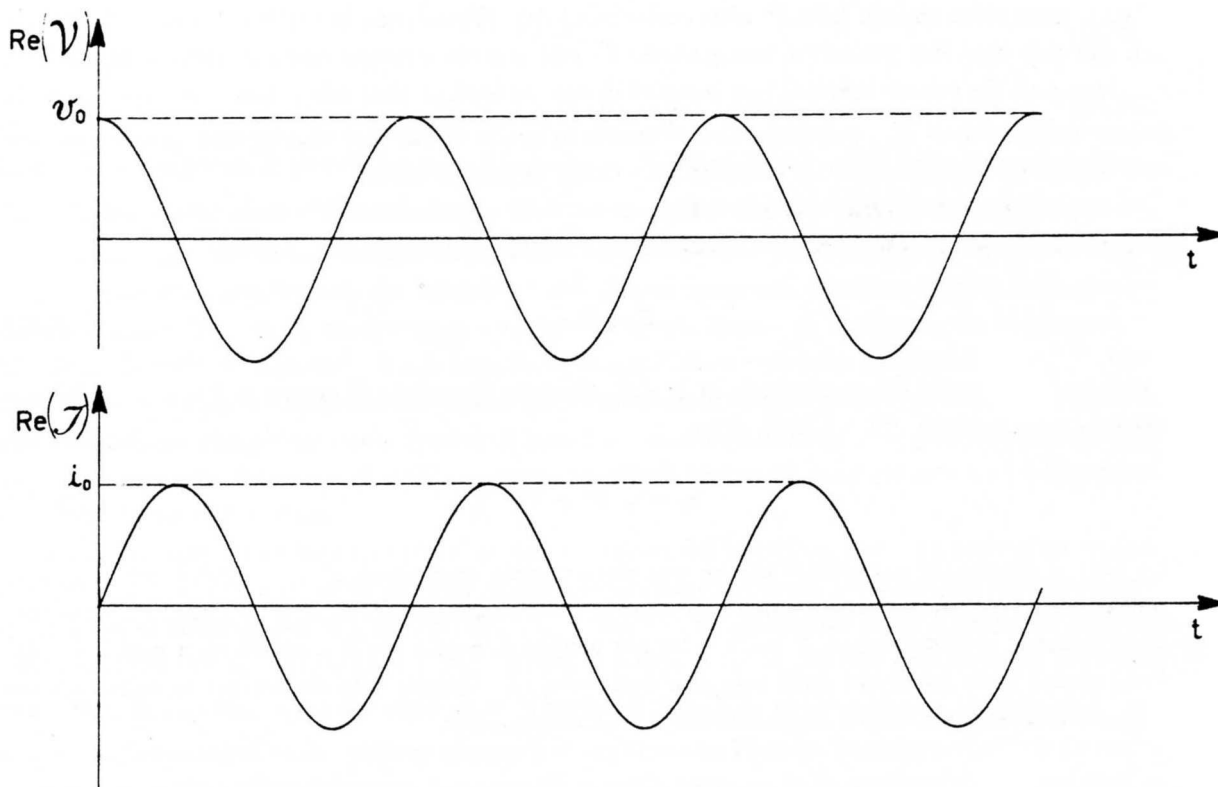


Fig.IX.10

Nella Fig.10 sono riportati gli andamenti di $\text{Re}(\mathcal{V})$ e di $\text{Re}(\mathcal{J})$. Si noti che la corrente “ritarda” di un quarto di periodo ($\varphi = -\frac{\pi}{2}$) rispetto alla tensione.

b) un condensatore puro:

$$\mathcal{J}_C = \mathcal{V}j\omega C \quad (\text{IX.51})$$

per cui

$$\begin{cases} i_0 = v_0\omega C \\ \varphi = -\text{atan } (-\infty) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (\text{IX.52})$$

cioè

$$Re(\mathcal{J}) = i = v_0 \omega C \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -v_0 \omega C \sin \omega t \quad (\text{IX.53})$$

e si dice che la corrente “anticipa” la tensione di un quarto di periodo ($\varphi = \frac{\pi}{2}$).

Nella Fig.11 sono riportati gli andamenti di $Re(\mathcal{V})$ e $Re(\mathcal{J})$ in funzione del tempo.

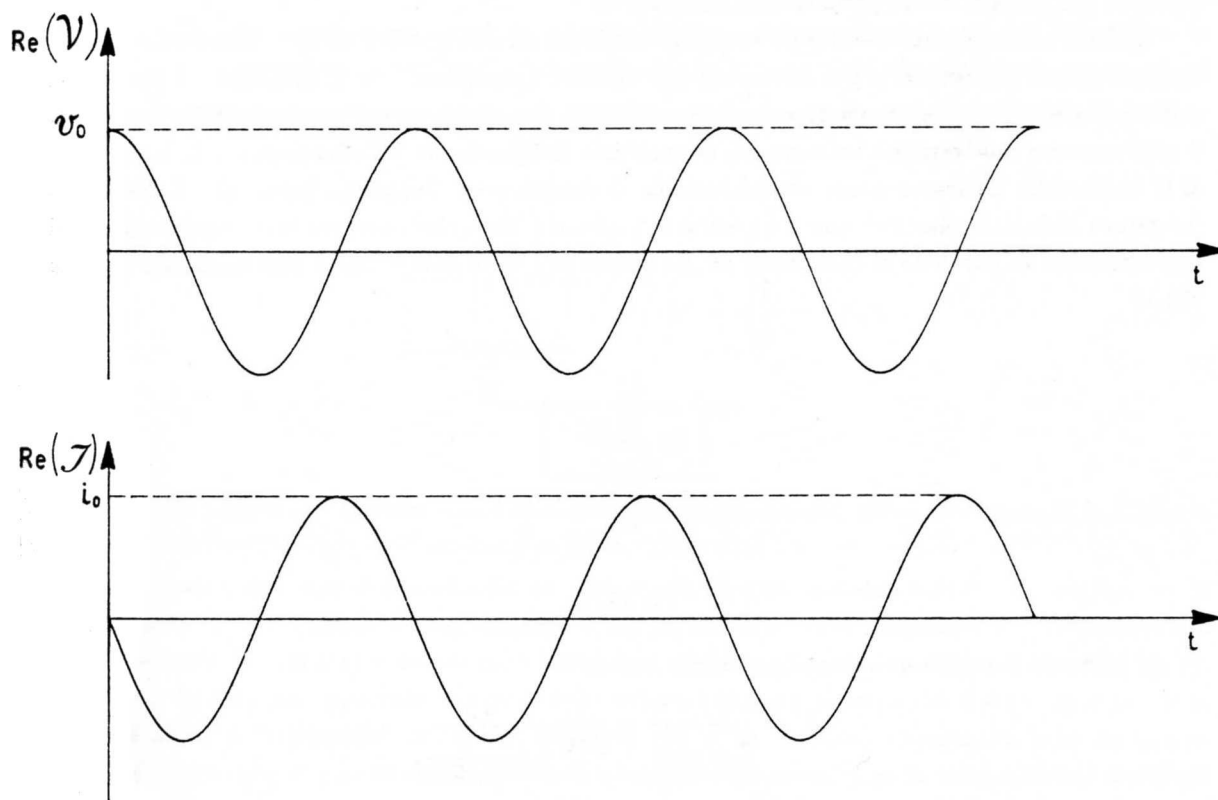


Fig.IX.11

Le espressioni viste sopra mostrano, fra l'altro, che una induttanza presenta una impedenza che cresce all'aumentare della frequenza della tensione applicata, mentre un condensatore all'aumentare della frequenza aumenta la propria ammettenza. Ma su questi aspetti avremo modo di tornare ampiamente nel seguito.

5.— *I componenti fisici reali: resistori, induttori, condensatori*

I componenti fino a ora descritti rappresentano sostanzialmente dei casi ideali; in pratica, quando si ha un componente fisico reale, cioè un resistore, un induttore, un condensatore esso non è mai puro, cioè non può essere completamente caratterizzato dal solo valore della resistenza, induttanza

e capacità rispettivamente (indipendente da ω) *. Ad esempio un resistore presenta sempre delle piccole componenti induttive che possono tranquillamente essere trascurate in bassa frequenza, ma non devono viceversa essere dimenticate per alti valori di ω . Se ad esempio l'induttanza spuria ammonta a $1 \mu H$ e il resistore è da 100Ω , per $f = \frac{\omega}{2\pi} = 16 MHz$ l'induttanza contribuisce con una reattanza pari alla resistenza. Se poi il resistore è costituito da uno spessore massiccio di materiale conduttore, la resistenza ad alte frequenze aumenta a causa dell'*effetto pelle* che riduce la sezione efficace del conduttore. L'effetto è tanto più elevato quanto più piccola è la resistività del materiale e quanto più elevata la sua permeabilità magnetica.

Quanto ai condensatori essi sono in genere costituiti da due sottili fogli di materiale conduttore separati da un dielettrico e poi arrotolati per ridurne l'ingombro. Se il dielettrico fosse ideale, cioè un perfetto isolante caratterizzato da un costante dielettrica ϵ_r indipendente dalla frequenza, il condensatore mostrerebbe un capacità C anch'essa indipendente dalla frequenza e la conoscenza di C basterebbe a caratterizzare completamente il componente. Sappiamo invece che il dielettrico (in genere materiale plastico) non è un isolante perfetto e che quindi occorre tener conto almeno di una resistenza in parallelo al condensatore. Il componente deve quindi essere schematizzato come in Fig.12

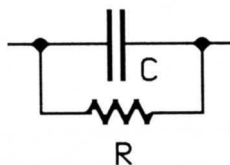


Fig.IX.12

e pertanto presenta una impedenza complessiva:

$$Z = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C} = \frac{1}{j\omega C} \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega CR}} \quad (\text{IX.54})$$

Il costruttore non indica quasi mai il valore di R soprattutto perché esso non è mai indipendente dalla frequenza (il fenomeno fisico che dà luogo a R non è quindi di carattere ohmico). La quantità che viene viceversa indicata è il cosiddetto *fattore di dissipazione* (*dissipation factor*) D che nel caso sopra esposto è pari a $\frac{1}{\omega RC}$; si trova che questa grandezza (per condensatori commerciali dell'ordine di $10^{-2} \div 10^{-3}$) è abbastanza indipendente dal valore della capacità, dalla tensione applicata e della frequenza (da qualche centinaio di Hz in su) e dipende esclusivamente dalle caratteristiche del dielettrico e dalla temperatura; ciò vuol dire che il valore di R non è costante, ma diminuisce pressappoco inversamente a ω (la fisica del fenomeno è assai complicata ed è legata intimamente alla dipendenza della costante dielettrica dalla frequenza). Ad esempio mentre in continua ($\omega = 0$) un condensatore da $1 \mu F$ può presentare una resistenza di fuga dell'ordine di $10^{10} \div 10^{11} \Omega$; a $1 kHz$ con un D tipico di $5 \cdot 10^{-3}$ $R(1kHz) \approx 32 k\Omega$. Talvolta invece di D si usa il suo inverso, che è indicato col simbolo Q detto *Q del condensatore*.

Il fattore di dissipazione può essere definito e interpretato in vari modi: ad esempio come il rapporto fra reattanza e resistenza del parallelo $C \parallel R$; oppure può essere interpretato come il

* questo è poi particolarmente vero quando, come qui, si parla di componenti commerciali che vengono usati nei circuiti elettrici e elettronici, non di componenti campione, cui sono dedicati i primi paragrafi del capitolo successivo.

rapporto fra l'energia dissipata per effetto Joule dalla resistenza in un ciclo e l'energia massima immagazzinata dal condensatore (su questo punto torneremo più diffusamente nel Cap.XIII, §1).

Riprendiamo l'espressione (54) che, una volta razionalizzata, può essere scritta come:

$$\mathcal{Z} = \frac{R}{1 + \omega^2 C^2 R^2} + \frac{\omega^2 C^2 R^2}{j\omega C(1 + \omega^2 C^2 R^2)} = \frac{R}{\frac{D^2 + 1}{D^2}} + \frac{1}{j\omega C(D^2 + 1)} \quad (\text{IX.55})$$

La (55) ci dice che il nostro condensatore reale può essere sì schematizzato come una capacità C in parallelo a una resistenza R , ma equivalentemente (dal punto di vista circuitale) può essere anche interpretato come una resistenza $r = \frac{R}{\frac{D^2 + 1}{D^2}}$ in serie a una capacità $\xi = C(D^2 + 1)$ (vedi Fig.13).

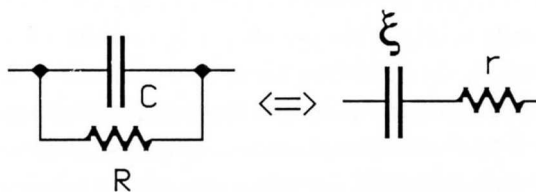


Fig.IX.13

E' facile vedere che se viene scelta la seconda schematizzazione, allora $D = r\omega\xi$. Si noti che se $R \gg \omega C$, cioè se $D \ll 1$, $\xi \approx C$ mentre $r \approx RD^2$, cioè $r \ll R$.

La schematizzazione del condensatore reale come un elemento con fattore di dissipazione D circa costante, vale quando il condensatore è adoperato in corrente alternata e a frequenze non troppo elevate ($< 1MHz$) e non troppo basse; in continua come abbiamo già notato nel Cap.VI, si osserva talvolta un apparente aumento della capacità dovuto al fatto che il dielettrico tende in qualche modo a "trattenere" la carica; dielettrici che si comportano abbastanza bene da questo punto di vista, cioè hanno moderati effetti di ritenzione di carica, sono la mica e alcuni materiali plastici. A frequenze ancor più elevate di $1MHz$ entrano in gioco altri effetti, il principale dei quali è l'effetto pelle che porta a dover considerare in serie al condensatore una resistenza che aumenta con la radice della frequenza. Inoltre l'induttanza in serie non può più essere trascurata; ad alte frequenze il condensatore è quindi schematizzabile nel modo della Fig.14.

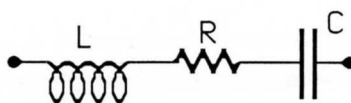


Fig.IX.14

La presenza di una piccola induttanza in serie a un condensatore reale deriva dalle sue dimensioni finite per cui un flusso finito di \vec{B} si concatena comunque a esso; inoltre i reofori, tanto più sono sottili tanto più contribuiscono all'induttanza. Vedremo, quando parleremo dei campioni di capacità, che una induttanza in serie tende ad aumentare il valore apparente della capacità.

Veniamo ora alle induttanze: abbiamo già visto che una resistenza in serie si osserva anche in continua ed è dovuta alla resistività del materiale dell'avvolgimento; pertanto una resistenza in serie dovrà essere sempre tenuta in conto schematizzando il componente come in Fig.15.

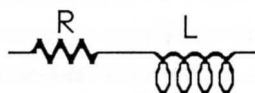


Fig.IX.15

Analogamente al caso di un condensatore si introduce una quantità adimensionale che in qualche modo misura la *purezza* dell'induttanza; essa si indica con Q e si chiama Q della *induttanza* o *Fattore di merito* o *Parametro di qualità*; esso vale

$$Q = \frac{\omega L}{R} \quad (\text{IX.56})$$

e rappresenta il rapporto fra la reattanza e la resistenza dell'induttanza. Similmente al caso del condensatore vedremo che il Q dell'induttanza è pari al rapporto fra l'energia massima immagazzinata nell'induttanza e quella media spesa per effetto Joule sulla resistenza. Se R al variare della frequenza rimanesse costante, Q dipenderebbe linearmente dalla frequenza. Viceversa nei casi reali il valore di Q è relativamente stazionario anche per ampie variazioni della frequenza; ciò significa che R cresce con la frequenza. Il fatto che R cresca con la frequenza è dovuto a vari fattori: ad esempio l'isteresi (se il supporto della bobina è di materiale magnetico) porta a un aumento delle perdite proporzionale a ω , le correnti parassite nel supporto, se conduttore, danno perdite proporzionali a ω^2 , l'effetto pelle dà perdite proporzionali a $\sqrt{\omega}$; tutti questi effetti, dando luogo a dissipazione di energia, corrispondono a un aumento della parte reale R dell'impedenza. Al momento quest'ultima considerazione può non sembrare così ovvia; sarà molto più evidente quando studieremo (Cap.XI) la dissipazione di energia nei circuiti in alternata. Un altro contributo, per niente trascurabile, alle perdite deriva anche dal fatto che della carica si accumula nelle capacità parassite fra spira e spira e fra strato e strato; ciò porta a dover schematizzare il nostro induttore come in Fig.16

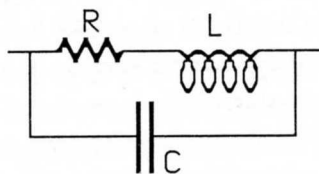


Fig.IX.16

con C che tiene appunto conto, almeno in buona parte, di queste capacità distribuite; abbiamo visto sopra che un condensatore reale ha perdite nel dielettrico e questo è quello che puntualmente avviene anche alle capacità spurie dell'induttore. In esso oltretutto il dielettrico (lo smalto dei fili) non è particolarmente di alta qualità, (cioè il fattore di dissipazione D di questo condensatore spurio è relativamente grande) per cui all'aumentare della frequenza questo contributo alle perdite diviene addirittura dominante, specialmente se la bobina è avvolta in aria, perché altri sensibili contributi alle perdite sono in questo caso assenti. Se la bobina è avvolta su un supporto ferromagnetico, ci potremmo aspettare che all'aumentare della frequenza l'induttanza L diminuisse, a causa di un ipotizzabile incapacità dei domini magnetici a seguire le rapide variazioni della forza magnetizzante. L'effetto esiste ma interviene a frequenze estremamente elevate ($10^8 \div 10^9 \text{ Hz}$), quando cioè il periodo della corrente alternata è dell'ordine del tempo di rilassamento dei domini nel materiale. Per alcune ferriti il problema insorge addirittura a frequenze di 2 o 3 ordini di grandezza superiori.

Forti non linearità nel comportamento delle induttanze avvolte su nuclei ferromagnetici possono verificarsi per ampiezze grandi della corrente che li attraversa, quando intervengono saturazioni della magnetizzazione. Su questo punto capiterà di soffermarsi nuovamente. I valori del fattore di merito Q dipendono molto dal tipo di bobina, in particolare i valori più elevati si hanno per bobine con il nucleo ferromagnetico (anche $Q > 100$); valori inferiori sono da aspettarsi nel caso in cui l'avvolgimento sia fatto in aria. Ritornando alla schematizzazione della Fig.16, il costruttore talvolta fornisce il valore della frequenza per la quale l'ammittenza del condensatore uguaglia in valore assoluto quella dell'induttanza ($\omega^2 = \frac{1}{LC}$); tale frequenza è detta, per motivi che saranno poi ampiamente discussi, di *risonanza* e denota in pratica l'estremo superiore del campo di frequenze in cui la induttanza può essere utilizzata come tale.

6.— Il trasformatore

Il trasformatore è un dispositivo che consente, disponendo di una tensione alternata di una certa ampiezza, di ottenerne un'altra di ampiezza diversa. Il trasformatore è costituito (vedi Cap.VII, §2 per alcuni dettagli costruttivi) da un circuito magnetico di materiale ad alta permeabilità (tipicamente ferro) su cui sono avvolti due rami di due circuiti indipendenti che presentano conseguentemente un alto coefficiente di mutua induzione (Fig.17).

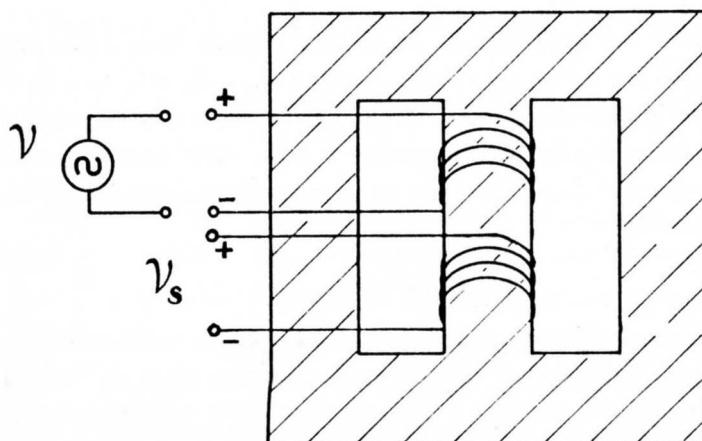


Fig.IX.17

Per semplicità supponiamo che i flussi di induzione magnetica dei due circuiti si concatenino completamente, di avere cioè fra i due circuiti un accoppiamento *stretto*. Allora varrà (Cap.VII,§2):

$$M^2 = L_p L_s \quad (\text{IX.57})$$

Gli indici p e s si riferiscono agli aggettivi *primario* e *secondario* con cui si denominano gli avvolgimenti, intendendo che al circuito primario si applica la tensione alternata da trasformare e dal circuito secondario si preleva la tensione trasformata.

Detti N_p e N_s il numero delle spire degli avvolgimenti si avrà con buona approssimazione (α costante, vedi Cap.VII,§2):

$$L_p = \alpha N_p^2 \quad L_s = \alpha N_s^2 \quad M = \alpha N_s N_p \quad (\text{IX.58})$$

Consideriamo la rete equivalente al nostro sistema (Fig.18) ammettendo che il secondario sia chiuso su un carico, caratterizzato da una impedenza complessa Z . I puntini segnati agli estremi delle bobine determinano convenzionalmente il segno di M : esso è positivo quando i sensi positivi delle correnti nelle due maglie entrano nelle bobine dalla parte del puntino. La scelta di Fig.18 è consistente con il sistema disegnato in Fig.17.

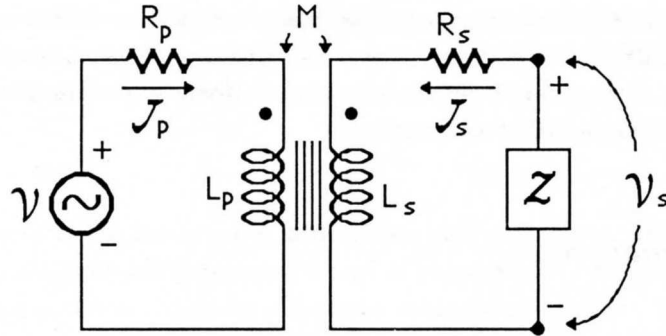


Fig.IX.18

R_p rappresenta la resistenza del circuito primario dovuta all'avvolgimento (in un trasformatore ideale $R_p = 0$, in uno reale dovrà essere $R_p \ll \omega L_p$, dove ω è la pulsazione della tensione alternata da trasformare \mathcal{V}). Anche la resistenza dell'avvolgimento secondario R_s in un trasformatore ideale sarà nulla.

Prima di vedere in formule il comportamento del sistema, guardiamo di capire cosa succede nel nostro trasformatore, supposto per il momento ideale, cioè con $R_p = R_s = 0$; quando il secondario è aperto (ovvero chiuso su una impedenza Z molto elevata) la corrente \mathcal{J}_s del secondario potrà considerarsi nulla e pertanto il flusso di induzione magnetica Φ nel circuito magnetico sarà unicamente dato dalla presenza di una corrente \mathcal{J}_{p0} (detta *corrente di magnetizzazione*) nel primario. La forza contro elettromotrice nel primario

$$-\frac{d\Phi}{dt} = -j\omega L_p \mathcal{J}_{p0} \quad (\text{IX.59})$$

dovrà bilanciare la ddp applicata \mathcal{V} , istante per istante, secondo quanto stabilito dalla seconda legge di Kirchhoff. Supponiamo ora di chiudere il secondario su un carico caratterizzato da un modulo di Z piccolo; \mathcal{J}_s è ora diversa da zero, cosicché il flusso Φ nel circuito magnetico è ora prodotto sia dalla corrente \mathcal{J}_p che dalla corrente \mathcal{J}_s ; tuttavia dovrà continuare a essere uguale a Φ poiché anche in queste condizioni la forza contro elettromotrice nel primario:

$$-\frac{d\Phi}{dt} = -j\omega L_p \mathcal{J}_p - j\omega M \mathcal{J}_s \quad (\text{IX.60})$$

deve *controbilanciare* la *medesima* fem \mathcal{V} di prima. Vediamo così che in un trasformatore ideale l'ampiezza del flusso di induzione magnetica attraverso il circuito magnetico (anch'esso è una grandezza alternata) resta la stessa, indipendentemente dal valore del carico sul secondario. Vedremo nel seguito, ma si può fin d'ora intuire, che $\mathcal{J}_p \gg \mathcal{J}_{p0}$ e pertanto in un trasformatore ideale anche quando la corrente nel primario aumenta molto, non si hanno problemi di saturazione della magnetizzazione poiché $|\Phi|$ e quindi $|\vec{B}|$ all'interno del circuito magnetico resta costante (in un' induttanza l'aumento di i comporta invece un aumento proporzionale di $|\vec{B}|$ nel nucleo).

Guardiamo ora di quantificare in formule quello che accade: la seconda legge di Kirchhoff dà

per il primario e il secondario:

$$\begin{cases} \mathcal{V} = \mathcal{J}_p(R_p + j\omega L_p) + \mathcal{J}_s j\omega M \\ 0 = \mathcal{J}_p j\omega M + \mathcal{J}_s(\mathcal{Z} + j\omega L_s + R_s) \end{cases} \quad (\text{IX.61})$$

Dalla seconda delle (61) si ottiene

$$\mathcal{J}_s = -\mathcal{J}_p \frac{j\omega M}{\mathcal{Z} + j\omega L_s + R_s} \quad (\text{IX.62})$$

che sostituita nella prima delle (61) dà:

$$\mathcal{V} = \mathcal{J}_p \left(R_p + j\omega L_p + \frac{\omega^2 M^2}{\mathcal{Z} + j\omega L_s + R_s} \right) \quad (\text{IX.63})$$

Ricavando \mathcal{J}_p da quest'ultima e sostituendo nella (62) si ottiene:

$$\mathcal{Z}\mathcal{J}_s = -\mathcal{V}_s = -\mathcal{V} \frac{j\omega M \mathcal{Z}}{(R_p + j\omega L_p)(R_s + j\omega L_s + \mathcal{Z}) + \omega^2 M^2} \quad (\text{IX.64})$$

Da quest'ultima, tenendo conto della (57) abbiamo:

$$\mathcal{V}_s = \mathcal{V} \frac{j\omega M \mathcal{Z}}{(R_p + j\omega L_p)(R_s + \mathcal{Z}) + j\omega L_s R_p} \quad (\text{IX.65})$$

La ddp \mathcal{V}_s a circuito aperto (c.a.) si può calcolare facendo il limite della (65) per $\mathcal{Z} \rightarrow \infty$:

$$\mathcal{V}_{s.c.a.} = \mathcal{V} \frac{j\omega M}{R_p + j\omega L_p} = \mathcal{V} \sqrt{\frac{L_s}{L_p}} \frac{1}{\left(1 + \frac{R_p}{j\omega L_p}\right)} \approx \mathcal{V} \frac{N_s}{N_p} \quad (\text{IX.66})$$

dove nell'ultimo passaggio si è sfruttato il fatto che $R_p \ll \omega L_p$.

Si vede così che la ddp ai capi del secondario aperto è in fase con quella del primario e la sua ampiezza è proporzionale a quella del primario, tramite il rapporto $\frac{N_s}{N_p}$, detto *rapporto di trasformazione*. Così, ad esempio, se si vuole ridurre l'ampiezza della tensione applicata al primario di un fattore 10 occorrerà che $\frac{N_p}{N_s} = 10$; il valore poi di N_s (e quindi di N_p) sarà dettato dalla sezione del circuito magnetico e dalla resistenza massima che possiamo tollerare negli avvolgimenti. Più esplicitamente, in trasformatori *di potenza*, cioè adatti ad assorbire grosse correnti nel primario, è richiesta una resistenza degli avvolgimenti assai bassa; conseguentemente le spire dovranno essere poche e di filo grosso; ciò porta ad aumentare la sezione S del circuito magnetico poiché il flusso di induzione magnetica nel primario deve rimanere tale che la ampiezza della sua derivata temporale $\omega N_p S B$ sia pari all'ampiezza della tensione applicata (vedi (59) e (60)) e B non può crescere oltre il valore B_M critico per il ferro ($1 \div 1.5 T$), pena la saturazione. Facciamo un esempio numerico: $B_M = 1T$, $\omega = 314 \text{ rad/s}$, $N_p = 20$; allora per avere $\omega N_p S B_M = 310 V$ (la tensione di rete, 220 V efficaci) otteniamo $S = 50 \text{ cm}^2$. In trasformatori di piccola potenza, le spire saranno viceversa assai numerose e la sezione del circuito magnetico assai più contenuta.

Troviamo ora la corrente di corto circuito (c.c.) nel secondario $\mathcal{J}_{s.c.c.}$, dopo di che potremo determinare il circuito equivalente del secondario secondo Thévenin in quanto:

$$\mathcal{Z}_{sTh} = -\frac{\mathcal{V}_{s.c.a.}}{\mathcal{J}_{s.c.c.}} \quad (\text{IX.67})$$

$\mathcal{J}_{s.c.c.}$ si può calcolare dividendo i due membri della (65) per \mathcal{Z} e facendo poi il limite per $\mathcal{Z} \rightarrow 0$, tenendo conto della (64):

$$\mathcal{J}_{s.c.c.} = -\frac{\mathcal{V}j\omega M}{(R_p + j\omega L_p)R_s + j\omega L_s R_p} \quad (\text{IX.68})$$

Pertanto

$$\mathcal{Z}_{sTh} = R_s + R_p \frac{j\omega L_s}{R_p + j\omega L_p} \approx R_s + \frac{N_s^2}{N_p^2} R_p \quad (\text{IX.69})$$

Quindi, per quanto riguarda i terminali di uscita, cioè il secondario, il trasformatore si comporta come un generatore di tensione alternata di ampiezza $\mathcal{V} \frac{N_s}{N_p}$ con una resistenza interna pari a $R_s + \frac{N_s^2}{N_p^2} R_p$.

Guardiamo ora come si comporta il primario, troviamo cioè l'impedenza di ingresso che il primario presenta al generatore di tensione \mathcal{V} ; riprendendo la (63) e tenendo presente che, essendo $(R_s + \mathcal{Z} \ll \omega L_s)$, si ha:

$$\frac{1}{R_s + \mathcal{Z} + j\omega L_s} \approx \frac{1}{j\omega L_s} \left(1 - \frac{R_s + \mathcal{Z}}{j\omega L_s} \right)$$

otteniamo:

$$\mathcal{V} \approx \mathcal{J}_p \left[R_p + \frac{N_p^2}{N_s^2} (R_s + \mathcal{Z}) \right] \quad (\text{IX.70})$$

vale a dire l'impedenza di ingresso del primario (la cosiddetta *impedenza riflessa*) è, nel limite di R_p e R_s trascurabili e $\mathcal{Z} \ll \omega L_s$, pari all'impedenza del carico sul secondario moltiplicata per il quadrato del rapporto delle spire primario-secondario. Si noti che nel caso di trasformatore ideale l'impedenza vista dal primario ha esattamente la stessa fase di quella del secondario; ciò comporta che lo sfasamento fra corrente e tensione nel primario è lo stesso che nel secondario; inoltre, sempre nel caso di $R_s, R_p \rightarrow 0$ e $\mathcal{Z} \ll \omega L_s$:

$$\frac{\mathcal{J}_s}{\mathcal{J}_p} = -\frac{N_p}{N_s} \quad \frac{\mathcal{V}_s}{\mathcal{V}} = \frac{N_s}{N_p} \quad (\text{IX.71})$$

Tutto ciò comporta, come vedremo nel Cap.XI, che le potenze nel primario e nel secondario sono istante per istante uguali e questo non deve sorprendere in quanto, essendo le resistenze in gioco uguali a zero, la trasformazione di tensione avviene senza perdite.

Le (66), (67), (69), (70) e (71) ci dicono che, pur avendo separatamente primario e secondario dei coefficienti di autoinduzione molto maggiori di tutte le altre impedenze in serie a essi, quando il secondario è chiuso su un carico \mathcal{Z} , con $|\mathcal{Z}| \ll \omega L_s$, allora ogni contributo induttivo, sia nel primario che sul secondario scompare. Questo fatto è direttamente collegato all'aver ammesso accoppiamento stretto fra i due circuiti, tant'è vero che se viceversa avessimo considerato un accoppiamento lasco, avremmo trovato un residuo di componente induttiva nelle impedenze. A questo proposito si veda l'Appendice B ove è trattato questo tipo di problema riguardo al regime transitorio.

Fino a ora abbiamo considerato trasformatori ideali, al più con resistenze in serie agli avvolgimenti; in pratica un'altra fonte di perdite è costituita proprio dal ferro di cui è fatto il circuito magnetico: le perdite saranno principalmente quelle per isteresi e per correnti parassite. Abbiamo già detto che per ridurre quest'ultime il circuito magnetico è costituito da lamierini di ferro (Cap.VII, §2) che interrompono il flusso delle correnti indotte; le perdite per isteresi sono contenute scegliendo opportunamente i materiali e tenendosi sufficientemente lontani dalla saturazione. Quanto al comportamento del trasformatore alle varie frequenze c'è innanzitutto da osservare che per un certo trasformatore, a parità di ampiezza della tensione applicata, il limite inferiore di frequenza alla quale è utilizzabile è dato dal fatto che al diminuire di ω , per mantenere la stessa forza controlettromotrice, deve crescere B all'interno del circuito magnetico e B non può mai superare il

valore di saturazione caratteristico del materiale, che nel caso del ferro non raggiunge i 2 T. Quindi per trasformatori che funzionino in bassa frequenza occorre costruire circuiti magnetici di sezione molto maggiore che per frequenze più elevate. Aumentare la frequenza non comporta teoricamente svantaggi: infatti, lavorando con la stessa ampiezza della tensione applicata, aumentare ω significa diminuire di altrettanto B ($|\frac{d\Phi}{dt}| = \omega BN_p S$) e poiché le perdite per isteresi vanno come il prodotto ωB e quelle per correnti parassite come $\omega^2 B^2$, l'efficienza del trasformatore non dovrebbe risentire dell'aumento di frequenza. Tuttavia disponendo di un trasformatore costruito per funzionare a 50 Hz, se si prova a studiarne il comportamento a frequenza più elevata, si trova che la resistenza del primario cresce con la frequenza e conseguentemente l'impedenza di uscita del secondario aumenta, fino a rendere il trasformatore inutilizzabile: ad esempio in un trasformatore 220-24 V da 30 W, costruito per lavorare a 50 Hz, l'impedenza di uscita R_s (vedi (69)) vale meno di 1 Ω a 50 Hz, mentre a 5000 Hz tale impedenza è circa 100 volte più alta. Il motivo di questo comportamento deriva dal fatto che, come abbiamo già visto, quando si costruisce un avvolgimento si creano delle capacità fra i vari strati il cui effetto si può schematizzare assumendo che in parallelo alla bobina ci sia un condensatore. Ciò avviene sia nel primario che nel secondario. Mentre in bassa frequenza l'impedenza di questo condensatore è molto elevata, all'aumentare di ω la corrente nell'induttanza va via via riducendosi a scapito di quella che passa attraverso il condensatore, il che ovviamente compromette l'efficienza dell'accoppiamento induttivo dei due circuiti.

A frequenze elevate, là dove cioè non è più necessario disporre di grossi valori di $\Phi(B)$, si preferisce ridurre la sezione del circuito magnetico e usare materiali (ferriti) con μ magari inferiori a quelli del ferro, ma con resistività molto più elevate in modo da ridurre le perdite per correnti parassite; riducendo le dimensioni e anche il numero di spire si possono inoltre contenere gli effetti di capacità distribuite e migliorare quindi la risposta in frequenza del trasformatore.

NOTA BIBLIOGRAFICA

Le reti lineari nel caso di eccitazione sinusoidale sono studiate in dettaglio su **FR 59** e particolarmente su **DE 69**.

La risoluzione col metodo simbolico delle equazioni differenziali e il problema delle proprietà dei sistemi lineari sono trattati (come solito molto brillantemente) su **FE 63** (vol I, Capp.21,22,23,24 e 25). Su **FE 63** (vol II, Cap.22) si trova anche una descrizione dei circuiti in alternata con una dettagliata discussione sulle approssimazioni introdotte nella definizione degli elementi reali resistore, induttore e condensatore.

I limiti dell'approccio quasi stazionario si possono trovare ad esempio sul Cap.8 di **FA 60** e nel Cap.23 del secondo volume di **FE 63**.

Per ulteriori informazioni sulle caratteristiche dei componenti reali (resistori, induttori e condensatori) il Cap.2 di **TE 57** è di prezioso ausilio. Ancora più dettagliato e ponderoso è il Cap.2 di **TE 50**.

BE 82, **CO 83**, **CO 85**, **ZI 86** descrivono le caratteristiche dei componenti reali e dei campioni di resistenza, capacità e induttanza. Il Cap. 14 di **LA 57** è di ottimo riferimento per le proprietà e le caratteristiche dei trasformatori.

Per le perdite dielettriche nei condensatori si vedano le opere di Tareev, Zwikker e Anderson citate alla fine del Cap. VI.

I PONTI IN ALTERNATA

1.— *Campioni di impedenza*

I campioni di resistenze, capacità e induttanze per le misure in alternata devono essere inseriti nei circuiti di utilizzo seguendo opportuni accorgimenti per sfruttarne a pieno le caratteristiche. Infatti, poiché non di rado questi campioni sono raggruppati in decadi e hanno quindi delle estensioni fisiche non piccole, essi presentano capacità finite verso i conduttori circostanti e fra questi senz'altro verso la terra; se non vengono prese opportune precauzioni, le correnti che fluiscono attraverso queste capacità parassite alterano il rapporto ddp-corrente dell'impedenza campione e rendono praticamente illusoria la precisione nominale del campione medesimo. Questo è particolarmente vero perché le capacità parassite non hanno un valore costante e riproducibile, bensì un valore che dipende dalla disposizione dei conduttori circostanti (e si ricordi che fra questi va annoverato anche lo sperimentatore); è chiaro viceversa che affinché una impedenza campione possa effettivamente essere usata come tale, deve essere possibile definirne il valore indipendentemente dalla configurazione elettrostatica dei conduttori circostanti. Per ottenere questo risultato nonostante la presenza delle capacità parassite, tale impedenza è sempre un elemento non a due, ma a *tre terminali*. Nella Fig.1 è disegnata schematicamente la configurazione elettromeccanica che si adotta nella costruzione di impedenze campione; il caso si riferisce in particolare a una resistenza campione per misure in alternata.

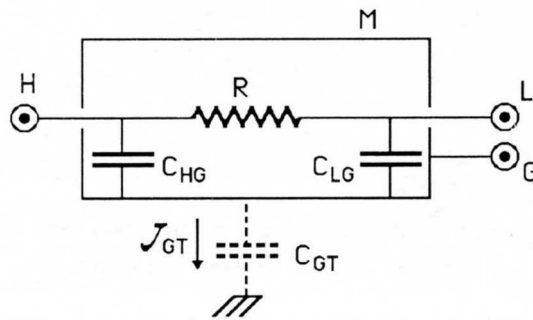


Fig.X.1

La resistenza è racchiusa in una scatola metallica M provvista di un morsetto (in genere indicato con la lettera G, *guardia* o *schermo*, *guard*). I due estremi della resistenza corrispondono a due morsetti (H-*high*, L-*low*) i quali presentano capacità non nulle verso la scatola (C_{HG} , C_{LG}). Questi condensatori disegnati come localizzati in realtà sono schematizzazioni degli effetti dovuti alle capacità distribuite fra i vari conduttori presenti. Nella Fig.1 è anche riportata la capacità (C_{GT}) fra la scatola e il potenziale di terra; è questo infatti il potenziale a cui si trova la maggior parte dei

conduttori che circondano la scatola. E' facile rendersi conto che se il morsetto G non è collegato né ad H né a L, allora l'impedenza fra i morsetti H e L non è univocamente definita, bensì risente in modo non facilmente controllabile della presenza dei condensatori C_{LG} e C_{HG} ; infatti, anche supponendo di conoscere tali capacità con precisione, l'entità delle correnti attraverso di esse dipenderebbe dalla differenza di potenziale fra G e i terminali H e L, che dipende a sua volta dal valore di C_{GT} e quindi dalla geometria dei conduttori circostanti; per rendere effettivamente utilizzabile la resistenza, e rimuovere gli inconvenienti di cui sopra, essa si usa nella cosiddetta configurazione a due terminali che si ottiene cortocircuitando L e G. In tal modo il potenziale della scatola è lo stesso del terminale L ed è pertanto univocamente definita la ddp fra L e il terminale H (Fig.2): risultano così univocamente definiti anche i rapporti $Z_H = \frac{V_{HL}}{J_H}$ e $Z_L = \frac{V_{HL}}{J_L}$ (che saranno però diversi fra di loro a causa della corrente nel condensatore C_{HG}). Il motivo per cui non è indifferente la scelta del terminale da mettere al potenziale dello schermo dipende dalle particolari caratteristiche costruttive: il terminale H è quello che presenta verso la scatola la capacità più bassa (cioè $C_{HG} < C_{LG}$) e pertanto è bene che sia esso a trovarsi a un potenziale più elevato (High) rispetto allo schermo G anziché il terminale L (Low), perché a parità di corrente nell'impedenza, la corrente spuria sarà inferiore. Nelle misure a due terminali l'impedenza dell'elemento è definita come il rapporto fra la ddp V_{HL} fra H e L (L cortocircuitato con G) divisa per la corrente entrante in H e a questa quantità, a meno che non sia detto esplicitamente il contrario, si riferiscono i valori nominali dell'impedenza dati dal costruttore:

$$Z = \frac{V_{HL}}{J_H} \quad (\text{X.1})$$

Ovviamente, nel nostro caso Z sarà tanto più simile a R quanto più piccolo sarà C_{HG} . Quando, come nel caso di impedenze campione, il costruttore fornisce lo schema equivalente dell'impedenza, ivi comprese la capacità fra i terminali e lo schermo, l'impedenza definita dalla (1) è riconducibile a una espressione in cui compaiono grandezze note e in particolare quella campione: nel caso di Fig.2 $Z = \left(\frac{1}{R} + j\omega C_{HG}\right)^{-1}$. Poiché il secondo termine è pur sempre una correzione del primo, il campione può essere utilizzato in una relativamente larga gamma di frequenze anche se C_{GH} non è noto con la precisione di R .

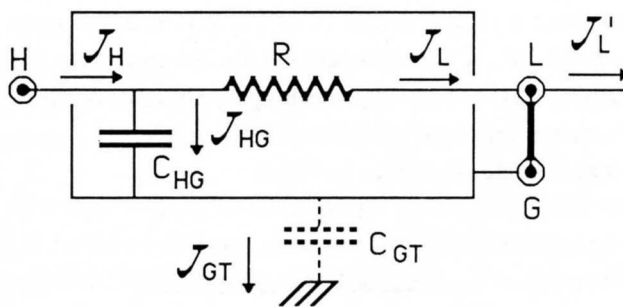


Fig.X.2

Con riferimento alla Fig.2 si noti che non solo $J_L \neq J_H$, ma anche $J_H \neq J'_L$ a causa della corrente J_{GT} che dallo schermo fluisce verso la terra cui lo schermo è comunque accoppiato capacitivamente o verso altri conduttori a potenziali diversi che presentano capacità non nulle verso lo schermo.

Il motivo principale per cui il terminale L non viene definitivamente cortocircuitato con lo schermo dal costruttore è che se non fosse possibile intervenire indipendentemente sugli schermi, la impedenza di una serie di due impedenze siffatte dipenderebbe anche dalla capacità $C_{GG'}$ fra le due scatole (Fig.3a), grandezza non univocamente definita, ma dipendente dalla posizione mutua delle

scatole.

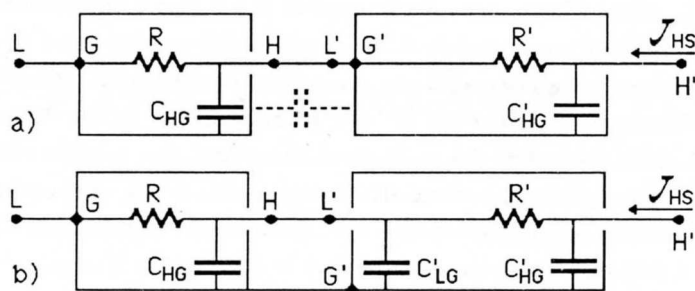


Fig.X.3

La Fig.3b mostra una configurazione di collegamenti che consente di definire l'impedenza della serie in maniera univoca come $Z_S = \frac{V_{H'L}}{J_{HS}}$. La impedenza Z_S così definita vale $C'_{HG} \parallel (R' + C'_{LG} \parallel C_{HG} \parallel R)$ ovvero:

$$Z_S = \frac{1}{j\omega C'_{HG} + \left(R' + \frac{1}{j\omega(C'_{LG} + C_{HG}) + \frac{1}{R}} \right)^{-1}} \quad (X.2)$$

Consideriamo ora i vari campioni di impedenza ed esaminiamo quantitativamente il contributo degli effetti spuri presenti in queste impedenze e il loro influsso sulla precisione dei campioni.

2.— Campioni di resistenze

Per quanto riguarda le resistenze campione a decadi, delle caratteristiche di stabilità e precisione in continua si è già detto a tempo debito (Cap.IV, §1): stabilità circa $20 \text{ ppm}/^\circ\text{C}$, precisione dell'ordine di qualche parte su 10^4 . L'avvolgimento del filo che costituisce la resistenza è realizzato in modo cosiddetto *antiinduttivo*, ottenuto avvolgendo le spire alternativamente in un senso e nell'altro, oppure avvolgendo il filo su un supporto piatto e quindi con piccola sezione; il circuito equivalente di ogni decade di resistenze è quello riportato in Fig.4:

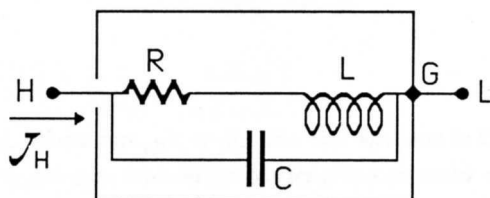


Fig.X.4

L deriva dalla somma dell'induttanza dei reofori e di quella residua degli avvolgimenti, mentre C è principalmente dovuta alla capacità fra i terminali H e G (cortocircuitato con L). Valori tipici

possono essere $C \approx 20 - 30 \text{ pF}$, L da qualche centesimo a una decina di μH a seconda che la resistenza totale della decade vada da 0.1Ω a $10^5\Omega$. L'impedenza \mathcal{Z} del circuito è data da

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{\frac{1}{R+j\omega L} + j\omega C} = \frac{R + j\omega \left[L\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) - R^2C \right]}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + (\omega RC)^2} \quad (\text{X.3})$$

dove $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ (valori tipici per $\omega_0/2\pi$: $10^8 \div 10^9 \text{ Hz}$); noti R , L e C è possibile ricavare il valore di \mathcal{Z} a qualunque pulsazione ω . In pratica non si procede così, soprattutto perché in questa schematizzazione vengono completamente trascurati gli effetti resistivi, dipendenti dalla frequenza, nel condensatore e nell'induttanza, nonché l'effetto pelle; il costruttore suggerisce piuttosto di schematizzare l'impedenza come

$$\mathcal{Z} = R_S + jX_S \quad (\text{X.4})$$

con R_S e X_S debolmente dipendenti dalla frequenza e fornisce il valore di $\Delta R_S/R_S$ in funzione della frequenza. Il valore di R_S a 1 kHz è in genere quello nominale della resistenza. Tipicamente nelle resistenze di basso valore ($< 100\Omega$) si assiste a un moderato aumento di R_S in funzione della frequenza dovuto all'effetto pelle, mentre per resistenze più elevate si ha una decisa diminuzione di R_S dovuta alle perdite dielettriche della capacità in parallelo alla resistenza. Valori tipici: una resistenza campione da 10Ω (a 1 kHz), a 5 MHz è aumentata di meno dell'1%, mentre una da $100\text{k}\Omega$ a 100 kHz è già diminuita di poco meno del 10% rispetto al valore a 1 kHz . Corrispondentemente la parte immaginaria X_S si comporterà in modo diverso nei due casi: precisamente, e questo si può anche vedere esaminando la (3) per $\omega \ll \omega_0$, resistenze di piccolo valore tendono ad avere $X_S > 0$, cioè a essere induttive, mentre resistenze di alto valore hanno $X_S < 0$, cioè sono capacitive. La precisione con cui è nota X_S non è quasi mai critica per la misura in cui il campione viene adoperato; vedremo infatti, quando parleremo dei ponti in alternata, che con questi metodi di misura si può rendere la determinazione del valore della resistenza incognita quasi indipendente dal valore del coefficiente immaginario della resistenza campione usata per confronto e che la presenza di X_S al più peggiora la sensibilità della misura.

3.— Campioni di capacità

Veniamo ora ai campioni di capacità. Quanto alla precisione e alla stabilità, fino a capacità dell'ordine di 1000 pF si riescono a ottenere condensatori di eccezionale qualità dal punto di vista della precisione (anche meglio di 1 su 10^5), della stabilità (dell'ordine di 2 parti su 10^5) e del fattore di dissipazione D (minori di 10^{-5}); queste caratteristiche sono ottenute usando come dielettrico l'aria, o un gas. Per valori più grandi della capacità, che oltretutto sono quelli più utili nella maggior parte delle misure di laboratorio, occorre ricorrere a dielettrici solidi poiché caratterizzati da una maggiore costante dielettrica relativa; ciò comporta un peggioramento netto nella qualità del condensatore a motivo sia della dipendenza dalla costante dielettrica dalla temperatura, che delle perdite dielettriche le quali, praticamente nulle nell'aria, sono viceversa decisamente apprezzabili nei dielettrici solidi. I dielettrici che vengono generalmente usati per condensatori campione fino a $C \approx 1\mu\text{F}$ sono la mica e il polistirene. La mica è migliore dal punto di vista della stabilità ($+(3 \div 4) \cdot 10^{-5}/^\circ\text{C}$ per la mica, $-1.4 \cdot 10^{-4}/^\circ\text{C}$ per il polistirene), ma è inferiore dal punto di vista della dipendenza dalla frequenza, in particolare verso i valori bassi: un condensatore da $1\mu\text{F}$ con il dielettrico in polistirene

ha, in continua, una capacità che differisce per meno dello 0.1% dal valore a 1 kHz, mentre uno di mica può anche aumentare di qualche per cento; infatti, mentre il polistirene è caratterizzato da un fattore di dissipazione praticamente indipendente dalla frequenza e molto basso ($< 2 \cdot 10^{-4}$), la mica soffre del problema della *ritenzione di carica* (dovuta alla cosiddetta *polarizzazione interfacciale*) che provoca un aumento del fattore di dissipazione D in bassa frequenza (fino a 10^{-3} a 10 Hz). Le precisioni di questi condensatori possono arrivare a qualche 10^{-4} (a una definita temperatura e frequenza, generalmente 20 °C e 1 kHz).

Guardiamo ora (Fig.5) il circuito equivalente di una cassetta di condensatori, nella configurazione a due terminali:

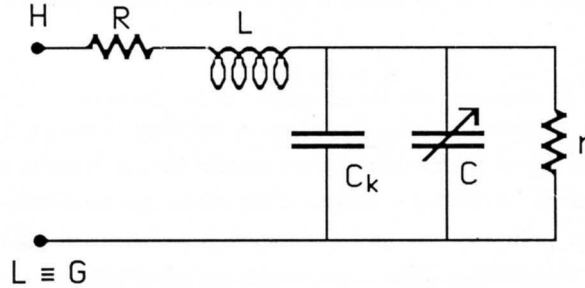


Fig.X.5

Il condensatore variabile rappresenta quello campione vero e proprio (la variabilità del condensatore è ottenuta ponendo o rimuovendo vari condensatori in parallelo), R e L rappresentano resistenza e induttanza dei reofori e delle armature, C_k la capacità fra i due terminali con L cortocircuitato con G (cioè la capacità fra H e la carcassa) r rappresenta le perdite, sia quelle dielettriche degli isolanti dipendenti dalla frequenza che quelle associate alla resistenza di fuga in continua. Come nel caso del resistore campione, i valori di questi componenti variano con la frequenza, per cui lo schema equivalente serve più che altro a mettere in evidenza l'origine fisica delle dipendenze in funzione della frequenza, mentre in pratica i termini correttivi si ottengono schematizzando l'impedenza complessiva come il parallelo di un condensatore e una resistenza :

$$Z_C = \left(j\omega C_p + \frac{1}{R_p} \right)^{-1} \quad (\text{X.5})$$

e ricavando le variazioni di C_p in funzione della frequenza dalle curve fornite dal costruttore. Coerentemente con quanto detto sopra l'andamento di massima in funzione di ω è ricavabile dallo schema equivalente di Fig.5, trascurando i termini resistivi e notando che la serie di un condensatore e una induttanza si può scrivere:

$$Z = \frac{1}{j\omega C} + j\omega L = \frac{1}{j\omega C} (1 - \omega^2 LC) = \frac{1}{j\omega C'} \quad (\text{X.6})$$

cioè per $\omega \ll \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$:

$$\frac{C' - C}{C} = \frac{\Delta C}{C} \approx \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \quad (\text{X.7})$$

cioè il valore del condensatore aumenta col quadrato della frequenza. Eccezion fatta per i condensatori a mica che, come abbiamo detto, presentano una accentuata risalita della capacità verso la frequenza zero, è questo l'andamento che effettivamente si osserva per la capacità dei condensatori campione. L'induttanza L , e quindi ω_0 , dipendono dal valore impostato sul condensatore variabile

e per esempio per $C = 1\mu F$ (a 1 kHz) e $\omega_0/2\pi = 400\text{ kHz}$, a 40 kHz otteniamo $\frac{\Delta C}{C} \approx 1\%$. La variazione di R (per effetto pelle) e di r (aumento delle perdite dielettriche all'aumentare della frequenza) contribuiscono principalmente alle variazioni del valore di R_p definito nella (5).

Per quanto riguarda la configurazione meccanica delle schermature e della scatola, con un condensatore è possibile adottare un montaggio che riduce la capacità spuria C_k indicata nella Fig.5 a valori molto bassi (vedi Fig.6).

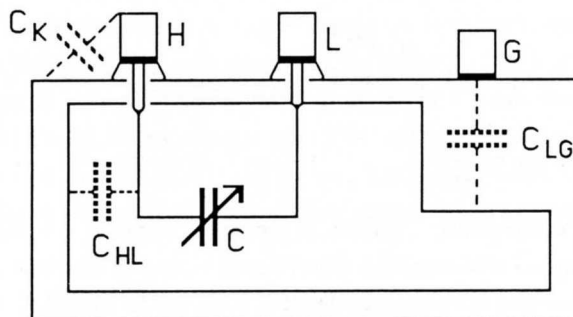


Fig.X.6

Il terminale L, oltre a essere collegato a una armatura del condensatore, scherma tutti i componenti campione. In questo modo la capacità C_{HL} (vedi figura) fra H e L risulta abbastanza grossa ma costante e essendo essa in parallelo a quella fra le armature è possibile inglobarla nel valore effettivo della capacità complessiva fra H e L, che quindi avrà un valore minimo maggiore di zero. Con questo accorgimento la capacità residua fra il terminale H e G risulta essere molto piccola ($C_{HG} \approx 1pF$).

4.- Campioni di induttanza

Quanto agli induttori, essi sono le impedenze di cui più difficilmente si riescono a costruire campioni di alta qualità. Infatti campioni ottenuti con avvolgimenti in aria hanno $Q = \frac{\omega L}{R}$ non molto elevati; questo è da evitarsi, poiché una grossa resistenza in serie alla induttanza peggiora, come vedremo, la sensibilità delle misure dove si impiega il campione. Alti valori di Q si possono ottenere solo con l'uso di supporti ferromagnetici; questi ultimi sono in genere a forma toroidale, per concentrare il campo magnetico nell'induttore e per ridurre l'influenza dei campi esterni e gli accoppiamenti induttivi con il resto del circuito. Mediante l'uso di questi supporti l'induttanza acquista una sensibile dipendenza dalla corrente, poiché il μ del materiale (e quindi l'induttanza) prima cresce all'aumentare della corrente e poi, raggiunta la saturazione del materiale, diminuisce rapidamente. Un altro grosso contributo alla variazione dell'induttanza effettiva fra i terminali dipende dalla capacità in parallelo alla bobina, dovuta sia a quella distribuita di cui abbiamo già parlato nei capitoli precedenti, sia a quella fra il terminale H e lo schermo nella configurazione a due terminali. L'effetto della capacità in parallelo è quello di aumentare il valore effettivo di L con le frequenza (Fig.7):

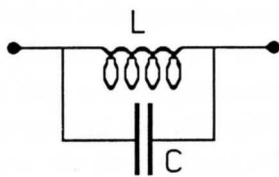


Fig.X.7

$$Z = \left(j\omega C + \frac{1}{j\omega L} \right)^{-1} = j\omega L \left(\frac{1}{1 - \omega^2 LC} \right) = j\omega L' \quad (\text{X.8})$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \frac{L' - L}{L} = \frac{\Delta L}{L} \approx \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \quad (\text{X.9})$$

Il termine correttivo (9) è dominante, a parità di corrente, rispetto a tutti gli altri e i valori di C in gioco (dovuti principalmente alle capacità distribuite) sono tali che una induttanza campione da 100 mH da 1 a 10 kHz aumenta tipicamente dell'1% (cioè $\omega_0/2\pi \approx 100kHz$). Quanto al parametro di qualità Q esso aumenta con la frequenza e poi, raggiunto un massimo ($Q \approx 200$) fra 2 e 20 kHz , diminuisce a causa dell'aumento delle perdite dielettriche e del supporto ferromagnetico.

5.- Ponti in alternata

Supponiamo di disporre di un circuito come quello in Fig.8 cioè un ponte dove tutte le impedenze sono del tipo complesso.

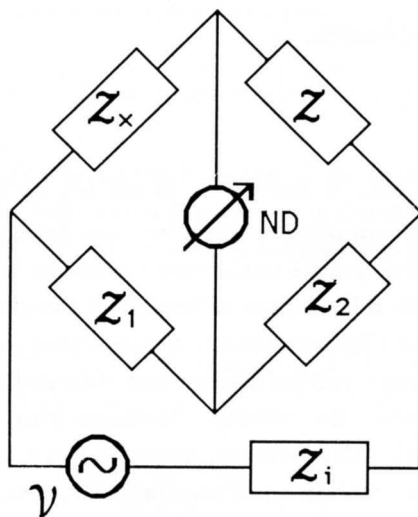


Fig.X.8

ND è un rivelatore di zero, in pratica un sensibilissimo *voltmetro in alternata* di cui più avanti descriveremo le caratteristiche e il principio di funzionamento. Quando il voltmetro rivela una ddp nulla (entro la sua sensibilità) è possibile, seguendo esattamente lo schema di ragionamento del

Ponte di Wheatstone, verificare l'esistenza di una precisa relazione fra le impedenze del ponte; tale condizione è ovviamente *identica* a quella del Ponte di Wheatstone, eccezion fatta per le grandezze che in questo caso sono complesse:

$$Z Z_1 = Z_2 Z_x \quad \text{ovvero} \quad Z_x = Z \frac{Z_1}{Z_2} \quad (\text{X.10})$$

Trattandosi di grandezze complesse, in realtà le relazioni sono due, una per la parte reale e una per la parte immaginaria. Corrispondentemente, per compiere le misure, occorre disporre di campioni variabili sia per quanto riguarda la parte reale che la parte immaginaria di Z , Z_1 e Z_2 ; inoltre, mentre nel caso del Ponte di Wheatstone, a patto di disporre di campioni o sufficientemente piccoli o sufficientemente grandi, l'equilibrio è sempre possibile, nel caso delle impedenze ciò non è più vero; infatti, a causa del fatto che il coefficiente dell'immaginario può essere sia positivo che negativo, si possono verificare condizioni in cui il sistema di due equazioni nel campo reale associato alla (10) non ammette soluzioni.

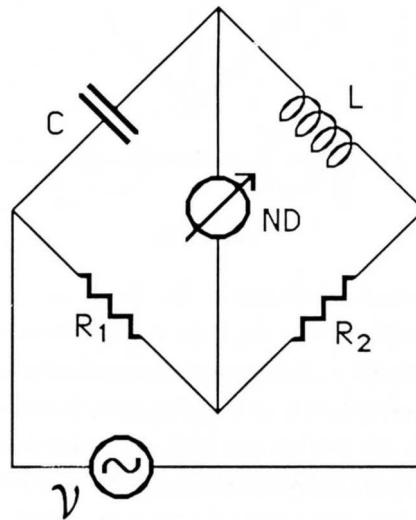


Fig.X.9

In Fig.9 è rappresentato un caso di ponte non equilibrabile.

Esiste per contro una numerosissima schiera di ponti in alternata, almeno in linea di principio, equilibrabili; essi sono classificati a seconda della natura (resistiva, capacitiva, induttiva o mista) delle impedenze usate per il confronto (Z , Z_1 e Z_2). Ci limitiamo a dare alcuni esempi.

Ponte di De Sauty serie (Fig.10)

Qui, come nel caso illustrato precedentemente, è adottata una soluzione molto diffusa per la scelta di Z_1 e Z_2 , ovvero due resistenze R_1 e R_2 . R_1 e R_2 non sono quasi mai due resistenze fisse, bensì si tratta di un'unica resistenza a filo (partitore a filo) con un cursore che la può dividere in due resistenze (R_1 e R_2 appunto) secondo un rapporto variabile con continuità. Inoltre il movimento meccanico, in genere rotatorio, che provoca lo scorrimento del cursore reca un indice con scala che fornisce una misura del rapporto $\frac{R_1}{R_2}$, la grandezza di primario interesse. Infatti, posto $Z_1 = R_1$ e

$Z_2 = R_2$ nella (10), si ottiene:

$$\begin{cases} R_x = \frac{R_1}{R_2} R \\ C_x = \frac{R_2}{R_1} C \end{cases} \quad (\text{X.11})$$

Posto $R_x C_x = \tau_x$ e $RC = \tau$, le (11) possono sinteticamente scriversi $\tau_x = \tau$.

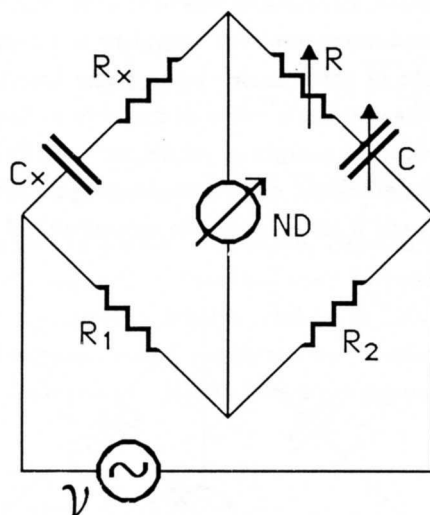


Fig.X.10

Le (11) ci dicono che nel caso del Ponte di De Sauty serie, le condizioni di equilibrio non dipendono dalla frequenza. Pertanto, nell'ipotesi che il generatore non sia un generatore sinusoidale perfetto, ma abbia piuttosto contributi di armoniche superiori alla fondamentale, l'equilibrio sarà comunque lo stesso per tutte le armoniche, cioè corrisponderà agli stessi valori di R , C , R_1 e R_2 .

In pratica questa affermazione è più teorica che reale; infatti la ipotesi sottaciuta è che R_x , C_x , R , C , nonché R_1 e R_2 , siano costanti in funzione della frequenza; in pratica, limitandoci anche solo alle resistenze R_1 e R_2 , questo è solo vero per campi abbastanza ristretti di ω , là dove effetti capacitivi e induttivi del filo non si fanno ancora sentire (vedi §§1,2).

Quanto alla accuratezza con cui R_x e C_x sono determinate, tralasciando per il momento il problema della sensibilità, avremo per gli errori massimi:

$$\frac{\Delta R_x}{R_x} = \frac{\Delta R_1}{R_1} + \frac{\Delta R}{R} \quad (\text{X.12})$$

e analoga per $\frac{\Delta C_x}{C_x}$; $\frac{\Delta R}{R}$ è l'errore relativo dichiarato dal costruttore su R , resistenza campione, in genere a decadi. Se si lavora a una frequenza diversa da 1 kHz sarà bene conoscere la correzione da apportare a R che probabilmente influenzerà anche la precisione di R (vedi §2). Il primo termine a secondo membro è stato lasciato indicato in questa forma poiché il suo valore dipende da come esso viene determinato: se R_1 e R_2 vengono misurati indipendentemente esso sarà dato da $\frac{\Delta R_1}{R_1} + \frac{\Delta R_2}{R_2}$; se viceversa si usa l'indicazione della manopola che comanda il partitore a filo, occorrerà conoscere la linearità del comando, stimare l'errore di lettura della scala e quindi, facendo attenzione al fatto che l'errore su R_1 non è indipendente da quello su R_2 , calcolarsi la corretta espressione per $\Delta(\frac{R_1}{R_2})$.

Ponte di De Sauty parallelo (Fig.11)

Si trova, esattamente come prima:

$$\begin{cases} R_x = \frac{R_1}{R_2} R \\ C_x = \frac{R_2}{R_1} C \end{cases}$$

e continuano a valere così tutte le osservazioni fatte a proposito del De Sauty serie.

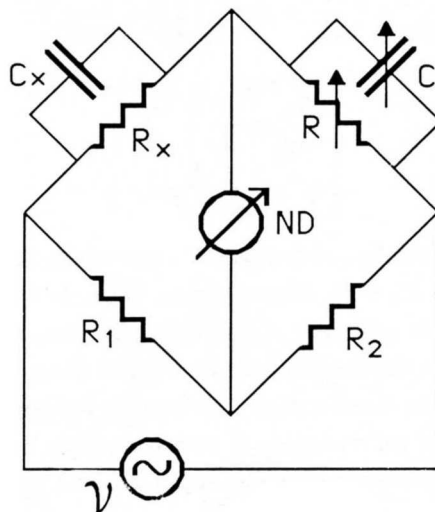


Fig.X.11

Ponte di Wien

Abbiamo visto nel Cap IX,§5 che disponendo di un condensatore C_s in serie ad una resistenza R_s è sempre possibile disegnare un circuito equivalente dal punto di vista elettrico costituito da un condensatore C_p e da una resistenza R_p in parallelo con C_p e R_p diversi da C_s e R_s , ma legati a essi da una relazione che contiene anche la frequenza. Deve perciò essere possibile ottenere l'equilibrio per il cosiddetto ponte di Wien:

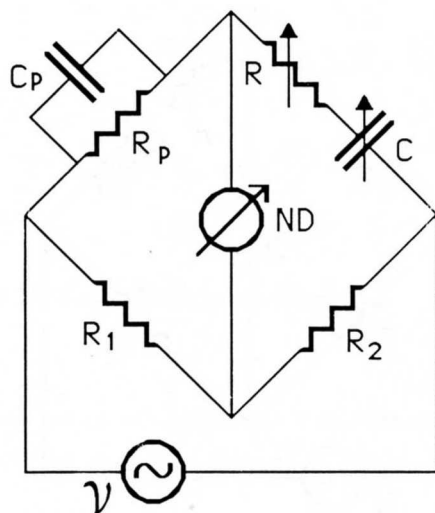


Fig.X.12

Infatti (Fig.12) possiamo sempre pensare di sostituire C_p, R_p con l'equivalente serie R_s, C_s la quale, con R e C , costituisce un De Sauty serie per il quale è sempre possibile trovare l'equilibrio. Le condizioni di equilibrio per C_p e R_p sono:

$$\left(\frac{1}{R_p} + j\omega C_p\right)^{-1} = \frac{R_1}{R_2} \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right) \quad (\text{X.13})$$

Da cui segue

$$\frac{R_2}{R_1} = \left(\frac{1}{R_p} + j\omega C_p\right) \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right) \quad (\text{X.14})$$

e pertanto:

$$\begin{cases} \frac{R_2}{R_1} = \frac{R}{R_p} + \frac{C_p}{C} \\ \omega^2 = \frac{1}{R_p C_p R C} \end{cases} \quad (\text{X.15})$$

Non sorprende che questa volta le condizioni di equilibrio *dipendano* dalla frequenza; infatti sappiamo che la trasformazione $C_p \parallel R_p \Leftrightarrow C_s + R_s$ *dipende* da ω . Il ponte di Wien, proprio per questa sua proprietà, può essere adoperato per misurare ω , una volta che siano noti R_p, C_p, R, C ; anzi, in linea di principio, allo scopo basterebbe che fossero note le costanti di tempo $\tau_p = R_p C_p$ e $\tau = RC$.

Nel caso del ponte di Wien, se il generatore non è puro, ma contiene contributi di diverse armoniche, si otterranno vari minimi sul rivelatore di zero (e nessuno zero), ognuno in corrispondenza delle varie armoniche e tanto più pronunciato quanto più grossa è l'ampiezza di segnale del generatore per quella armonica.

Ponte di Maxwell LL

Si trova (Fig.13):

$$\begin{cases} L_x = L \frac{R_1}{R_2} \\ R_x = R \frac{R_1}{R_2} \end{cases} \quad (\text{X.16})$$

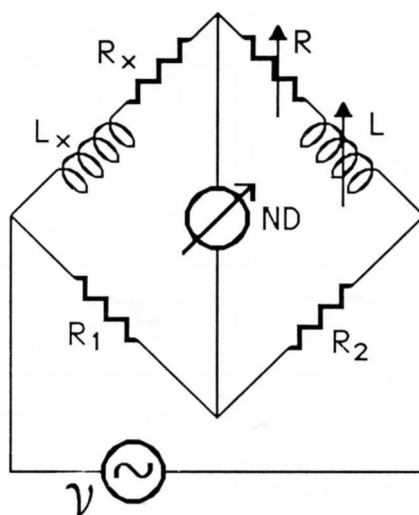


Fig.X.13

In un ponte di questo genere, cioè dove compaiono due induttanze, occorre fare in modo di ridurre il più possibile l'accoppiamento induttivo fra di esse: per esempio allontanandole e, se avvolte su supporti cilindrici, ponendo gli assi dei supporti ortogonali l'uno all'altro. Esente da questo tipo di problema è il

Ponte di Maxwell LC o Ponte di Maxwell-Wien (Fig.14)

La condizione (10) si riduce a:

$$(R_x + j\omega L_x)\left(\frac{1}{R} + j\omega C\right)^{-1} = R_1 R_3 \quad (\text{X.17})$$

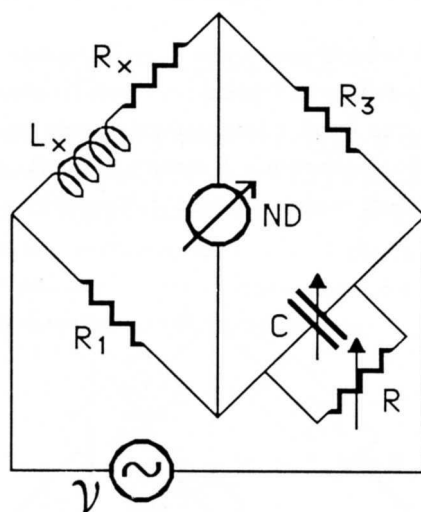


Fig.X.14

Si trovano le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} R_x = R_3 \frac{R_1}{R} \\ L_x = R_1 R_3 C \end{cases} \quad (\text{X.18})$$

Anche la configurazione duale del Ponte di Maxwell-Wien, il

il Ponte di Hay(Fig.15) può essere adoperata per determinare il valore di una induttanza: si ottengono ancora le condizioni (18) che, introducendo le costanti di tempo $\tau_x = \frac{L_x}{R_x}$ e $\tau = RC$, danno $\tau_x = \tau$.

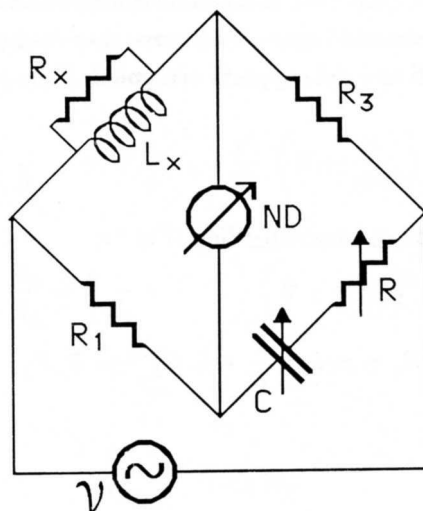


Fig.X.15

Le varie configurazioni studiate andranno scelte principalmente in base a criteri di massimizzazione della sensibilità nella misura della grandezza a cui siamo interessati. Notiamo intanto che, negli esempi fatti, le impedenze campione (reali e immaginarie) variando le quali si arriva all'equilibrio finale sono entrambe montate sullo stesso ramo. Il motivo di questa scelta dipende dal fatto che con questa configurazione la procedura di raggiungimento dell'equilibrio può essere assai più rapida che con altre.

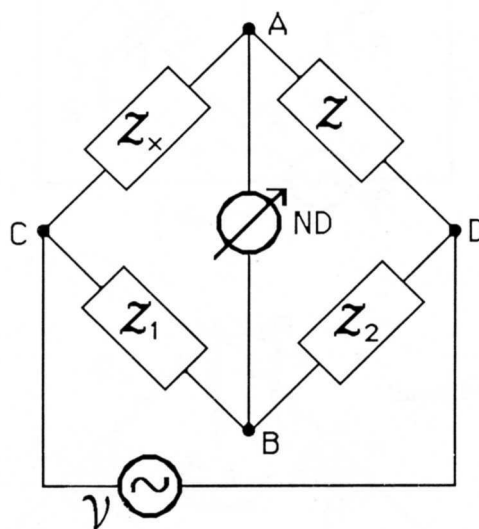


Fig.X.16

Infatti, con riferimento alla Fig.16, supponendo che l'impedenza di ingresso del rivelatore sia molto maggiore di *tutte* le altre del ponte, abbiamo:

$$V_{AB} = V_{CD} \left(\frac{Z}{Z_x + Z} - \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \right) = V_{CD} \frac{Z Z_1 - Z_x Z_2}{(Z_x + Z)(Z_1 + Z_2)} \quad (\text{X.19})$$

Da questa espressione, detto Z^* il valore di Z all'equilibrio, si ricavano le condizioni (10):

$$Z^* Z_1 - Z_x Z_2 = 0$$

che comportano:

$$\mathcal{F} = \frac{\mathcal{Z}_x}{\mathcal{Z}^*} = \frac{\mathcal{Z}_1}{\mathcal{Z}_2} \quad (\text{X.20})$$

Ovvero, all'equilibrio, i rapporti delle impedenze che confluiscono nei due terminali del rivelatore devono essere uguali. In una condizione generica in cui il ponte si trova fuori dall'equilibrio avremo:

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}^* + z \quad \text{con} \quad z = r + jx \quad (\text{X.21})$$

e pertanto dalla (19), (20) e (21) otteniamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{AB} &= \mathcal{V}_{CD} \frac{z\mathcal{Z}_1}{(\mathcal{Z}_x + \mathcal{Z}^*)(\mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_2) + z(\mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_2)} = \\ &= \mathcal{V}_{CD} \frac{\frac{\mathcal{Z}_1}{\mathcal{Z}_2} \cdot \frac{z}{\mathcal{Z}^*}}{\left(1 + \frac{\mathcal{Z}_x}{\mathcal{Z}^*}\right)\left(1 + \frac{\mathcal{Z}_1}{\mathcal{Z}_2}\right) + \frac{z}{\mathcal{Z}^*}\left(1 + \frac{\mathcal{Z}_1}{\mathcal{Z}_2}\right)} = \mathcal{V}_{CD} \frac{\mathcal{F} \cdot \frac{z}{\mathcal{Z}^*}}{(1 + \mathcal{F})\left[1 + \mathcal{F} + \frac{z}{\mathcal{Z}^*}\right]} \end{aligned} \quad (\text{X.22})$$

Il rivelatore di zero, come tutti i voltmetri in alternata, dà una indicazione proporzionale al modulo di \mathcal{V}_{AB} :

$$|\mathcal{V}_{AB}| = |\mathcal{V}_{CD}| \frac{|\mathcal{F}| \left| \frac{z}{\mathcal{Z}^*} \right|}{\left| 1 + \mathcal{F} \right| \left| 1 + \mathcal{F} + \frac{z}{\mathcal{Z}^*} \right|} \quad (\text{X.23})$$

L'azzeramento del ponte, ovvero la minimizzazione di $|\mathcal{V}_{AB}|$, si ricerca operando sulle due impedenze variabili R e X poste sul *ramo di confronto* ($\mathcal{Z} = R + jX$) e sarebbe altamente desiderabile l'assenza di interazione fra le operazioni di aggiustamento della R e quelle della X ; che cioè, trovato il minimo di $|\mathcal{V}_{AB}|$ in funzione di R , questo corrispondesse a R^* e che la successiva azione su X portasse a X^* ; se così è, in due mosse si può equilibrare il ponte, almeno trascurando i problemi di sensibilità finita del rivelatore. Matematicamente questo comporta che:

$$\begin{cases} \frac{\partial |\mathcal{V}_{AB}|}{\partial r} = 0 & \text{per } r = 0 \\ \frac{\partial |\mathcal{V}_{AB}|}{\partial x} = 0 & \text{per } x = 0 \end{cases} \quad (\text{X.24})$$

Poiché, avendo supposto l'impedenza di uscita del generatore trascurabile, $\mathcal{V}_{CD} = \mathcal{V}$ non dipende né da r né da x e altrettanto si può dire di \mathcal{F} e di \mathcal{Z}^* , cercare il minimo di $|\mathcal{V}_{AB}|$ rispetto a r e a x equivale a cercare il minimo di una espressione del tipo (vedi (23)):

$$\frac{r^2 + x^2}{(A + r)^2 + (B + x)^2} \quad (\text{X.25})$$

con

$$\begin{cases} A = \text{Re} [(1 + \mathcal{F})\mathcal{Z}^*] \\ B = \text{Im} [(1 + \mathcal{F})\mathcal{Z}^*] \end{cases} \quad (\text{X.26})$$

Da questa espressione si vede che se siamo abbastanza vicini alle condizioni di equilibrio, cosicché $r \ll A$ e $x \ll B$ e possiamo trascurare r e x nel denominatore della (25), allora effettivamente si verificano le (24) e la ricerca dello zero procede senza interazioni fra R e X ; si badi bene che l'assenza di interazione è particolarmente importante in prossimità dell'equilibrio perché l'aggiustamento finale è quello più delicato a causa della ridotta intensità del segnale.

Risultato analogo avremmo ottenuto se il ramo da variare fosse stato quello di \mathcal{Z}_2 , come nel ponte di Maxwell LC e in quello di Hay. Se avessimo messo però la resistenza variabile su un ramo e la reattanza su un altro, non avremmo trovato queste condizioni di "ortogonalità" nelle operazioni, neppure nell'intorno del minimo.

6.— Sensibilità nei ponti in alternata

Affrontiamo ora il problema della sensibilità del ponte; non sviscereremo il problema come nel caso del Ponte di Wheatstone, sia per le ulteriori complicazioni risultanti dai gradi di libertà aggiuntivi (impedenze complesse), sia perché in pratica si riesce a disporre di rivelatori di zero estremamente sensibili, sia perché la discussione sul Ponte di Wheatstone ha insegnato che la sensibilità è una grandezza in genere lentamente variabile e una ricerca esasperata del massimo assoluto non è quindi necessaria e infine perché in pratica lo sperimentatore si trova a dover rispettare altri tipi di vincoli (massima corrente sopportabile dai componenti, disposizione dei medesimi, schematura) che finiscono per determinare la configurazione del ponte indipendentemente dal massimo della sensibilità.

Mantenendo comunque, l'ipotesi assai realistica di impedenza elevata del rivelatore di zero e di impedenza del generatore trascurabile, nell'intorno del punto di equilibrio (cioè per $\mathcal{Z} = R^* + \Delta R + j(X^* + \Delta X)$ con $\frac{\Delta R}{R^*} \ll 1$ e $\frac{\Delta X}{X^*} \ll 1$), in base alla (22) si ricava, facendo il limite per $\Delta R, \Delta X \rightarrow 0$ (Fig.16):

$$\Delta \mathcal{V}_{AB} = \mathcal{V} \cdot \frac{\mathcal{F}}{(1 + \mathcal{F})^2} \frac{\Delta R + j\Delta X}{\mathcal{Z}^*} \quad (\text{X.27})$$

Il rivelatore misura il modulo (o l'ampiezza) di $\Delta \mathcal{V}_{AB}$ e pertanto una indicazione della sensibilità del metodo si ottiene considerando:

$$S_T = \frac{|\Delta \mathcal{V}_{AB}|}{\left| \frac{\Delta \mathcal{Z}}{\mathcal{Z}^*} \right|} = |\mathcal{V}| \cdot \left| \frac{\mathcal{F}}{(1 + \mathcal{F})^2} \right| \quad (\text{X.28})$$

Abbiamo, come nel caso del Ponte di Wheatstone, usato la variazione relativa $\frac{\Delta \mathcal{Z}}{\mathcal{Z}^*}$ anziché $\frac{\Delta \mathcal{Z}_x}{\mathcal{Z}_x}$ e questo perché esse, a parità di \mathcal{Z}_1 e \mathcal{Z}_2 coincidono. La (28) ci dice intanto che la sensibilità cresce con $|\mathcal{V}|$. Prima di procedere oltre, osserviamo che in genere non si è interessati a misurare il modulo di una impedenza, bensì la sua parte reale e la sua parte immaginaria. Pertanto ha interesse conoscere separatamente la sensibilità per la stima delle due grandezze. Supponendo che $\mathcal{Z} = R_s + jX_s$ (cioè una serie; l'estensione al parallelo si può fare molto semplicemente):

$$S_{R_s} = \frac{|\Delta \mathcal{V}_{AB}|_{X_s=X_s^*}}{\frac{\Delta R_s}{R_s}} \quad (\text{X.29})$$

e

$$S_{X_s} = \frac{|\Delta \mathcal{V}_{AB}|_{R_s=R_s^*}}{\frac{\Delta X_s}{X_s}} \quad (\text{X.30})$$

Dalla (27) si ottiene:

$$\begin{cases} |\Delta \mathcal{V}_{AB}|_{X_s=X_s^*} = |\mathcal{V}| \left| \frac{\mathcal{F}}{(1 + \mathcal{F})^2} \right| \frac{R_s}{\sqrt{R_s^2 + X_s^2}} \frac{\Delta R_s}{R_s} \\ |\Delta \mathcal{V}_{AB}|_{R_s=R_s^*} = |\mathcal{V}| \left| \frac{\mathcal{F}}{(1 + \mathcal{F})^2} \right| \frac{X_s}{\sqrt{R_s^2 + X_s^2}} \frac{\Delta X_s}{X_s} \end{cases} \quad (\text{X.31})$$

e pertanto per i rapporti delle due sensibilità abbiamo:

$$\frac{S_{R_s}}{S_{X_s}} = \frac{R_s}{X_s} \quad (\text{X.32})$$

che ci dice qualcosa di estremamente intuitivo: la sensibilità è migliore per il coefficiente che domina il modulo dell'impedenza. Se avessimo considerato un parallelo, $Z^{-1} = \frac{1}{R_p} + \frac{1}{jX_p}$, avremmo trovato il risultato duale, che cioè $\frac{S_{R_p}}{S_{X_p}} = \frac{X_p}{R_p}$.

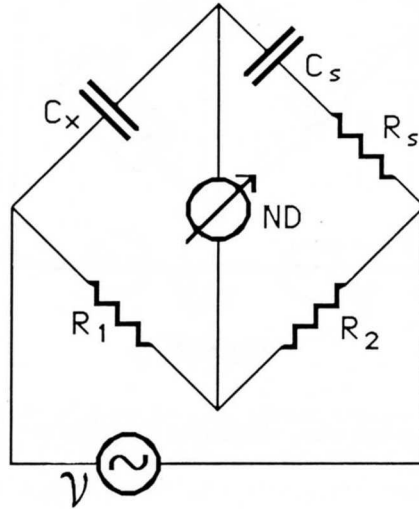


Fig.X.17

Questi ultimi risultati suggeriscono un altro fatto importante che potrebbe essere sfuggito: supponiamo di avere un ponte nominalmente *impossibile*, per esempio del tipo in Fig.17. La *impossibilità* significa che non si può raggiungere lo zero, ma non esclude che si possa trovare un minimo della differenza di potenziale ΔV_{AB} ; anzi il più delle volte il minimo esisterà e potrà anche essere assai pronunciato, se il coefficiente che rende il ponte impossibile (R_s) è molto minore dell'altro coefficiente (X_s); infatti le (31) ci dicono che la stessa variazione relativa su R_s e X_s dà dei contributi alla variazione del modulo di ΔV_{AB} , e quindi in definitiva al segnale sul rivelatore di zero, pesati con un fattore direttamente proporzionale al coefficiente che stiamo variando. Da ciò possiamo anche arguire che nel montare un ponte non è strettamente necessario tener conto, nel ramo di confronto, di tutte le componenti di impedenza del componente da misurare: avremo infatti un minimo nel segnale ΔV_{AB} meno pronunciato che nel caso in cui avessimo tenuto conto di tutti i contributi e il minimo sarà tanto meno profondo quanto più grosso sarà il contributo all'impedenza che avremo trascurato.

Torniamo ora a valutare il fattore $K = \left| \frac{\mathcal{F}}{(1 + \mathcal{F})^2} \right|$ contenuto nelle (31) e cerchiamo di massimizzarlo. Tenendo conto che $\mathcal{F} = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_x}{Z_s^*}$ e considerando i casi in cui Z_1 e Z_2 sono reali abbiamo $\mathcal{F} = \text{Re}(\mathcal{F}) = F$. Pertanto

$$K = \frac{F}{(1 + F)^2} \quad (\text{X.33})$$

Dalla (33) si ottiene che il massimo di K corrisponde a $F = 1$. Pertanto il massimo di sensibilità nella determinazione della resistenza e della reattanza di Z_x è ottenuto quando $R_1 = R_2$. Se consideriamo ponti quali quello di Maxwell LC o di Hay la situazione circuitale è differente da quella schematizzata nella Fig.16; essa è piuttosto del tipo di Fig.18.

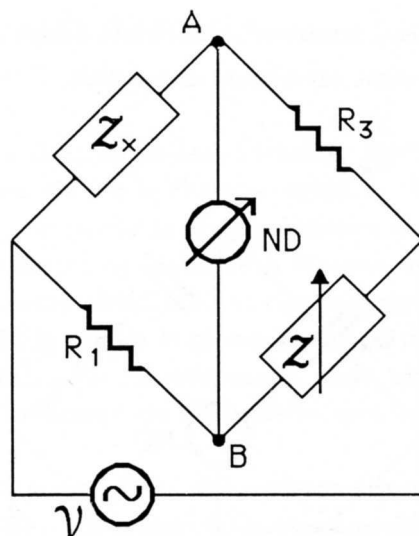


Fig.X.18

Si può vedere che anche in questo caso otteniamo l'espressione (27), ovvero

$$\Delta V_{AB} = v \cdot \frac{\mathcal{F}}{(1 + \mathcal{F})^2} \frac{\Delta R + j\Delta X}{Z^*}$$

con $\mathcal{F} = \frac{R_1}{Z^*} = \frac{Z_x}{R_3}$. Questa volta però \mathcal{F} è complesso e possiamo porre $\mathcal{F} = |\mathcal{F}| \exp j\psi = F \exp j\psi$. Per trovare il massimo di sensibilità per variazioni di ΔR e ΔX si tratta di trovare il massimo del modulo di

$$K = \frac{|\mathcal{F}|}{|1 + \mathcal{F}|^2} = \frac{F}{1 + F^2 + 2F \cos \psi} \quad (\text{X.34})$$

Il massimo di K , fissato ψ , è trovato ancora per $F = 1$, ovvero quando $|Z^*| = R_1$ e $|Z_x| = R_3$. La (34) ci dice poi che la sensibilità è migliore per quelle misure in cui la differenza di fase ψ fra Z^* e R_1 e fra R_3 e Z_x è massima. Infatti si noti che nella (34) il denominatore diminuisce all'aumentare di ψ da 0 a π . Nei casi considerati ora in cui Z_1 e Z_3 sono reali, al più ψ può essere $\pm \frac{\pi}{2}$, ma se avessimo considerato un ponte come quello in Fig.19 la prescrizione data dalla (34) suggerisce di adoperare per Z_1 una induttanza pura e per Z_3 un condensatore puro con la condizione:

$$\begin{cases} \omega L_x = \frac{1}{\omega C_3} \\ \omega L_1 = \frac{1}{\omega C} \end{cases} \quad (\text{X.35})$$

e avremmo ottenuto una sensibilità nominalmente infinita.

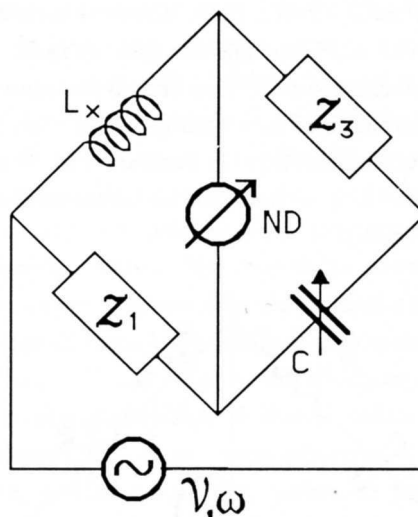


Fig.X.19

La condizione (35) corrisponde ad avere una impedenza complessiva fra i morsetti del generatore uguale a zero, ovvero una corrente infinita sui due rami del ponte; più avanti studieremo in dettaglio configurazioni di impedenze di questo genere che sono dette *risonanti*. In pratica le condizioni (35) non si potranno mai soddisfare a causa di contributi reali alle impedenze che sappiamo essere inevitabili; un ponte come quello ora descritto avrebbe anche il problema della presenza di due induttanze, proprio per evitare le quali è stato introdotto il ponte *LC*.

Tornando ai ponti di effettivo utilizzo (De Sauty, Maxwell *LC*, Hay), notiamo che la prescrizione $|\mathcal{F}| = 1$ niente dice sul valore che devono avere le impedenze, purché quelle confluenti nei rami di rivelazione siano uguali in modulo; questo risultato è conseguenza del fatto di aver ammesso, abbastanza realisticamente per la verità, l'impedenza del generatore molto piccola e l'impedenza del rivelatore molto grande. Sul valore che le impedenze dei rami devono assumere, torneremo nel §8, quando parleremo dei *disturbi* che possono influenzare la misura; infatti sulla base della loro minimizzazione sarà possibile avere prescrizioni in proposito.

7.— Il rivelatore di zero

Veniamo ora al rivelatore di zero. Non può trattarsi di un galvanometro di quelli con periodo attorno al secondo, poiché esso, sollecitato da un termine forzante a media nulla con un periodo estremamente breve ($10^{-3}s$ a $1 kHz$) non mostrerebbe alcuna deflessione (vedi Cap.XI, §2). A frequenze attorno al centinaio di cicli al secondo, possono andare bene *galvanometri a vibrazione*, cioè strumenti che si basano ancora sull'interazione del campo magnetico prodotto dalla corrente da misurare con un campo magnetico statico, ma fatti in modo da avere un periodo uguale o molto vicino a quello della tensione alternata del generatore; essi entrano in risonanza quando sono eccitati e l'ampiezza delle oscillazioni che l'equipaggio compie è proporzionale all'ampiezza del termine forzante. Nel campo delle frequenze audio ($< 20kHz$), la *cuffia telefonica* è stata per lungo tempo il rivelatore di zero di gran lunga più utilizzato. L'ampiezza del segnale sonoro udibile nella cuffia è proporzionale alla corrente che vi circola; non si tratta di un rivelatore con impedenza di

ingresso particolarmente elevata e nella ricerca della massima sensibilità intervengono i problemi di ottimizzazione dell'impedenza che abbiamo già discusso quando abbiamo studiato il Ponte di Wheatstone con il galvanometro a rivelare lo zero. Non ci addentreremo in questi problemi; piuttosto, allo scopo di evidenziare alcuni problemi di carattere generale che si incontrano nell'azzeramento dei ponti in alternata, descriviamo la procedura di azzeramento di un ponte che utilizzi la cuffia come rivelatore di zero. Supponiamo di aver montato un ponte di De Sauty e di cercare il minimo (idealmente lo zero) del segnale (Fig.20).

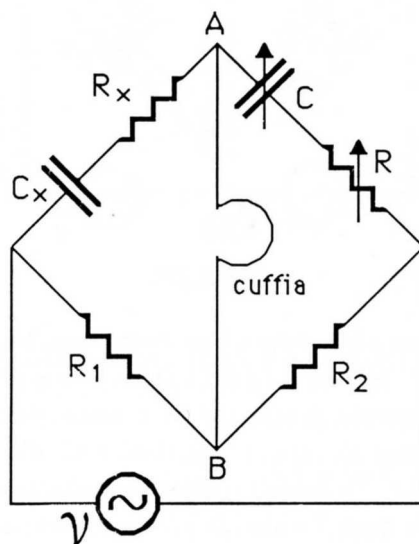


Fig.X.20

Il generatore abbia un controllo di *volume*, si possa cioè variare l'ampiezza di \mathcal{V} praticamente da 0 a un massimo V_0 . Supponiamo che il generatore oscilli a 1 kHz ; l'orecchio percepirà allora un fischio non particolarmente acuto. Inizialmente il ponte sia fuori dall'equilibrio: udiremo un fischio abbastanza intenso, anche tenendo il controllo di volume a un livello non particolarmente alto. Cominciando, per esempio, ad agire su R , ammettiamo di trovare un minimo del segnale; aumenteremo allora il volume e quindi agiremo su C fino a trovare nuovamente un minimo; aumenteremo di nuovo l'ampiezza e ritoccheremo R (quasi certamente faremo una variazione assai più piccola delle precedenti, cioè su decadi della cassetta meno significative). Aumenteremo ancora l'ampiezza di \mathcal{V} e ritoccheremo C e così via, facendo sempre variazioni più piccole, aumentando in continuazione l'ampiezza di \mathcal{V} . Da un certo punto in poi della procedura, quando non saremo ancora giunti al minimo assoluto, molto probabilmente cominceremo a udire un *ronzio di bassa frequenza* che ci disturberà non poco nel nostro sforzo di percepire la minima ampiezza possibile del fischio a 1 kHz . Noteremo anche che l'ampiezza di questo ronzio non manifesta variazioni strettamente correlate con la procedura di azzeramento. Proseguendo la nostra ricerca della minima intensità del fischio a 1 kHz , dovremo a un certo punto desistere, quando il ronzio sovrasta il tenue segnale. Il motivo di questo ronzio va ricercato nel fatto che il circuito montato presenta inevitabilmente accoppiamenti di tipo induttivo con la rete di alimentazione dell'oscillatore (cioè la tensione di 220 V , 50 Hz fornita dall'ENEL). La corrente a 50 Hz viene rivelata dalla cuffia e disturba la procedura di azzeramento principalmente perché, essendo l'accoppiamento definito dalla geometria relativa dei circuiti e quindi di fatto casuale, la situazione non corrisponde in genere a un generatore a 50 Hz in serie all'oscillatore a 1 kHz e quindi non avremo un minimo del ronzio quando il ponte è equilibrato per il fischio corrispondente al segnale.

Poiché accoppiamenti di questo genere sono difficilmente eliminabili, grande vantaggio si avrebbe se il rivelatore fosse *selettivo in frequenza*. Il galvanometro a vibrazione da questo punto di vista andrebbe estremamente bene, mentre la cuffia telefonica non è quasi per niente selettiva e demanda all'orecchio dello sperimentatore l'operazione di discriminazione fra una frequenza e l'altra. Un moderno e ottimo rivelatore di zero è un *micro Voltmetro in alternata* accordabile in frequenza. Esso consiste in un amplificatore molto sensibile la cui uscita, opportunamente trattata* in modo da dare una ddp proporzionale al valore efficace della tensione misurata, comanda uno strumento in continua, tipicamente un galvanometro. Nel caso dello strumento disponibile in laboratorio la sensibilità è tale che possono essere rivelate ddp sinusoidali con ampiezze inferiori a $1 \mu V$. Il *guadagno* dell'amplificatore (cioè di fatto la sensibilità) può essere regolato con continuità e questo rende praticamente inutile il controllo di volume dell'oscillatore. La caratteristica forse più preziosa dello strumento è la sua sintonizzabilità: è cioè possibile, tramite una regolazione esterna, massimizzare la risposta dell'amplificatore in corrispondenza di una certa frequenza, per esempio quella dell'oscillatore a $1 kHz$; per far ciò occorre, prima di procedere all'azzeramento del ponte, cioè quando il segnale V_{AB} è ancora decisamente diverso da zero, massimizzare la indicazione dello strumento, agendo sulla manopola di *sintonia* (*tuning*). Successivamente questo controllo non va più toccato, poiché la sintonizzazione è indipendente dal guadagno. Il guadagno decresce, allontanandosi dal massimo, abbastanza rapidamente: nel caso dello strumento in laboratorio, il guadagno alla seconda armonica è ridotto al 2% e alla terza all'1%; a $50 Hz$ il guadagno è circa lo 0.2% di quello a $1 kHz$, se quest'ultimo è il valore di sintonia. Si ottiene così il risultato voluto di selezionare abbastanza decisamente la frequenza di interesse e di rimuovere eventuali altri disturbi a frequenze diverse.

La resistenza di ingresso dipende dalla posizione del controllo di guadagno, ma si mantiene comunque molto alta, sempre $> 50k\Omega$. La procedura di ricerca dell'equilibrio del ponte, cioè del minimo del segnale, è analoga a quella descritta precedentemente, salvo che il mantenimento della giusta sensibilità di misura (il mantenimento dell'ago verso la metà scala) viene fatto col controllo di guadagno del rivelatore e non tanto aumentando l'ampiezza del segnale dell'oscillatore.

8.— *Accorgimenti per migliorare la qualità delle misure*

Difficilmente in una misura di laboratorio si giungerà a sfruttare a pieno le caratteristiche di sensibilità del rivelatore di zero e questo almeno per due motivi. Il primo motivo ha a che vedere con la precisione dei campioni; essi possono variare entro un campo di 5 o 6 decadi, diciamo da 0 a $1.1111 \mu F$ nominali e da 0 a 11111Ω nominali per capacità e resistenza rispettivamente; se ad esempio montiamo un Ponte di De Sauty con $R_1 \approx R_2$ e C_x dell'ordine del μF e R_x dei $k\Omega$, possiamo sfruttare tutte o quasi le decadi cosicché saranno possibili variazioni relative estremamente fini dei valori assunti dalle cassette campione. Tuttavia, data la precisione di taratura dei campioni ($\frac{\Delta C}{C} \approx 5 \cdot 10^{-3}$, $\frac{\Delta R}{R} \approx 4 \cdot 10^{-4}$), è praticamente inutile ogni variazione inferiore a $1 nF$ e 0.5Ω ; si trova allora che per rivelare queste variazioni non occorre senz'altro mettere al massimo il controllo del guadagno del rivelatore di zero. In altre parole, l'errore dovuto alla sensibilità è, in queste condizioni di misura, trascurabile rispetto a quello di taratura dei campioni. Il secondo motivo è che, se anche decidessimo di andare oltre, disinteressandoci del problema della taratura dei campioni, per esempio

* l'operazione in questione è detta di *raddrizzamento* e verrà discussa con qualche dettaglio nel seguito del corso.

se volessimo verificare l'uguaglianza di due impedenze, prima di raggiungere il massimo del guadagno osserveremmo dei comportamenti anomali dell'apparato sperimentale: ad esempio lo spostamento di un cavetto di connessione o di una scatola di impedenza provoca lo spostamento dell'ago del rivelatore di zero; oppure il semplice movimento dello sperimentatore fa cambiare l'equilibrio del sistema. Siamo cioè in presenza di quegli effetti su cui ci siamo soffermati nel §1; capacità parassite che risentono della posizioni mutue dei conduttori. Inoltre, se un ramo presenta una impedenza particolarmente bassa e quindi in esso circola una corrente non piccola, possono far sentire il loro effetto anche accoppiamenti di tipo induttivo. E' questo il problema che si incontra nel caso che la resistenza a filo $R_1 - R_2$ sia di valore molto piccolo, diciamo dell'ordine di pochi Ohm: a questo riguardo, l'uso di resistenze più elevate riduce gli effetti induttivi ma facilita l'insorgenza degli effetti capacitivi parassiti che viceversa richiedono, per essere contenuti, l'uso di basse impedenze nei rami; infatti le capacità parassite verso gli altri conduttori o fra vari punti del circuito sono tanto più efficaci ad alterare il regime di correnti della rete, quanto più sono grosse le impedenze a cui tali capacità sono in parallelo. Un criterio generale vero e proprio non esiste per la scelta dei migliori valori delle impedenze: in linea di principio comunque possiamo dire che, dominando in alta frequenza gli effetti di capacità, in questi casi conviene ridurre quanto possibile tutte le impedenze, ovvero di fatto R_1 e R_2 .

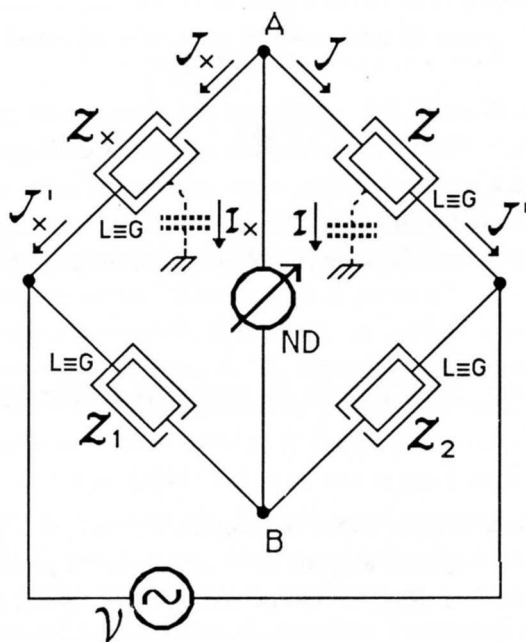


Fig.X.21

Se i montaggi sono ragionevolmente curati, nelle situazioni che si presentano durante le misure effettuate a $1kHz$ di impedenze con modulo da qualche decina a qualche centinaio di *Ohm*, gli effetti spuri sopra accennati sono evidenti solo quando il guadagno del rivelatore è impostato su valori notevolmente elevati; le variazioni indotte dagli spostamenti dei cavetti corrispondono a ritocchi dei valori impostati sui campioni, più piccoli dell'errore con cui gli stessi campioni sono noti. In queste condizioni il metodo di misura non richiede ulteriori miglioramenti, perché la precisione risulta limitata dalla accuratezza dei campioni e non dagli effetti spuri che sono tutt'al più insoddi-

sfacenti dal punto di vista estetico. Per frequenze più elevate, i disturbi possono invece influenzare la riproducibilità della misura in maniera più sostanziale e allora sono richiesti accorgimenti particolari nell'allestimento sperimentale; guardiamo, a questo riguardo, come è possibile allora usare al meglio i componenti campioni (e non) dotati di terminale di guardia G.

Supponiamo di avere un generico ponte e di montare i componenti con il terminale L (cortocircuitato con G) collegato al vertice di alimentazione (Fig.21). Poiché gli schermi presentano delle capacità verso massa che permettono il passaggio delle correnti \mathcal{I}_x e \mathcal{I} , all'equilibrio è $\mathcal{I}_x = -\mathcal{I}$, ma in genere $\mathcal{I}'_x \neq -\mathcal{I}'$. Lo stesso tipo di considerazione può essere fatta per Z_1 e Z_2 qualora siano dotate di schermo. Comunque, in accordo con la definizione (1) di $Z = \frac{V_{HL}}{\mathcal{I}}$ all'equilibrio si può scrivere (se $Z_1 = R_1$ e $Z_2 = R_2$):

$$V_{AB} = V \frac{Z}{Z + Z_x} - V \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 0 \quad (\text{X.36})$$

da cui discende la solita condizione $Z_x Z_2 = Z_1 Z$. Se avessimo montato gli schermi diversamente questo non sarebbe stato possibile. Si noti che le capacità parassite fra gli schermi e la terra sono rifornite di corrente direttamente dal generatore e proprio per questo non influenzano le condizioni di equilibrio. A parte il problema dei cavi di collegamento non schermati su cui torneremo tra poco, esiste un altro problema che è stato sottaciuto, ovvero che anche il rivelatore di zero presenta capacità verso terra; anch'esso è per questo motivo montato in una scatola conduttrice che può fungere da schermo.

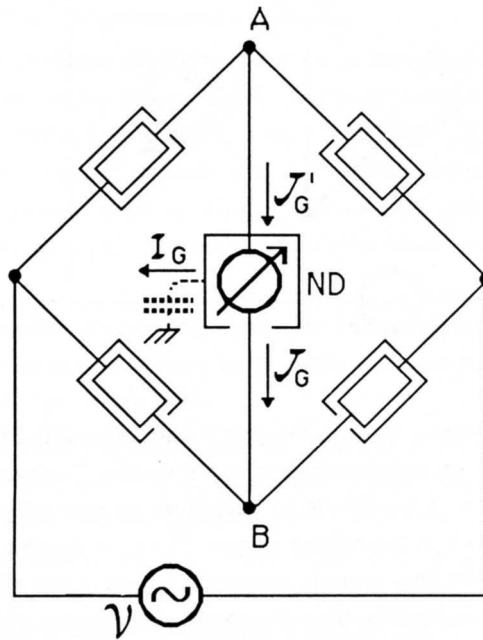


Fig.X.22

Guardiamo (Fig.22) come è opportuno collegare il rivelatore al ponte: a causa della capacità verso terra dello schermo, quando $\mathcal{I}_G = 0$ (deflessioni nominalmente nulle), non è necessariamente detto che anche $\mathcal{I}'_G = 0$ perché \mathcal{I}_G può essere $\neq 0$ e quindi il ponte in realtà non si trova all'equilibrio. Per far in modo che $\mathcal{I}_G = \mathcal{I}'_G = 0$ possiamo cortocircuitare A a terra. Facendo in questo modo, essendo lo schermo a potenziale di terra (occorre ovviamente che l'oscillatore sia *svincolato* da terra,

cioè con i morsetti isolati da terra*, pena cortocircuiti) \mathcal{I}_G non potrà che essere nulla e $\mathcal{J}_G = \mathcal{J}'_G$. Purtroppo con queste operazioni introduciamo un effetto che può seriamente compromettere tutto il nostro sforzo di migliorare l'accuratezza della misura: infatti, procedendo come detto sopra, le capacità fra gli schermi dei componenti e la terra finiscono in parallelo ognuna alla propria impedenza alterando il valore della impedenza stessa. Il sistema che si può adottare è allora quello della cosiddetta *terra di Wagner* che si realizza portando sì lo schermo del rivelatore al potenziale di terra, ma senza che esso vi sia effettivamente collegato; in questo modo si mantiene a zero \mathcal{I}_G , ma le capacità verso terra degli schermi delle impedenze non sono più in parallelo a esse.

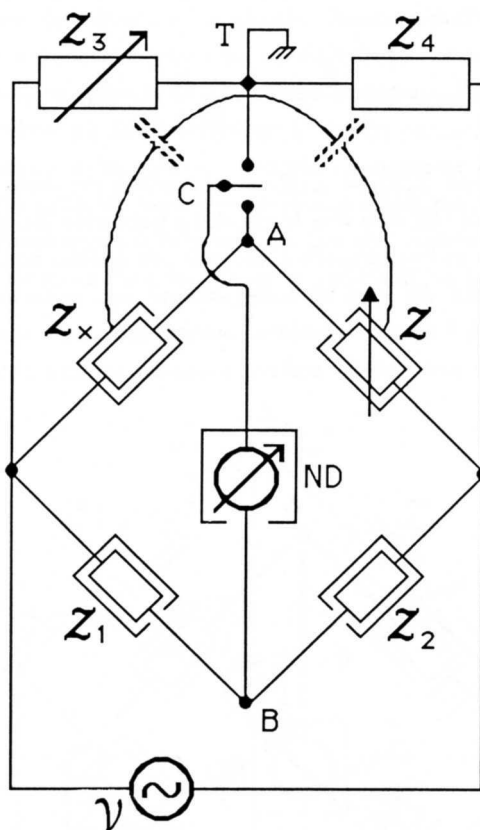


Fig.X.23

Il circuito per realizzare la messa a terra di Wagner è riportato nella Fig.23. Esso consiste sostanzialmente di un ponte usuale più un ramo ausiliario con il vertice T messo a terra; l'oscillatore deve essere del tipo svincolato da terra. L'equilibrio va raggiunto su entrambi i ponti passando dall'uno all'altro tramite il commutatore C; la procedura di zero di uno influenza, dato l'accoppiamento capacitivo, anche l'altro ponte. Alla fine, quando entrambi i ponti sono all'equilibrio, A si troverà a potenziale di terra senza esservi collegato, quindi avremo dispersione nulla da parte dello schermo del rivelatore; d'altra parte essendo A non cortocircuitato con la terra, ma a potenziale di terra, non passerà alcuna corrente fra A e T e pertanto le capacità parassite degli schermi non sono in parallelo fra i vertici dell'alimentazione e A e quindi non alterano il valore delle impedenze.

Tutti gli argomenti sopra detti per essere effettivamente utili richiedono che anche i cavi di collegamento abbiano uno schermo a terra: ciò in genere è ottenuto tramite cavi coassiali, cioè un conduttore interno rivestito da una guaina isolante e sopra a essa una calza di rame messa a

* questo requisito è in genere soddisfatto usando nell'oscillatore un trasformatore di uscita.

terra. In questo modo si crea una capacità fra conduttore interno e terra che dipende dalla sezione del cavo e dalla costante dielettrica dell'isolante nonché dalla lunghezza del cavo; questa capacità può essere anche grossa, ma ha il vantaggio, rispetto a quelle spurie che si creano con i cavi non schermati, di essere costante e misurabile, cosicché se ne può tenere esplicitamente conto nell'analisi delle condizioni di equilibrio del ponte.

Ricordiamo ancora che queste precauzioni non sono quasi mai indispensabili lavorando alla frequenza di 1 kHz , con campioni aventi precisioni di poco inferiore allo 0.1%. Si ricordi piuttosto di fare dei montaggi accurati: morsetti serrati bene e superfici di contatto pulite riducono le resistenze spurie dei collegamenti fra i vari conduttori e un po' di accuratezza nella disposizione relativa dei vari componenti, evitando eccessivi grovigli dei cavetti, aiuta molto nel contenimento degli accoppiamenti spuri di tipo induttivo e capacitivo.

Quanto agli errori di misura si è già detto che essi generalmente sono dati dall'errore dei campioni e dalla precisione con cui è noto il rapporto R_1/R_2 , almeno nelle misure in cui si usa il partitore resistivo. Anche qui, in linea di principio se $R_1 \approx R_2$ e vogliamo non dipendere dall'errore di R_1/R_2 potremmo invertire, senza toccare altro, il partitore e ripetere la misura, prendendo poi per Z la media geometrica dei due valori. Nel caso del Ponte di Wheatstone è già stato rimarcato il fatto che l'operazione è tanto più efficace quanto più si è sicuri di non introdurre resistenze aggiuntive sui contatti, diverse nelle due configurazioni. Nel caso dei ponti in alternata oltre a queste precauzioni occorre anche verificare che la disposizione dei cavi di collegamento non influenzi sensibilmente l'equilibrio. Si tratta cioè di verificare che lo scambio di posizione di R_1 con R_2 , non alteri *di per sé* il risultato della misura, che deve rimanere lo stesso a meno di variazioni decisamente inferiori rispetto all'errore di taratura dei campioni. Qualora ciò non si verificasse, vanno rimosse le cause seguendo gli accorgimenti descritti precedentemente.

Quanto alla sensibilità abbiamo già detto che occorre fare in modo che essa sia sufficientemente grande da rendere il relativo errore trascurabile. Abbiamo visto che questo è senz'altro possibile per entrambi i coefficienti reale e immaginario dell'impedenza Z_x da misurare quando essi sono almeno approssimativamente uguali; quando uno dei due coefficienti è molto maggiore dell'altro, quello dominante avrà un piccolo e quasi sempre trascurabile errore di sensibilità, mentre l'altro sarà generalmente affetto da un errore di sensibilità preponderante rispetto ad altri contributi (vedi (31)).

Si ricordi infine che qualora l'elemento campione (di resistenza o reattanza) non disponga di variazioni sufficientemente fini sarà in genere impossibile ottenere un buono zero senza agire su altri lati del ponte, ad esempio sul partitore a filo.

Prima di concludere il capitolo, mostriamo un esempio di ponte in cui è possibile misurare il valore dell'impedenza fra i terminali H e L, eliminando l'influenza delle capacità verso gli schermi; in questa misura i componenti con elettrodo di guardia G sono adoperati nella configurazione a tre terminali (Fig.24). Si tratta di un cosiddetto ponte con *ramo di rapporto a trasformatore*: il ramo di rapporto è il secondario di un trasformatore di precisione (con presa intermedia): il numero delle spire N_A e N_B è noto con grande precisione e così il rapporto delle tensioni $V_{L_x T}$ e V_{TL} . La presa intermedia T è messa a terra e a essa sono collegati gli schermi delle due impedenze, nonché quello del rivelatore di zero. In questo modo le capacità fra i terminali L e L_x e lo schermo vanno in parallelo al secondario del trasformatore; esso ha una bassa impedenza interna (Cap.IX,§6) e quindi tali capacità sono di fatto ininfluenti; le capacità fra H e H_x e lo schermo vanno in parallelo al rivelatore e anch'esse non influenzano l'equilibrio, poiché all'equilibrio gli estremi del rivelatore sono equipotenziali. In questo modo è possibile misurare esattamente Z_x confrontandola con Z , dimenticandosi di tutte le capacità verso gli schermi.

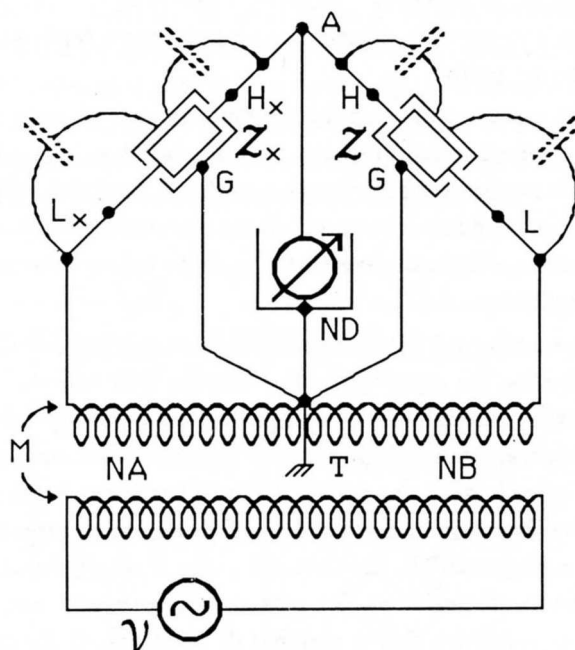


Fig.X.24

NOTA BIBLIOGRAFICA

Sui campioni di impedenze, i cataloghi delle ditte specializzate (per esempio la General Radio) forniscono le informazioni principali e più interessanti. Per una rapida rassegna delle caratteristiche dei campioni si può vedere **ZI 86**(Cap.II), **BE 82** (Capp.I,II,III)e **CO 85** (Cap.III).

Quanto ai ponti in alternata, al problema delle schermature e della messa a terra degli schermi, si può fare riferimento a **FR 59**, **DA 75** e **ZI 86**. **LA 38** e **CO 85** sono densi di informazioni sui vari tipi di ponti in alternata.

XI

MISURE DI POTENZA IN ALTERNATA E MISURA DI VALORI EFFICACI

1.— Definizioni

Sappiamo che in un ramo di un circuito elettrico percorso da una corrente i e ai capi del quale sia presente una differenza di potenziale v , è possibile definire una *potenza istantanea* $W = v \cdot i$ che corrisponde al lavoro per unità di tempo fatto dal campo elettrico sulle cariche che attraversano tale ddp. Questa definizione è completamente esente da limitazioni di validità rispetto al tipo di conduttore cui è applicata la ddp; essa infatti si basa su pure considerazioni elettrostatiche. Nel caso in cui sia nota la curva caratteristica $i = i(v)$ del conduttore presente nel ramo, è possibile trovare espressioni della potenza istantanea che contengono o solo i o solo v . Ad esempio se ammettiamo che il ramo preso in esame sia puramente resistivo ($v = iR$) e che la temperatura sia costante, cosicché anche R sia costante, allora vale:

$$W = i^2 R = \frac{v^2}{R} \quad (\text{XI.1})$$

Anche nel caso delle correnti alternate, purché le costanti siano concentrate e si considerino frequenze e dimensioni del circuito per cui valga il regime quasi stazionario, è possibile continuare ad adottare questa definizione di potenza istantanea. Ovviamente, per calcolare la potenza istantanea non potremo adoperare il formalismo dei numeri complessi, almeno non con quella disinvoltura a cui finora eravamo abituati; ad esempio, per calcolare la potenza istantanea non potremo usare al posto di i e v le grandezze complesse associate, farne il prodotto e prendere poi la parte reale, perché $Re(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) \neq Re(\mathcal{A}) \cdot Re(\mathcal{B})$.

Quanto alla valutazione della *potenza media*, che è la quantità di interesse primario nella determinazione dei bilanci energetici, notiamo che mentre in corrente continua la potenza istantanea coincide con la potenza media, in alternata la situazione è completamente diversa. Consideriamo infatti una impedenza $\mathcal{Z} = R + jX$ ai capi della quale sia applicata una ddp $\mathcal{V} = v_0 \exp j\omega t$; avremo pertanto una corrente $\mathcal{I} = i_0 \exp j(\omega t + \varphi)$, $\varphi = -\text{atan} \frac{X}{R}$, $i_0 = \frac{v_0}{|\mathcal{Z}|}$. La potenza istantanea sarà pertanto:

$$W = v_0 i_0 \cos \omega t \cos (\omega t + \varphi) \quad (\text{XI.2})$$

E' questa una quantità variabile nel tempo e che può assumere entro un periodo sia valori positivi che negativi a seconda che tensione e corrente abbiano o no lo stesso segno (vedi Fig.1): ciò significa che negli intervalli di tempo in cui la potenza è positiva, il circuito esterno che applica la ddp v compie lavoro sulle cariche elettriche e cede energia all'impedenza \mathcal{Z} , quando la potenza è negativa il circuito esterno riceve energia dall'impedenza. Se la media della potenza in un periodo è nulla significa che dell'energia viene ceduta dal resto del circuito all'impedenza in una fase e poi completamente restituita in un'altra; il fenomeno diventa perfettamente reversibile e *in media* non si ha dissipazione di potenza, ovvero cessione di calore ai termostati che mantengono il circuito a temperatura costante.

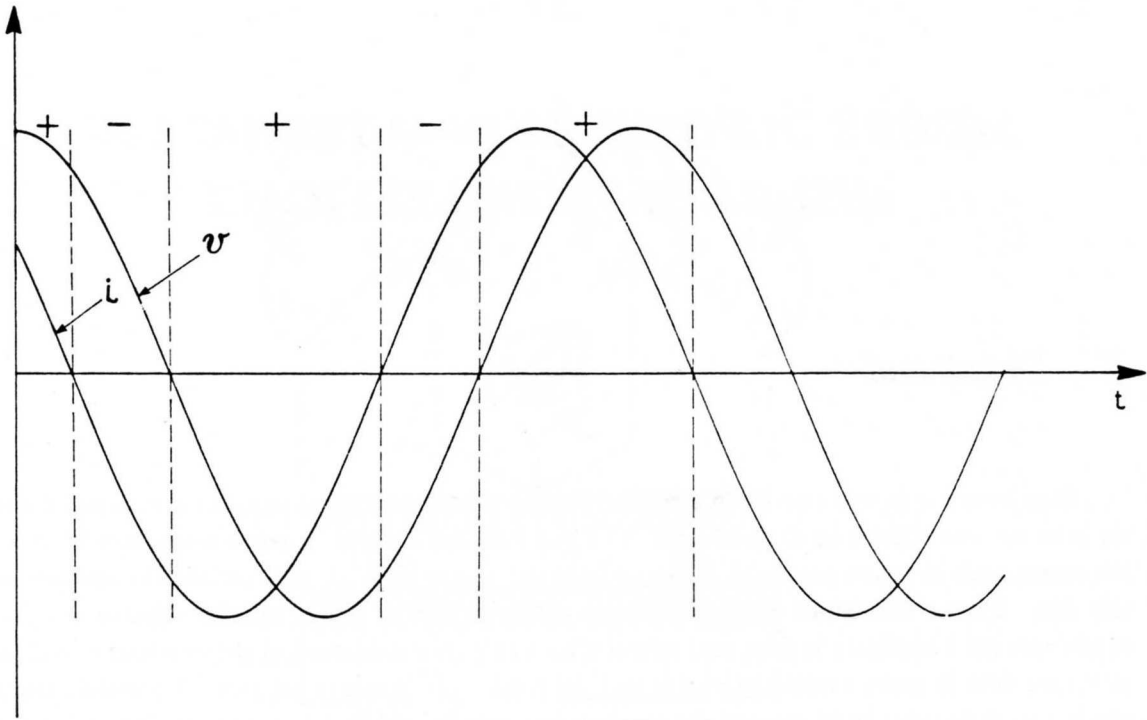


Fig.XI.1

Se ci calcoliamo la potenza media definita su un periodo (che coincide con quella fatta su un tempo molto maggiore di un periodo) troviamo:

$$\begin{aligned} \langle W \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} W dt = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} v_0 i_0 \cos \omega t \cdot \cos(\omega t + \varphi) dt = \\ &= \frac{v_0 i_0}{2} \cos \varphi = v_{eff} i_{eff} \cos \varphi \end{aligned} \quad (XI.3)$$

dove abbiamo sfruttato la definizione di valore efficace (IX.2). Si vede che per avere potenza media nulla occorre che $\cos \varphi$, detto *fattore di potenza*, sia nullo, cioè $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ che comporta $\frac{X}{R} = \pm \infty$ e pertanto $R = 0$. Il risultato non è sorprendente poiché la perfetta reversibilità del comportamento del circuito comporta l'assenza di lavoro da parte di forze dissipative, quali quelle di attrito all'interno della resistenza. La (3) può anche mettersi in una forma che in modo ancora più trasparente illustra il contributo della resistenza:

$$\langle W \rangle = \frac{v_0 i_0}{2} \cos \varphi = |Z| \frac{i_0^2}{2} \cos \varphi = i_{eff}^2 R \quad (XI.4)$$

Ovvero la potenza media coincide con quella di una corrente continua di intensità pari al valore efficace della corrente alternata che scorresse nella sola resistenza R .

E' interessante vedere in dettaglio quello che accade all'energia trasferita dal circuito esterno all'impedenza e viceversa, calcolando esplicitamente il lavoro nelle varie fasi del periodo. Consideriamo ad esempio un condensatore di capacità C con un generatore di fem alternata collegato alle armature:

$$v = v_0 \cos \omega t \quad (XI.5)$$

e conseguentemente:

$$\begin{cases} i = -v_0 \omega C \sin \omega t \\ i_0 = v_0 \omega C \end{cases} \quad (XI.6)$$

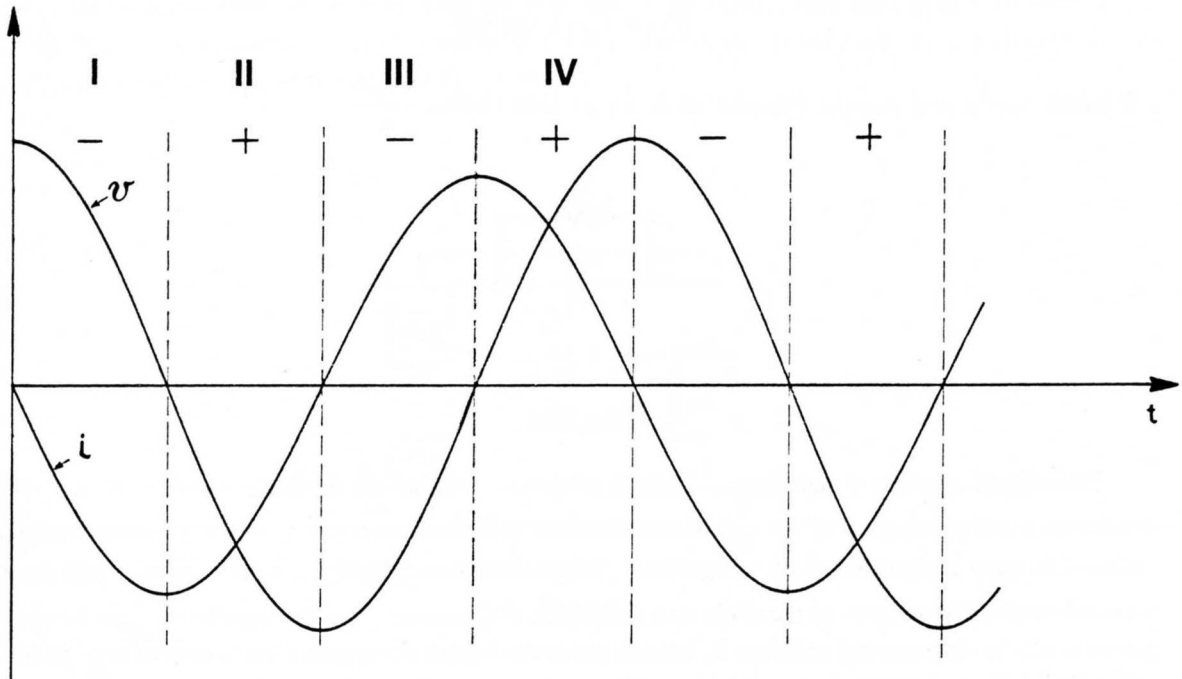


Fig.XI.2

Calcoliamo il lavoro \mathcal{L} nelle varie fasi (Fig.2), notando che all'inizio delle fasi II e IV il condensatore è scarico ($v = 0$ implica $Q=0$), mentre all'inizio delle fasi I e III esso è carico al massimo valore.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_I = \int_0^{\frac{\pi}{2\omega}} v \cdot idt = \frac{-v_0^2 C}{2} \operatorname{sen}^2 \omega t \Big|_0^{\frac{\pi}{2\omega}} = -\frac{v_0^2 C}{2} = -\frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} \\ \mathcal{L}_{II} = \int_{\frac{\pi}{2\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} v \cdot idt = \frac{-v_0^2 C}{2} \operatorname{sen}^2 \omega t \Big|_{\frac{\pi}{2\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} = \frac{v_0^2 C}{2} = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} \\ \mathcal{L}_{III} = \int_{\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{3\pi}{2\omega}} v \cdot idt = \frac{-v_0^2 C}{2} \operatorname{sen}^2 \omega t \Big|_{\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{3\pi}{2\omega}} = -\frac{v_0^2 C}{2} = -\frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} \\ \mathcal{L}_{IV} = \int_{\frac{3\pi}{2\omega}}^0 v \cdot idt = \frac{-v_0^2 C}{2} \operatorname{sen}^2 \omega t \Big|_{\frac{3\pi}{2\omega}}^0 = \frac{v_0^2 C}{2} = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} \end{array} \right. \quad (\text{XI.7})$$

dove Q_0 rappresenta il massimo valore assoluto che la carica accumulata sulle armature del condensatore assume entro un periodo. Si vede così che il condensatore si carica dietro l'azione del generatore, fino a immagazzinare un'energia elettrostatica massima pari a $\frac{Q_0^2}{2C} = \frac{i_{eff}^2}{\omega^2 C} = v_{eff}^2 C$ che viene poi restituita dal condensatore nel quarto di periodo immediatamente successivo. Istante per istante l'energia immagazzinata W_E vale:

$$W_E = \frac{1}{2} \frac{Q^2(t)}{C} = v_{eff}^2 C \cos^2 \omega t \quad (\text{XI.8})$$

Procedendo analogamente nel caso in cui $Z = j\omega L$, si trova che istante per istante l'energia accu-

mulata nella bobina, questa volta sotto forma di campo magnetico *, vale:

$$W_M = i_{eff}^2 L \sin^2 \omega t \quad (XI.9)$$

e il valore medio dell'energia accumulata in un periodo risulta $\frac{i_{eff}^2 L}{2}$.

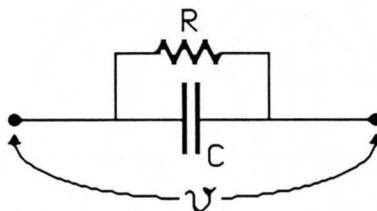


Fig.XI.3

Ricordando quanto a suo tempo detto a proposito del fattore di dissipazione D di un condensatore e del parametro Q ($= \frac{1}{D}$) di una bobina, vediamo ora come queste grandezze possano definirsi in base a considerazioni energetiche. Schematizziamo (Fig.3) un condensatore reale come un condensatore ideale con in parallelo una resistenza R (in genere grande rispetto a $\frac{1}{\omega C}$): tenendo presente che la corrente nel resistore è, istante per istante pari al rapporto fra la ddp ai capi di esso e il valore della resistenza, in un ciclo l'energia dissipata per effetto Joule vale:

$$E_D = \frac{v_{eff}^2}{R} T = \frac{v_{eff}^2}{R} \frac{2\pi}{\omega} \quad (XI.10)$$

Il fattore di dissipazione D può definirsi come:

$$D = \frac{1}{2\pi} \frac{\text{Energia dissipata per effetto Joule in un ciclo}}{\text{Energia massima accumulata nel condensatore}} = \frac{v_{eff}^2}{2\pi} \frac{2\pi}{R\omega v_{eff}^2 C} = \frac{1}{\omega RC} \quad (XI.11)$$

Nell'ultimo passaggio si sono sfruttate la (8) e la (10).

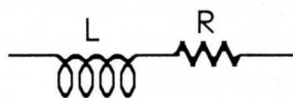


Fig.XI.4

Quanto all'induttore (Fig.4), seguendo la stessa definizione, troviamo:

$$Q = \frac{1}{D} = \frac{2\pi i_{eff}^2 L}{i_{eff}^2 R \frac{2\pi}{\omega}} = \frac{\omega L}{R} \quad (XI.12)$$

* si rimanda al corso di Fisica Generale per la derivazione dell'espressione dell'energia accumulata nel campo elettrico e magnetico (8,9). Nel Cap.XX torneremo comunque sull'argomento e lo tratteremo con un certo dettaglio.

Queste definizioni si possono applicare anche alle configurazioni duali di quelle considerate e, come vedremo nel seguito, a qualunque circuito.

Affrontiamo ora brevemente il problema del trasferimento di potenza (Cap.I,§9) estendendo il risultato allora ottenuto al caso delle correnti alternate; chiediamoci cioè qual è il carico Z per il quale si ha il massimo di trasferimento di potenza media dal generatore, caratterizzato da una impedenza interna Z_i , al carico (Fig.5).

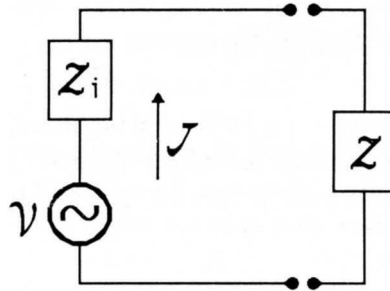


Fig.XI.5

Siano:

$$\begin{cases} Z_i = R_i + jX_i \\ Z = R + jX \end{cases} \quad (\text{XI.13})$$

Scriviamo la potenza dissipata sul carico nella forma (4):

$$\langle W_t \rangle = i_{eff}^2 R = \frac{v_{eff}^2}{(R_i + R)^2 + (X_i + X)^2} R \quad (\text{XI.14})$$

Si vede immediatamente che, a parità di R , la potenza è massima per $X_i = -X$; soddisfatta questa condizione si trova poi, come in continua, che il massimo assoluto si trova per $R_i = R$.

2.- Misure di potenza in alternata con strumenti elettrodinamici

In questo paragrafo descriveremo il principio di funzionamento del *Wattmetro elettrodinamico* e in particolare descriveremo un modello di wattmetro che, pur essendo oramai scarsamente adoperato nelle applicazioni più moderne, ha tuttavia il pregio di essere di facile comprensione in tutti i suoi particolari costruttivi e di presentare alcune caratteristiche che lo rendono particolarmente indicato dal punto di vista didattico.

Prima di entrare nei dettagli di funzionamento degli *strumenti elettrodinamici* è opportuno considerare il comportamento di un sistema meccanico oscillante avente frequenza propria ω_M eccitato da un termine forzante periodico con frequenza $\omega \gg \omega_M$, ad esempio un galvanometro eccitato con una corrente alternata. Si tratta di trovare le soluzioni di regime dell'equazione differenziale:

$$\mathcal{J}\ddot{\varphi} + D\dot{\varphi} + E\varphi = F(t) \quad (\text{XI.15})$$

con $F(t)$ periodica con pulsazione ω . \mathcal{J} , D ed E sono costanti positive arbitrarie; il loro significato fisico è quello di un coefficiente di inerzia, di smorzamento e di richiamo elastico rispettivamente

(vedi teoria del galvanometro, Cap. II). Il fatto che $F(t)$ sia periodica consente di svilupparla in serie di Fourier e di esprimerla quindi nella forma

$$F(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \operatorname{sen} n\omega t + b_n \operatorname{cos} n\omega t) \quad (\text{XI.16})$$

dove F_0 rappresenta il valor medio nel tempo $\langle F(t) \rangle$ di $F(t)$ poiché tutti gli altri termini hanno media nulla. La (16) può mettersi anche nella forma equivalente

$$F(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{cos} (n\omega t + \psi_n) \quad (\text{XI.17})$$

Essendo l'equazione differenziale (15) lineare, per risolvere il problema, cioè trovare l'espressione per la soluzione di regime di $\varphi(t)$, basterà sommare le risposte alle varie eccitazioni, ognuna corrispondente a ciascun termine dello sviluppo in serie di Fourier. Quanto al termine F_0 è ben noto che la soluzione particolare vale:

$$\varphi_0 = \frac{F_0}{E} \quad (\text{XI.18})$$

Gli altri dovranno risolversi soddisfacendo l'equazione differenziale

$$\mathcal{J}\ddot{\varphi}_n + D\dot{\varphi}_n + E\varphi_n = C_n \operatorname{cos} (\Omega t + \psi_n) \quad (\text{XI.19})$$

con Ω corrispondente alle varie armoniche. Sappiamo già che il formalismo dei numeri complessi è estremamente utile per risolvere questo tipo di equazioni; facciamo pertanto la trasformazione:

$$\begin{cases} \varphi_n \rightarrow \varphi_{n0} \exp j(\Omega t + \alpha_n) \\ C_n \operatorname{cos} (\Omega t + \psi_n) \rightarrow C_n \exp j(\Omega t + \psi_n) \end{cases} \quad (\text{XI.20})$$

Sostituendo le (20) nella (19), otteniamo un'equazione algebrica:

$$-\Omega^2 \mathcal{J}\varphi_{n0} + j\Omega D\varphi_{n0} + E\varphi_{n0} = C_n \exp j(\psi_n - \alpha_n) \quad (\text{XI.21})$$

per cui l'ampiezza φ_{n0} è presto trovata come:

$$\varphi_{n0} = \frac{C_n}{\sqrt{(E - \Omega^2 \mathcal{J})^2 + \Omega^2 D^2}} = \frac{C_n}{\frac{E\Omega^2}{\omega_M^2} \sqrt{\left(\frac{\omega_M^2}{\Omega^2} - 1\right)^2 + \frac{D^2 \omega_M^2}{E\mathcal{J}\Omega^2}}} \quad (\text{XI.22})$$

con $\omega_M^2 = \frac{E}{\mathcal{J}}$ pulsazione del sistema. Dalla (22) si vede che se $\omega_M \ll \Omega$ l'ampiezza φ_{n0} delle varie soluzioni associate alle armoniche dello sviluppo di Fourier vanno a zero come $\frac{\omega_M^2}{\Omega^2}$. Questo significa che se $\omega_M \ll \Omega$ la soluzione della (22) si può trovare semplicemente sostituendo a $F(t)$ il suo valor medio sul periodo. Nel caso particolare di un termine forzante alternato, avendo esso media nulla, la soluzione sarà $\varphi_0 = 0$ cioè il sistema meccanico non si sposta dall'origine, se le condizioni iniziali sono $\varphi(0) = 0, \dot{\varphi}(0) = 0$.

Il risultato è anche fisicamente ben comprensibile: infatti un sistema dotato di inerzia \mathcal{J} e sollecitato da un termine forzante sinusoidale di ampiezza A e pulsazione Ω , sarà caratterizzato da accelerazioni in modulo dell'ordine di $\frac{A}{\mathcal{J}}$ che su tempi dell'ordine di $\frac{1}{\Omega}$ provocheranno spostamenti dell'ordine di $\frac{A}{\Omega^2 \mathcal{J}}$, ovvero decrescenti all'aumentare di Ω come $\frac{1}{\Omega^2}$, nonché velocità dell'ordine di $\frac{A}{\Omega \mathcal{J}}$; il ragionamento è tanto più esatto tanto più Ω è grande, in quanto risulta tanto migliore l'approssimazione

di aver trascurato nella (15) i termini di accelerazione proporzionali alla velocità e allo spostamento, tant'è che l'andamento così dedotto per l'ampiezza degli spostamenti coincide con quello della (22) per $\Omega \gg \frac{E^2}{\mathcal{J}}$.

Con riferimento alla (22) si osservi che mentre per $\Omega \gg \omega_M$ un galvanometro non si sposta di fatto dalla posizione di equilibrio, per $\Omega \approx \omega_M$ si ha un massimo dell'ampiezza, tanto più ampio quanto più D è piccolo; è questo il principio secondo cui funziona un galvanometro a vibrazione.

Per completare il quadro delle soluzioni trovate per φ_{n0} , possiamo notare che per $\Omega \ll \omega_M$, $\varphi_{n0} = \frac{C_n}{E}$; questo risultato corrisponde al fatto che per $\Omega \rightarrow 0$ la velocità e l'accelerazione tendono a zero come lo spostamento moltiplicato per Ω e per Ω^2 rispettivamente e l'equazione differenziale (19) si riduce di fatto alla relazione: $\varphi_n \approx \frac{C_n}{E} \cos(\Omega t + \psi_n)$.

Veniamo ora al wattmetro e alle misure che con esso si possono compiere. Supponiamo quindi di avere una certa impedenza $\mathcal{Z} = R + jX$ percorsa da una certa corrente alternata \mathcal{J} ; sappiamo che ciò corrisponde a una potenza media dissipata sulla nostra impedenza pari a:

$$W_{\mathcal{Z}} = i_{eff}^2 R = v_{eff} \cdot i_{eff} \cos \varphi \quad (\text{XI.23})$$

con $\varphi = -\text{atan} \frac{X}{R}$, v_{eff} valore efficace della tensione ai capi di \mathcal{Z} e i_{eff} valore efficace della corrente \mathcal{J} . I wattmetri sono strumenti a quattro terminali che opportunamente collegati a \mathcal{Z} consentono di misurare proprio la potenza $W_{\mathcal{Z}}$.

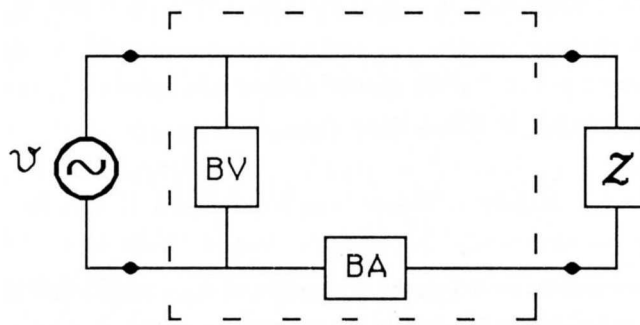


Fig.XI.6

Un tipico collegamento di un wattmetro per compiere questo tipo di misure è quello di Fig.6. Il wattmetro è il circuito racchiuso nella linea tratteggiata. B.V. rappresenta la cosiddetta *Bobina Voltmetrica* e B.A. la cosiddetta *Bobina Amperometrica*. Sull'interazione elettromagnetica di queste due bobine, montate meccanicamente nel modo che vedremo fra poco, si basa il principio di funzionamento dei wattmetri. La Bobina Amperometrica, costituita da un avvolgimento di relativamente poche spire di filo di grossa sezione, è fissa, mentre la Bobina Voltmetrica, costituita da numerose spire di filo abbastanza sottile è libera di ruotare attorno a un suo asse principale di inerzia baricentrico (Fig.7).

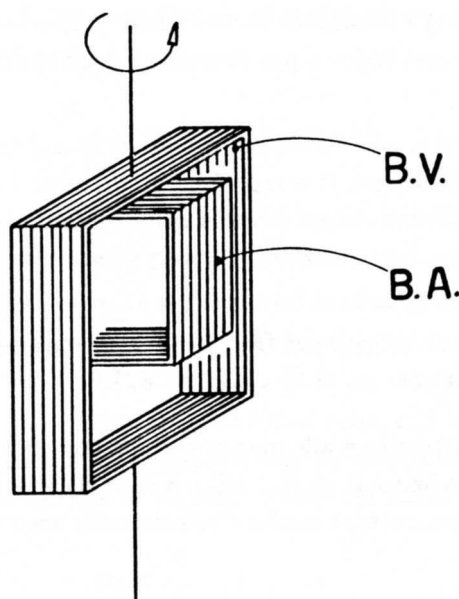


Fig.XI.7

Entrambe le bobine, almeno in prima approssimazione, possono schematizzarsi come due circuiti piani. Il complesso costituisce una coppia di circuiti che presentano un coefficiente di mutua induzione variabile a seconda della loro posizione relativa, per esempio dell'angolo di rotazione della Bobina Voltmetrica rispetto al piano della Bobina Amperometrica. Il coefficiente di mutua induzione è massimo (in valore assoluto) quando le bobine sono complanari ed è viceversa zero quando esse sono ortogonali.

Supponendo che le due bobine siano percorse da correnti $i_A(t)$ e $i_V(t)$, l'interazione fra di esse non dà solo luogo a effetti elettromagnetici, ma anche meccanici. Infatti, considerando il campo di induzione magnetica \vec{B}_A in un punto P dello spazio, dovuto alla corrente i_A che percorre la Bobina Amperometrica, troviamo, secondo la prima legge di Laplace:

$$\vec{B}_A(P) = \frac{\mu_r \mu_0}{4\pi} \oint_{B.A.} i_A \frac{d\vec{l}_A \wedge \text{vers } \vec{r}}{r^2} \quad (\text{XI.24})$$

dove \vec{r} rappresenta il vettore posizione del punto P rispetto al $d\vec{l}_A$ considerato. Stiamo considerando ovviamente il caso in cui le bobine si trovino in un mezzo omogeneo, isotropo e lineare (l'aria per esempio). La seconda legge di Laplace ci dice poi qual è la forza che questo campo di induzione esercita su un tratto infinitesimo $d\vec{l}_V$ della Bobina Voltmetrica:

$$d\vec{F}_V = i_V d\vec{l}_V \wedge \vec{B}_A(P) = i_V i_A \frac{\mu_r \mu_0}{4\pi} d\vec{l}_V \wedge \left(\oint_{B.A.} \frac{d\vec{l}_A \wedge \text{vers } \vec{r}}{r^2} \right) \quad (\text{XI.25})$$

Detto \vec{u} il versore dell'asse di rotazione della Bobina Voltmetrica, supposto fisso, il momento assiale infinitesimo sarà dato da:

$$d\tau_V^{(a)} = (P - O) \wedge d\vec{F}_V \cdot \vec{u} \quad (\text{XI.26})$$

dove $(P - O)$ è il vettore che congiunge un punto O qualunque dell'asse con il punto P corrispondente al segmento orientato infinitesimo $d\vec{l}_V$ sulla Bobina Voltmetrica, ove è applicata la forza $d\vec{F}_V$. Il

momento assiale totale agente sulla bobina sarà pertanto:

$$\tau_V^{(a)} = \frac{i_V i_A}{4\pi} \mu_r \mu_0 \oint_{BV} (P - O) \wedge \left(\vec{dl}_V \wedge \oint_{BA} \frac{\vec{dl}_A \wedge \text{vers } \vec{r}}{r^2} \right) \cdot \vec{u} \quad (\text{XI.27})$$

Si sarà notato che le correnti $i_A(t)$ e $i_V(t)$ sono sempre state tratte fuori dal segno di integrazione in quanto esse non dipendono dalla geometria, sono cioè le stesse in ogni istante e in ogni punto del circuito ($\text{div } \vec{j} = 0$). La coppia agente sulla Bobina Voltmetrica può allora mettersi in una forma del tipo:

$$\tau_V^{(a)} = i_A i_V \cdot C(\alpha) \quad (\text{XI.28})$$

dove $C(\alpha)$ dipende, magari in modo anche assai complicato, dalla sola geometria delle due bobine; poiché abbiamo ammesso le bobine indeformabili, l'unico parametro variabile da cui C dipende è l'angolo α che determina la loro posizione mutua, per esempio fra la normale della Bobina Voltmetrica e il piano di quella amperometrica. Non è difficile rendersi conto in base alla (27) che per $\alpha = \frac{\pi}{2}$ il momento è nullo mentre per $\alpha = 0$ esso è massimo in modulo. Nel Cap. XX, §3 impareremo a trattare problemi come questo dell'interazione elettromagnetica fra due bobine, senza dover esplicitamente calcolare le forze partendo dalle interazioni elementari, ma facendo ricorso a una formula che consente di scrivere direttamente la coppia τ che agisce fra due circuiti che possono variare la loro posizione angolare relativa α :

$$\tau = i_1 i_2 \frac{\partial M(\alpha)}{\partial \alpha} \quad (\text{XI.29})$$

con i_1 e i_2 correnti nei due circuiti e $M(\alpha)$ coefficiente di mutua induzione fra di essi. Confrontando la (29) con la (28), evidentemente

$$\frac{\partial M(\alpha)}{\partial \alpha} = C(\alpha) \quad (\text{XI.30})$$

e in corrispondenza della stazionarietà di M attorno a $\alpha = \frac{\pi}{2}$ abbiamo una coppia nulla, mentre là dove M cambia di segno ($\alpha = 0$), la coppia è massima. Essendo il coefficiente di mutua induzione delle due bobine approssimativamente esprimibile come $M = K \sin \alpha$, avremo che la dipendenza di $C(\alpha)$ da α sarà circa del tipo

$$C(\alpha) \approx C(0) \cos \alpha$$

Se vogliamo ora risolvere l'equazione del moto per la Bobina Voltmetrica dobbiamo semplicemente applicare a essa la seconda equazione della dinamica. Detto \mathcal{J} il momento di inerzia della Bobina Voltmetrica attorno all'asse di rotazione, E la costante di torsione del filo al quale è sospesa e D il coefficiente del termine di attrito viscoso, l'equazione differenziale cui $\alpha_R(t)$, soluzione a regime, deve soddisfare è la seguente:

$$\mathcal{J} \ddot{\alpha}_R + D \dot{\alpha}_R + E \alpha_R = i_A i_V C(\alpha_R) \quad (\text{XI.31})$$

Il termine forzante non solo è funzione esplicitamente dipendente del tempo e periodica (con periodo $\frac{\pi}{\omega}$ se $i_A = i_{A0} \cos(\omega t + \psi_A)$, $i_V = i_{V0} \cos(\omega t + \psi_V)$), a media generalmente non nulla, ma contiene anche una dipendenza esplicita dall'angolo medesimo. L'equazione differenziale è pertanto non lineare e non tutte le considerazioni svolte all'inizio del paragrafo possono applicarsi *sic et simpliciter* a questo caso. Si può tuttavia dimostrare che anche in questo caso la soluzione a regime è data da:

$$\alpha_R = \langle i_A \cdot i_V \rangle \frac{C(\alpha_R)}{E} \quad (\text{XI.32})$$

dove $\langle i_A \cdot i_V \rangle$ rappresenta la media del prodotto delle due correnti, vale a dire che anche in questo caso l'inerzia del sistema impedisce alla Bobina Voltmetrica di seguire con sufficiente prontezza le

variazioni rapide ($\omega \gg \omega_0$) del termine forzante e la sollecitazione effettiva si riduce al solo valore medio. Nell'Appendice C è dimostrata rigorosamente la validità di queste conclusioni anche nel caso attuale di equazione non lineare.

Anticipando un risultato che mostreremo fra poco, ammettiamo ora che $\langle i_A \cdot i_V \rangle$ sia proporzionale alla potenza media $\langle W_Z \rangle$ dissipata sul carico Z . In questa ipotesi la deflessione angolare dello strumento (32) risulta, a regime, legata alla potenza media $\langle W_Z \rangle$ tramite una relazione non lineare, cosa che in genere non è particolarmente desiderabile. Si noti fra l'altro che tenendo conto della dipendenza di C da α_R , abbiamo:

$$\alpha_R \approx k \cos(\alpha_R) \cdot \langle W_Z \rangle \quad (\text{XI.33})$$

e ciò significa che solo meno di un quarto di angolo giro è in pratica sfruttabile per l'elongazione α_R , a partire da $\alpha_R = 0$, perché poi la coppia si annulla. Per rendere la risposta dello strumento lineare si sfrutta il seguente accorgimento: l'estremo del filo (in genere si tratta di una molla a elica o a spirale) opposto a quello a cui è fissata la Bobina Voltmetrica, anziché essere fisso è collegato a un supporto che può ruotare attorno a un asse che passa per il filo medesimo, ovvero per l'asse di rotazione della Bobina Voltmetrica.

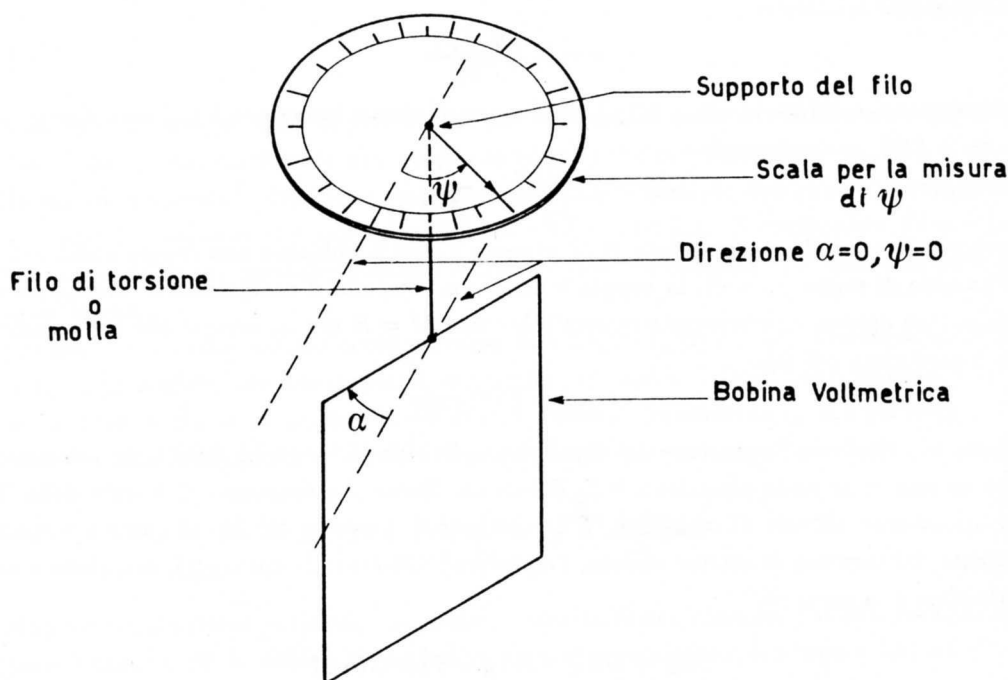


Fig.XI.8

In questo modo la coppia esercitata dal filo sulla bobina (Fig.8) non è più $E \cdot \alpha_R$, bensì $E \cdot (\psi + \alpha_R)$ se ψ indica l'angolo di torsione applicato all'estremo del filo (cioè al supporto cui tale estremo è fissato) in direzione opposta ad α , misurato rispetto alla posizione di riposo. Ovvero ψ e α sono entrambi nulli nella condizione di riposo, in assenza di eccitazione e con i piani delle bobine a 90° . In presenza di eccitazione, cioè quando α tende a crescere, si ruota il supporto del filo di torsione modificando ψ in modo da riportare il sistema nella condizione $\alpha_R = 0$; in questa configurazione

$$E \cdot \psi = \langle i_A \cdot i_V \rangle C(0) \quad (\text{XI.34})$$

Procedendo in questo modo si ottiene la desiderata relazione lineare fra l'angolo (ψ ovviamente) e il valor medio di $i_A \cdot i_V$; inoltre si massimizza la sensibilità di misura poiché la coppia elettrodinamica $C(\alpha_R)$ è massima per $\alpha_R = 0$. Lo strumento pertanto presenta una scala su cui si legge l'angolo ψ tramite un indice solidale con il supporto a cui l'estremo del filo è assicurato; un secondo indice solidale con la Bobina Voltmetrica ci dice quando essa è ritornata nella condizione di riposo iniziale ($\alpha_R = 0$). La misura si effettua ruotando il supporto fino a che, in presenza di eccitazione, l'angolo α non è tornato a zero, attendendo che, entro qualche secondo, si esaurisca il transitorio. Lo strumento è provvisto di un limitatore meccanico che impedisce alla Bobina Voltmetrica una rotazione α superiore a pochi gradi attorno a $\alpha_R = 0$; questo accorgimento riduce notevolmente i tempi morti di misura dovuti al transitorio, tutte le volte che si cambia la corrente nell'impedenza. Eventuali spostamenti della posizione iniziale di riposo devono essere corretti: ovvero ψ , anche in condizioni di eccitazione nulla, in genere non sarà esattamente a zero, ma avrà un certo valore ψ_0 da sottrarre a ψ in tutte le misure successive.

Facciamo ora vedere che $\langle i_A \cdot i_V \rangle$ rappresenta risulta proporzionale a $\langle W_Z \rangle$, potenza media dissipata sul carico, purché siano soddisfatte alcune condizioni riguardanti le impedenze delle due bobine Z_{BV} e Z_{BA} . Supponiamo (Fig.6) che l'impedenza Z_{BA} abbia modulo molto minore del modulo di Z ; in questa ipotesi possiamo dire che la ddp applicata alla Bobina Voltmetrica è circa uguale alla ddp sul carico Z , v_Z . Se inoltre l'impedenza Z_{BV} è tale che $Re(Z_{BV}) \gg Im(Z_{BV})$, in pratica se la resistenza è molto maggiore dell'induttanza moltiplicata per ω , allora $i_V \approx \frac{v_Z}{R_{BV}}$ e $\psi_V \approx 0$. In queste ipotesi:

$$\langle i_A \cdot i_V \rangle = \frac{1}{R_{BV}} \langle i_Z \cdot v_Z \rangle = \frac{\langle W_Z \rangle}{R} \quad (\text{XI.35})$$

Per realizzare le condizioni sopradette la Bobina Amperometrica è fatta di filo di grossa sezione, mentre in serie alla Bobina Voltmetrica viene aggiunta una resistenza. Quanto alle componenti autoinduttive di entrambe le bobine, esse, almeno alla frequenza di utilizzo (tipicamente quella di rete, $\nu = 50Hz$), sono sufficientemente piccole da poter essere effettivamente trascurate.

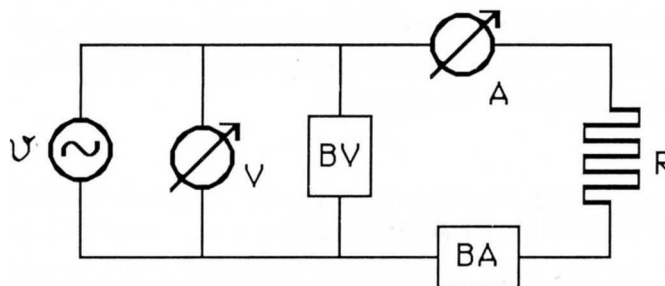


Fig.XI.9

La taratura dello strumento può essere fatta con un carico puramente resistivo, misurando v_{eff} e i_{eff} (Fig.9).

Il voltmetro e l'amperometro in figura sono strumenti che danno il valore efficace della tensione e della corrente e che descriveremo nel prossimo paragrafo. Essendo il carico resistivo

$$\langle W_R \rangle = (v_{eff} \cdot i_{eff})_R \quad (\text{XI.36})$$

e pertanto si può trovare la costante k semplicemente come

$$k = \frac{(v_{eff} \cdot i_{eff})_R}{(\psi - \psi_0)} \quad (XI.37)$$

La taratura può essere fatta anche in corrente continua e in questo caso la potenza sarà semplicemente data da $V_R I_R$.

Una volta che si inserisca il carico $Z = R_Z + jX_Z$ la potenza sarà data da

$$\langle W_Z \rangle = v_{eff} \cdot i_{eff} \cos \varphi \quad (XI.38)$$

Essendo nota k tramite la (37), misurando v_{eff} e i_{eff} , potremo ricavare il fattore di potenza del carico e risalire anche alla parte reale R_Z e alla parte immaginaria X_Z del carico medesimo.

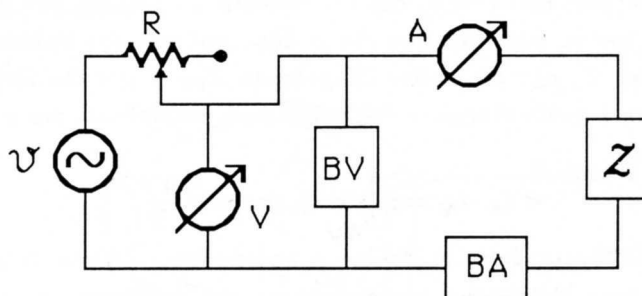


Fig.XI.10

Montando un circuito come in Fig.10 e variando R potremo misurare il fattore di potenza e quindi R_Z e X_Z in funzione della corrente che passa nel carico; se il carico è costituito da una bobina avvolta su ferro, eventuali effetti di saturazione si manifestano con un aumento del fattore di potenza. La qualità delle misure che si possono fare con questo metodo non è elevatissima a causa dei contributi di errore derivanti sia dalle letture degli angoli, sia degli strumenti che danno v_{eff} e i_{eff} (tipicamente precisioni dell'ordine del percento).

3.— Strumenti di misura in alternata

Il principio di funzionamento del wattmetro descritto nel paragrafo precedente, cioè l'interazione di due bobine percorse da corrente, è alla base di tutti gli strumenti elettrodinamici. In un voltmetro e in un amperometro elettrodinamico (rispettivamente Fig.11 a e b) le due bobine sono percorse dalla stessa corrente; nel caso del voltmetro le due bobine devono costituire il più piccolo carico possibile, mentre le bobine dell'amperometro devono essere caratterizzate da una impedenza la più piccola possibile.

Si noti che la risposta di questi strumenti dipende dal valore medio di i^2 , cioè dal valore efficace della corrente (al quadrato). Negli strumenti portatili, un indice solidale con la bobina mobile permette

la lettura della grandezza misurata. La scala è pertanto non lineare, vuoi perché la coppia non è in relazione lineare col valore della grandezza da misurare, vuoi perché essa dipende dalla geometria relativa delle bobine.

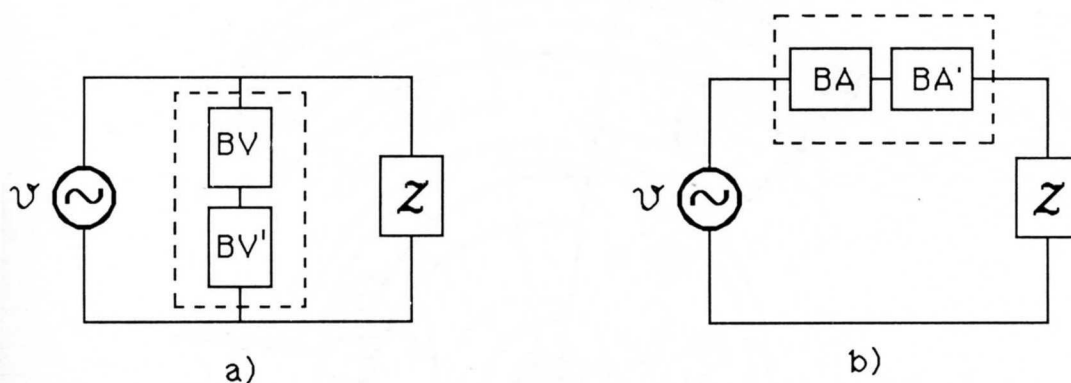


Fig.XI.11

Come tutti gli strumenti che misurano il valore efficace, gli strumenti elettrodinamici danno risposte corrette anche in continua; tali strumenti non danno viceversa risposte corrette per correnti alternate o in bassa frequenza (diciamo inferiori a circa $10\omega_0$, con ω_0 pulsazione propria del sistema meccanico) perché in questo caso non viene più fatta correttamente l'operazione di media temporale, o per frequenze molto alte quando si cominciano a far sentire gli effetti capacitivi sulle bobine che introducono sfasamenti spuri. Un altro problema che si incontra con questi strumenti è la loro limitata sensibilità. Esiste un'altra vasta categoria di strumenti che misurano il valore efficace di una grandezza alternata, che possono quindi essere adoperati anche in continua, basati (Fig.12) sul *succhiamento*, da parte di una bobina (L) percorsa dalla corrente da misurare, di un pezzo di ferro dolce (F) rigidamente collegato con l'ago dello strumento.

Con riferimento alla figura, detto θ l'angolo di cui ruota l'equipaggio rispetto alla posizione di riposo ($i = 0$), si trova (Cap.XX,§3) per la coppia dovuta alla dipendenza della induttanza L da θ :

$$\tau = \frac{1}{2} i^2 \frac{\partial L}{\partial \theta} \quad (\text{XI.39})$$

Una molla antagonista produce una coppia elastica di richiamo $-k\theta$; se il sistema meccanico costituito dall'equipaggio e dalla molla ha un periodo molto maggiore di quello della corrente alternata da misurare, avremo, similmente a quanto visto nel caso del wattmetro, una condizione di equilibrio definita da un angolo θ_R per il quale

$$k\theta_R = \frac{1}{2} \langle i^2 \rangle \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right)_R \quad (\text{XI.40})$$

Pertanto

$$i_{eff}^2 \propto \frac{\theta_R}{\left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right)_R} \quad (\text{XI.41})$$

Non è difficile fare in modo che $L \propto \theta_R$ e pertanto, in questo caso, è

$$i_{eff}^2 = k\theta \quad (\text{XI.42})$$

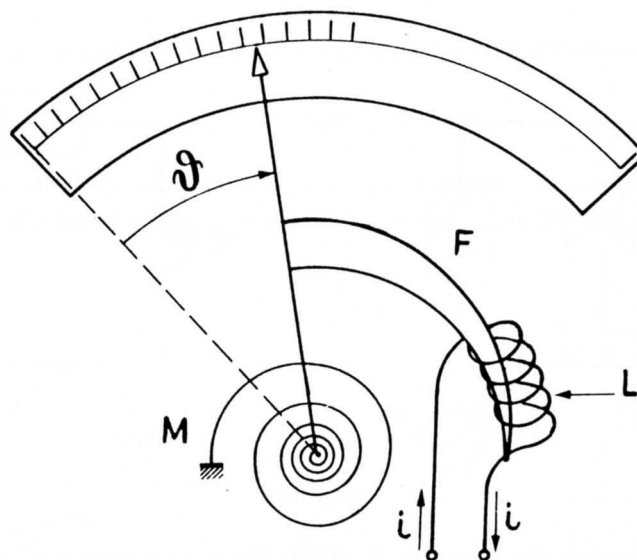


Fig.XI.12

Rispetto agli strumenti elettrodinamici, questi strumenti presentano il vantaggio di una maggiore semplicità di costruzione e robustezza. Precisioni elevate sono però ancor più difficilmente ottenibili, soprattutto su vasti campi di frequenza, a causa dell'isteresi del ferro (problemi principalmente in continua) e della dipendenza dell'induttanza dal valore della corrente tramite μ_r . Inoltre, all'aumentare della frequenza, l'induttanza L introduce un ulteriore contributo alla impedenza interna che, se lo strumento è usato come voltmetro, ne può alterare sensibilmente la taratura. Rimedi a questo effetto si possono ottenere ponendo un condensatore in parallelo alla resistenza della bobina e cercando così di rendere abbastanza più costante l'impedenza complessiva, almeno in un campo limitato di frequenze. Strumenti a valore efficace ancora più semplici costruttivamente e robusti fanno ricorso al principio di funzionamento illustrato in Fig.13: F e F' sono due pezzetti di ferro dolce, uno fisso (F) e l'altro (F') solidale con l'equipaggio mobile. La corrente che circola nella bobina avvolta attorno al sistema costituito dai due pezzetti di ferro, li magnetizza; essi tendono a respingersi con una forza che varia come i^2 . D'altronde la forza diminuisce all'aumentare della distanza fra i due pezzetti di ferro e sfruttando questa dipendenza si riescono a fare strumenti pressoché lineari. Strumenti di questo genere sono al più di classe 1 e presentano praticamente gli stessi problemi di quelli a succhiamento, in particolare l'isteresi del ferro. Abbiamo visto che all'aumentare della frequenza tutti gli strumenti a valore efficace incontrano problemi, principalmente a causa o delle capacità distribuite degli avvolgimenti o delle perdite per correnti parassite. Per questo motivo a frequenze molto elevate gli strumenti a valore efficace sono in genere basati sulla misura diretta della potenza dissipata dalla corrente da misurare su una resistenza di valore noto. In pratica si misura l'innalzamento di temperatura dell'elemento resistivo e si confronta questo con l'innalzamento di temperatura di un uguale resistore, posto in condizioni fisiche le più simili possibile, e sul quale

si dissipa contemporaneamente una potenza continua, nota con precisione.

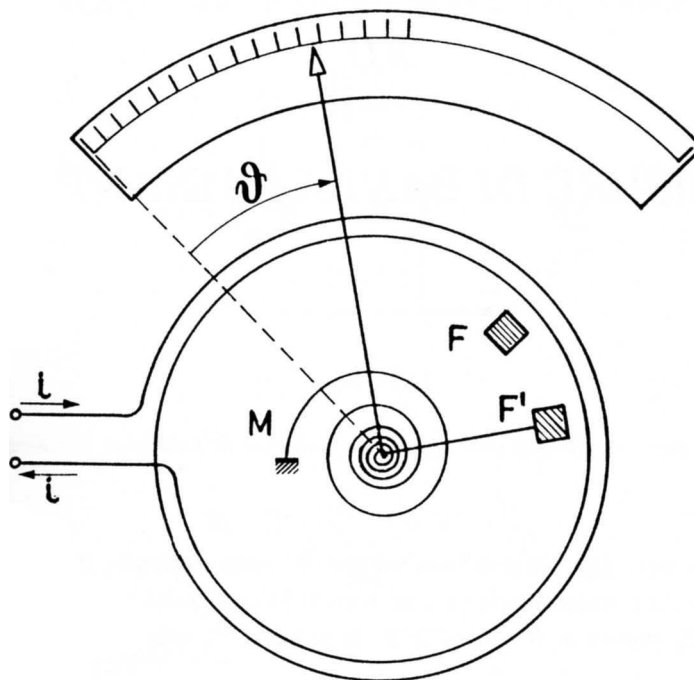


Fig.XI.13

NOTA BIBLIOGRAFICA

FR 59, LA 38, DA 75 e ZI 86 trattano abbastanza diffusamente l'argomento degli strumenti per la misura di valori efficaci.

Testi di elettrotecnica quali:

Modoni, Dorè: "Misure Elettriche-Strumenti e metodi di misura" (PATRON) (1955)

Olivieri, Ravelli: "Elettrotecnica" CEDAM (1966) sono densi di notizie a riguardo di tutto questo tipo di strumentazione.

L'Appendice C, di taglio esclusivamente matematico, precisa formalmente un risultato intuitivo, ma non ovvio, sulla risposta degli strumenti elettrodinamici.

XII

MISURE DI BANDA PASSANTE

1.— Il decibel

Supponiamo di misurare due potenze, non necessariamente elettriche, P_1 e P_2 . Il loro rapporto viene spesso misurato in una scala logaritmica (in base 10) la cui unità è detta *decibel*: precisamente si dice che la potenza P_1 supera di N *decibel* (dB) la potenza P_2 , con N dato da:

$$N = 10 \log \frac{P_1}{P_2} \quad (\text{XII.1})$$

La definizione dello zero della scala comporta fissare una certa potenza P_0 come riferimento; ovvero, esprimere una determinata potenza P in dB non ha alcun significato se non è definita una potenza di riferimento P_0 , con la quale viene costruito il rapporto $\frac{P}{P_0}$. Se si ha a che fare con una potenza elettrica dissipata su una resistenza R , è possibile esprimerla come $P = \frac{V^2}{R}$ dove V è la tensione ai capi di R . Qualora due potenze siano dissipate su due resistenze uguali, potremo scrivere:

$$N = 10 \log \frac{P_1}{P_2} = 20 \log \frac{V_1}{V_2} \quad (\text{XII.2})$$

Se le resistenze su cui sono dissipate le potenze non sono uguali occorrerebbe tener conto di un termine aggiuntivo $10 \log \frac{R_2}{R_1}$. In elettronica, quando si definisce il rapporto di due tensioni V_1 e V_2 , lo si misura spesso in *decibel*, come se si trattasse di un rapporto di potenze:

$$20 \log \frac{V_1}{V_2} \quad (\text{XII.3})$$

indipendentemente dal valore delle resistenze ai capi delle quali queste tensioni sono misurate. Così facendo si modifica la definizione originaria di *decibel* e la si usa per misurare, anziché rapporti di potenze, rapporti di tensioni.

L'adozione del *decibel* porta con sé tutti i vantaggi delle scale logaritmiche; in particolare, dato un sistema di amplificatori uno di seguito all'altro, l'amplificazione complessiva (in dB) sarà pari alla somma delle amplificazioni dei singoli stadi (anch'essa in dB).

2.— Filtri passa alto, passa basso, passa banda

Consideriamo il circuito di Fig.1 e ricaviamo il valore di \mathcal{V}_0 in funzione di \mathcal{V} .

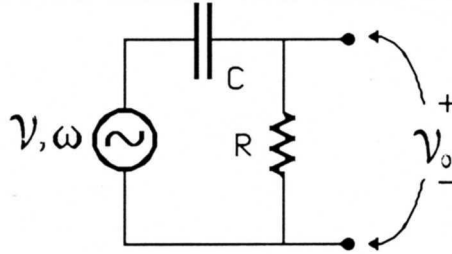


Fig.XII.1

Usando la regola del partitore di tensione applicata alle impedenze complesse, otteniamo:

$$\mathcal{V}_0 = \mathcal{V} \frac{R}{R - \frac{j}{\omega C}} = \mathcal{V} \frac{1}{1 - j \frac{f_L}{f}} \quad (\text{XII.4})$$

con $f_L = \frac{1}{2\pi RC}$, $f = \frac{\omega}{2\pi}$. Definendo:

$$\mathcal{A}_L = \frac{\mathcal{V}_0}{\mathcal{V}} = |\mathcal{A}_L| \cdot \exp j\theta_L \quad (\text{XII.5})$$

abbiamo

$$\begin{cases} |\mathcal{A}_L| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f_L}{f}\right)^2}} \\ \theta_L = \text{atan} \frac{f_L}{f} \end{cases} \quad (\text{XII.6})$$

Esprimendo in *decibel* $|\mathcal{A}_L|$ si ha:

$$|\mathcal{A}_L|_{dB} = -10 \log \left(1 + \left(\frac{f_L}{f} \right)^2 \right) \quad (\text{XII.7})$$

Per $f_L \gg f$ la (7) può approssimarsi come:

$$|\mathcal{A}_L|_{dB} \approx -20 \log \frac{f_L}{f} \quad (\text{XII.8})$$

e ogni aumento di un fattore 2 in frequenza (cioè ogni *ottava*) $|\mathcal{A}_L|$ cresce di 6 *dB*. Se si riporta in grafico $|\mathcal{A}_L|_{dB}$ in funzione di f (anch'esso in una scala logaritmica) si ottiene il grafico di Fig.2 (*diagramma di ampiezza*). La pendenza nel primo tratto corrisponde a 6 *dB/ottava* (uguale a 20 *dB/decade*). Per frequenze f maggiori di f_L la curva è pressoché costante e corrisponde a una ampiezza $|\mathcal{V}_0| = |\mathcal{V}|$, cioè la tensione \mathcal{V} è trasmessa sostanzialmente inalterata dal circuito; a tali frequenze l'impedenza del condensatore è infatti trascurabile rispetto a quella della resistenza.

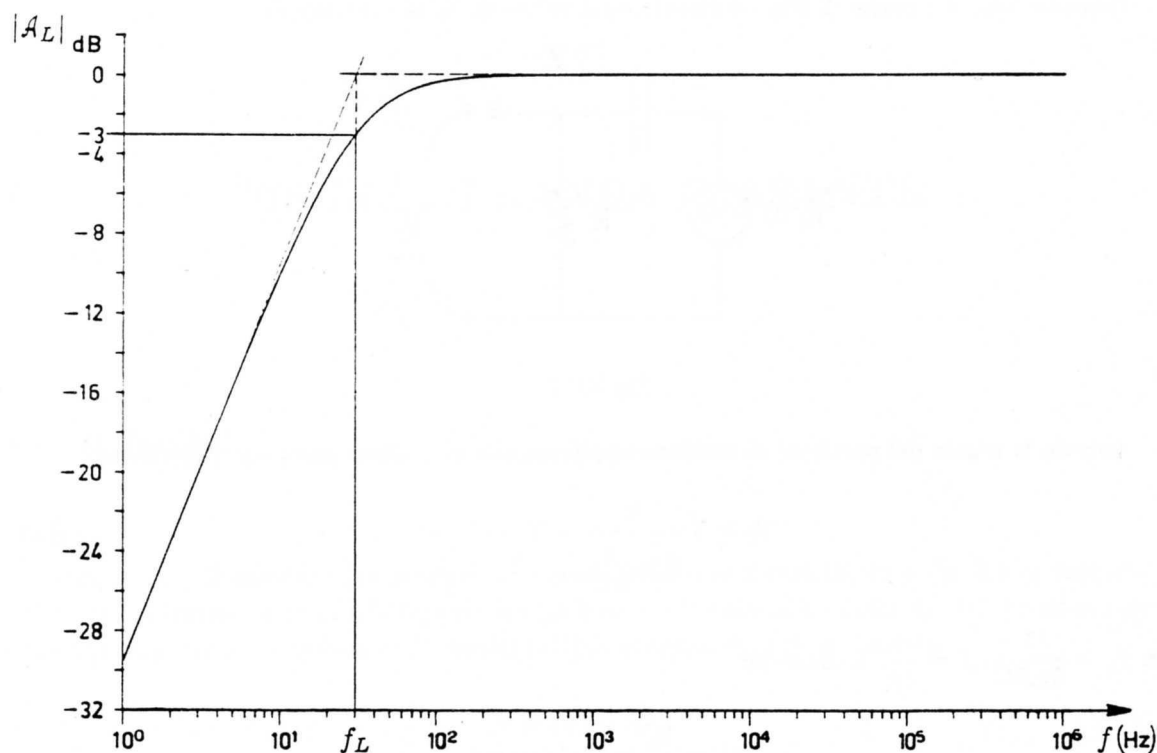


Fig.XII.2

Per $f = f_L$, quando cioè l'impedenza del condensatore uguaglia (in modulo) quella della resistenza, si ha:

$$|A_L| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{XII.9})$$

corrispondente a -3 dB . La frequenza $f_L = \frac{1}{2\pi RC}$ è detta *frequenza di taglio inferiore* e il circuito ora disegnato è detto *filtro passa alto*; esso infatti lascia praticamente inalterata l'ampiezza dei segnali sinusoidali con frequenza $f \gg f_L$, mentre deprime quei segnali che hanno frequenza $f < f_L$ e tanto più li riduce quanto più piccola è la loro frequenza. Quanto alla fase (vedi (6)) possiamo notare (Fig.3) che per frequenze $f \ll f_L$ la fase tende a $\frac{\pi}{2}$ cioè \mathcal{V}_0 è in anticipo di un quarto di periodo, per $f = f_L$ la fase θ vale $\frac{\pi}{4}$ e per $f \gg f_L$ la fase tende a zero (e pertanto in queste condizioni $\mathcal{V} = \mathcal{V}_0$ sia in ampiezza che in fase).

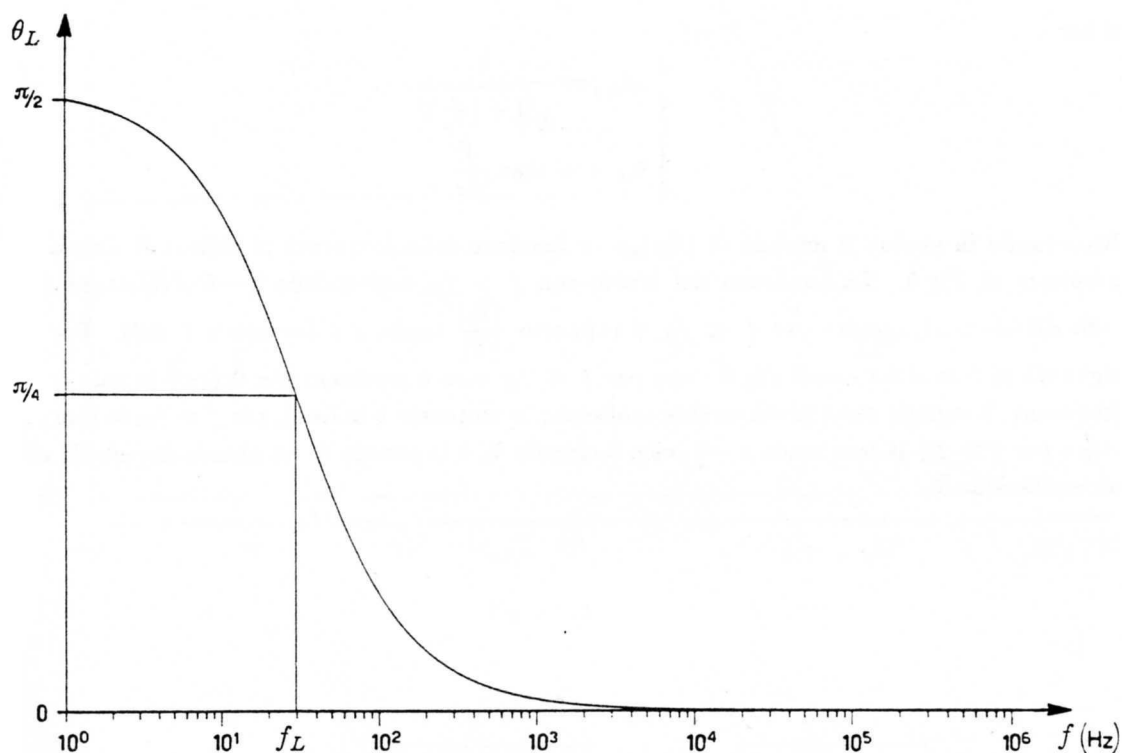


Fig.XII.3

Il grafico di Fig.3 è detto *diagramma di fase*.

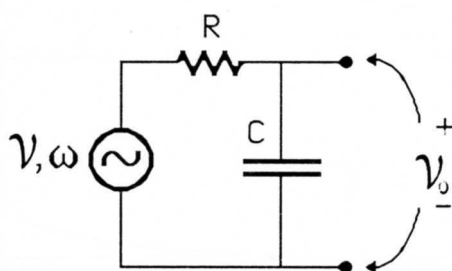


Fig.XII.4

Scambiamo ora, nel circuito di Fig.1, il condensatore col resistore; abbiamo ora il cosiddetto *filtro passa basso* (Fig.4). Procedendo come nel caso del circuito passa alto, abbiamo:

$$v_0 = v \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = v \frac{1}{1 + j \frac{f}{f_H}} \quad (\text{XII.10})$$

con $f_H = \frac{1}{2\pi RC}$ detta *frequenza di taglio superiore*. Definendo

$$\mathcal{A}_H = \frac{\mathcal{V}_0}{\mathcal{V}} = |\mathcal{A}_H| \cdot \exp j\theta_H \quad (\text{XII.11})$$

si ha:

$$\begin{cases} |\mathcal{A}_H| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{f}{f_H})^2}} \\ \theta_H = -\text{atan} \frac{f}{f_H} \end{cases} \quad (\text{XII.6})$$

Riportando in grafico il modulo di $|\mathcal{A}_H|_{dB}$ in funzione della frequenza si ottiene il diagramma di ampiezza di Fig.5. La pendenza del tratto con $f > f_H$ corrisponde a -6 dB/ottava (oppure -20 dB/decade), mentre per $f \ll f_H$ il rapporto $\frac{|\mathcal{V}_0|}{|\mathcal{V}|}$ tende a 1 (ovvero a 0 dB). Per quanto riguarda la fase si ha - vedi Fig.6 - che per $f \ll f_H$ essa è praticamente 0 (cioè in tale campo di frequenza, il segnale resta praticamente inalterato in ampiezza e in fase), per $f = f_H$ la fase θ_H vale $-\frac{\pi}{4}$ e per $f \gg f_H$ la fase tende a $-\frac{\pi}{2}$, cioè il segnale \mathcal{V}_0 è in ritardo di un quarto di periodo rispetto all'eccitazione \mathcal{V} .

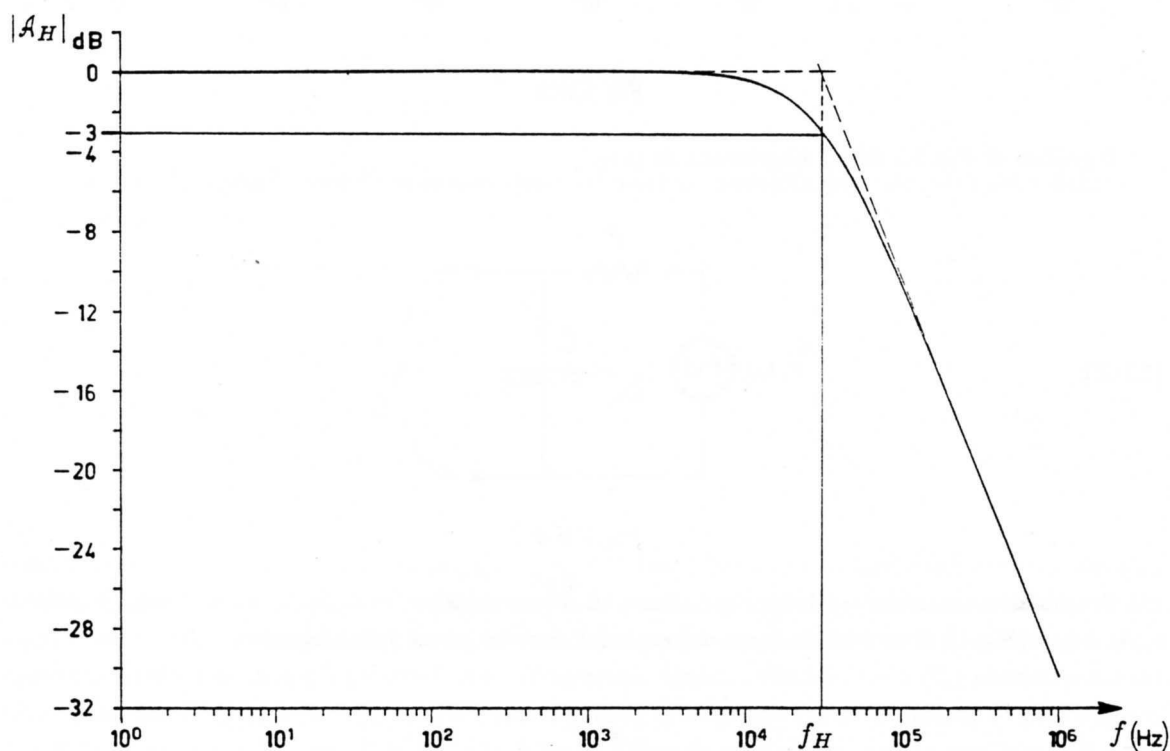


Fig.XII.5

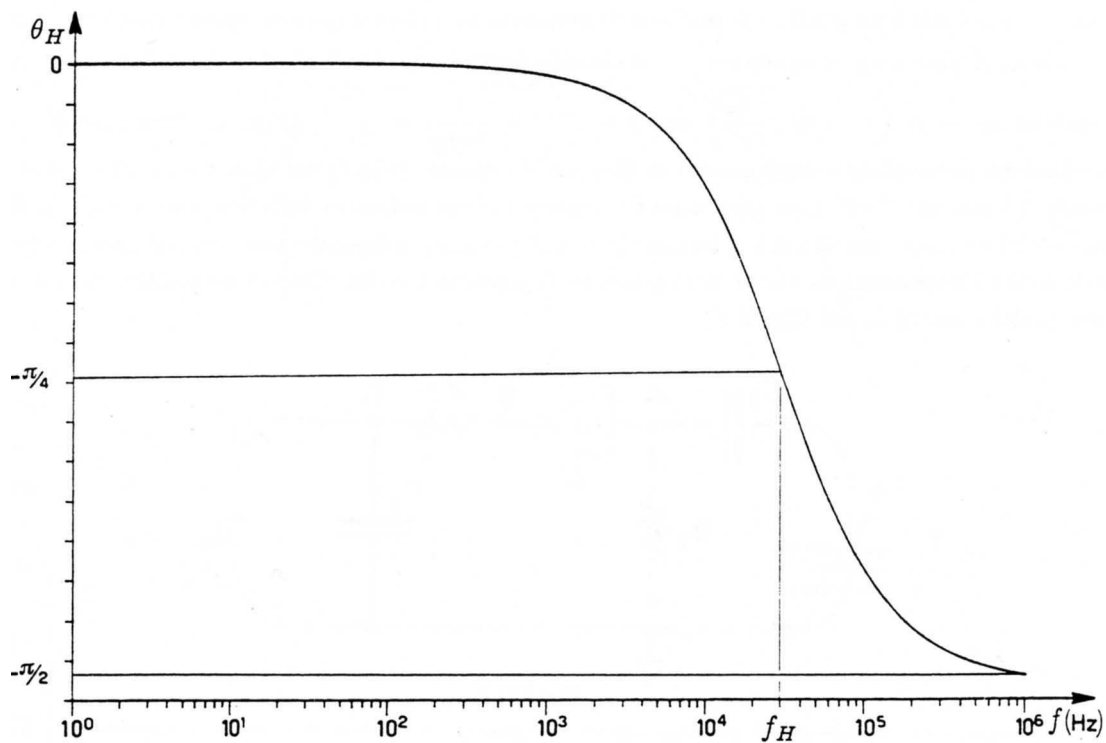


Fig. XII.6

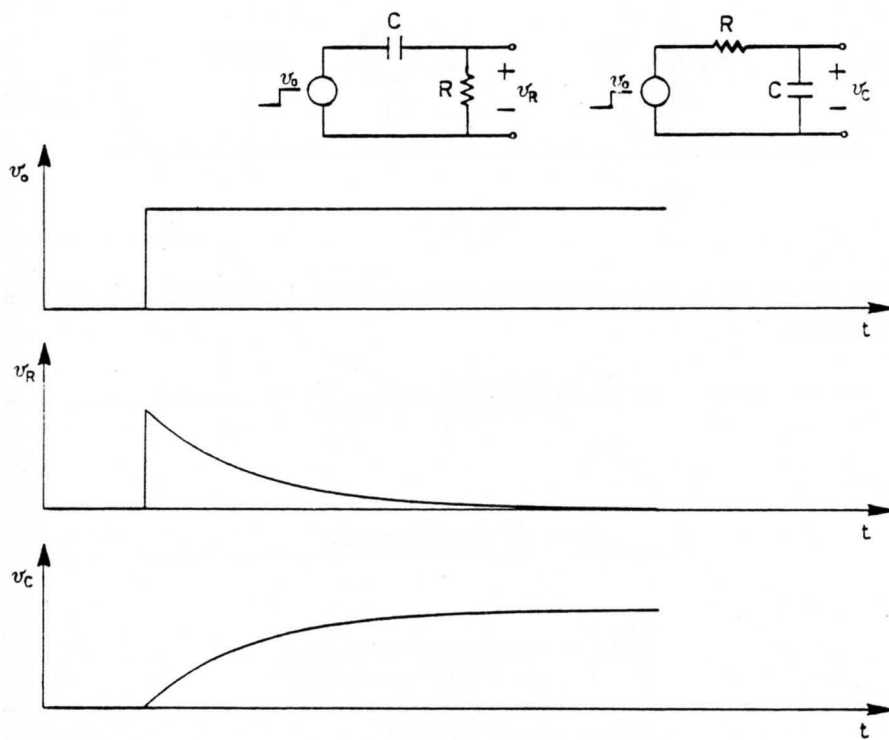


Fig. XII.7

Ricordiamo per inciso che, come fatto vedere nel Cap. VI, § 2, se il segnale del generatore anziché

essere sinusoidale è un gradino di tensione di ampiezza v_0 , allora il circuito passa alto dà una tensione ai capi di R pari a $v_R = v_0 \exp(-\frac{t}{\tau})$ e il circuito passa basso fornisce ai capi del condensatore una tensione $v_C = v_0 \left(1 - \exp(-\frac{t}{\tau})\right)$ con $\tau = RC = \frac{1}{2\pi f_H} = \frac{1}{2\pi f_L}$ (Fig.7). Torniamo al caso di eccitazione sinusoidale e supponiamo di disporre in *cascata* (Fig.8) un filtro passa alto e uno passa basso. L'elemento "+1" è un ripetitore (in inglese *voltage follower*) della tensione ai capi di R_1 che viene rappresentata identica fra il terminale B e il comune, indipendentemente dal carico seguente; vale a dire l'impedenza di uscita del ripetitore di tensione è nulla. Questo dispositivo sarà studiato con qualche dettaglio nel Cap.XV.

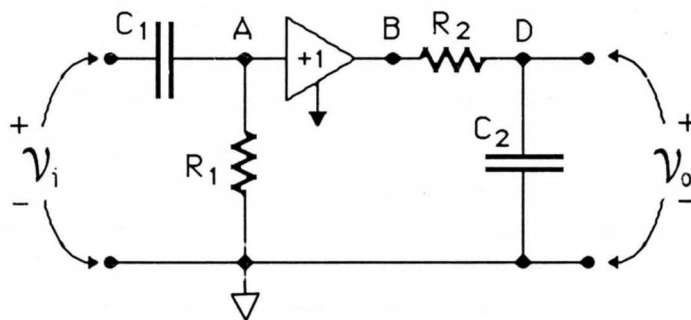


Fig.XII.8

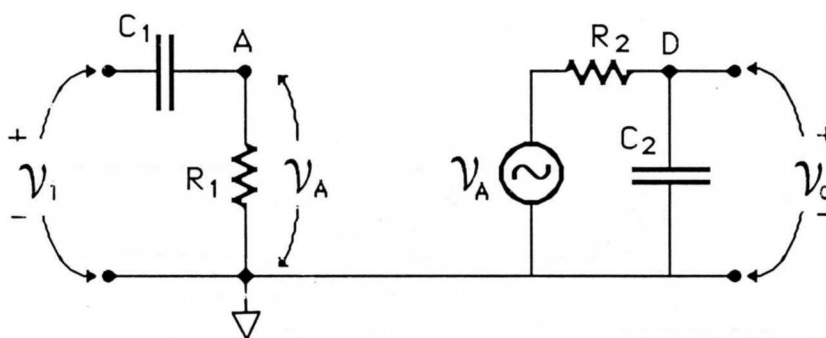


Fig.XII.9

Il circuito di Fig.8 è pertanto equivalente a quello di Fig.9. La tensione v_0 è quindi esprimibile come (vedi (4) e (10)):

$$v_0 = v_i \frac{1}{1 - j \frac{f_1}{f}} \cdot \frac{1}{1 + j \frac{f}{f_2}} \quad (\text{XII.13})$$

e pertanto, posto:

$$\mathcal{A}_B = \frac{v_0}{v_i} = |\mathcal{A}_B| \exp j\theta_0 \quad (\text{XII.14})$$

avremo

$$\begin{cases} |\mathcal{A}_B| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{f_1}{f})^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{f}{f_2})^2}} \\ \theta_0 = \text{atan}(\frac{f_1}{f}) - \text{atan}(\frac{f}{f_2}) \end{cases} \quad (\text{XII.15})$$

Pertanto nell'ipotesi che $f_2 \gg f_1$ gli andamenti di $|\mathcal{A}_B|_{dB}$ e di θ_0 riportati in funzione di f (in scala logaritmica) sono quelli della Fig.10a e b rispettivamente.

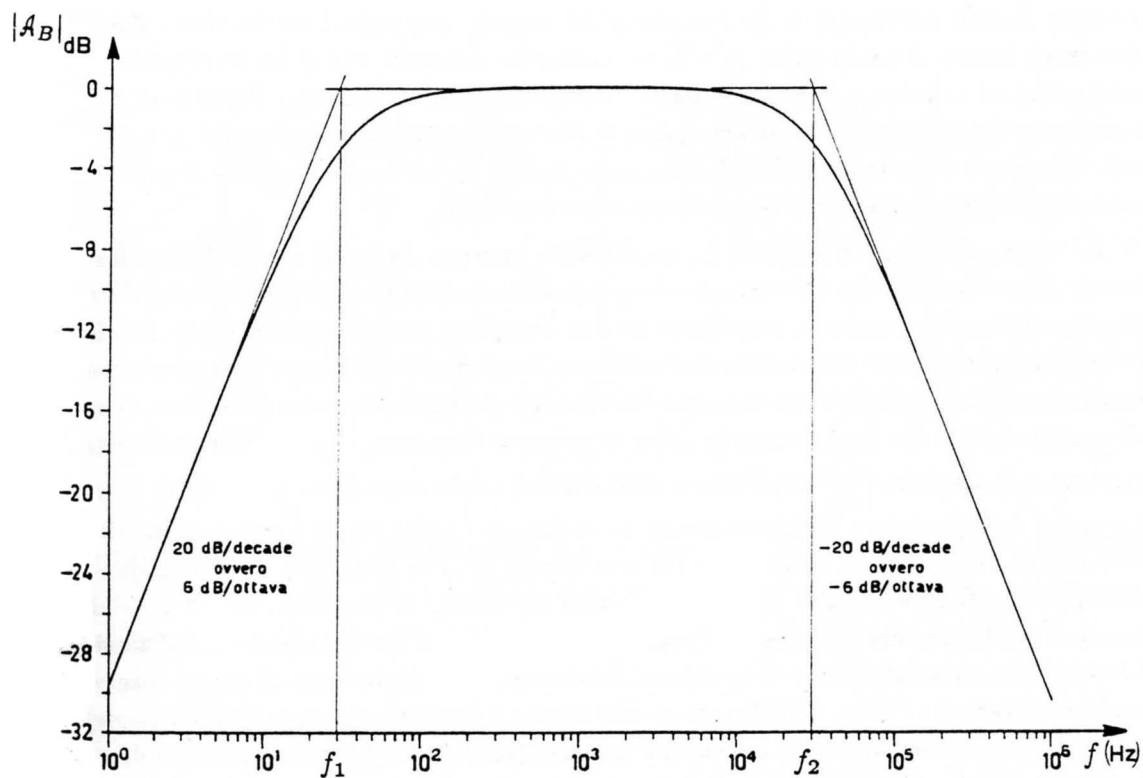


Fig.XII.10a

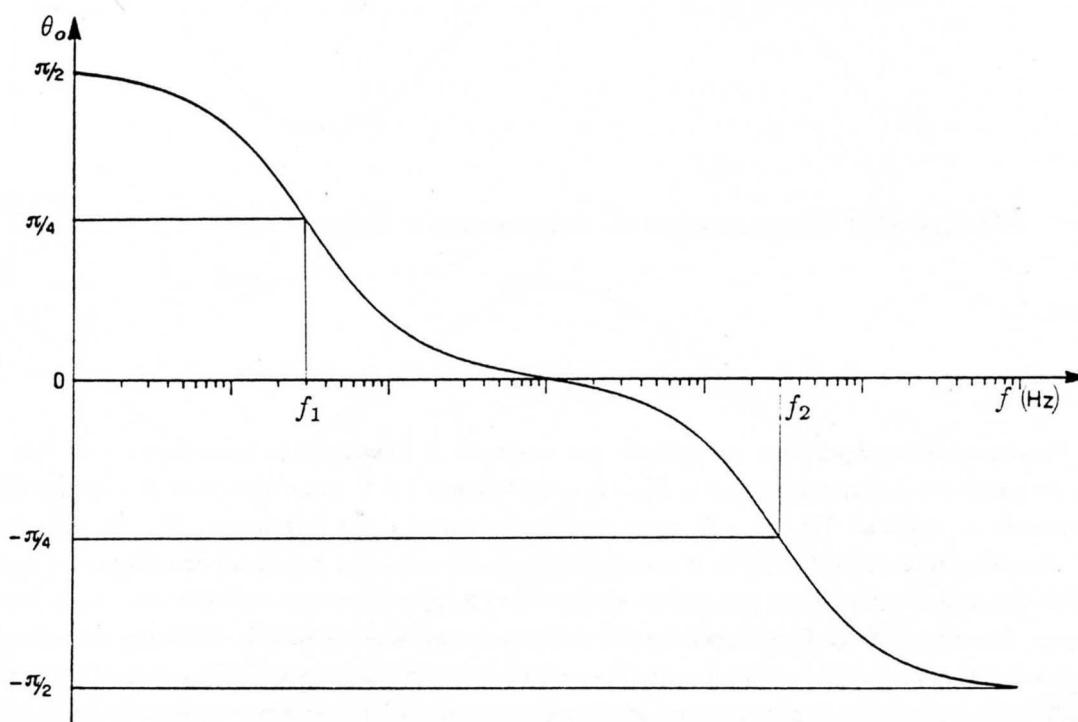


Fig.XII.10b

Il sistema trasmette inalterati i segnali sinusoidali con frequenza $f_1 \ll f \ll f_2$ mentre per

frequenze laterali rispetto f_1 e f_2 , l'ampiezza del segnale trasmesso è decrescente. Esso è detto *filtro passa banda*. Avendo scelto f_1 e f_2 notevolmente differenti non si ha interferenza fra i due comportamenti in bassa e in alta frequenza. Il diagramma di ampiezza in funzione di f definisce la cosiddetta *banda passante* del sistema, cioè la fascia di frequenze compresa fra f_1 e f_2 entro la quale l'ampiezza viene trasmessa inalterata (entro 3 dB); f_1 è detta la frequenza di taglio inferiore (a -3 dB), mentre f_2 frequenza di taglio superiore (a -3 dB).

Lo studio delle bande passanti ha un notevole interesse in molti campi della fisica e della tecnica; in particolare esso è fondamentale nella caratterizzazione degli amplificatori da montare come blocchi base di sistemi di amplificazione a reazione negativa (Cap XV, §§1,2,3). Precisamente si trova che l'andamento in funzione di f dell'amplificazione \mathcal{A}_f del blocco base (generalmente un circuito integrato), definita come rapporto fra tensione di uscita e tensione di ingresso diviso per il valore massimo \mathcal{A}_0 che essa assume in tutto il campo di frequenze, è descrivibile in termini di un diagramma di ampiezza $|\frac{\mathcal{A}_f}{\mathcal{A}_0}|$ che dipende dalle caratteristiche costruttive del circuito; in molti casi al crescere della frequenza il diagramma ha un andamento molto simile a quello di un filtro passa basso con una frequenza di taglio tanto più alta quanto più l'amplificatore è -come si dice- *veloce*; l'amplificatore non presenta in genere diminuzioni del fattore di amplificazione al diminuire della frequenza e il diagramma di ampiezza si mantiene costante fino a $f = 0$; in questo caso l'amplificatore è detto essere un *amplificatore in continua*. L'interesse della conoscenza di questo diagramma di ampiezza risiede, fra l'altro, nel fatto che se esso è noto, è possibile sapere se l'amplificatore è o non è stabile quando viene applicata la reazione negativa (vedi Cap.XV per la definizione di reazione). Comunque questi argomenti esulano dal programma del corso e sono accennati semplicemente per rimarcare l'importanza dello studio dei filtri passa basso, passa alto e passa banda, in particolare nella progettazione degli amplificatori.

3.- Misure del diagramma di ampiezza e fase

Passiamo ora a descrivere un metodo per costruire il diagramma di ampiezza e di fase nel circuito passa banda rappresentato in Fig.11; consideriamo 1 e 1' come terminali di ingresso (dove è applicata la tensione \mathcal{V}_i) e 2 e 2' come terminali di uscita per la tensione \mathcal{V}_0 . Si noti che 1' e 2' elettricamente coincidono con il terminale di riferimento, che possiamo considerare a massa. Occorre intanto disporre di un generatore sinusoidale (\mathcal{V}, ω) a frequenza variabile con cui eccitare il sistema. Con un oscillografo a doppia traccia si osservano sui due canali Y le differenze di potenziale fra il nodo 1 e massa (\mathcal{V}_i) e fra il nodo 2 e massa (\mathcal{V}_0) in funzione della frequenza. Quanto al trigger dell'oscillografo, esso è ottenuto mettendo in "esterno" il relativo commutatore e inviando sull'ingresso del trigger il segnale di *sincronismo* dell'oscillatore: è questo un segnale di ampiezza standard, indipendente cioè dall'ampiezza del segnale di uscita dell'oscillatore, ma avente la stessa fase di quest'ultimo.

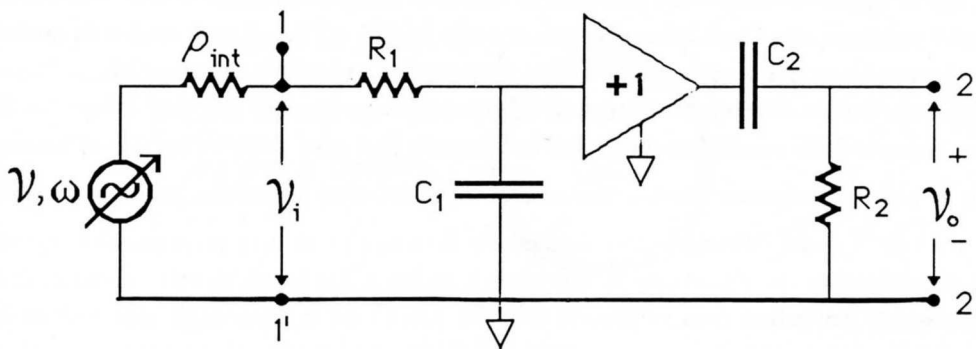


Fig.XII.11

I rapporti fra le ampiezze delle differenza di potenziale V_0 e V_i danno il diagramma di ampiezza $|A_B| = \left| \frac{V_0}{V_i} \right|$. Quanto al diagramma di fase $\theta_0 = \theta_0(f)$, esso si può ottenere tenendo presente che θ_0 è dato dalla differenza di fase fra V_0 e V_i .

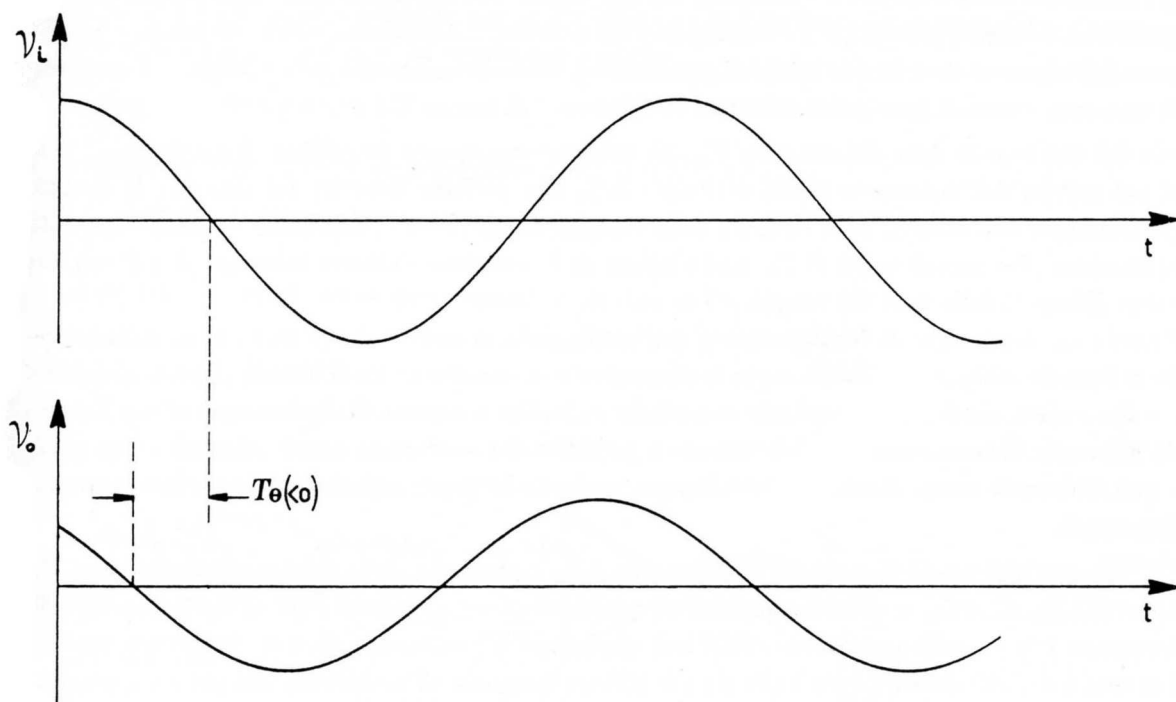


Fig.XII.12

Questa quantità si può determinare (vedi Fig.12) valutando con l'oscillografo T_θ , ovvero la differenza in tempo fra il passaggio dello zero di V_0 e di V_i (quando V_i e V_0 hanno la derivata dello stesso segno) e il periodo T della sinusoida. Lo sfasamento in gradi risulta quindi dato da:

$$\theta_0 = \frac{T_\theta}{T} \cdot 360 \quad (\text{XII.16})$$

Per compiere misure ragionevolmente precise e che sfruttino al meglio le caratteristiche dell' oscil-

lografo occorre seguire alcuni accorgimenti. Per quanto riguarda le misure di ampiezza, conviene lavorare con la massima eccitazione possibile in ingresso, compatibilmente con le caratteristiche del ripetitore di tensione, che funziona correttamente solo se $|\mathcal{V}_i| < |\mathcal{V}_{max}|$ (dell'ordine di qualche Volt) e solo se la ampiezza della corrente di uscita non supera un valore massimo i_{0max} (tipicamente dell'ordine della decina di mA); l'esistenza di un estremo superiore per $|\mathcal{V}_i|$ dell'ordine dei Volt comporta che, a causa della sensibilità finita dell'oscillografo (nel caso dell'oscillografo di laboratorio: 5 mV/cm), si possano misurare direttamente, con errori inferiori a qualche per cento, rapporti $\frac{|\mathcal{V}_0|}{|\mathcal{V}_i|}$ fino a $3 \div 4 \cdot 10^{-2}$ ($-28, -30 \text{ dB}$). Per aumentare il campo di misura occorrerebbe introdurre un ulteriore amplificatore che riportasse la tensione di uscita a livelli più elevati. Quanto alla misura dello sfasamento, per prima cosa va identificata con precisione la linea degli *zero Volt* su entrambi i canali; ciò si può fare abbastanza agevolmente nel seguente modo: si mettono a massa (tramite l'apposito commutatore) gli ingressi dei due canali posti nella massima sensibilità e, tramite i controlli di posizionamento verticali, si fanno coincidere le due tracce orizzontali con una delle linee (preferibilmente quella centrale) del reticolo inciso sullo schermo; tale linea diventa così la nostra linea di *zero Volt*. Dopo aver posizionato nuovamente il commutatore di ingresso, per entrambi i canali, su DC, si aumenta la sensibilità verticale di circa un fattore 10 in più rispetto alla sensibilità che consente di presentare tutto il segnale sullo schermo: a causa della notevole pendenza ottenuta con l'aumento della sensibilità, l'intercetto dei due segnali con la linea di zero viene individuato con errore relativamente piccolo ($< \frac{1}{2}$ divisione fine del reticolo)*. Agendo sulla base dei tempi e la posizione del trigger si deve fare in modo di presentare contemporaneamente sullo schermo gli intercetti di entrambi i segnali (per poter misurare la differenza di tempo T_θ) e almeno un semi-periodo di uno dei due segnali (per determinare T). Se ottenuto con questa procedura, il rapporto $\frac{T_\theta}{T}$ può al più soffrire dell'indeterminazione derivante dalla non perfetta linearità del sistema: la qualità, generalmente non eccelsa, della taratura della base dei tempi ($2 \div 3\%$) non influisce infatti su questa valutazione. Per piccoli valori di T_θ , molto minori di T , conviene viceversa misurare T_θ e T con due valori differenti della base dei tempi.

Ricordando il principio di funzionamento dell'oscillografo, si osservi che la correttezza della procedura dipende criticamente dal fatto che lo strumento non introduca ritardi diversi, rispetto al trigger, sui due canali, perché altrimenti tale contributo andrebbe a sommarsi algebricamente con l'effetto da misurare. Generalmente tale sfasamento è garantito dal costruttore essere inferiore a un grado e può d'altronde essere direttamente misurato, inviando lo stesso segnale contemporaneamente sui due canali.

Quanto alle possibili verifiche sperimentali della correttezza delle misure effettuate, noti che siano R_1, R_2, C_1 e C_2 , si possono confrontare questi valori con i prodotti R_1C_1 e R_2C_2 dedotti dalle frequenze f_1 e f_2 corrispondenti a -3 dB nell'ampiezza e $\pm \frac{\pi}{4}$ sulla fase. Occorre tuttavia notare che i cavetti coassiali (che sarà bene usare sia per portare il segnale all'oscillografo che per accoppiare fra loro i vari elementi del circuito), introducono capacità aggiuntive verso massa che vanno ad alterare il circuito così come è disegnato in Fig.11. Come ordine di grandezza, un cavo coassiale presenta circa 100 pF ogni metro di lunghezza; tale valore è comunque facilmente calcolabile con la formula del condensatore cilindrico una volta che si conoscano le caratteristiche geometriche del cavo interno, della calza esterna (la massa) e la costante dielettrica ϵ_r dell'isolante (Fig.13).

* aumenti superiori di un fattore 10 nella sensibilità possono portare a comportamenti anomali degli amplificatori di ingresso dell'oscillografo, in pratica a distorsioni del segnale e conseguenti erronee valutazioni dei passaggi di zero.

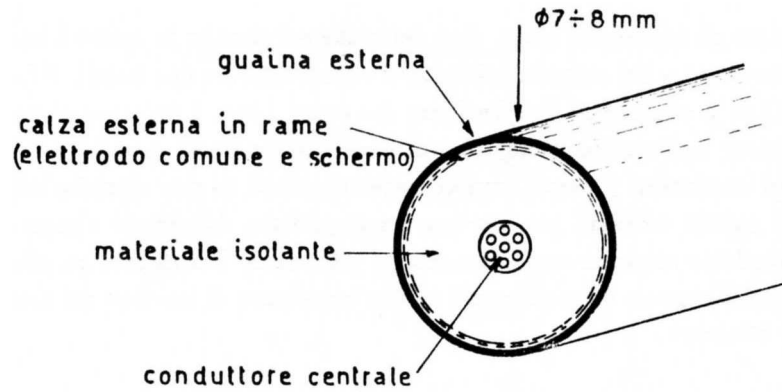


Fig.XII.13

Si ricordi comunque che schematizzare il cavo come un semplice condensatore è consentito solo se la frequenza f della tensione applicata dai generatori è molto minore del rapporto fra la velocità della luce e la lunghezza del cavo; solo in queste ipotesi infatti le costanti possono considerarsi ancora concentrate. Ad esempio, per una frequenza di 1 MHz e un cavo lungo un metro la disuguaglianza di sopra è ben soddisfatta; viceversa nel caso che la frequenza o la lunghezza del cavo o entrambe siano aumentate, cosicché le costanti non possano più considerarsi concentrate, lo studio della rete risulta molto più complicato poiché in questo caso il cavo è da considerarsi una *linea di trasmissione*, anziché un sistema di conduttori in regime quasi-statico.

4.- *Accorgimenti nell'utilizzo dell'oscillografo. Sonde e partitori compensati*

Il circuito che va effettivamente montato è del tipo in Fig.14.

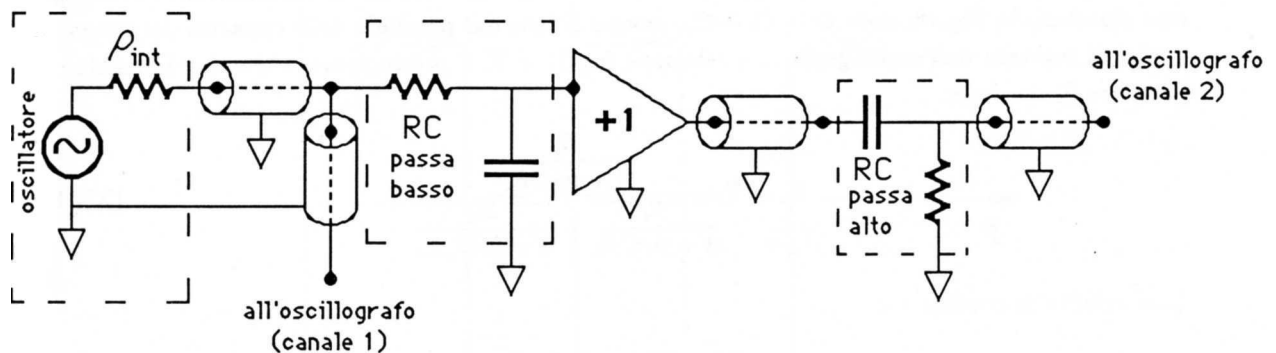


Fig.XII.14

Per un'analisi accurata del comportamento della rete in esame occorre tener conto anche dell'impedenza di ingresso dell'oscillografo verso massa (generalmente $1 \text{ M}\Omega$ con in parallelo una capacità dell'ordine di 20 pF). Tale impedenza può modificare i valori delle frequenze di taglio inferiore

e superiore e alterare gli andamenti attesi. Si è detto che nel circuito in esame è bene adoperare cavi coassiali per la trasmissione del segnale: infatti se si vuole esplorare una banda di frequenze sufficientemente elevata (fino a qualche MHz) l'utilizzo di cavetti liberi è da sconsigliare, principalmente perché una variazione nell'assetto geometrico di essi comporta una variazione nell'accoppiamento capacitivo dei vari conduttori presenti, con conseguenti effetti di non riproducibilità della misura; l'introduzione dei cavetti coassiali porta a una quasi perfetta definizione elettrica del sistema, al prezzo di aver introdotto capacità aggiuntive un po' più grosse. Per ridurre gli effetti delle capacità dei cavi che portano il segnale all'oscillografo e delle impedenze di ingresso del medesimo si può far uso di una *sonda attenuata*.

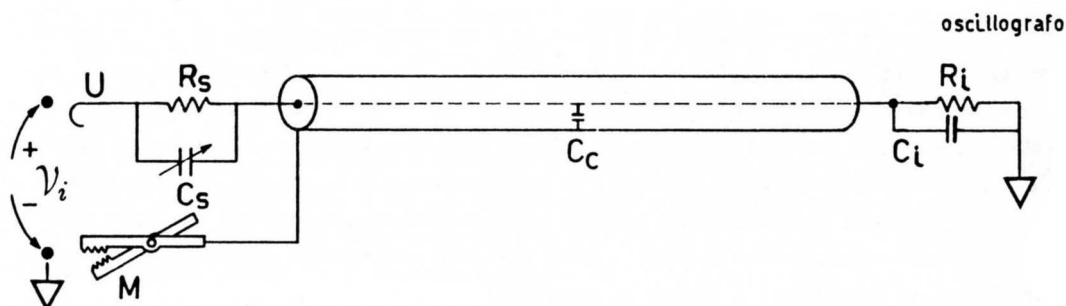


Fig.XII.15

Tali sonde, caratterizzate da una attenuazione 10, sono costituite da un cavetto coassiale (Fig.15) che da una parte si collega tramite un connettore all'ingresso dell'oscillografo e dall'altra termina con una resistenza da $9\text{ M}\Omega$ con in parallelo un condensatore il valore della cui capacità può essere variato tramite un apposito controllo meccanico; la sonda inoltre presenta a questa estremità un conduttore a forma di uncino (U in figura) che consente di ottenere un contatto elettrico e meccanico con il conduttore la cui tensione rispetto a massa è da misurare; un morsetto M -collegato al conduttore esterno del cavo (a massa)- consente di chiudere il circuito di misura. Si ha allora un circuito del tipo riportato in Fig.16, dove $C = C_i + C_c$, ovvero è dato dal parallelo delle capacità del cavo e di quella di ingresso dell'oscillografo. La relazione fra \mathcal{V}_0 e \mathcal{V}_i è presto trovata tramite la regola del partitore di tensione:

$$\mathcal{V}_0 = \mathcal{V} \frac{\frac{R_i}{1 + j\omega C R_i}}{\frac{R_i}{1 + j\omega C R_i} + \frac{R_s}{1 + j\omega C_s R_s}} \quad (\text{XII.17})$$

Se si verifica la condizione:

$$C R_i = C_s R_s \quad (\text{XII.18})$$

allora

$$\mathcal{V}_0 = \mathcal{V} \frac{R_i}{R_i + R_s} = \mathcal{V} \frac{C_s}{C_s + C} \quad (\text{XII.19})$$

e il partitore è detto *partitore compensato*.

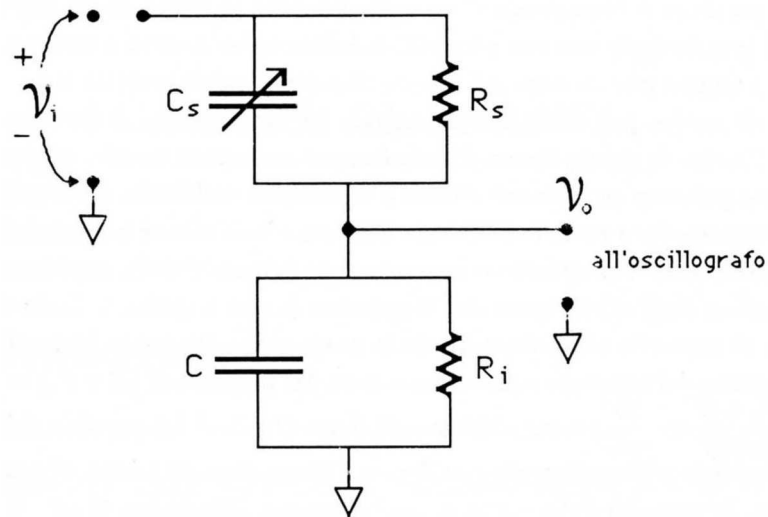


Fig.XII.16

Il partitore è “compensato” nel senso che il rapporto di partizione è costante, indipendente da ω . Nel caso ora esaminato in cui $R_i = 1M\Omega$ e $R_s = 9M\Omega$, $v_o = \frac{v}{10}$ e la sonda è detta “÷10”. Agendo sul condensatore variabile C_s si fa in modo che esso assuma il valore che soddisfa la condizione (18) di uguaglianza delle costanti di tempo $R_i C$ e $R_s C_s$. Il condensatore è variabile per fare in modo che la medesima sonda possa essere usata con vari oscillografi, aventi capacità di ingresso non identiche fra loro. Quanto al metodo impiegato per realizzare l’aggiustamento, per sapere cioè se la condizione (18) è soddisfatta, si sfrutta di solito un segnale periodico a onda quadra che l’oscillografo presenta ai capi di due terminali, uno dei quali a massa, sul suo pannello frontale.

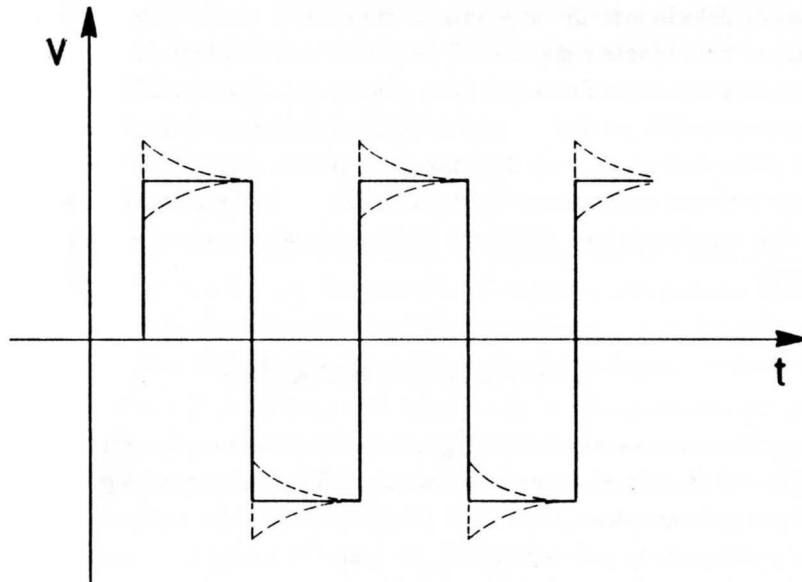


Fig.XII.17

Tale forma d’onda (Fig.17) corrisponde alla curva a tratto continuo in figura; la sonda è aggu-

stata, cioè il partitore è “compensato” quando, montata la sonda su un ingresso e misurando con essa il segnale in questione, esso compare sullo schermo come la curva a tratto continuo in figura; se il condensatore è troppo piccolo o troppo grande rispetto al valore corretto si hanno le figure disegnate a tratteggio. Il motivo per cui si usa un segnale a onda quadra si comprende ricordando che in un’analisi di Fourier di questa forma d’onda compaiono infiniti termini di armoniche superiori alla fondamentale e pertanto se la forma d’onda è riprodotta inalterata, ciò significa che il partitore si comporta identicamente a tutte le frequenze e questo è vero solo se è soddisfatta la condizione (18). Con una sonda del genere si ottiene un aumento di un fattore 10 della impedenza di ingresso con conseguente riduzione degli effetti spuri che la presenza di una impedenza finita comporta. L’aumento di un fattore 10 riguarda effettivamente sia la parte reale che quella immaginaria dell’impedenza: infatti l’impedenza del partitore risulta essere data dal parallelo di $(R + R_s) = 10R$ con la serie di C e C_s pari a $\frac{C_s + C}{j\omega C_s C} = \frac{10}{j\omega C}$; come abbiamo già detto C è dato dal parallelo della capacità del cavo e di quella di ingresso dell’oscillografo e se il cavo è lungo circa un metro, C ammonta a un centinaio di pF e quindi la capacità della sonda si aggira attorno alla decina di pF . Il guadagno in termini di impedenza di ingresso si paga con una diminuzione, del medesimo fattore 10, dell’ampiezza del segnale che raggiunge l’ingresso dell’oscillografo; tale fattore, entro ampi limiti, può comunque essere recuperato aumentando la sensibilità dell’amplificatore verticale.

L’analisi fin qui svolta assume che l’oscillografo abbia una banda passante decisamente più ampia di quella da misurare, cosicché, almeno da questo punto di vista, l’oscillografo possa considerarsi ideale. D’altronde, avendo predisposto il collegamento agli ingressi in DC, ed essendo gli amplificatori verticali *in continua*, l’oscillografo, verso le basse frequenze, effettivamente non altera il segnale, né in ampiezza né in fase. Se viceversa avessimo collegato gli ingressi in AC avremmo introdotto un filtro passa alto con frequenza di taglio inferiore (a -3 dB) data da $f_L = \frac{1}{2\pi R_i C_{AC}}$ con R_i resistenza di ingresso ($1M\Omega$) e C_{AC} (dell’ordine di $0.05\mu F$) pari a quella che l’oscillografo presenta in serie all’ingresso quando è in AC. Per quanto riguarda il limite verso le alte frequenze sarà bene che il nostro oscillografo abbia una frequenza di taglio superiore f_H maggiore di almeno un fattore 10 rispetto a quella del circuito di cui vogliamo studiare la banda passante, cosicché non ci siano ulteriori depressioni nel segnale e sfasamenti introdotti dall’oscillografo. Per la verità va osservato che anche se la condizione sopra detta non fosse pienamente rispettata, la misura descritta in questo capitolo resterebbe possibile, in quanto essa si basa sul confronto delle risposte dei due canali; se la banda passante finita dell’oscillografo deprime in ampiezza e sposta in fase il segnale, ciò avviene nello stesso modo (almeno nominalmente) per entrambi i canali e pertanto i rapporti delle ampiezze dei segnali sui due canali e le loro differenze di fase non ne risentono e l’informazione di interesse risulta preservata.

NOTA BIBLIOGRAFICA

Sulla relazione univoca esistente fra diagramma di ampiezza e diagramma di fase in una vasta gamma di filtri lineari si veda ad esempio il Cap.11 di **TE 57**; su questo problema e sui filtri passa basso, passa alto si può consultare anche **TE 50** (sect. 3.27–28). Per le sonde da oscillografo si può vedere **CO 83** (pag.121 e segg.).

XIII

I CIRCUITI RISONANTI

1.— Il circuito risonante serie

Supponiamo di avere il circuito di Fig.1, eccitato con un generatore sinusoidale $\mathcal{V} = V_0 \cdot \exp j\omega t$.

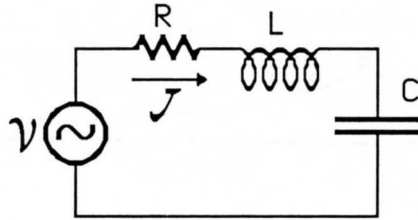


Fig.XIII.1

L'impedenza totale del circuito vale:

$$\mathcal{Z} = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \quad (\text{XIII.1})$$

Per frequenze molto basse il modulo dell'impedenza tende a ∞ a causa del condensatore, mentre diverge per frequenze alte a causa della induttanza; corrispondentemente la fase vale $-\frac{\pi}{2}$ per $\omega \rightarrow 0$ e $+\frac{\pi}{2}$ per $\omega \rightarrow \infty$. In formule

$$\begin{cases} |\mathcal{Z}|^2 = R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \\ \varphi_{\mathcal{Z}} = \text{atan} \frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}{R} \end{cases} \quad (\text{XIII.2})$$

Se riportiamo in grafico il modulo della corrente che circola nel circuito e la sua fase ($\theta = -\varphi_{\mathcal{Z}}$) otteniamo i grafici delle Figg.2a e 2b rispettivamente. Si vede che alla pulsazione $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, l'impedenza ha un minimo e che per tale valore essa è tutta reale e pari a R . La pulsazione $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ è detta *pulsazione di risonanza* del circuito che, a sua volta, è denominato *circuito risonante serie*.

Per tale valore di ω la corrente \mathcal{J} ha un'ampiezza massima $I_0 = \frac{V_0}{R}$ e pertanto anche la differenza di potenziale ai capi dell'induttanza, del condensatore e della resistenza saranno, singolarmente prese, di ampiezza massima; d'altronde, poiché la caduta sulla sola resistenza vale $\mathcal{V} = \mathcal{J}R$, le due cadute su L e su C si devono annullare vicendevolmente. Di fatto le tensioni sull'induttanza e sul condensatore valgono:

$$\mathcal{V}_L = j\omega_0 L \frac{V_0 \cdot \exp j\omega_0 t}{R} = j\sqrt{\frac{L}{C}} \frac{V_0 \cdot \exp j\omega_0 t}{R} \quad (\text{XIII.3})$$

$$\mathcal{V}_C = \frac{1}{j\omega_0 C} \frac{V_0 \cdot \exp j\omega_0 t}{R} = -j\sqrt{\frac{L}{C}} \frac{V_0 \cdot \exp j\omega_0 t}{R} = -\mathcal{V}_L \quad (\text{XIII.4})$$

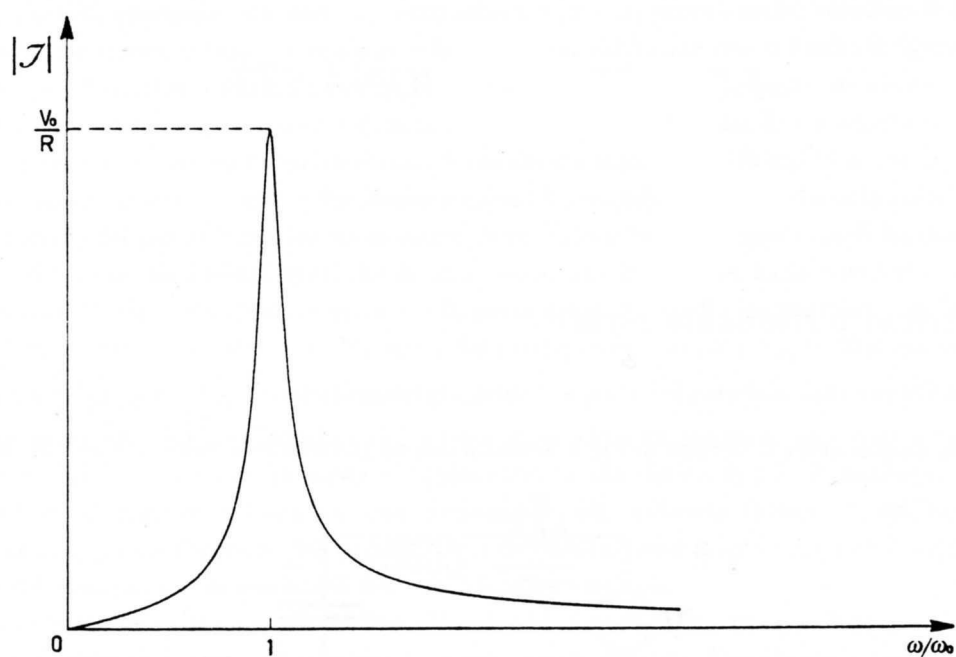


Fig.XIII.2a

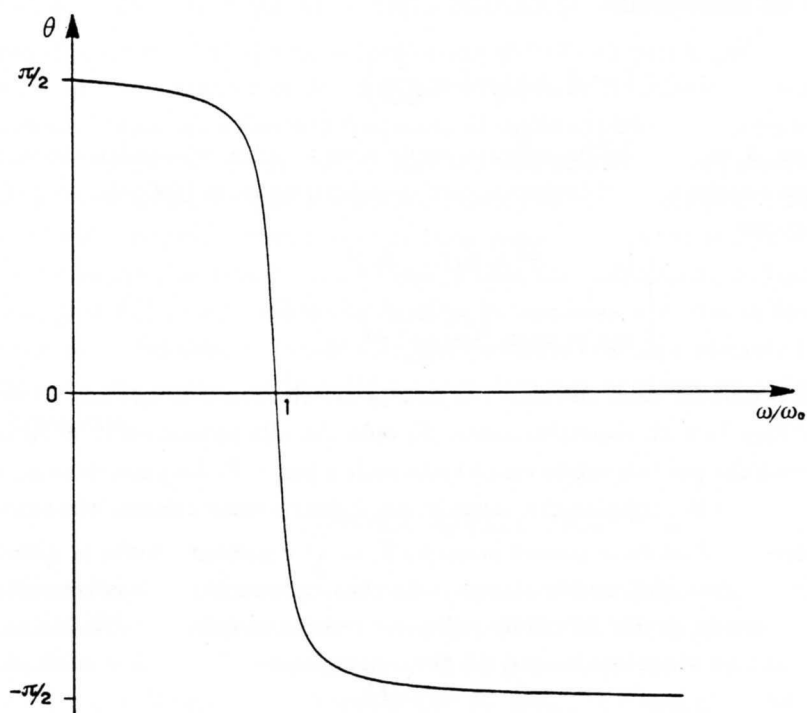


Fig.XIII.2b

Si vede così che le tensioni oltre a essere in *quadratura* con la tensione del generatore, sono in

opposizione fra di loro ed essendo di uguale ampiezza danno un contributo totale nullo. Il motivo del termine “risonanza” è che la frequenza ω_0 è quella di oscillazione propria del circuito e che pertanto la corrente “risuona” qualora il termine forzante oscilla proprio alla pulsazione ω_0 *. Studiamo esplicitamente l’analogia del nostro circuito con un sistema meccanico in risonanza; se non avessimo usato il metodo simbolico delle grandezze complesse, avremmo dovuto scrivere l’equazione differenziale:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V_0 \cos \omega t \quad (\text{XIII.5})$$

che, a parte il diverso significato dei simboli, coincide con l’equazione che regola il moto del sistema meccanico in Fig.3:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos \omega t \quad (\text{XIII.6})$$

dove k rappresenta la costante della molla, λ il coefficiente di attrito, supposto viscoso, ed m la massa del corpo.

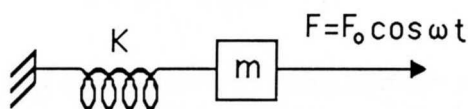


Fig.XIII.3

Quando il sistema meccanico è in risonanza, cioè $\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, l’ampiezza delle oscillazioni aumenta, tanto più quanto più piccolo è lo smorzamento λ ; la somma dell’energia cinetica e dell’energia potenziale della molla resta costante e il lavoro fatto dalla forza $F_0 \cos \omega_0 t$ compensa esattamente l’energia perduta per attrito (il che equivale a dire che istante per istante $F_0 \cos \omega_0 t = \lambda \frac{dx}{dt}$). In maniera assolutamente analoga, nel sistema elettrico l’energia rimbalza continuamente fra le due forme di energia elettrostatica (condensatore) e magnetica (induttanza), mentre istante per istante il generatore si preoccupa soltanto di vincere le perdite per effetto Joule sulla resistenza. Come nell’equivalente meccanico, l’ampiezza delle oscillazioni (di carica e quindi di corrente) è tanto più grande quanto minori sono gli effetti dissipativi, ovvero tanto più piccola è R . Il parametro che caratterizza il comportamento del circuito alla risonanza è il cosiddetto *parametro di qualità* o *fattore di merito* o semplicemente *Q del circuito*. Tale parametro è definito, indipendentemente dal particolare sistema oscillante in studio (sia cioè esso meccanico o elettrico), come:

$$Q = 2\pi \frac{\text{Energia massima immagazzinata}}{\text{Energia dissipata nel sistema durante un ciclo}} = 2\pi \frac{E_{max}}{\langle E_D \rangle} \quad (\text{XIII.7})$$

Nonostante che il Q del circuito si possa definire per qualunque valore di ω , l’interesse della sua definizione è legato al comportamento del circuito alla risonanza e nel seguito - a meno che non sia altrimenti specificato - esso si riferirà sempre alla condizione di risonanza e indicato col simbolo Q_0 .

Calcoliamo il Q_0 del nostro circuito: in risonanza abbiamo visto che la corrente nel circuito è tutta reale e vale $i = I_0 \cos \omega_0 t = \frac{V_0}{R} \cos \omega_0 t$ e pertanto la carica q nel condensatore vale $\frac{V_0}{R\omega_0} \sin \omega_0 t$; l’energia immagazzinata all’istante t nel circuito vale ($\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$):

$$E_T(t) = \frac{1}{2} L i^2 + \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} L \frac{V_0^2}{R^2} \cos^2 \omega_0 t + \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{R^2 \omega_0^2 C} \sin^2 \omega_0 t = \frac{1}{2} \frac{L V_0^2}{R^2} = \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{R^2 \omega_0^2 C} \quad (\text{XIII.8})$$

* si faccia attenzione che qui e nel seguito per *pulsazione propria* del circuito si intende quella in assenza di smorzamento ($R = 0$) e non quella delle oscillazioni smorzate $\omega_S = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{CR^2}{4L}}$.

Come avevamo anticipato, in risonanza il valore dell'energia immagazzinata è costante (non dipende cioè da t) e quindi pari al valore massimo. Quanto all'energia dissipata in un ciclo essa varrà, essendo $\langle W \rangle$ la potenza media dissipata:

$$E_D = \langle W \rangle \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi i_{eff}^2 R}{\omega_0} = \frac{\pi I_0^2 R}{\omega_0} \quad (\text{XIII.9})$$

In risonanza:

$$E_D = \frac{\pi V_0^2}{\omega_0 R} \quad (\text{XIII.10})$$

Per Q_0 otteniamo così

$$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (\text{XIII.11})$$

Si riconoscerà che il fattore Q_0 espresso come $\frac{\omega L}{R}$ coincide con il Q della bobina (vedi (IX.56)) se la resistenza R rappresenta la resistenza interna dell'induttore; se viceversa R è associata alla resistenza in serie al condensatore, si vede che Q_0 coincide con $\frac{1}{D}$ dove D è il fattore di dissipazione del condensatore (vedi (IX.55)).

Comunque al di là di quale sia l'origine fisica della resistenza, che sia essa cioè tutta dovuta all'induttore o tutta dovuta al condensatore o a una opportuna combinazione delle due situazioni o infine proprio a una resistenza esplicitamente aggiunta in serie, resta il fatto che il valore del fattore Q_0 determina (Fig.4a e b) il comportamento del circuito nell'intorno della frequenza di risonanza.

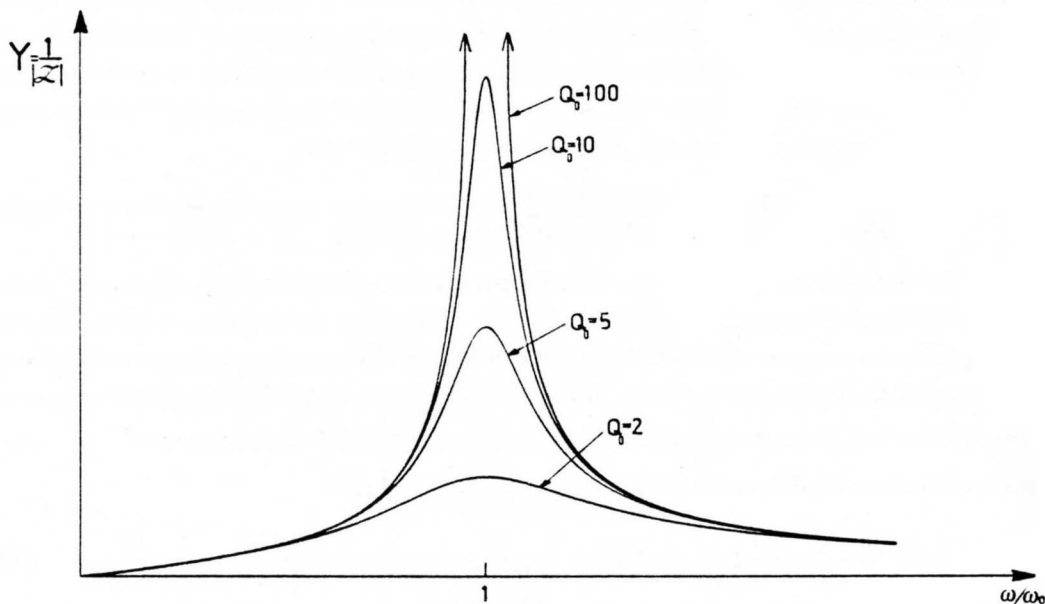


Fig.XIII.4a

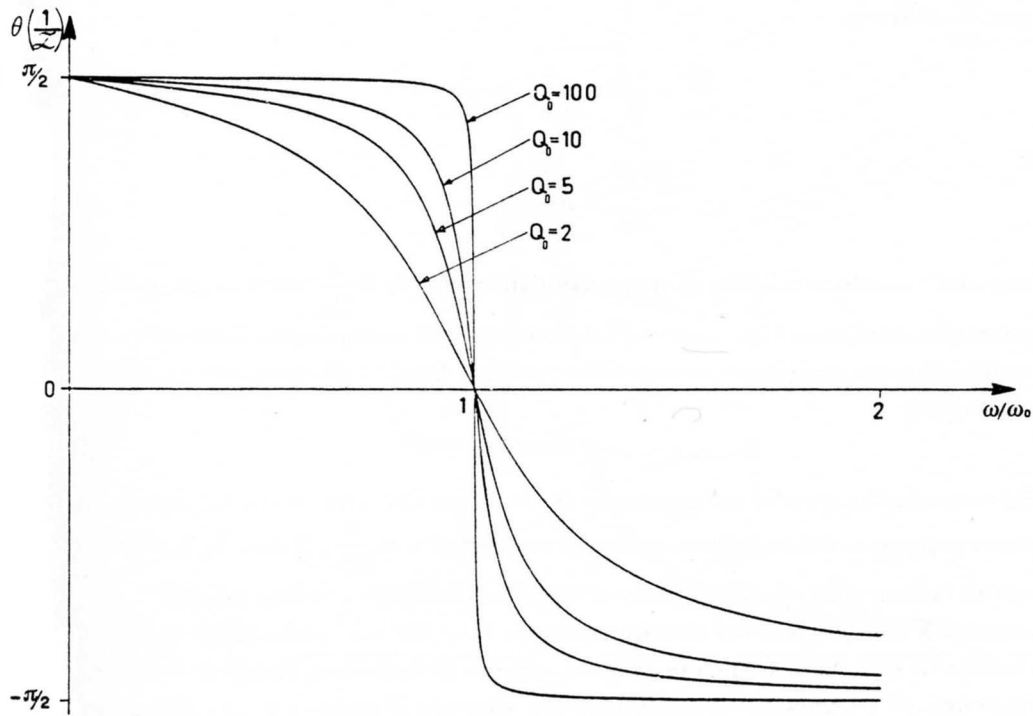


Fig.XIII.4b

All'aumentare del Q_0 , il circuito presenta gli andamenti caratteristici della risonanza sempre più marcati; per Q_0 molto grande, il modulo dell'ammettenza tende a divergere nell'intorno di $\omega = \omega_0$ e la fase dell'ammettenza compie una brusca transizione da $\frac{\pi}{2}$ a $-\frac{\pi}{2}$. Verifichiamo quantitativamente gli andamenti riportati nella Fig.4. Dall'espressione di Z :

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R \left[1 + j \frac{\omega L}{R} \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) \right] = R \left[1 + j \frac{\omega}{\omega_0} Q_0 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) \right] \quad (\text{XIII.12})$$

si ottiene:

$$|\mathcal{Y}| = \frac{1}{|Z|} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{1}{R \sqrt{1 + \frac{\omega^2 L^2}{R^2} \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right)^2}} \quad (\text{XIII.13})$$

$$|\mathcal{Y}|_{\omega=\omega_0} = \frac{1}{R} \quad (\text{XIII.14})$$

$$\theta(\mathcal{Y}) = - \operatorname{atan} \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right) = - \operatorname{atan} \frac{\omega L \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right)}{R} \quad (\text{XIII.15})$$

e quindi:

$$\theta(\mathcal{Y})_{\omega=\omega_0} = 0 \quad (\text{XIII.16})$$

Guardiamo ora per quali valori di $\omega = \omega'$ il modulo dell'ammettenza si riduce di un fattore $\sqrt{5} \approx 2.24$ rispetto al massimo e cosa fa corrispondentemente la fase. La condizione è data dalla:

$$R \sqrt{1 + \frac{\omega'^2 L^2}{R^2} \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega'^2} \right)^2} = \sqrt{5} R \quad (\text{XIII.17})$$

Risolviendo per $\frac{\omega'}{\omega_0}$ si trova:

$$\frac{\omega'}{\omega_0} = \sqrt{1 + \frac{1}{Q_0^2}} \pm \frac{1}{Q_0} \quad (\text{XIII.18})$$

e se $Q_0 \gg 1$:

$$\frac{\omega' - \omega_0}{\omega_0} = \pm \frac{1}{Q_0} \quad (\text{XIII.19})$$

vale a dire che una variazione relativa di frequenza dell'ordine di $\pm \frac{1}{Q_0}$ attorno alla pulsazione di risonanza, porta alla riduzione di un fattore $\sqrt{5}$ del modulo dell'ammettenza. Tanto più è grande il fattore Q_0 , tanto più acuta sarà quindi la curva di risonanza. Quanto alla fase si trova, direttamente dalla (17) e dalla (15):

$$\theta_{\omega'=\omega_0 \pm \frac{\omega_0}{Q_0}} = \mp \text{atan } 2 \approx \mp 63^\circ \quad (\text{XIII.20})$$

In maniera del tutto simile si può far vedere che per $Q_0 \gg 1$, quando la frequenza del segnale differisce percentualmente rispetto al valore della risonanza per un termine $\pm \frac{1}{2Q_0}$, il modulo dell'ammettenza è diminuito di un fattore $\sqrt{2}$ (-3 dB) rispetto al valore in risonanza e la fase vale $\mp 45^\circ$.

La caratteristica ora descritta del circuito risonante fa sì che esso possa essere utilizzato come selettore di una certa gamma di frequenze attorno a quella di risonanza, cioè come un filtro passa banda: si supponga ad esempio che il generatore che alimenta il nostro circuito risonante sia caratterizzato da un ampio spettro di frequenze: la presenza del circuito risonante fa in modo che la corrente nel circuito sia dominata, se il Q_0 è sufficientemente elevato, dalle componenti con frequenza nell'intorno di ω_0 .

2.— Il circuito risonante parallelo

Consideriamo ora il circuito di Fig.5. Esso è detto circuito *risonante parallelo* o *antirisonante*;

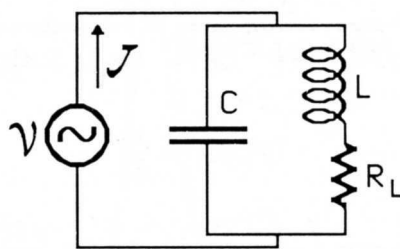


Fig.XIII.5

il motivo della seconda denominazione risiede nel fatto che il comportamento in funzione della frequenza di questo circuito è (circa) duale rispetto al risonante in serie. Infatti

$$Z = \frac{1}{j\omega C + \frac{1}{R_L + j\omega L}} = \frac{R_L + j\omega L}{1 + j\omega C(R_L + j\omega L)} \quad (\text{XIII.21})$$

e se riportiamo in grafico $|Z|$ e la sua fase φ_Z otteniamo ($\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$) le curve delle Figg.6a) e b).

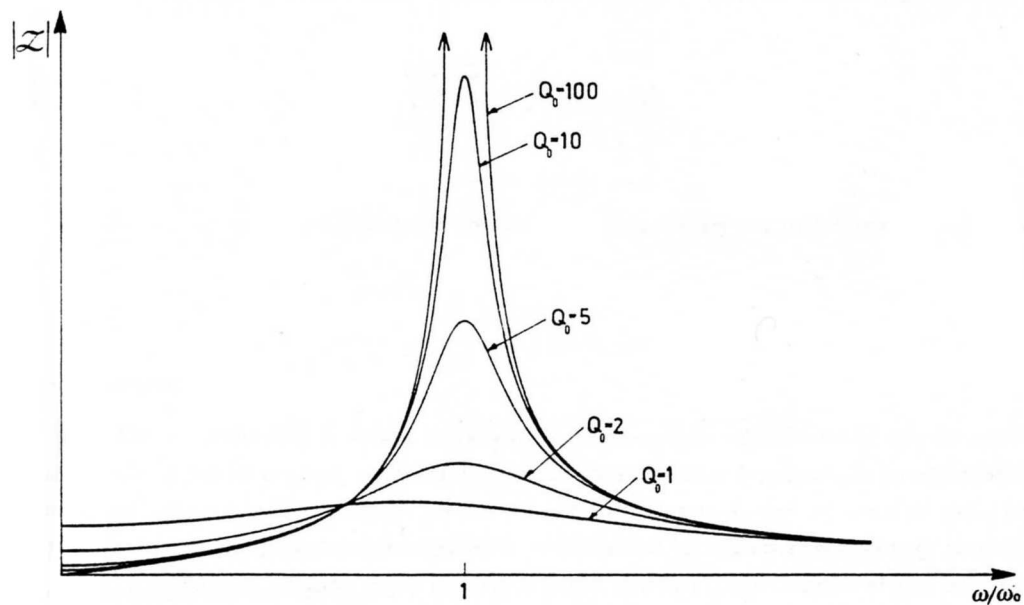


Fig.XIII.6a

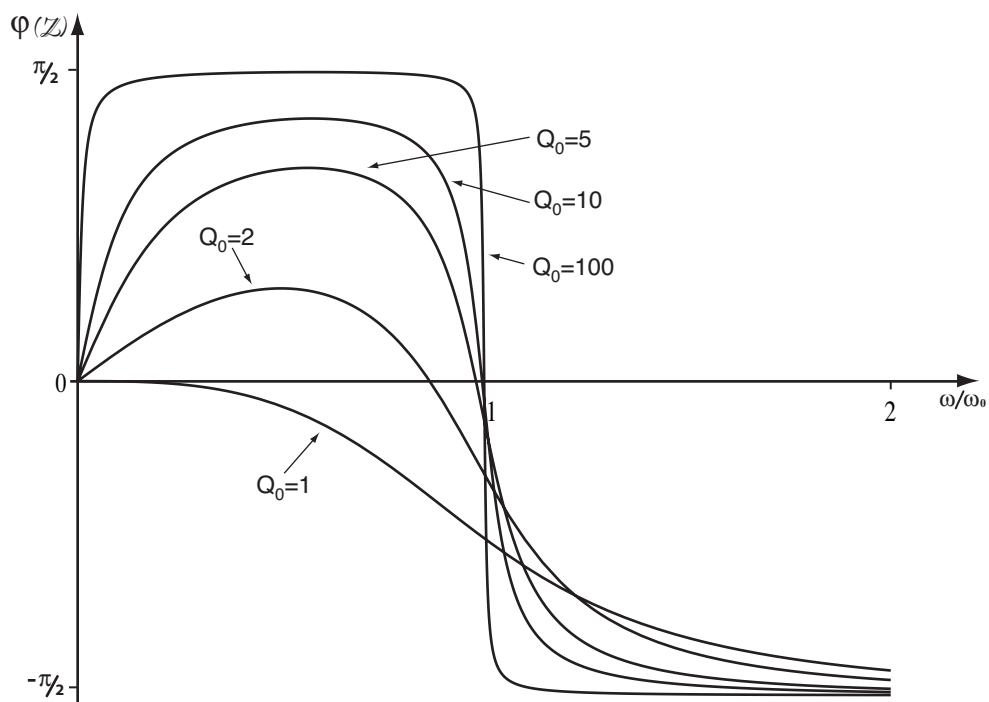


Fig.XIII.6b

A differenza del circuito risonante serie, per il quale è naturale definire pulsazione di risonanza

quella ($\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$) corrispondente alla frequenza propria di oscillazione del sistema, nel circuito risonante parallelo la frequenza di risonanza è definita come quella frequenza per cui l'impedenza del parallelo diventa reale. In base a questa definizione si trova che la pulsazione di risonanza ω_R vale:

$$\omega_R^2 = \omega_0^2 \left(1 - R_L^2 \frac{C}{L} \right) \quad (\text{XIII.22})$$

che, usando la notazione (un po' equivoca come vedremo fra poco) $Q_0 = \frac{1}{R_L} \sqrt{\frac{L}{C}}$, può essere messa nella forma

$$\omega_R^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{Q_0^2} \right) \quad (\text{XIII.23})$$

Si vede intanto che la condizione di risonanza (impedenza reale) si può ottenere solo se $Q_0 > 1$ e che la pulsazione di risonanza è tanto più vicina alla pulsazione propria di oscillazione (che anche in questo caso vale $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$) quanto più Q_0 è grande. Quanto all'ambiguità sopra accennata a proposito di Q_0 , essa si riferisce al fatto che se vogliamo definire il Q del circuito in questione, coerentemente con la definizione (7) prima data, troviamo dopo qualche calcolo:

$$Q_{0P} = \omega_R \frac{L}{R_L} \left(1 + R_L \sqrt{\frac{C}{L}} \right) = Q_0 \left(1 - \frac{1}{Q_0^2} \right) \left(1 + \frac{1}{Q_0} \right) \quad (\text{XIII.24})$$

La (24) dice che il fattore di merito del circuito in risonanza non coincide con il Q della bobina a quella frequenza, ma che ne differisce tanto meno quanto più è grande Q_0 . Questo è il motivo per cui nelle figure precedenti, seguendo una prassi ormai consolidata nei testi di elettronica, si sono riportate le curve corrispondenti al fattore di merito Q_0 e non Q_{0P} . Dopotutto, nelle applicazioni pratiche hanno interesse solo i circuiti risonanti parallelo con alti valori di Q_0 (> 10) e pertanto con buona approssimazione $Q_{0P} \approx Q_0$.

Tornando a esaminare più da vicino il comportamento del circuito risonante parallelo si vede che *in prossimità* della frequenza di risonanza il modulo dell'impedenza è massimo (il massimo del modulo dell'impedenza non coincide con la condizione $Im(\mathcal{Z}) = 0$); per la precisione si trova che per $\omega = \omega_R$:

$$\mathcal{Z}_p = R_L \frac{1 + j \frac{\omega_R L}{R_L}}{1 - \omega_R^2 CL + j \omega_R C R_L} = \frac{R_L}{1 - \omega_R^2 CL} = R_L Q_0^2 = \frac{1}{R_L} \frac{L}{C} \quad (\text{XIII.25})$$

Il motivo per cui nel risonante parallelo l'impedenza nell'intorno della risonanza è massima, si comprende assai bene pensando di eccitare il nostro circuito con una corrente \mathcal{J} di ampiezza costante (al variare della frequenza) e andando a calcolare le correnti \mathcal{J}_L e \mathcal{J}_C che circolano nell'induttanza e nel condensatore (Fig.7):

$$\mathcal{J}_L = \mathcal{J} \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + R_L + j\omega L} = \mathcal{J} \frac{1}{1 + (R_L + j\omega L)(j\omega C)} = \mathcal{J} \frac{1}{1 - \omega^2 LC + j\omega C R_L} \quad (\text{XIII.26})$$

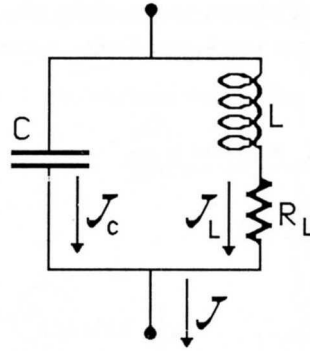


Fig.XIII.7

Alla risonanza

$$\mathcal{J}_{L0} = \mathcal{J} \frac{1}{\frac{1}{Q_0^2} + j \left(\frac{1}{Q_0}\right) \left(1 - \frac{1}{Q_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \approx -j\mathcal{J}Q_0 \quad (\text{XIII.27})$$

dove, nell'ultimo passaggio sono stati trascurati i termini in $\frac{1}{Q_0^2}$. Quanto a \mathcal{J}_{C0} essa risulta, sempre nella stessa approssimazione di $Q_0 \gg 1$, pari a:

$$\mathcal{J}_{C0} = \mathcal{J} - \mathcal{J}_{L0} = \mathcal{J} + j\mathcal{J}Q_0 \approx j\mathcal{J}Q_0 \quad (\text{XIII.28})$$

In risonanza pertanto, a una corrente di eccitazione \mathcal{J} , corrispondono nei due rami del parallelo correnti Q_0 volte più grandi in modulo, sfasate quasi esattamente di $\pm \frac{\pi}{2}$; esse sono “responsabili” del continuo rimbalzare dell'energia immagazzinata nelle forme di campo elettrico e magnetico; ci troviamo cioè dinanzi a un circuito risonante serie (costituito dall'anello dei due rami in parallelo), solo che questa volta, le cadute (massime) su induttanza e capacità non si sommano per dare contributo nullo, ma danno viceversa luogo all'innalzamento *risonante* della tensione ai capi del parallelo.

Come accennato precedentemente, nei casi di interesse pratico $Q_0 \gg 1$ per cui $\omega_R \approx \omega_0$ a meno di termini in $\frac{1}{Q_0^2}$. In queste condizioni intervengono alcune importanti semplificazioni nell'espressione di \mathcal{Z} nell'intorno della risonanza: infatti per un valore ω generico, l'ammettenza del parallelo può essere scritta nella forma:

$$\frac{1}{\mathcal{Z}} = \frac{1}{R + j\omega L} + j\omega C = \frac{1}{RQ_0^2} \frac{\frac{\omega_0^2}{\omega^2} + j\frac{\omega}{\omega_0}Q_0\left[1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\frac{1}{Q_0^2}\right]}{1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\frac{1}{Q_0^2}} \quad (\text{XIII.29})$$

che per valori di ω non lontani da ω_0 e per $Q_0 \gg 1$ può approssimarsi come:

$$\frac{1}{\mathcal{Z}} \approx \frac{1}{RQ_0^2} \left[\frac{\omega_0^2}{\omega^2} + j\frac{\omega}{\omega_0}Q_0\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) \right] \quad (\text{XIII.30})$$

Si osservi la stretta somiglianza di questa espressione con quella (12) dell'impedenza del circuito serie; ciò significa che per $Q_0 \gg 1$ l'andamento dell'ammettenza del circuito parallelo, nell'intorno di $\omega = \omega_0$, è equivalente a quello dell'impedenza del risonante serie e continueranno a valere, fatti i dovuti cambiamenti, le conclusioni tratte nel §1. Ad esempio per $\omega = \omega_0\left(1 \pm \frac{1}{2Q_0}\right)$ nel risonante parallelo il modulo dell'impedenza sarà ridotto di 3 dB rispetto al valore in risonanza e la fase

varrà $\pm 45^0$. Si noti che proprio quest'ultima osservazione giustifica a posteriori la correttezza della nostra approssimazione: che cioè tanto più è grande Q_0 , tanto più è stretta la curva di risonanza e nell'espressione di $\frac{1}{Z}$ il termine $\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ può essere confuso con 1, essendo la sua differenza rispetto a 1, fino a oltre metà del massimo di Z , inferiore a $\frac{2}{Q_0}$.

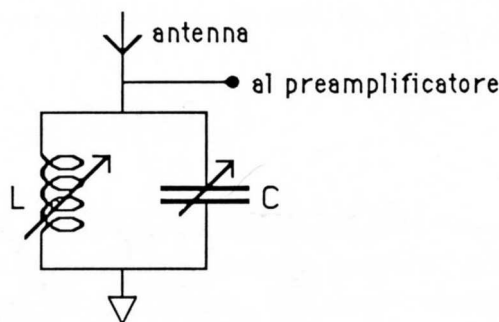


Fig.XIII.8

Quanto alle applicazioni dei circuiti risonanti parallelo valgono considerazioni simili a quelle dei circuiti serie, tenendo presente però che nel caso del parallelo il circuito è adatto a rivelare segnali caratterizzati da impedenze interne relativamente elevate; un tipico esempio (Fig.8) è il caso di una antenna per ricezione di onde radio in cui il segnale molto piccolo ricevuto dall' antenna provoca, alla frequenza di risonanza (definita variando o l'induttanza o la capacità tramite il comando di sintonia dell'apparecchio) una tensione rivelabile ai capi del circuito risonante parallelo e viene poi inviata agli stadi di amplificazione e demodulazione.

Un'altra applicazione dei circuiti risonanti riguarda la misura di induttanze e capacità tramite la rivelazione di condizioni di risonanza e costituisce l'argomento del prossimo paragrafo.

3.— Rivelazione della frequenza di risonanza mediante un oscillografo

Nel circuito disegnato in Fig.9, $Z(\omega)$ rappresenta un circuito risonante (serie o parallelo); \mathcal{V}, ω è un generatore di tensione con ampiezza e frequenza variabili, caratterizzato da una resistenza interna ρ_i ; R_0 è un resistore puro. Vediamo ora che se inviamo la ddp \mathcal{V}_x fra i terminali X e T e la ddp \mathcal{V}_y fra Y e T ai canali X e Y di un oscillografo, possiamo rivelare molto semplicemente la condizione di risonanza, quella per cui $Z(\omega)$ diventa reale. La relazione fra \mathcal{V}_x e \mathcal{V}_y è:

$$\mathcal{V}_y = \mathcal{V}_x \frac{Z(\omega)}{R_0 + Z(\omega)} \quad (\text{XIII.31})$$

Per ω qualsiasi \mathcal{V}_x e \mathcal{V}_y non saranno in fase cosicché per gli spostamenti x e y del fascetto luminoso sullo schermo dell'oscillografo avremo:

$$\begin{cases} x = x_0 \cos \omega t \\ y = y_0 \cos (\omega t + \varphi) \end{cases} \quad (\text{XIII.32})$$

con x_0 e y_0 proporzionali rispettivamente alle ampiezze di \mathcal{V}_x e \mathcal{V}_y e con φ pari alla fase di $\frac{\mathcal{Z}(\omega)}{R_0 + \mathcal{Z}(\omega)}$.

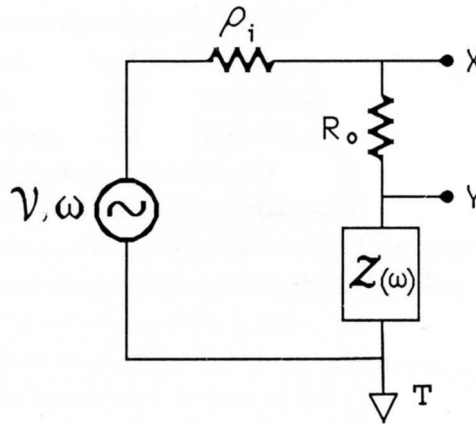


Fig.XIII.9

La curva corrispondente a questa scansione nelle due direzioni x e y , è una ellisse di equazione

$$\frac{y^2}{y_0^2} + \frac{x^2}{x_0^2} - \frac{2xy}{x_0y_0} \cos \varphi = \sin^2 \varphi \quad (\text{XIII.33})$$

come si può facilmente ottenere eliminando il parametro t dal sistema (32). Qualora, al variare di ω , si ottenga la risonanza, allora $\varphi = 0$ e l'ellisse degenera in un segmento di retta di pendenza $\frac{y_0}{x_0}$; la (33) infatti si riduce in questo caso a:

$$\left(\frac{y}{y_0} - \frac{x}{x_0} \right)^2 = 0 \quad (\text{XIII.34})$$

Ovviamente la pendenza del segmento dipende, oltre che dal valore delle ampiezze \mathcal{V}_x e \mathcal{V}_y , dalla selezione effettuata sulla sensibilità degli amplificatori dei canali X e Y. Agendo su questi comandi è anche possibile migliorare la sensibilità di rivelazione della condizione di risonanza (pendenza attorno a 45°).

Soffermiamoci ora sul problema della scelta di R_0 . E' facile rendersi conto che per vari ordini di motivi conviene rendere $R_0 \gg |\mathcal{Z}(\omega)|$ per ogni ω , il che equivale sostanzialmente a comandare l'impedenza $\mathcal{Z}(\omega)$ con un generatore di corrente. In questo caso infatti la misura dell'ampiezza di \mathcal{V}_y dà direttamente (a parte una costante moltiplicativa) il modulo di $\mathcal{Z}(\omega)$ a ogni frequenza ed è così estremamente semplice costruire un grafico delle curve di risonanza ($|\mathcal{Z}(\omega)|$ per il parallelo, $|\mathcal{V}(\omega)|$ per il serie). Inoltre si può vedere che la valutazione della impedenza in risonanza (sia serie che parallelo) $\mathcal{Z}_p = |\mathcal{Z}(\omega)|_{\omega=\omega_R}$ è tanto più precisa quanto più $\frac{\mathcal{V}_y}{\mathcal{V}_x} < 1$, ovvero quanto più $R_0 > \mathcal{Z}_p$: infatti, in risonanza $\frac{\mathcal{V}_y}{\mathcal{V}_x} = A$ è reale e possiamo scrivere (vedi (31)):

$$\mathcal{Z}_p = \frac{R_0 A}{1 - A} \quad (\text{XIII.35})$$

e quindi

$$\frac{\Delta \mathcal{Z}_p}{\mathcal{Z}_p} = \frac{\Delta R_0}{R_0} + \frac{\Delta A}{A(1 - A)} \quad (\text{XIII.36})$$

e supponendo che A possa essere misurato con un errore percentuale costante (cosa assai ragionevole a meno di non avere segnali \mathcal{V}_y troppo piccoli per i quali l'oscillografo non ha sensibilità verticale sufficiente), ci si guadagna ad avere $\mathcal{V}_x \gg \mathcal{V}_y$, ovvero $A \ll 1$; si badi però che da questo punto di vista un fattore 10 fra \mathcal{V}_x e \mathcal{V}_y è già sufficiente per avere un errore dovuto ad A solo del 10% superiore rispetto al minimo ottenibile.

La prescrizione $A \ll 1$ corrisponde al fatto che essendo Z_p direttamente collegato alla differenza dei due segnali \mathcal{V}_x e \mathcal{V}_y , tanto più essi sono differenti, tanto minore sarà l'errore associato a questa valutazione. Similmente si potrebbe far vedere che anche per quanto riguarda la sensibilità di rivelazione della risonanza, in pratica della *differenza di fase* fra \mathcal{V}_x e \mathcal{V}_y , ci si guadagna ad aver $\mathcal{V}_x \gg \mathcal{V}_y$; anche ciò è riconducibile al fatto che, fissato $Z(\omega)$ e quindi la sua fase, la fase di \mathcal{V}_x differisce tanto di più da quella di \mathcal{V}_y quanto minore sarà il contributo che $Z(\omega)$ dà all'impedenza complessiva del ramo $R_0 + Z(\omega)$.

4.— Misure con un circuito risonante serie

Nel circuito in Fig.10, la risonanza si avrà per $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ e si potrà rivelare come detto nel paragrafo precedente.

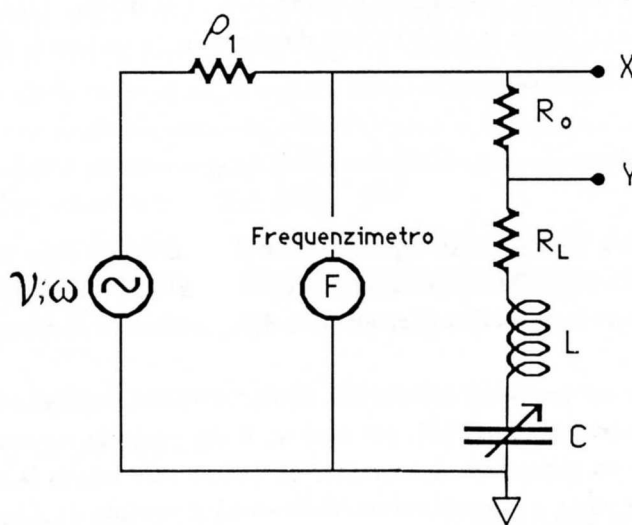


Fig.XIII.10

Possiamo allora misurare direttamente il valore dell'induttanza di una bobina, poiché esso dipende solo dal valore del condensatore (per esempio un condensatore campione a decadi) e dalla frequenza, che può essere misurata con un *frequenzimetro*. Il frequenzimetro è uno strumento digitale che conta le oscillazioni che il segnale compie nell'unità di tempo e presenta il risultato direttamente sotto forma di numero. Si tratta in genere di strumenti molto precisi, basandosi essi su un orologio a quarzo e un contatore digitale.

Se è di interesse conoscere anche il valore di R_L (la resistenza della bobina) dovremo valutare l'impedenza del circuito, che per $\omega = \omega_0$ vale proprio R_L . Il Q_0 del circuito si otterrà poi come $Q_0 = \frac{1}{R_L} \sqrt{\frac{L}{C}}$ e potremo anche verificare la correttezza di tale valore andando a misurare la larghezza

della curva di risonanza, cioè del modulo dell'ammettenza in funzione della frequenza, a $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (o $\frac{1}{\sqrt{2}}$) volte del massimo. Come visto nel paragrafo precedente questo si farà tanto più semplicemente quanto più $R_0 > R_L$.

Se si vogliono studiare gli andamenti di R_L e L in funzione di ω , dovremo variare ω e trovare, tramite le variazioni su C , la corrispondente condizione di risonanza. In genere L presenta piccole variazioni con la frequenza, mentre R_L cresce sensibilmente con ω ; conseguentemente il fattore di merito del circuito non aumenta con la frequenza come nel caso in cui R_L rimanesse costante.

Con alcune bobine può capitare che in condizioni prossime a quelle di risonanza, l'ellisse, anziché degenerare in un segmento di retta "degeneri" davvero in una figura con qualche cappio; ciò è dovuto alla presenza di distorsioni nella ddp \mathcal{V}_y o dovute al generatore non perfettamente sinusoidale, oppure indotte dalla presenza di comportamenti non lineari in qualche componente utilizzato. Se ad esempio si hanno saturazioni nel nucleo della bobina, ovvero dipendenze di L dalla corrente che la attraversa, questi sono proprio tipici effetti non lineari che portano a distorsioni; il fatto che essi si notino solo nei paraggi della risonanza è dovuto al fatto che in queste condizioni si ha un forte effetto di *cancellazione* sulla parte *regolare* dell'impedenza (le cadute sull'induttanza e sulla capacità sono nominalmente uguali e sfasate di 180°) e quindi solo la resistenza R_L più una eventuale parte *irregolare* dell'impedenza contribuiscono alla ddp misurata. Analogamente si può ragionare per le distorsioni dovute al generatore, che si possono manifestare in queste condizioni perché la ddp associata all'armonica fondamentale è depressa a causa della risonanza. Quanto alla valutazione degli errori della misura di L e di R_L , ne verrà discusso insieme al caso del circuito risonante parallelo, data la stretta affinità fra le due procedure.

5.— Misure con un circuito risonante parallelo

Il circuito in questo caso è quello di Fig.11 e abbiamo visto che l'impedenza presenta un massimo nell'intorno della risonanza; la derivazione della dipendenza di L e di R_L (in genere tutta data dalla resistenza interna della bobina) in funzione delle grandezze direttamente misurabili, è in questo caso, un po' più complicata che nel caso del circuito serie.

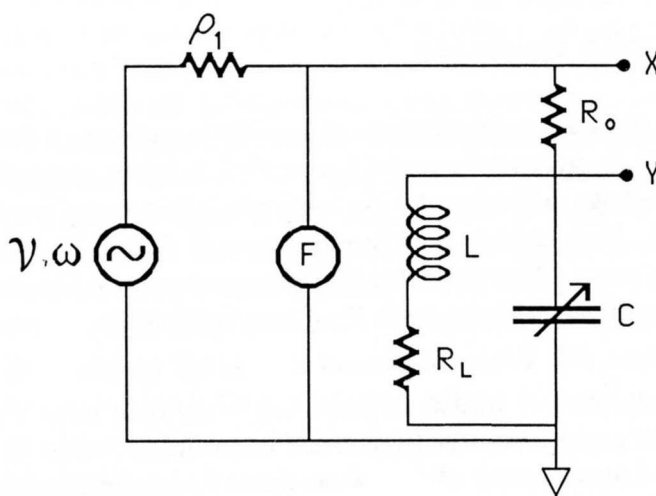


Fig.XIII.11

Infatti, detto Z_p il valore dell'impedenza per $\omega = \omega_R$ ottenuto tramite la misura di A e R_0 in risonanza (35), occorre, per ricavare L e R_L , risolvere il sistema (vedi (22) e (25)):

$$\begin{cases} \omega_R^2 = \frac{1}{LC} \left(1 - R_L^2 \frac{C}{L} \right) \\ Z_p = \frac{1}{R_L} \frac{L}{C} \end{cases} \quad (\text{XIII.37})$$

Da questo, dopo un po' di calcoli, si trova:

$$\begin{cases} R_L = \frac{Z_p}{1 + \omega_R^2 C^2 Z_p^2} \\ L = \frac{C Z_p^2}{1 + \omega_R^2 C^2 Z_p^2} \end{cases} \quad (\text{XIII.38})$$

Ricordiamo ancora una volta che se $Q_0 = \frac{1}{R_L} \sqrt{\frac{L}{C}}$ è minore di 1 non si riesce a trovare la condizione di risonanza; se Q_0 è maggiore di 1, la condizione di risonanza viceversa è ottenibile, ma la valutazione di L - diversamente dal caso del risonante serie - *dipende* anche dalla valutazione di Z_p . Di conseguenza si ha un aumento nella indeterminazione di L rispetto al risonante serie. La determinazione di L dipende da Z_p in quanto la pulsazione di risonanza non coincide con $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; nei casi in cui $Q_0 \gg 1$, tendendo ω_R a ω_0 , allora $L \approx \frac{1}{\omega_0^2 C}$ e l'induttanza torna di fatto a dipendere solo dalla capacità C e da ω_0 .

A differenza del circuito risonante serie, in quello parallelo non si notano gli effetti di non linearità dei componenti, perché questa volta, in risonanza, la caduta su Z_p contiene il contributo da entrambe le parti *regolare* e *irregolare* della induttanza e in genere la prima domina largamente sulla seconda. Se si vuole anche in questo caso tracciare la curva di risonanza ($|Z|$ in funzione di ω) è opportuno, come già detto, fare $R_0 \gg Z_p$ e questo ora può richiedere l'uso di resistenze R_0 in assoluto assai elevate, visto che Z_p alla risonanza è massima; ciò può comportare dei problemi aggiuntivi, che vedremo nel prossimo paragrafo, con riferimento agli errori di taratura, di sensibilità e di schematizzazione.

6.— Errori nella misura di L e C con un circuito risonante

La parte di errori di taratura dei campioni di capacità e resistenze e degli strumenti quali il frequenzimetro è banale da trattare; in genere i contributi di errore associati a queste voci sono tali che danno un contributo dell'ordine del per mille alla indeterminazione di L (soprattutto nel circuito risonante serie). Dove entra in gioco la valutazione di Z_p o di R_L bisogna tenere in conto anche la precisione di taratura dell'oscillografo e l'indeterminazione della lettura delle ampiezze sullo schermo: infatti la valutazione dell'impedenza Z_p si basa sulla misura del rapporto delle tensioni $\frac{V_y}{V_x}$ o meglio delle ampiezze V_{0y} e V_{0x} . L'errore di lettura, con qualche particolare accorgimento, per esempio facendo coincidere la traccia luminosa con le divisioni incise sullo schermo, si può ridurre fino all'ordine del percento o anche leggermente meno. Resta l'errore di taratura della scala; quest'ultimo può essere ridotto rispetto alla precisione garantita dal costruttore tramite una taratura preventiva dei due canali X e Y. Quanto alla rivelazione delle condizioni di risonanza, tralasciando

per il momento un effetto sistematico su cui torneremo nel seguito, un limite proviene dall'incertezza con cui determiniamo la frequenza per la quale i due archi di ellisse degenerano in segmenti di retta sovrapposti. Tanto più è elevato il Q_0 del circuito, tanto minore sarà questa incertezza in termini di $\Delta\omega$, se ammettiamo di ricercare le condizioni di risonanza variando la frequenza del generatore: infatti abbiamo visto che una variazione relativa $\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$ dell'ordine di $\frac{1}{2Q_0}$ corrisponde a uno sfasamento di circa 45° fra i segnali (cioè a una ellisse decisamente aperta). Pertanto l'indeterminazione nella pulsazione di risonanza, essendo una piccola frazione di questa variazione, sarà tanto minore quanto più grande è Q_0 . Questa indeterminazione nella percezione della condizione di risonanza, che è dovuta alla sensibilità del metodo, si ripercuote con un errore da aggiungere all'errore di taratura del condensatore, qualora si lavori a frequenza fissa e si vari il condensatore per ottenere la condizione di risonanza.

Veniamo ora agli errori associati alle schematizzazioni fatte e che in molti casi possono essere maggiori di tutti gli altri. Intanto l'oscillografo con i suoi ingressi introduce fra i punti X e massa e Y e massa una impedenza che non è sempre legittimo trascurare; sappiamo che un oscillografo possiede $1 M\Omega$ di resistenza verso massa con in parallelo qualche decina di pF . Mentre il contributo di questa impedenza fra X e massa è irrilevante, quella fra Y e massa può alterare il nostro circuito in maniera sostanziale: ad esempio in un risonante parallelo la capacità di ingresso dell'oscillografo va in parallelo a quella da noi esplicitamente montata, cosicché i due valori vanno sommati quando siano confrontabili. Poiché in genere la capacità di ingresso non è perfettamente nota, è sconsigliabile porsi in condizioni di misura in cui la sua influenza vada considerata; tali condizioni sono oltretutto sconsigliate perché ciò significa lavorare a frequenze elevate: infatti, fissata L (per esempio dell'ordine del mH), capacità sotto il nF comportano frequenze di risonanza dell'ordine di $10^5 Hz$, alle quali non è più possibile continuare a lavorare con i cavetti non schermati, senza introdurre severe non-riproducibilità delle misure (vedi Cap.XII,§4).

Un altro problema che si può incontrare riguarda proprio la schematizzazione che si fa del componente sotto misura, cioè l'induttore. A suo tempo (Cap.IX, §5) abbiamo visto che all'aumentare della frequenza la capacità distribuita C_d (in parallelo alla induttanza) contribuisce in maniera crescente all'impedenza della bobina: di fatto se si prende una bobina e la si eccita a frequenze sempre più elevate si trova la condizione di risonanza del circuito risonante parallelo costituito dalla induttanza L e dalla capacità C_d e questo è proprio il metodo che si impiega per misurare le capacità distribuite degli induttori. Spesso questa capacità parassita può dare contributi assai più importanti delle capacità dell'oscillografo (valori tipici per bobine di qualche decina di mH : $0.1 - 0.3nF$).

Torniamo ora su un punto sul quale è stato un po' sorvolato: quando si inviano due segnali all'oscillografo, uno sull'asse X l'altro sull'asse Y, abbiamo supposto che questi vengano applicati alle placchette deflettrici senza subire alcuno sfasamento, oppure che subiscano uno sfasamento identico: solo in queste ipotesi la nostra ellisse riproduce fedelmente la relazione di fase fra i due segnali in ingresso. Purtroppo questo non è il caso che si presenta in realtà, come è facile verificare, mandando uno stesso segnale sinusoidale contemporaneamente sui due assi: sullo schermo si ottiene una ellisse, magari schiacciata, ma chiaramente non un segmento di retta, almeno non su tutta la gamma di frequenze di interesse. Di fatto il costruttore garantisce che su una certa banda di frequenze (in genere abbastanza più limitata della banda passante dello strumento) lo sfasamento *spurio* introdotto dall'oscillografo è minore di pochi (2-3) gradi. Uno sfasamento di 3° fra i due segnali dà luogo a una ellisse del tipo riportato in Fig.12: Un controllo preventivo della presenza dell'effetto è possibile, ma applicare poi la relativa correzione durante la determinazione della risonanza è relativamente scomodo. Questo errore oltretutto è quasi sempre dominante rispetto a quello della sensibilità, come ci si può facilmente rendere conto in base alla Fig.12, almeno nei casi in cui Q_0 è sufficientemente

elevato. Qualora si vogliono compiere misure di maggiore precisione, che quindi non dipendano dallo sfasamento fra i due canali, conviene procedere in maniera diversa.

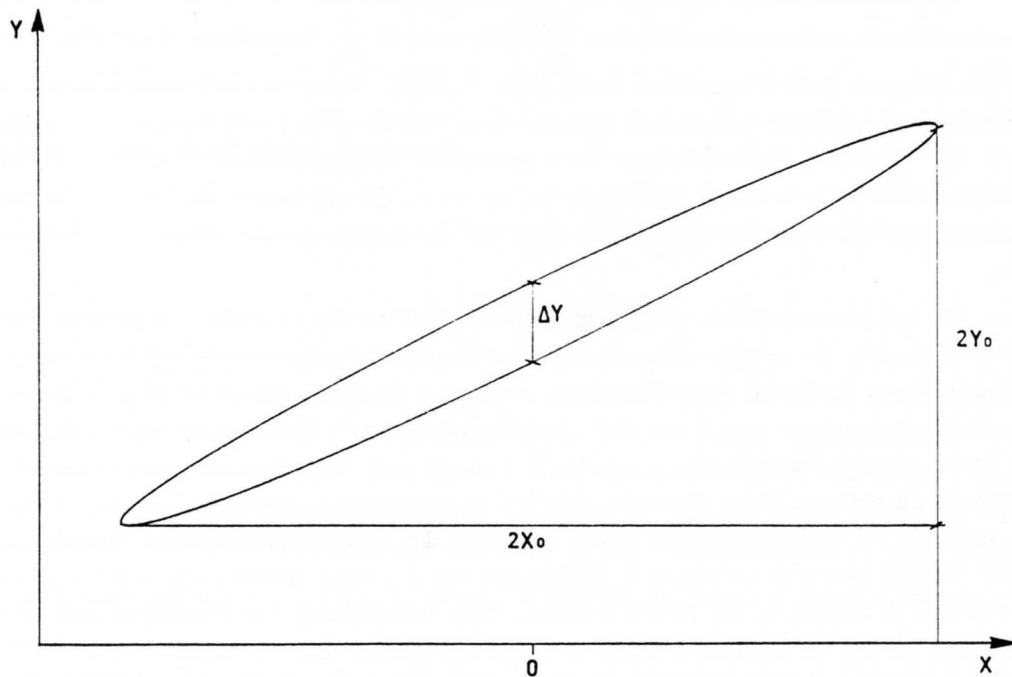


Fig.XIII.12

Un metodo possibile è mostrato nella Fig.13 ed esso ha anche il vantaggio di dare una valutazione diretta del valore dell'impedenza in risonanza:

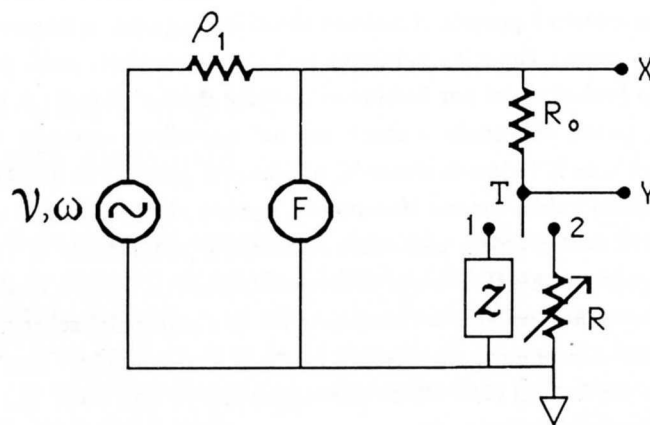


Fig.XIII.13

R è una resistenza campione a decadi che alle frequenze di interesse mantenga i valori nominali di resistenza dichiarati e non introduca nell'impedenza significative componenti immaginarie. T è un deviatore che può essere commutato fra le due posizioni 1 e 2. Una volta trovata, almeno approssimativamente, la condizione di risonanza con il tasto in posizione 1 usando l'oscillografo in

X-Y, si passa quindi a esaminare il solito segnale sull'ingresso Y ma usando la base dei tempi interna e come trigger esterno il segnale precedentemente inviato sul canale X. Se R è impostata su un valore identico a quello dell'impedenza del circuito in condizioni di risonanza e se il generatore oscilla effettivamente alla frequenza di risonanza, la commutazione del tasto fra 1 e 2 non altera il segnale sull'asse Y né come ampiezza, né come fase. In pratica, per trovare questa condizione, si può prima ottimizzare la condizione di risonanza, variando o la frequenza o il condensatore variabile, commutando T fra le due posizioni e verificando che in entrambe il segnale mantenga la medesima fase (in pratica il passaggio di zero del segnale non trasli lungo l'asse x) e poi variare R fino a ottenere uguali ampiezze. Questo metodo di misura, basandosi sulla rivelazione di *uguaglianza* di due segnali inviati sullo stesso canale è esente da tutti i problemi sopra esposti circa lo sfasamento fra i canali X e Y e la calibrazione degli amplificatori di ingresso dell'oscillografo. Occorre ovviamente mettere un po' di cura nella determinazione della stabilità del passaggio di zero e della costanza delle ampiezze rispetto alla commutazione del tasto T, poiché l'indeterminazione sui valori della frequenza e dell'impedenza dipende dalla incertezza con cui si dichiarano stabili i passaggi di zero e uguali le ampiezze dei due segnali. La precisione del frequenzimetro e della resistenza campione R danno contributi all'errore complessivo in genere trascurabili.

Il miglioramento della qualità della misura rispetto all'altra procedura è decisivo e tale da ridurre di quasi un ordine di grandezza la precisione dei risultati.

7.— *Un circuito oscillante eccitato con un gradino di tensione*

Studiamo ora brevemente il transitorio della corrente nel circuito risonante (consideriamo il risonante serie per semplicità); poiché sul sistema si possono, come ora vedremo, innescare oscillazioni di carica e quindi di corrente, il circuito viene anche chiamato *circuito oscillante*. Consideriamo quindi il circuito RLC serie disegnato in Fig.14. Supponiamo che il tasto T sia aperto con il condensatore inizialmente scarico. All'istante $t = 0$ chiudiamo il tasto T: per $t > 0$ l'equazione che regola l'andamento della carica sul condensatore in funzione del tempo sarà:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V \quad (\text{XIII.39})$$

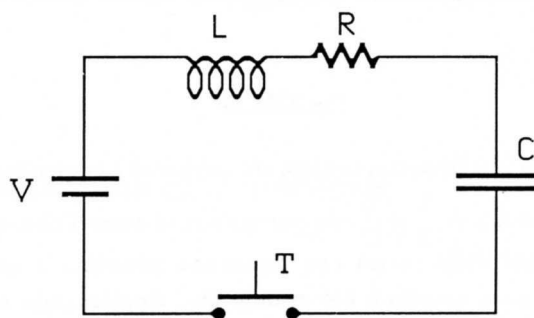


Fig.XIII.14

Non c'è bisogno di grandi calcoli per ricavare la soluzione, poiché l'equazione è identica, a parte il significato dei simboli, a quella trovata per il galvanometro (Cap. II) con condizioni iniziali $\varphi(0) = 0$ e $\dot{\varphi}(0) = 0$, corrispondenti alle nostre $q(0) = 0$ e $i(0) = 0$. Abbiamo così le soluzioni:

$$a) Q_0^2 = \frac{L}{R^2 C} < \frac{1}{4}$$

$$q(t) = CV \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{Rt}{2L}\right) \cdot \left[\frac{1+\Gamma}{2\Gamma} \exp\left(\frac{R}{2L}\Gamma t\right) + \frac{\Gamma-1}{2\Gamma} \exp\left(-\frac{R}{2L}\Gamma t\right) \right] \right\} \quad (\text{XIII.40, a})$$

$$b) Q_0^2 = \frac{L}{R^2 C} = \frac{1}{4}$$

$$q(t) = CV \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{R}{2L}t\right) \cdot \left[1 + t \frac{R}{2L} \right] \right\} \quad (\text{XIII.40, b})$$

$$c) Q_0^2 = \frac{L}{R^2 C} > \frac{1}{4}$$

$$q(t) = CV \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{R}{2L}t\right) \cdot \left[\cos\left(\frac{R}{2L}\Gamma t\right) + \frac{1}{\Gamma} \text{sen}\left(\frac{R}{2L}\Gamma t\right) \right] \right\} \quad (\text{XIII.40, c})$$

$$\text{con } \Gamma = \sqrt{\left| 1 - \frac{4L}{R^2 C} \right|}.$$

Le tre soluzioni sono riportate nel grafico di Fig. 15.

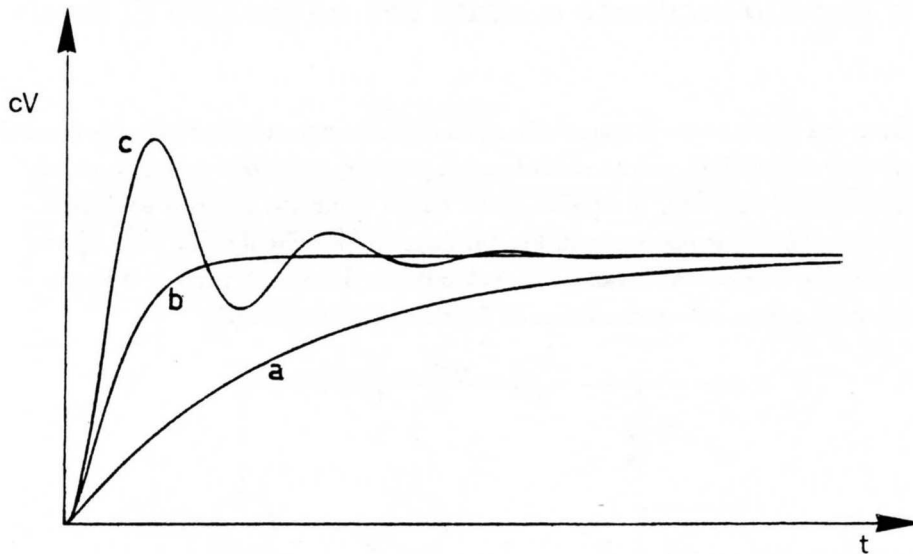


Fig. XIII.15

Si noti che il tipo di moto (oscillatorio, critico, sottocritico) è controllato dal valore di R tramite il fattore di merito del circuito $Q_0 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$. In particolare si osservi che, qualora $Q_0 > \frac{1}{2}$, la brusca transizione innesca oscillazioni della carica con frequenza prossima a quella propria del sistema $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, tanto più vicina a ω_0 quanto è più grande Q_0 . Aggiustando opportunamente il trigger di un oscillografo e collegando all'ingresso Y la ddp ai capi del condensatore, sarà possibile osservare l'andamento della differenza di potenziale $\frac{q(t)}{C}$ in funzione del tempo e verificare gli andamenti ora descritti.

Un metodo particolarmente comodo per osservare il fenomeno è quello di adoperare, anziché un generatore di fem continua e un tasto, un generatore di forma d'onda rettangolare con una durata molto maggiore del tempo che il circuito oscillante impiega per "recuperare" il valore asintotico. Avremo così gli andamenti ripetitivi (e quindi molto più facilmente osservabili all'oscillografo) riportati nella Fig.16

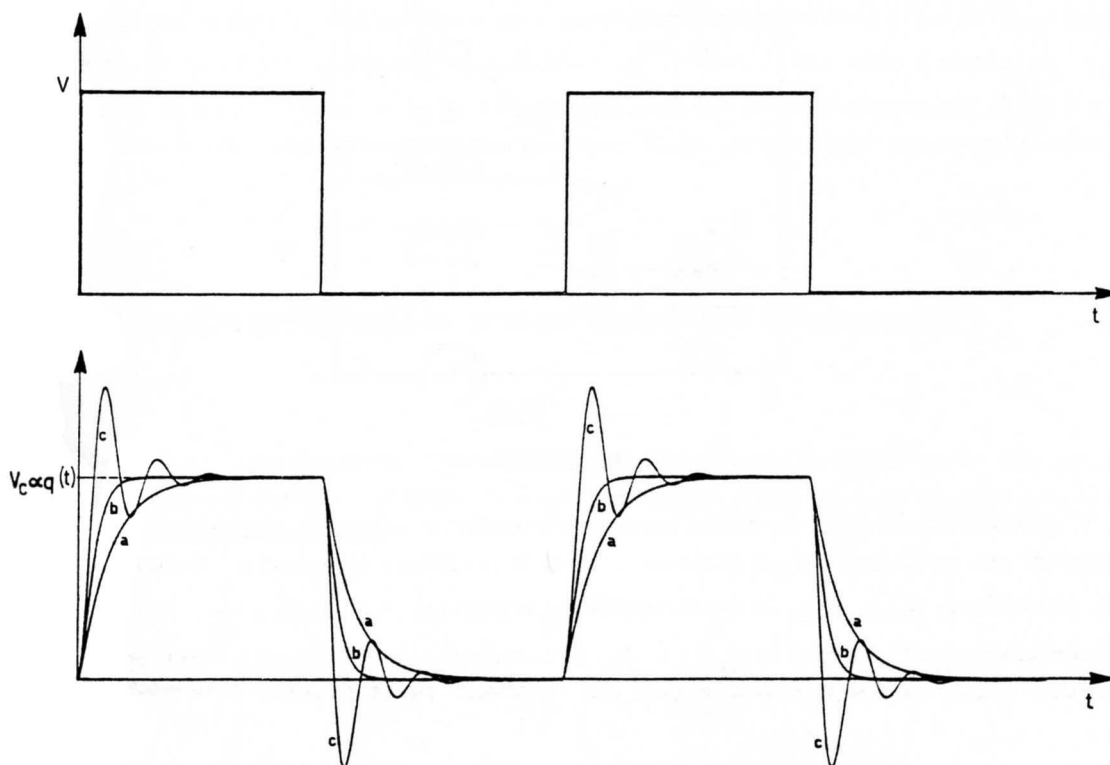


Fig.XIII.16

8.— *Misuratore vettoriale di impedenza*

Consideriamo il circuito di Fig.17: esso rappresenta un ponte con un ramo a rapporto di resistenze (R_1 , R_2); in serie al ramo di rivelazione è aggiunta una ddp provocata dall'accoppiamento mutuo di due bobine L_s e L_p , la seconda delle quali costituisce con C_p un circuito risonante serie.

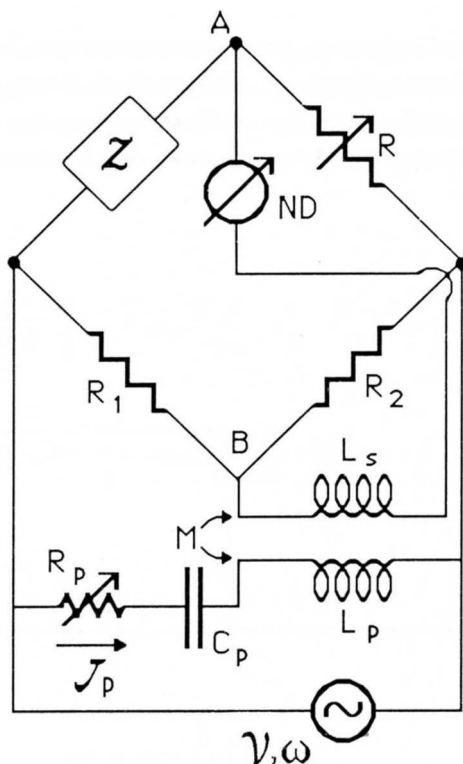


Fig.XIII.17

L'azzeramento del ponte si effettua nel seguente modo: innanzitutto, alla pulsazione di lavoro ω , si aggiusta preventivamente C_p in modo da ottenere la condizione di risonanza sul circuito risonante serie costituito da R_p, L_p e C_p . In queste condizioni la corrente J_p è uguale a $\frac{\mathcal{V}}{R_p}$. Quindi si procede all'azzeramento del ponte agendo su R e su R_p . Supponiamo di aver raggiunto l'equilibrio. In queste condizioni, la ddp nulla ai capi del rivelatore di zero potrà esprimersi come:

$$0 = \mathcal{V} \left(\frac{R}{R + |\mathcal{Z}| \exp j\phi} - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) + j\omega M \frac{\mathcal{V}}{R_p} \quad (\text{XIII.41})$$

dove ϕ rappresenta la fase di \mathcal{Z} . Supponiamo che $R_1 = R_2$ con una indeterminazione molto minore rispetto alle altre. La (41) dà pertanto luogo alla:

$$\frac{R(R + |\mathcal{Z}| \cos \phi - j|\mathcal{Z}| \sin \phi)}{(R + |\mathcal{Z}| \cos \phi)^2 + |\mathcal{Z}|^2 \sin^2 \phi} - \frac{1}{2} + j\omega \frac{M}{R_p} = 0 \quad (\text{XIII.42})$$

Otteniamo così il sistema:

$$\begin{cases} \frac{R^2 + R|\mathcal{Z}| \cos \phi}{R^2 + |\mathcal{Z}|^2 + 2R|\mathcal{Z}| \cos \phi} = \frac{1}{2} \\ \frac{|\mathcal{Z}|R \sin \phi}{R^2 + |\mathcal{Z}|^2 + 2R|\mathcal{Z}| \cos \phi} = \frac{\omega M}{R_p} \end{cases} \quad (\text{XIII.43})$$

Dalla prima delle (43) si ottiene direttamente:

$$|\mathcal{Z}| = R \quad (\text{XIII.44})$$

che sostituita nella seconda dà:

$$\frac{\sin \phi}{2(1 + \cos \phi)} = \frac{\omega M}{R_p} \quad (\text{XIII.45})$$

Ricordando che:

$$\frac{\sin \phi}{1 + \cos \phi} = \tan \frac{\phi}{2} \quad (\text{XIII.46})$$

si ottiene:

$$\tan \frac{\phi}{2} = \frac{2\omega M}{R_p} \quad (\text{XIII.47})$$

All'equilibrio, in base ai valori di R , R_p , ω e M , si determina pertanto ampiezza e fase dell'impedenza. Se non si ottiene l'azzeramento in una certa configurazione di L_p e L_s , significa che la fase è di segno sbagliato per cui occorre invertire una delle due bobine L_p o L_s . Il circuito è detto *misuratore vettoriale di impedenza*, in quanto consente di misurare, quasi direttamente, modulo e fase dell'impedenza; se il rapporto $\frac{R_1}{R_2}$ non è noto con precisione sufficientemente buona da considerarsi esatto, occorrerà svolgere i conti in funzione di R_1 e R_2 (o del loro rapporto) e ricercare le espressioni di $|Z|$ e ϕ in funzione di tutte le grandezze determinate con precisione finita, per propagare poi correttamente gli errori.

9.— Misure di coefficienti di mutua induzione in alternata

Nel Cap.VII abbiamo imparato a misurare il coefficiente di mutua induzione fra due circuiti eccitando il sistema con impulsi di corrente. Ora mostriamo come si può misurare la stessa grandezza nel regime sinusoidale delle correnti.

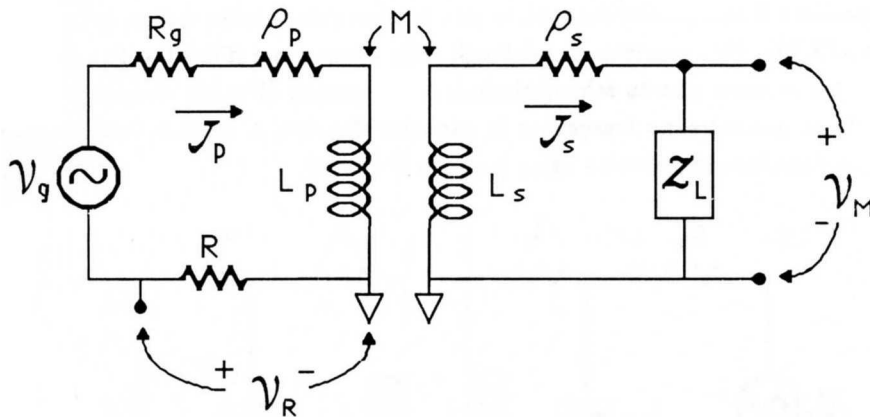


Fig.XIII.18

Nel circuito disegnato in Fig.18 le ddp V_M e V_R possono essere misurate con un oscillografo e se l'impedenza di ingresso dell'amplificatore verticale dell'oscillografo Z_L è molto maggiore di $|\rho_s + j\omega L_s|$ e di R , allora possiamo scrivere con buona approssimazione:

$$V_M = J_s Z_L = -j\omega M J_p \quad (\text{XIII.48})$$

Inoltre

$$J_p = \frac{V_R}{R} \quad (\text{XIII.49})$$

e quindi

$$\mathcal{V}_M = -j\omega \frac{M}{R} \mathcal{V}_R \quad (\text{XIII.50})$$

Misurate le ampiezze di \mathcal{V}_M e \mathcal{V}_R , note R e ω , M è presto determinato come

$$|M| = \frac{V_{M0}}{V_{R0}} \frac{R}{\omega} \quad (\text{XIII.51})$$

dove V_{M0} e V_{R0} rappresentano le ampiezze delle ddp misurate. La formula (50) che lega \mathcal{V}_M e \mathcal{V}_R si presta a essere verificata anche per quanto riguarda la fase: se ad esempio \mathcal{V}_M e \mathcal{V}_R sono inviati su due canali distinti di uno stesso oscillografo a doppia traccia, usando uno dei due segnali come trigger (o triggerando con \mathcal{V}_g) si dovrà verificare che i due segnali sono sfasati di $\frac{\pi}{2}$. In linea di principio questo sistema si presta a misurare M a varie frequenze, sempre che \mathcal{V}_g sia un generatore a frequenza variabile.

Guardiamo ora un po' più da vicino le approssimazioni fatte: intanto abbiamo assunto che tutta la caduta sul secondario fosse data da $j\omega M \mathcal{J}_p$, trascurando la parte di autoinduttanza e resistiva $(j\omega L_s + \rho_s) \mathcal{J}_s$; se i valori di ρ_s , e ωL_s sono tali da non poter essere trascurati rispetto a \mathcal{Z}_L (tipicamente $1 M\Omega$ in parallelo a circa $20 pF$) occorre scrivere:

$$0 = \mathcal{J}_s(\rho_s + j\omega L_s + \mathcal{Z}_L) + j\omega M \mathcal{J}_p \quad (\text{XIII.52})$$

Pertanto ($\mathcal{V}_M = \mathcal{J}_s \mathcal{Z}_L$):

$$\mathcal{V}_M = -j\omega M \mathcal{J}_p \frac{\mathcal{Z}_L}{\rho_s + j\omega L_s + \mathcal{Z}_L} \approx -j\omega M \mathcal{J}_p \left(1 - \frac{\rho_s + j\omega L_s}{\mathcal{Z}_L}\right) \quad (\text{XIII.53})$$

e in questo modo è almeno possibile dare una valutazione della correzione da apportare a \mathcal{V}_M per risalire a M tramite la (50).

Se poi in parallelo a \mathcal{Z}_L si pone una resistenza r_L nota, questa volta piccola rispetto a \mathcal{Z}_L , possiamo studiare il comportamento del nostro trasformatore sotto carico, magari a varie frequenze (si veda Cap. IX, §6). Non entriamo nei dettagli della misura, ma ci limitiamo a dire che all'aumentare della frequenza si trova che la schematizzazione adoperata (Fig. 18) diventa via via sempre meno soddisfacente in quanto sono trascurate le capacità distribuite degli avvolgimenti; un circuito che molto meglio rappresenta la realtà fisica è quello di Fig. 19.

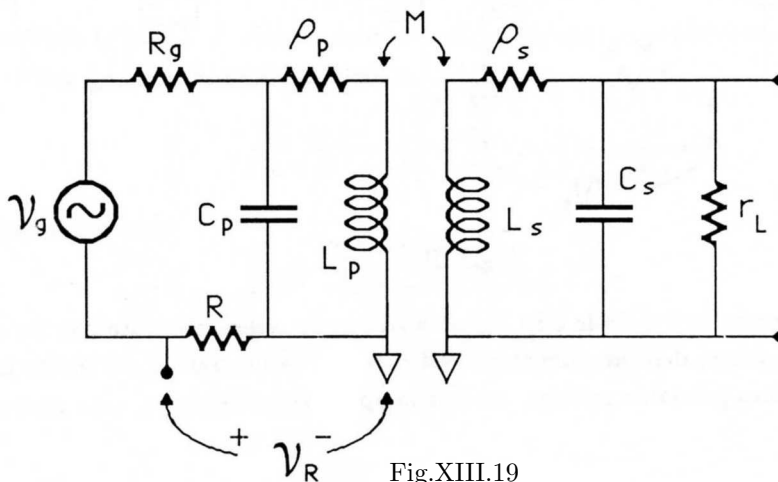


Fig. XIII.19

Consideriamo il primario: i valori di C_p sono sufficientemente bassi che per frequenze non elevate (per esempio in un trasformatore di rete, a $50 Hz$) il condensatore può essere tranquillamente

trascurato. All'aumentare però di ω ci si avvicina sempre di più alla condizione in cui il primario si comporta come un circuito risonante parallelo: l'impedenza a esso associata aumenta e conseguentemente diminuisce la potenza erogata dal generatore. Una analisi dettagliata del fenomeno sarebbe un po' complicata ed è omessa; tuttavia, qualitativamente, quando si supera la pulsazione di risonanza ω_p del primario (per un trasformatore da 50 Hz: $\omega_p \approx 10^4 - 10^5 \text{ rad/s}$), l'impedenza del primario è dominata dalla capacità; solo una piccola frazione della corrente erogata dal generatore percorre la bobina e poiché è solo questa quella che contribuisce alla ddp sul secondario tramite l'accoppiamento induttivo, l'efficienza del trasformatore risulta severamente compromessa.

NOTA BIBLIOGRAFICA

I primi due paragrafi del Cap.3 di **TE 57** trattano l'argomento dei circuiti risonanti serie e parallelo, con riferimento anche alla curva universale di risonanza.

Per i problemi generali della risonanza meccanica ed elettrica, una stimolante trattazione si può trovare su **FE 63** (Vol.I, Cap.23).

I MULTIMETRI ELETTRONICI

1.— *Strumenti elettronici e presentazione digitale*

La *strumentazione* (voltmetri, amperometri, ohmetri) *elettronica* presenta generalmente caratteristiche superiori rispetto alla strumentazione basata su galvanometri sia dal punto di vista della precisione raggiungibile, che della sensibilità. A causa delle elevate precisioni raggiungibili occorre adeguare le caratteristiche del sistema di lettura per evitare che l'errore associato a una *presentazione analogica* (ad ago) comprometta la precisione intrinseca della misura; è questo il motivo principale per cui la strumentazione elettronica in genere è accompagnata a una *presentazione digitale* o *numerica* del risultato della misura effettuata, oltre che per la maggior robustezza e durata di questa sistema di presentazione (in inglese: *display*) rispetto a un movimento ad ago. Le cifre del display saranno in numero adeguato alla precisione dello strumento, nel senso che tanto più lo strumento è accurato, tanto maggiore sarà il numero delle cifre, proprio come la scala di uno strumento analogico di Classe 0.2 deve essere assai più grande e finemente divisa rispetto a quella di uno strumento di Classe 1.

Il fatto che la presentazione del risultato sia digitale, non vuol dire che essa non soffra di un errore a essa intrinsecamente associato, simile a quello di lettura negli strumenti ad ago: questo errore è il cosiddetto *errore di quantizzazione* e dipende dal fatto che la cifra meno significativa presentata è necessariamente approssimata o per difetto o per eccesso. Pertanto un errore almeno pari a ± 0.5 sulla cifra meno significativa va sempre considerato. Questo errore è il corrispondente dell'errore di lettura, solo che in questo caso esso non dipende dall'operatore, ma dal tipo di presentazione digitale effettuata dallo strumento. Su questo torneremo quando parleremo degli errori di misura.

Spesso quando si parla di strumentazione digitale si dice: “un voltmetro da 4 cifre e mezzo”, o locuzioni simili. Queste espressioni, per la verità gergali, si riferiscono al tipo di presentazione numerica: nel caso di “4 cifre e mezzo” significa che il display può presentare numeri compresi fra +19999 e -19999 nelle opportune unità, cioè al massimo cinque cifre significative con la cifra più significativa sempre minore di 2. In uno strumento progettato razionalmente, il numero di cifre del display è adeguato alla precisione di base dello strumento, ad esempio uno strumento da $4\frac{1}{2}$ cifre avrà presumibilmente una precisione intrinseca decisamente migliore del per mille e uno strumento di $3\frac{1}{2}$ cifre avrà una precisione nettamente superiore al percento.

Esistono nuove generazioni di strumenti digitali che stanno imponendo un nuovo standard di presentazione secondo il quale “4 cifre e mezzo” significa 29999 anziché 19999.

I prossimi paragrafi saranno dedicati ai multimetri o strumenti universali elettronici; essi hanno -per quanto detto sopra- sempre una presentazione digitale e quindi nel seguito li indicheremo indifferentemente con il termine “multimetri elettronici” o “multimetri digitali”.

2.— Schema a blocchi di un multimetro digitale

Così come un multimetro analogico del tipo descritto nel §9 del Cap.III riconduce tutte le misure (tensione, corrente, resistenza) a misure di corrente effettuate dal galvanometro interno, un multimetro elettronico fa sì che la misura di correnti e resistenze (e ovviamente di tensioni) sia comunque ricondotta alla misura di una differenza di potenziale; il cuore del multimetro è quindi un *voltmetro*. Non si tratta ovviamente di un voltmetro convenzionale, di quelli cioè incontrati fino a ora, ma piuttosto di uno strumento che, per quanto riguarda i terminali di ingresso, è praticamente un voltmetro ideale (resistenza di ingresso $> 10^{10} \div 10^{11} \Omega$) e per quanto riguarda l'uscita dà direttamente un codice numerico che rappresenta in un'opportuna base (generalmente *binaria*, ovvero *base 2*), il valore della differenza di potenziale all'ingresso (Fig.1). Esso è cioè quello che si chiama un *Convertitore Analogico Digitale* (CAD o ADC), in quanto converte la ddp in ingresso in un numero (*digit*).

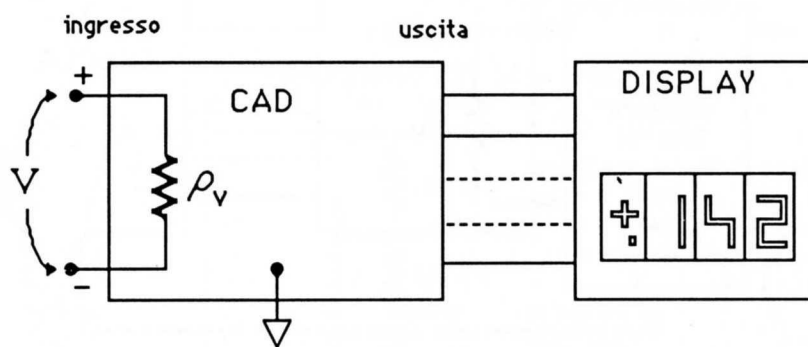


Fig.XIV.1

Abbiamo detto che l'uscita è un *codice numerico*. In realtà l'uscita è costituita da un numero N di terminali a ognuno dei quali è associato un *bit* (supponiamo il codice binario) che simbolicamente assume valore 0 o 1 a seconda che la ddp di quel terminale rispetto a un terminale di riferimento () sia minore o maggiore di due livelli prefissati. Per essere ancora più espliciti, in una vasta gamma di convertitori la convenzione è la seguente (logica TTL): se la ddp è maggiore di $2 V$, il corrispondente bit è considerato 1, se la ddp è minore di $0.8 V$, il bit vale 0. Ad esempio se il convertitore è a 12 bit potrà presentare in uscita qualunque numero binario compreso fra 0 e 111111111111 ($4095 = 2^{12} - 1$), trascurando il problema del segno. Per far questo necessiterà di 12 terminali di uscita, uno per ogni bit: il numero 0 è rappresentato dalla configurazione in cui tutti i bit sono 0, cioè ognuno dei 12 terminali è a tensione minore di $0.8 V$, il numero 4095 corrisponderà invece ad avere tutti e 12 i terminali a tensione maggiore di $2 V$; i terminali di uscita sono collegati elettricamente agli ingressi della *unità di display* vera e propria, la quale è a sua volta uno strumento elettronico che converte i numeri binari in ingresso in un altro codice interno, che alla fine dà luogo all'intensificazione delle cifre del visore corrispondenti alla rappresentazione decimale del numero binario in ingresso. Sui principi di funzionamento del display non entreremo minimamente, così come non esamineremo neppure il problema del tipo di presentazione (a LED, a cristalli liquidi, a cifre fluorescenti...); viceversa esamineremo assai più da vicino qualche caso di convertitore analogico digitale, ma lo faremo più avanti (Cap.XVI) dopo aver studiato il principio di funzionamento degli amplificatori operazionali (Cap.XV).

Ritornando al CAD abbiamo detto che esso è in pratica un voltmetro ideale in quanto la sua resistenza di ingresso è estremamente elevata; inoltre il CAD misura in valore e segno la ddp fra l'ingresso "+" e l'ingresso "-", ovvero la ddp è considerata positiva se $V_+ - V_- > 0$. La ddp, per un corretto funzionamento del CAD, deve essere compresa fra due valori ben definiti, generalmente $\pm 200 \text{ mV}$. Il CAD è tarato su questa ddp di fondo scala, nel senso che il suo codice numerico di uscita, supposto il sistema esente da errori, rappresenterà in *binario* il numero 1999 quando la ddp è uguale a 199.9 mV (il numero dei nove dipende dal numero dei bit del convertitore e del display associato).

Tutta la circuiteria compresa fra i terminali di ingresso del multimetro e il CAD vero e proprio ha quindi la funzione di trasformare le cadute sulle resistenze, le correnti in ingresso e le differenze di potenziale in una ddp all'ingresso del convertitore compresa fra -200 mV e $+200 \text{ mV}$. La funzione complessiva svolta da questa parte dello strumento è detta di *Condizionatore di segnale* (in inglese: *Signal Conditioner*). Lo schema a blocchi di un multimetro elettronico tipico è riportato nella Fig.2:

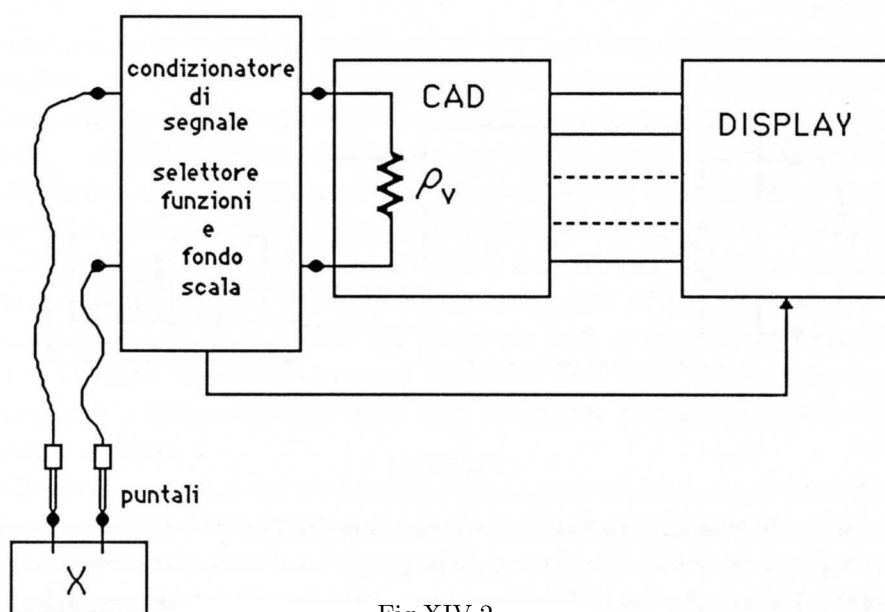


Fig.XIV.2

Il Condizionatore di segnale contiene la selezione della funzione e del fondo scala: cioè deve ricevere dall'utente l'informazione sulla grandezza che egli vuole misurare (V , A , Ω) e sul valore da assegnare al fondo scala; nella figura il collegamento fra il condizionatore di segnale e il display rappresenta simbolicamente il fatto che la selezione della funzione e del fondo scala attiva nel display la corretta posizione del punto decimale ed eventualmente, in alcuni modelli, anche la comparsa della unità della grandezza che si misura.

Andiamo a descrivere un tipico esempio di Condizionatore di segnale, tenendo comunque presente che in alcuni modelli di multimetri sono adottate soluzioni diverse da quelle qui presentate.

3.— *Il condizionatore di segnale*

Lo strumento possiede tre morsetti di ingresso (Fig.3), uno essendo il cosiddetto *comune* (*Com-*

mon) che viene impiegato in tutte le configurazioni; degli altri due uno è impiegato per le misure di ddp e di resistenze, mentre l'altro per le misure di corrente.

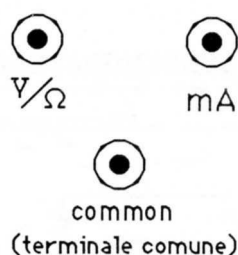


Fig.XIV.3

Consideriamo le misure di ddp (continue) (Fig.4): il *selettore della funzione* V DC (ddp continua), tramite un commutatore sul pannello frontale, collega all'ingresso del CAD l'uscita del partitore di tensione;

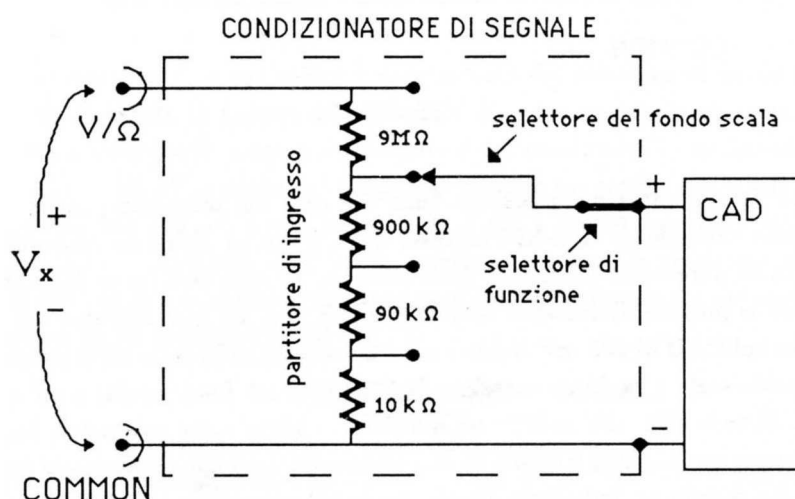


Fig.XIV.4

esso è costituito da una serie di resistenze del valore totale di $10\text{ M}\Omega$ e divise come in figura: il *selettore di fondo scala* inserisce l'ingresso del CAD all'opportuno contatto intermedio del partitore; in figura i rapporti di divisione sono 1, 1/10, 1/100, 1/1000 che corrispondono ai fondo scala di 200 mV , 2 V , 20 V , 200 V rispettivamente. Poiché l'ingresso del CAD presenta una resistenza superiore a $10^{10}\Omega$, i rapporti sono determinati unicamente dal partitore. Si vede così che, indipendentemente dal fondo scala selezionato per la tensione, la resistenza presentata verso il circuito di misura è sempre pari a $10\text{ M}\Omega$. Quindi nel caso di un multimetro elettronico perde di significato il concetto di Ω/V che è utile soltanto quando la misura di ddp è ricondotta ad una misura di corrente, come nel caso del voltmetro basato su un galvanometro.

Al giorno d'oggi i multimetri di più alta qualità sono realizzati in modo diverso da quello appena descritto e tali che per le portate (fondo scala) inferiori in valore assoluto a 2 V la resistenza di ingresso è quella del CAD, cioè $\approx 10^{11}\Omega$ e il partitore da $10\text{ M}\Omega$ in ingresso entra in funzione solo per fondo scala più elevati; ciò implica che il CAD deve poter accettare in ingresso differenze di

potenziale ampie, in valore assoluto, fino a 2 V.

La configurazione che si presenta quando si voglia misurare una corrente è quella riportata in Fig.5.

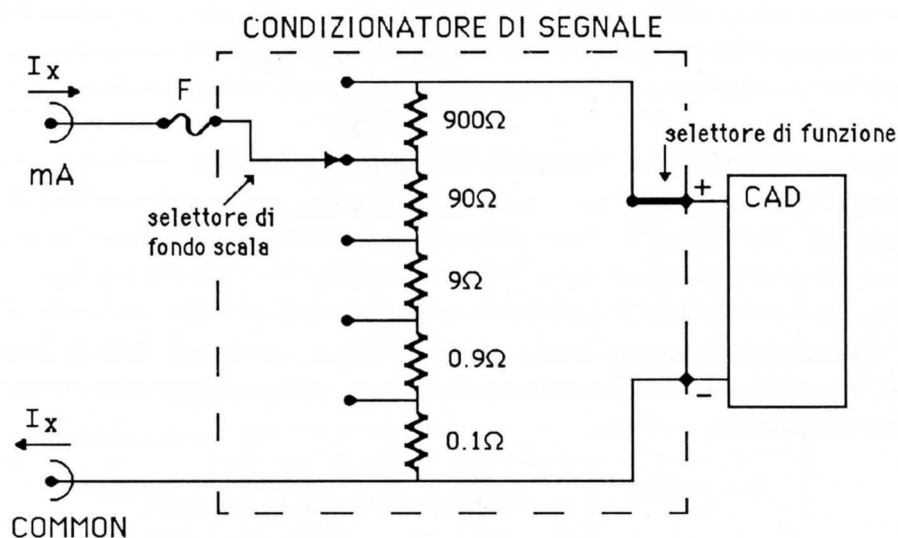


Fig.XIV.5

La corrente I_x che entra nel morsetto “mA” (e esce dal morsetto “Common”) provoca una caduta di tensione sullo shunt. Poiché l’ingresso del CAD è ad altissima resistenza, il convertitore misura la caduta di potenziale provocata dalla corrente I_x sulle resistenze dello shunt: procedendo dall’alto in basso le portate di corrente sono $200 \mu A$, $2 mA$, $20 mA$, $200 mA$ e $2 A$ corrispondenti tutte alla caduta sul CAD di $200 mV$ fondo scala. La resistenza in serie all’ingresso pertanto cambia a seconda del fondo scala e va da un massimo di $1 k\Omega$ ($200 \mu A$ fondo scala) a un minimo di 0.1Ω ($2 A$ fondo scala). Si vede così che, mentre un multimetro usato come voltmetro, ha una resistenza di ingresso molto superiore rispetto a quella di uno strumento analogico con uguale fondo scala e quindi approssima molto meglio un voltmetro ideale, un milliamperometro realizzato come ora descritto non è molto superiore a un galvanometro, cioè non ha resistenza interna particolarmente piccola. Questo tuttavia non è un limite intrinseco degli strumenti elettronici: infatti esistono (Cap.XV,§5) dei misuratori elettronici di corrente pressoché ideali, cioè con resistenza interna estremamente piccola; essi presentano però alcuni problemi aggiuntivi rispetto alla soluzione ora descritta che è quella quasi universalmente adottata nei multimetri portatili alimentati con batterie.

Dall’osservazione del circuito di Fig.5 potremmo ragionevolmente ritenere che la resistenza interna dello strumento impiegato come amperometro fosse perfettamente definita; in realtà la presenza del fusibile F complica un po’ questo aspetto. Il fusibile nient’altro è che un conduttore particolarmente sottile e dimensionato in modo tale che se la corrente in ingresso supera il valore di corrente per cui il fusibile è stato costruito, esso si scalda al punto di fondere e interrompe il circuito: questa sicurezza, fondamentale per proteggere il CAD, comporta che la resistenza in ingresso non è determinata solo dalle resistenze di shunt che sono di alta precisione, ma anche dalla resistenza del fusibile nonché dalla resistenza di contatto fra il circuito e il fusibile. Il costruttore pertanto non indica la resistenza interna complessiva fra i terminali, bensì dice quale è la massima ddp (*burden voltage*) che possiamo trovare ai capi dei morsetti “mA” e “Common”; tipicamente essa è inferiore a $300 mV$ per il valore di corrente di fondo scala. E’ chiaro che una informazione di questo tipo è spesso insufficiente;

in quei casi ove occorre conoscere con precisione la resistenza interna del multimetro usato come amperometro, occorrerà misurare la ddp ai suoi capi con un altro strumento.

Descriviamo ora come viene comunemente realizzata la misura di resistenze (Fig.6).

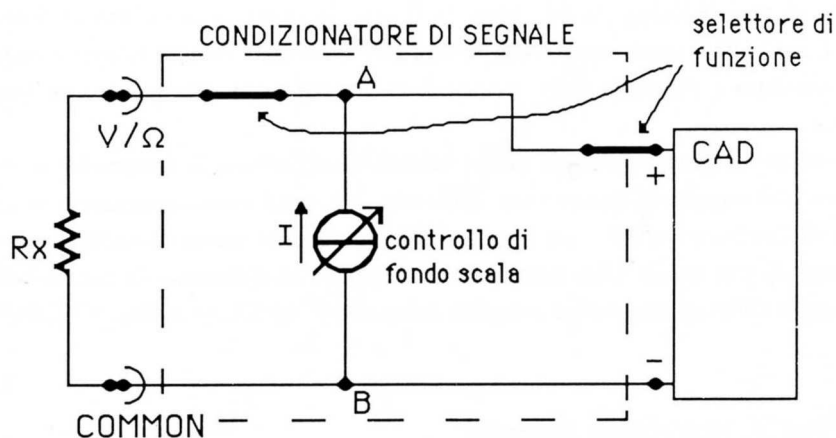


Fig.XIV.6

Un generatore di corrente I , il cui valore è determinato dal selettore di fondo scala, provoca sulla resistenza R_x da misurare la caduta di potenziale $R_x \cdot I$ e questa è misurata dal CAD. La selezione del fondo scala modifica il valore della corrente I del generatore, in modo tale da assicurare una ddp massima di 200 mV all'ingresso del CAD; ciò impone un grosso campo di variabilità per il generatore di corrente (da $100\ \mu\text{A}$ per il fondo scala $2\ \text{k}\Omega$ a $10\ \text{nA}$ per il fondo scala $20\ \text{M}\Omega$); ciò non è sempre fattibile, soprattutto se si vuole mantenere elevata la precisione nella misura di grosse resistenze. Il metodo ora descritto è pertanto applicato principalmente nei casi in cui il CAD accetta ddp in ingresso anche superiori a $200\ \text{mV}$.

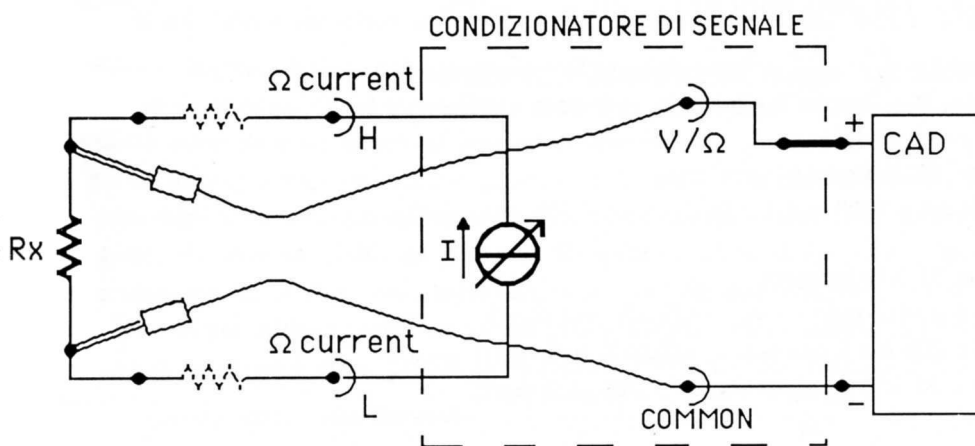


Fig.XIV.7

Vedremo più avanti (Cap.XV,§5) un altro sistema di misura di resistenze, anche più diffuso di quello ora descritto. Tornando a quest'ultimo, ma l'osservazione vale in generale, notiamo che in realtà la grandezza misurata non è la caduta di I sulla sola R_x , ma anche sulla resistenza dei collegamenti. Questo errore sistematico è particolarmente importante quando la resistenza da misurare è di piccolo valore. Per ovviare a questo problema alcuni multimetri prevedono la *misura a 4 terminali*:

lo schema con cui si realizza è simile a quello ora descritto, salvo una differenza sostanziale (Fig.7): il generatore di corrente questa volta utilizza due morsetti indipendenti (*morsetti di corrente*) per addurre la corrente sulla resistenza R_x e la ddp ai capi di R_x è misurata con altri due puntali (*puntali di tensione*) collegati direttamente al misuratore di ddp. Questa volta con i puntali di tensione si va a misurare la ddp proprio là dove interessa e la caduta aggiuntiva provocata dalla corrente I sui collegamenti viene completamente ignorata. Si noti la sostanziale identità di questo tipo di procedura e di quella della misura di resistenze di piccolo valore con terminali di corrente e di tensione. Un multimetro in genere prevede anche misure di differenza di potenziale e di correnti alternate. Rimandiamo al seguito la descrizione -che comunque sarà molto sommaria- di questi metodi di misura; qui ci limitiamo a dire che tramite una operazione detta di *raddrizzamento o rettificazione* le differenze di potenziale alternate sono trasformate in differenze di potenziale continue di valore proporzionale all'ampiezza e così vengono misurate (Cap.XV,§8 e Cap.XVII,§8).

4.— Precisione delle misure

La precisione di un multimetro elettronico digitale è sempre data dal costruttore come somma di due termini, uno *costante su tutta la scala* e uno proporzionale alla grandezza misurata, cioè un *errore relativo costante*. Quest'ultimo contributo è associato agli errori di taratura del divisore di tensione in ingresso, dello shunt di corrente o del generatore di corrente. Gli errori relativi su queste grandezze si ripercuotono inalterati sulle grandezze da misurare, tensione, corrente e resistenza. Il contributo costante di errore è comunemente espresso in unità dell'ultima cifra significativa: per esempio "2 *digit*" significa due unità della cifra meno significativa. Per un multimetro a $4\frac{1}{2}$ cifre di buona qualità (Fluke 8050A) gli errori, a seconda delle varie funzioni, valgono (per T compresa entro $\pm 10^\circ C$ attorno a $20^\circ C$):

Misure di differenza di potenziale continua:

da 200 mV a 1000 V fondo scala: $\pm(0.03\% + 2 \text{ digit})$

Misure di corrente continua:

da 200 μA a 2000 mA fondo scala: $\pm(0.3\% + 2 \text{ digit})$

Misure di resistenza:

200 Ω e 2 k Ω fondo scala: $\pm(0.1\% + 2 \text{ digit})$

20 k Ω e 200 k Ω fondo scala: $\pm(0.05\% + 2 \text{ digit})$

2 M Ω e 20 M Ω fondo scala: $\pm(0.25\% + 3 \text{ digit})$

All'errore assoluto costante contribuisce l'errore di quantizzazione del convertitore almeno con $\pm \frac{1}{2}$ digit; la restante parte ha origini diverse e fra queste hanno senz'altro rilevanza la *tensione di offset* dell'amplificatore di ingresso del CAD e il suo *rumore*; sul significato di questi due contributi torneremo quando si parlerà dei circuiti amplificatori operazionali (Cap.XV,§6); inoltre a questo errore contribuisce il CAD con il suo errore di *linearità* (dovuto cioè alla sua *non* perfetta linearità). Soffermiamoci proprio su quest'ultimo punto: supponendo che il CAD lavori con un sistema binario in uscita e che, per semplicità, sia a 4 bit, possiamo rappresentare la funzione espletata dal convertitore riportando in grafico l'uscita (un numero binario) in funzione dell'ampiezza (relativa al fondo scala)

della ddp in ingresso, ovvero la *curva di risposta del convertitore*. Il grafico (Fig.8) si riferisce a un caso di convertitore ideale.

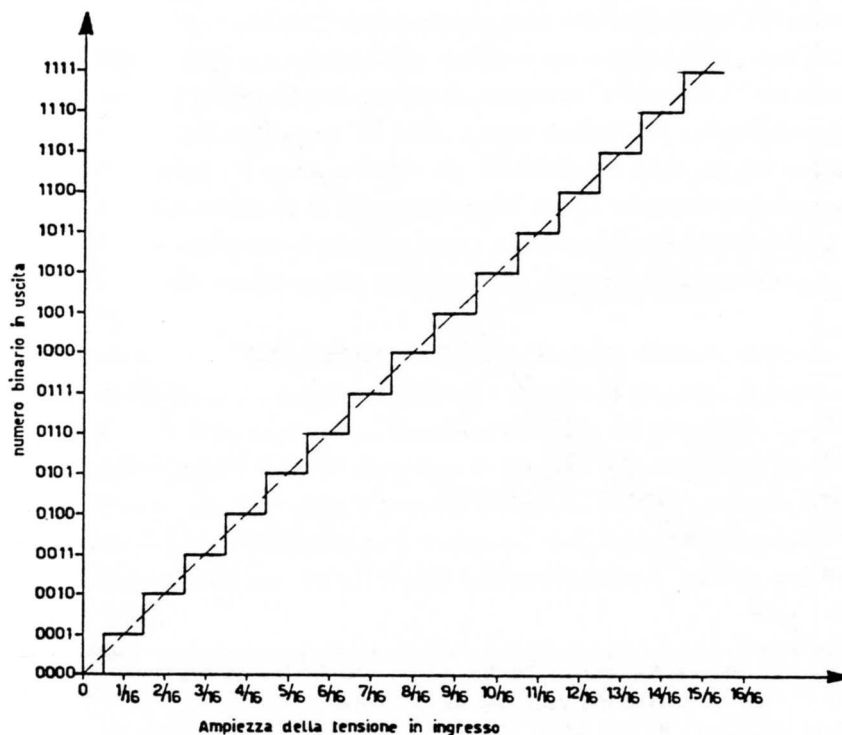


Fig.XIV.8

Il bit meno significativo, quello che corrisponde a una unità è in genere abbreviato come LSB (in inglese: *Least Significant Bit*). Dalla figura è chiaro che in questo caso ideale, l'errore di quantizzazione di $\pm \frac{1}{2}$ LSB è associato al fatto che se l'uscita è ad esempio 0011 (=3 decimale) in realtà la tensione in ingresso può essere qualunque valore compreso fra $\frac{2.5}{16}$ e $\frac{3.5}{16}$ del fondo scala.

Quanto all'errore di linearità del convertitore si possono individuare un errore di *linearità "tout court"* o *linearità integrale* e un errore di *linearità differenziale*. L'errore di linearità integrale è associato al fatto che una retta passante per gli estremi della curva di risposta reale non passa per i punti di mezzo degli intervalli corrispondenti a un certo codice numerico di uscita: l'errore di linearità integrale, che ricorda molto da vicino la *linearità assoluta* di un potenziometro, è dato dalla distanza massima fra le due curve, misurata lungo uno dei due assi; la linearità è data o in percentuale o in parti per milione (*ppm*) del valore di fondo scala o direttamente in LSB; nella Fig.9 l'errore di linearità integrale è circa $\frac{1}{2}$ LSB ovvero circa il 3%. In altri termini il codice 0110 (= 6 decimale) non corrisponde, come dovrebbe, a $\frac{(6 \pm 0.5)}{16}$, bensì a $\frac{(6.5 \pm 0.5)}{16}$ del valore di fondo scala. Quando il costruttore dice: linearità integrale (altrimenti detta *relative accuracy*) di $\pm \frac{1}{2}$ LSB, dobbiamo considerare questo errore costante su tutta la scala, perché, a meno che non lo misuriamo, non è conosciuto l'andamento dettagliato della curva di risposta.

L'errore di linearità differenziale non riguarda la massima deviazione entro tutto il campo, cioè l'andamento generale, ma si riferisce alla differenza nella larghezza degli intervalli di codici adiacenti. Guardiamo ciò su un altro esempio (Fig.10): il codice 0011 (= 3 decimale) corrisponde a un intervallo più largo di $\frac{1}{2}$ LSB rispetto alla larghezza teorica di 1 LSB, il codice 110 (= 6 decimale) ha una larghezza di 2 LSB anziché 1 e il codice 1000 (= 8 decimale) ha addirittura larghezza 0. La linearità

differenziale del nostro CAD sarebbe, prendendo i valori massimi, ± 1 LSB.

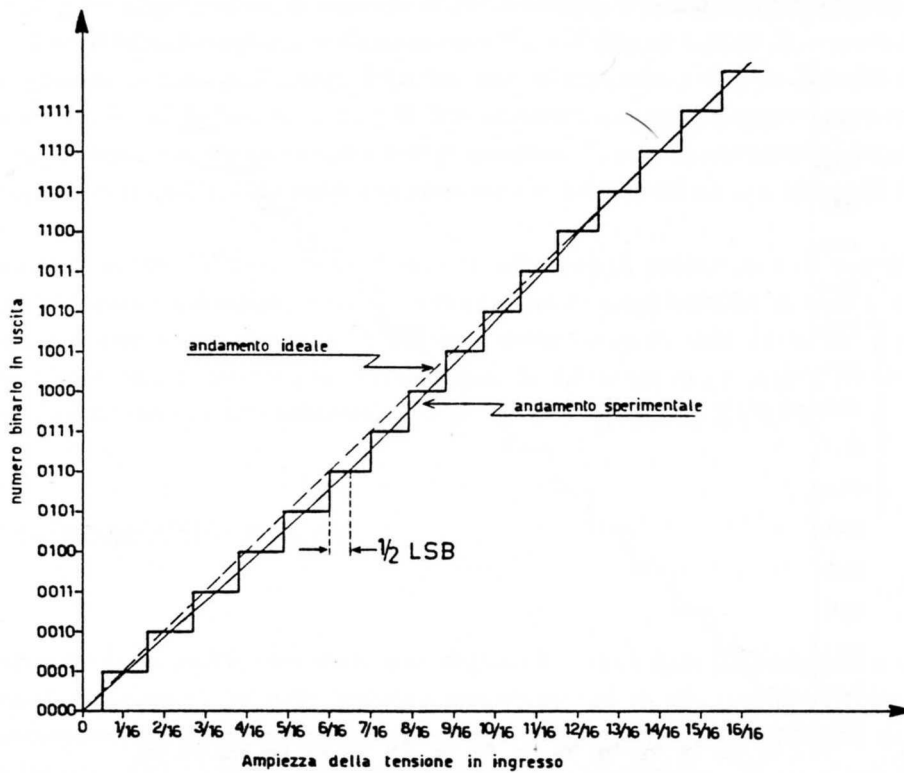


Fig.XIV.9

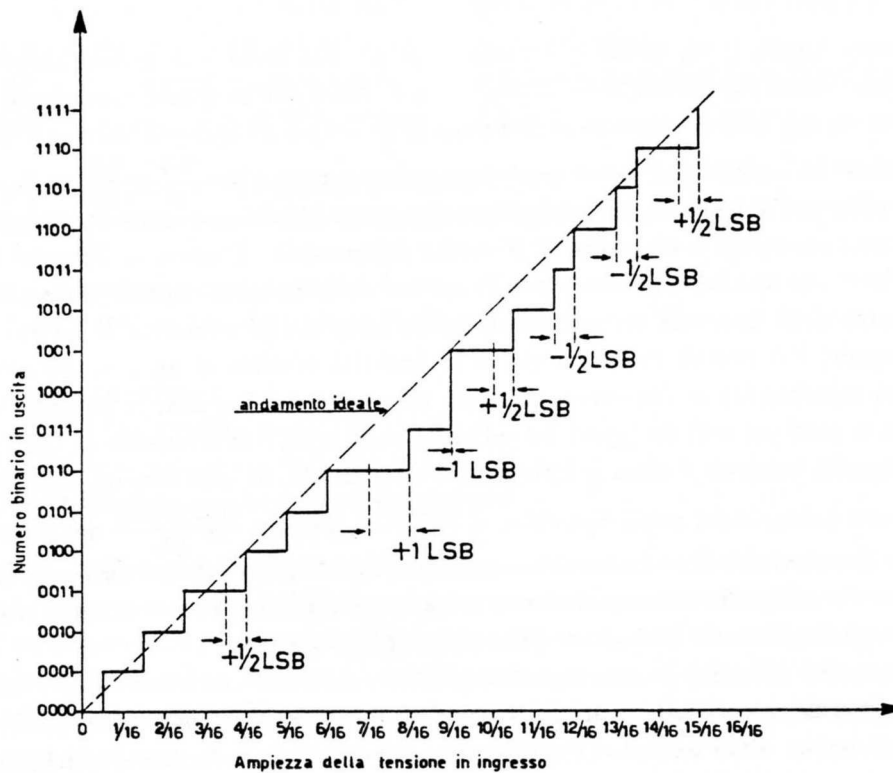


Fig.XIV.10

Alla linearità differenziale è associato un tipico effetto sistematico: precisamente, un errore di linearità differenziale superiore a $|1 \text{ LSB}|$ può portare a codici numerici mancanti. Nel nostro esempio infatti il numero binario 1000 non potrà mai essere presente in uscita, perché valori di tensione in ingresso compresi fra $8/16$ e $9/16$ del fondo scala saranno convertiti come 111 e quelli compresi fra $9/16$ e $10/16$ come 1001. Finché la linearità differenziale si mantiene al di sotto di $\pm 1 \text{ LSB}$, allora non esiste il problema dei codici mancanti e spesso il costruttore si limita a dire “niente codici mancanti” anziché errore di linearità differenziale $< \pm 1 \text{ LSB}$. Alcuni costruttori quantificano le caratteristiche di linearità differenziale dando il numero di bit significativi; per esempio per un convertitore a 12 bit dare una linearità differenziale di 12 bit significa che non ci sono codici mancanti.

Nei convertitori usati nei multimetri digitali l'errore è generalmente descritto dal costruttore nei soli termini di linearità integrale poiché quello associato alla linearità differenziale non dà mai luogo a mancanza di codici*.

Concludendo possiamo dire che in un multimetro digitale, la parte di errore costante espressa in digit (indipendentemente dalla funzione selezionata) è tutta dovuta al processo di conversione analogico-digitale; non a caso nella tabella degli errori riportata all'inizio del paragrafo, questo errore è praticamente sempre lo stesso (infatti il CAD converte sempre una ddp compresa fra 0 e 200 mV).

Quando col multimetro si misurano ddp o correnti alternate, l'errore costante aumenta anche notevolmente: il motivo di ciò va ricercato principalmente nel fatto che la necessaria operazione di rettificazione introduce un ulteriore contributo di indeterminazione, assente nel caso di misura di grandezze continue.

Come osservazione finale sulle indeterminazioni dichiarate dal costruttore, occorre precisare che esse sono garantite generalmente entro un anno dalla calibrazione dello strumento, dopo di che lo strumento dovrebbe essere nuovamente tarato. Di fatto si trova che le precisioni si mantengono per periodi di tempo anche superiori, purché lo strumento sia trattato con cura, ad esempio non sia sottoposto a sollecitazioni termiche e meccaniche.

5.— *Misure con multimetri digitali*

Oltre al naturale utilizzo in tutte le misure dove trova impiego uno strumento analogico, i multimetri digitali si prestano a compiere misure che con strumentazione analogica sarebbero o difficilmente realizzabili o notevolmente più complesse: per esempio, la possibilità di misurare con resistenza di ingresso elevata piccole differenze di potenziale, consente le misure della resistenza interna e della costante reometrica di un galvanometro descritte nel Cap.VI,§12.

Come altro esempio dell'utilità di disporre di un voltmetro che possiede una resistenza di ingresso elevata e nota (generalmente $10 \text{ M}\Omega$), consideriamo la misura di una capacità di qualche μF usando la resistenza interna dello strumento come resistenza di scarica (Fig.11).

* In alcuni particolari convertitori di precisione (*non* impiegati nei multimetri) la linearità differenziale è data come variazione percentuale rispetto al valore medio del LSB: ad esempio una linearità differenziale dello 0.3% significa che la massima differenza percentuale fra la larghezza di due intervalli corrispondenti a codici numerici successivi è al più dello 0.3% della larghezza media dell'intervallo.

In alcune applicazioni anche questa -per altro ottima- linearità differenziale pur non dando luogo a codici mancanti ($\ll 1 \text{ LSB}$), può creare ugualmente effetti sistematici indesiderati.

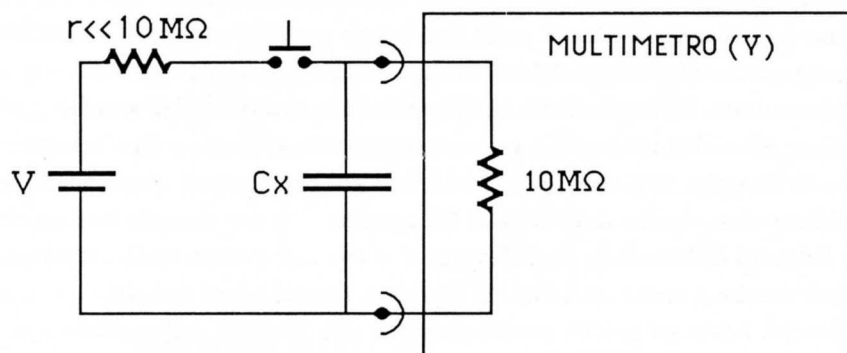


Fig.XIV.11

Si può infatti osservare l'andamento in funzione del tempo della tensione misurata, quando si scarica il condensatore lasciato chiuso sulla resistenza di ingresso del multimetro e ricavare C_x col metodo illustrato nel caso del galvanometro balistico. Questa misura si presta a mettere in evidenza oltre ai pregi di questi strumenti anche un problema insito nelle misurazioni fatte con multimetri digitali: osservando il display durante la misura si nota che la lettura della tensione non viene fatta continuamente, bensì è aggiornata a tempi regolari.

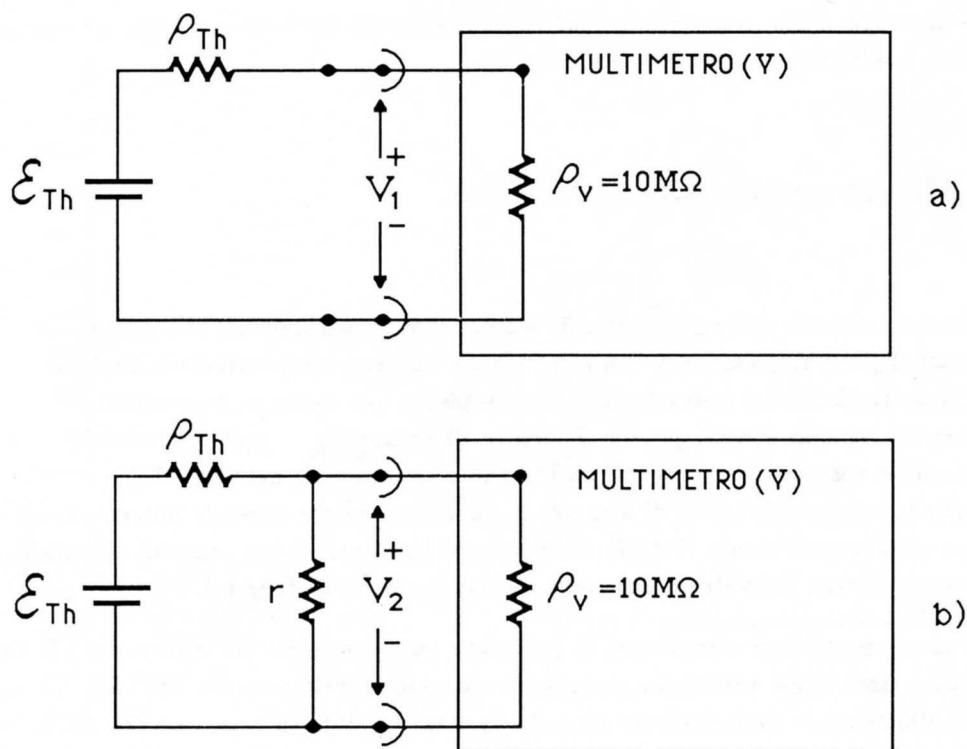


Fig.XIV.12

Ciò è dovuto al fatto che il CAD impiega un tempo finito (*tempo di conversione*) a trasformare l'informazione analogica in ingresso in un numero da presentare al display. Questo tempo varia da multimetro a multimetro e dipende dal particolare CAD impiegato; come ordine di grandezza il tempo di conversione vale $(0.1 \div 0.5)s$ e in linea di principio è tanto più grande quanto più lo strumento è preciso. Nella misura della scarica del condensatore ciò può determinare un'incertezza finita nella misura, maggiore forse della indeterminazione associata alla misura di intervallo di tempo (per rimediare si potrebbe sincronizzare la misura di intervallo di tempo di scarica con l'aggiornamento del numero del multimetro).

Il valore assai elevato della resistenza di ingresso ρ_V consente anche di misurare con buona precisione \mathcal{E}_{Th} e ρ_{Th} di generatori di Thévenin caratterizzati da valori di ρ_{Th} dell'ordine dei $M\Omega$ e più. Ciò si può fare in vari modi, il più semplice dei quali è quello di compiere in successione le misure riportate nelle Figg.12a e 12b. Avremo allora

$$V_1 = \mathcal{E}_{Th} \cdot \frac{\rho_V}{\rho_V + \rho_{Th}} \quad (\text{XIV.1})$$

e

$$V_2 = \mathcal{E}_{Th} \cdot \frac{\rho_V \parallel r}{\rho_{Th} + \rho_V \parallel r} \quad (\text{XIV.2})$$

e dalle due relazioni ricavare \mathcal{E}_{Th} e ρ_{Th} in funzione di V_1 , V_2 , r e ρ_V .

Quanto alle misure di corrente, abbiamo già detto che non esiste un sostanziale miglioramento rispetto all'impiego dei galvanometri come nel caso della misura di ddp, almeno per quanto riguarda il valore della resistenza interna. Qualora la presenza di una resistenza aggiuntiva sul ramo dove si vuole misurare la corrente non sia di particolare disturbo e se la corrente è particolarmente piccola, si può usare il multimetro per misurare la ddp V su una resistenza campione R nota con buona precisione e ottenere così una misura di corrente $i_x = \frac{V}{R \parallel \rho_V}$ (ρ_V resistenza interna del multimetro) con una indeterminazione paragonabile a quella di V (se $R \ll \rho_V$ e se la precisione di R è superiore a quella della misura di V). Come esempio di questo metodo si veda la misura della costante reometrica di un galvanometro (Cap.VI,§12).

Infine per quanto riguarda la misura delle resistenze, il multimetro consente determinazioni di R con precisioni confrontabili con quelle ottenibili con un ponte di Wheatstone (parliamo ad esempio del multimetro descritto nel §4). Un errore che occorre evitare nella misura a 2 terminali (che spesso è l'unica consentita dallo strumento) è la sovrastima di R_x , che si ha se non si tiene conto delle cadute ohmiche sui contatti dei puntali e sui collegamenti: questo errore è in buona parte eliminabile (Fig.13 a e b) cortocircuitando, prima di effettuare la misura, i puntali alla loro estremità e misurando la resistenza ρ_c associata ai collegamenti. Con riferimento alla Fig.13, abbiamo che il valore vero di R_x è dato da

$$R_x = R_{M1} - R_{M2} = R_{M1} - \rho_c \quad (\text{XIV.3})$$

essendo R_{M1} e R_{M2} i valori misurati con i puntali posti agli estremi della resistenza da misura e con i puntali in cortocircuito rispettivamente. Alcuni multimetri consentono di fare automaticamente questa sottrazione: si cortocircuitano cioè i terminali e si misura ρ_c ; si preme quindi un pulsante (indicato generalmente col nome "*offset*") che memorizza nel microprocessore interno al multimetro questo dato e lo sottrae in tutte le misure successive (evidentemente in questo multimetro i dati convertiti dal CAD non vanno direttamente al display, ma vengono esaminati ed eventualmente trattati dal microprocessore interno).

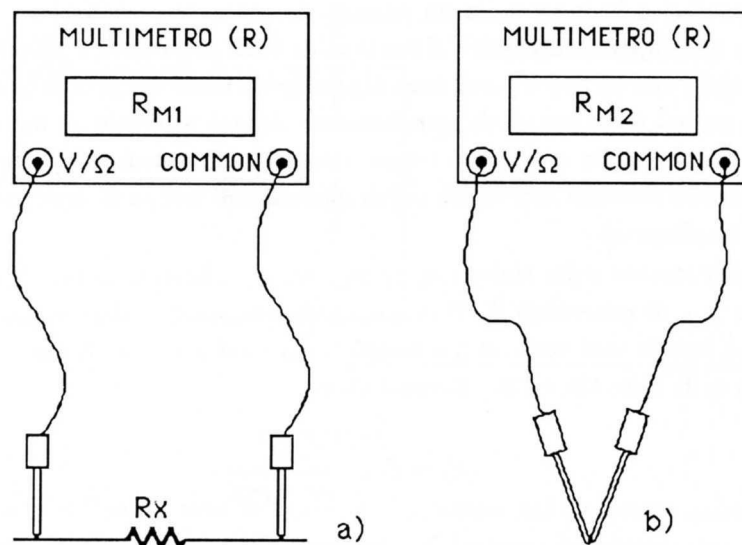


Fig.XIV.13

La versatilità dello strumento e le precisioni con esso raggiungibili fanno sì che al giorno d'oggi con un buon multimetro si possano compiere misure caratterizzate da precisioni un tempo ottenibili solo utilizzando campioni precisi con cura e attenzione; ciò nondimeno l'utilizzo dei multimetri richiede ugualmente criterio e conoscenza dei metodi di misura, perché i problemi che *comunque* si incontrano (resistenza interna nelle misure di V , burden voltage nella misura di i , resistenze dei collegamenti nelle misure di R) sono gli stessi delle corrispondenti misure fatte con strumenti analogici. Gli ordini di grandezza delle correzioni da apportare sono inferiori, ma se si vogliono sfruttare a pieno le caratteristiche di precisione della strumentazione, la cura richiesta per effettuare le misure rimane sostanzialmente la stessa.

NOTA BIBLIOGRAFICA

I manuali dei multimetri di buona qualità sono spesso una copiosa fonte di informazioni sugli argomenti trattati nel capitolo. Similmente, per la definizione delle caratteristiche e prestazioni dei Convertitori Analogico Digitali, si vedano i cataloghi delle ditte costruttrici (ad esempio il capitolo "General Information" del catalogo "Analog Devices").

Una ottima fonte di informazione per i metodi di misura di precisione, basati su strumentazione elettronica moderna, si trova su "Low Level Measurement" della Keithley Instruments Inc. (1984). **MA 78** tratta dettagliatamente il problema della messa a terra degli strumenti elettronici, la cui trattazione è completamente omessa nel testo, ma che spesso è di importanza fondamentale per effettuare misure accurate di piccole differenze di potenziale. Sulla strumentazione elettronica in generale, si può vedere **CO 83**, **CO 85**, **BE 84**.

L'AMPLIFICATORE OPERAZIONALE

1.- *Amplificatore ideale e
amplificatore reale di tensione*

Si definisce *amplificatore differenziale di tensione ideale* un dispositivo elettrico a quattro terminali con le seguenti caratteristiche: due terminali “+” e “-”, detti di *ingresso*, presentano fra loro una resistenza infinita e se a essi applichiamo due ddp $v_+(t)$ e $v_-(t)$ misurate rispetto a un riferimento comune, allora gli altri due terminali, detti di *uscita*, si comportano come un generatore ideale ($R_o=0$) di fem $v_o(t)$ tale che:

$$v_o(t) = A \cdot (v_+(t) - v_-(t)) = A \cdot v_i(t) \tag{XV.1}$$

con A costante e positivo; A è detto *fattore di amplificazione (o guadagno in tensione)*. La Fig.1 riporta il circuito equivalente a questo amplificatore ideale di tensione, nel caso in cui le ddp agli ingressi siano applicate mediante un unico generatore v_s posto in parallelo a essi:

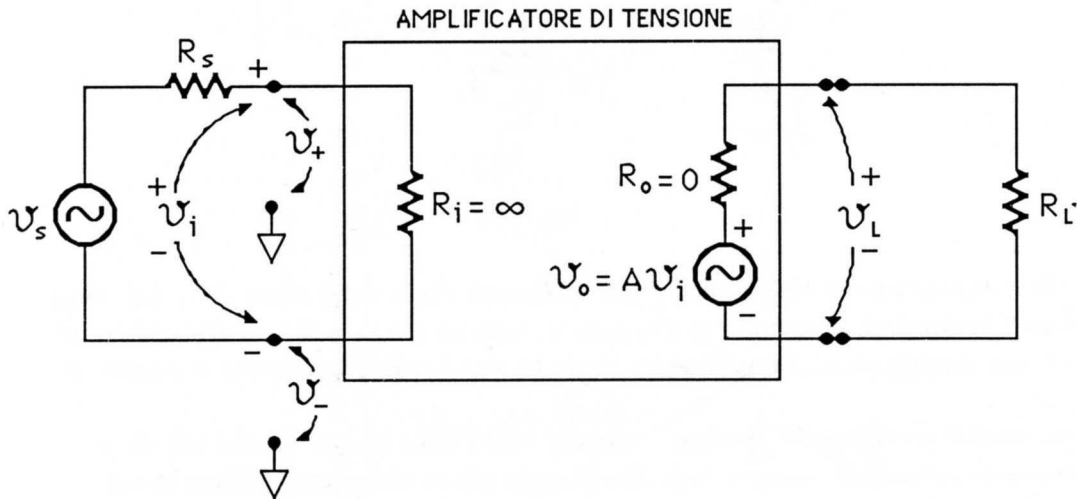


Fig.XV.1

Essendo $R_i = \infty$ e $R_o = 0$, allora per ogni t abbiamo: $v_i = v_+ - v_- = v_s$, $v_L = v_o$. Si noti che la ddp in uscita dipende solamente dalla differenza delle ddp ai terminali di ingresso; in questo senso si parla di *amplificatore differenziale ideale*. Nei casi reali infatti si trova che la tensione v_o dipende anche dalla somma di v_+ e di v_- e la si pone usualmente nella forma:

$$v_o = A_d \cdot (v_+ - v_-) + A_c \cdot (v_+ + v_-)/2 \tag{XV.2}$$

Nel seguito ammetteremo sempre che il secondo membro della (2) sia trascurabile.

Un dispositivo di questo genere per funzionare correttamente deve ricevere energia da qualche fonte esterna: infatti in uscita è possibile ottenere una potenza finita, nonostante che la potenza ceduta all'ingresso dal generatore di fem sia, al limite di $R_i = \infty$, nulla. L'energia è ottenuta tramite dei generatori di tensione continua che alimentano il circuito elettronico contenuto all'interno del dispositivo: pertanto è opportuno, proprio per ricordare questo fatto, indicare esplicitamente questi alimentatori nonché i terminali a cui le rispettive tensioni sono applicate; in genere le ddp applicate dagli alimentatori sono due, una positiva ($+V_P$) e una negativa ($-V_N$) rispetto a una tensione comune di riferimento.

Perdendo in generalità, ma acquistando in semplicità e avvicinandosi ai casi che molto spesso si incontrano in pratica, assumeremo che il nodo di riferimento per le alimentazioni e in generale per tutte le tensioni coincida con uno dei due terminali di uscita. In altri termini, da qui in avanti schematizzeremo il nostro amplificatore di tensione ideale come in Fig.2.

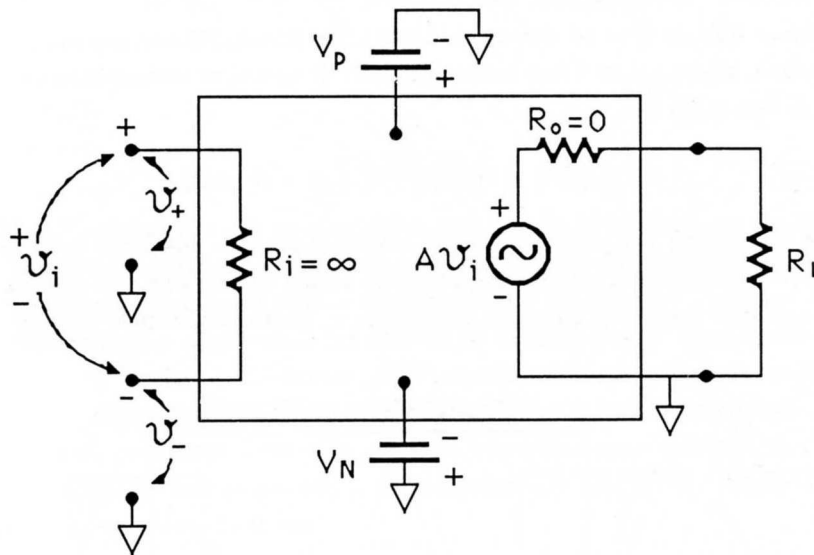


Fig.XV.2

Se l'amplificatore è ideale, la (1) vale qualunque sia la dipendenza di v_i dal tempo, con A costante; limitandoci al caso in cui il segnale di ingresso $v_i(t)$ sia di tipo sinusoidale, ciò significa che A non dipende da ω ; l'amplificatore ideale ha una banda passante che si estende da $\omega = 0$ a $\omega = \infty$. In un *amplificatore reale di tensione* avremo valori finiti sia per R_i che per R_o e A non sarà esattamente costante in funzione di ω . Esaminando più da vicino quest'ultimo aspetto si trova che per una larga classe di amplificatori reali eccitati con segnali sinusoidali, il fattore di amplificazione è un numero complesso \mathcal{A} che mostra un andamento (Fig.3) in funzione della frequenza del tipo RC passa basso (vedi Cap.XII,§2); la frequenza f_H alla quale l'amplificazione è diminuita di 3 dB definisce la *banda passante dell'amplificatore*. Nel seguito (salvo esplicita affermazione contraria) noi considereremo il nostro amplificatore eccitato con segnali caratterizzati da frequenze decisamente inferiori a f_H , cosicché, almeno da questo punto di vista, l'amplificatore potrà considerarsi ideale.

Negli schemi elettrici un amplificatore reale di tensione si indica con un simbolo a triangolo come in Fig.4 (R_L rappresenta il carico per l'uscita).

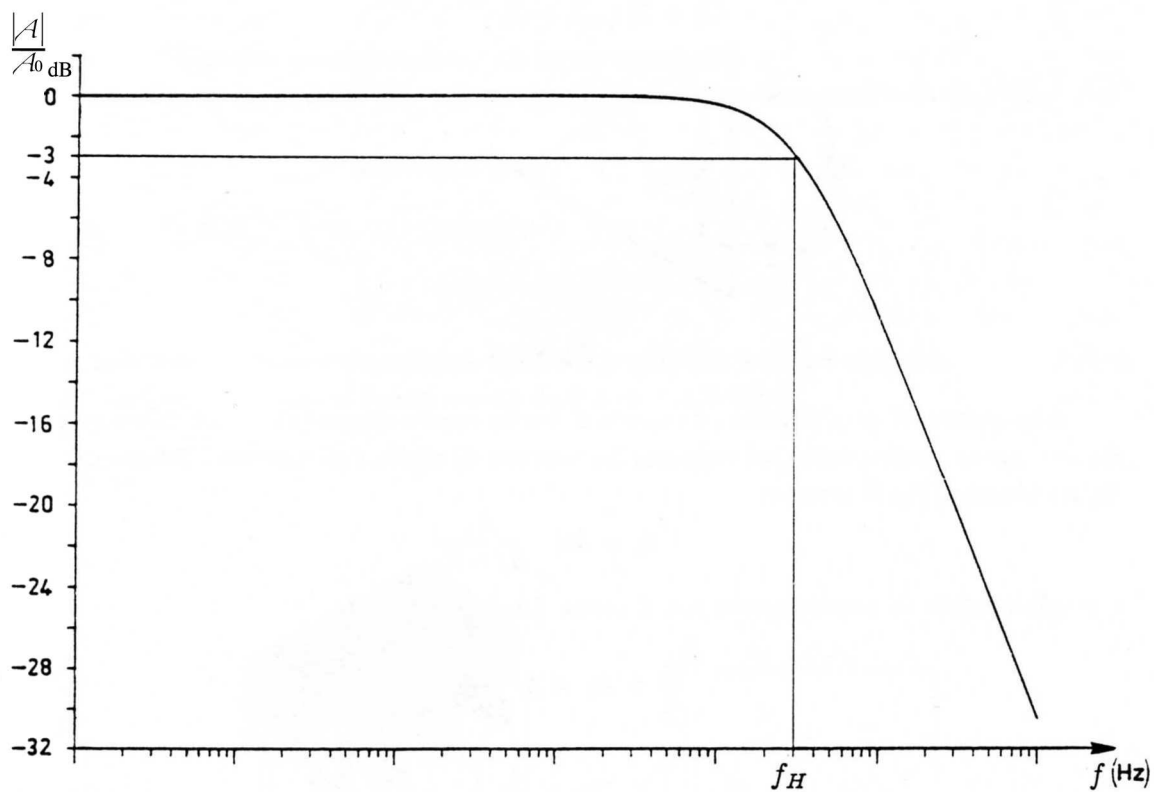


Fig.XV.3

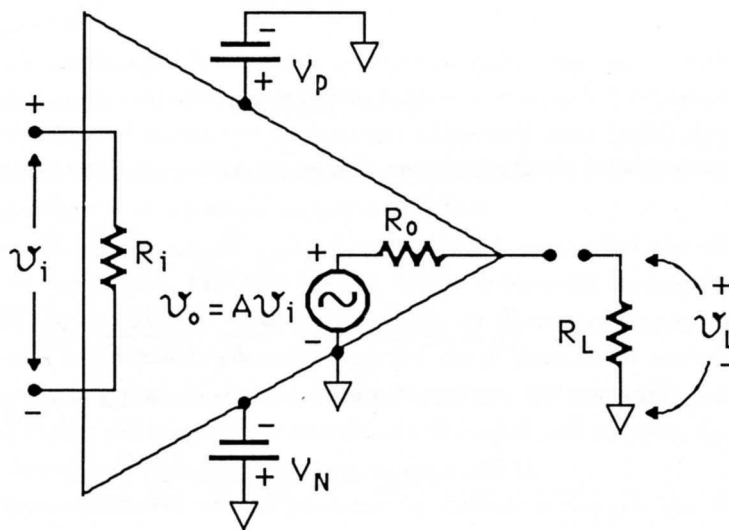


Fig.XV.4

Ancora più spesso si disegna l'amplificatore reale semplicemente come in Fig.5, omettendo sia

le tensioni di alimentazione che i dettagli del generatore di uscita .

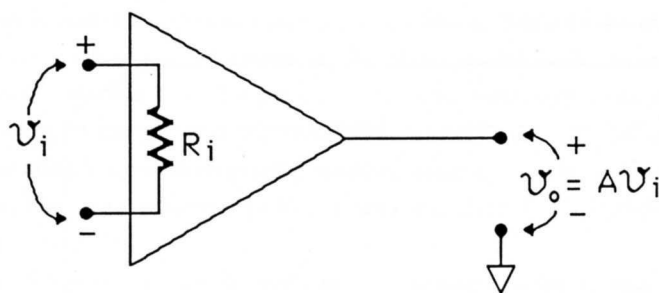


Fig.XV.5

A è il *fattore di amplificazione a circuito di uscita aperto*: quando l'uscita è chiusa su un carico R_L avremo un cambiamento nel rapporto fra tensione di uscita e di ingresso . Infatti nel caso che R_L sia inserita (Fig.6) avremo:

$$v_L = A v_i \cdot \frac{R_L}{R_o + R_L} \quad (\text{XV.3})$$

e quindi il *fattore di amplificazione con il carico* (A_L) sarà dato da

$$\frac{v_L}{v_i} = A_L = A \cdot \frac{R_L}{R_o + R_L} \quad (\text{XV.4})$$

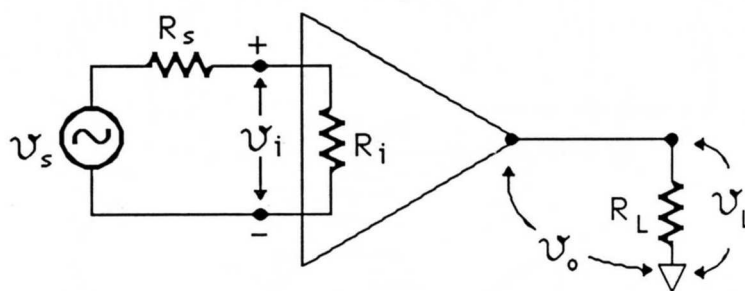


Fig.XV.6

Se poi ammettiamo che il generatore di ingresso abbia una certa resistenza interna R_s abbiamo (vedi Fig.6)

$$v_i = v_s \cdot \frac{R_i}{R_i + R_s} \quad (\text{XV.5})$$

$$v_L = A_L v_i = A \cdot \frac{R_L}{R_o + R_L} \cdot \frac{R_i}{R_i + R_s} \cdot v_s \quad (\text{XV.6})$$

e pertanto A_{Ls} , rapporto fra tensione di uscita sotto carico e differenza di potenziale applicata dal generatore:

$$\frac{v_L}{v_s} = A_{Ls} = A \cdot \frac{R_L}{R_o + R_L} \cdot \frac{R_i}{R_i + R_s} \quad (\text{XV.7})$$

Se avessimo considerato non solo resistenze ma impedenze, avremmo dovuto definire delle quantità complesse per questi rapporti, ottenendo così :

$$A_L = A \cdot \frac{Z_L}{R_o + Z_L} \quad (\text{XV.8})$$

$$\mathcal{A}_{Ls} = A \cdot \frac{\mathcal{Z}_L}{R_o + \mathcal{Z}_L} \cdot \frac{\mathcal{Z}_i}{\mathcal{Z}_i + \mathcal{Z}_s} \quad (\text{XV.9})$$

nelle quali continuiamo ad ammettere che A sia un numero reale.

Si vede che se $|\mathcal{Z}_L| \gg R_o$ e $|\mathcal{Z}_i| \gg |\mathcal{Z}_s|$ allora $\mathcal{A}_L, \mathcal{A}_{Ls} \simeq A$, indipendentemente da R_o e \mathcal{Z}_i .

2.— Circuiti amplificatori integrati

Da anni ormai la tecnica della microelettronica è in grado di produrre *amplificatori integrati* in un unico “chip” delle dimensioni lineari esterne di $\simeq 1 \text{ cm}$ (vedi Fig.7).

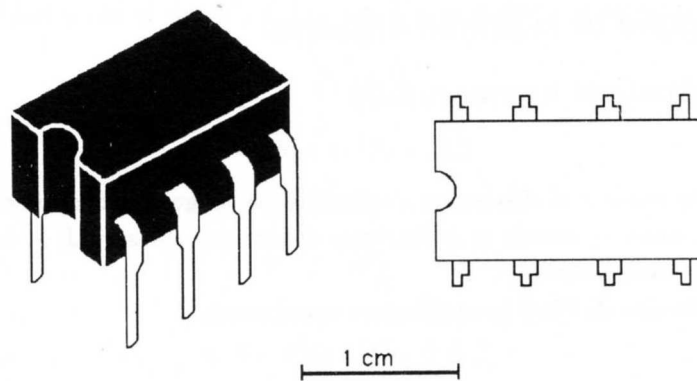


Fig.XV.7

L'involucro del chip è generalmente di materiale plastico e i reofori esterni sono i terminali per gli ingressi, l'uscita e le tensioni alimentazione. L'amplificatore vero e proprio è contenuto all'interno e ha dimensioni dell'ordine dei mm^2 e contiene un notevole numero di componenti elettronici quali transistori e diodi nonché resistenze e condensatori (fino a qualche decina di pF), tutti realizzati con le tecniche dei circuiti integrati su un unico supporto di Silicio.

Fra gli amplificatori integrati, quelli con gli ingressi costituiti da particolari tipi di transistori, detti *transistori a effetto di campo* (*Fet*, vedi Cap.XVIII), hanno le seguenti caratteristiche tipiche: $R_i \simeq 10^{11} \Omega$; $A \simeq 2 \cdot 10^5$ ($f_H \simeq 10^3 \text{ Hz}$). Quanto alla resistenza di uscita, essa spesso non viene indicata, ma viene piuttosto dichiarata la corrente massima che il circuito di uscita può erogare senza che intervengano grosse riduzioni del fattore di amplificazione. Nel caso dello LF157 (un circuito amplificatore assai diffuso e del costo di poche migliaia di lire) si può stimare, dalle curve che vengono fornite dal costruttore, una resistenza di uscita di circa 200Ω .

Si sarà notato il valore estremamente elevato del guadagno A , di fatto molto più alto del valore che nelle applicazioni usuali è necessario avere*; inoltre il costruttore garantisce un certo valore medio di A attorno al quale son distribuiti i valori di un campione vasto di tali circuiti. Le variazioni

* tanto per fare un esempio che abbiamo già incontrato, nell'oscillografo i guadagni massimi richiesti al preamplificatore di ingresso sono dell'ordine di $10^2 \div 10^3$.

attorno al valor medio possono essere anche assai grandi; ciò significa che se in un certo dispositivo è impiegato uno di questi circuiti e se una delle funzioni svolte dall'apparecchiatura dipende esplicitamente da A , la sostituzione di un circuito amplificatore (ad esempio perché guastatosi) con un altro dello stesso tipo, non necessariamente con identico A , comporta inevitabilmente una revisione della taratura dell'apparecchiatura. L'eliminazione di questi e molti altri inconvenienti, quali la forte dipendenza di A dalla temperatura, è ottenuta tramite il ricorso a sistemi di amplificazione provvisti di *reazione negativa* (in inglese *negative feedback*): ovvero gli amplificatori integrati sono utilizzati come blocchi base di amplificazione, in configurazioni tali che l'amplificazione finale risultante A_f è $< A$ (questo quasi sempre non è un problema, dato il valore molto grande di A) e ha il pregio di essere determinata quasi esclusivamente da grandezze indipendenti dal circuito amplificatore usato, tipicamente da rapporti di impedenze. Nel paragrafo successivo studieremo proprio un esempio di amplificatore con reazione negativa.

3.— Un esempio di reazione negativa: l'amplificatore operazionale

Gli esempi che seguono si riferiscono a soluzioni che vengono generalmente adottate nelle apparecchiature in cui siano necessarie amplificazioni di tensione per segnali di frequenza relativamente bassa (diciamo nel campo *audio*).

Consideriamo il circuito di Fig.8 (*amplificatore operazionale*).

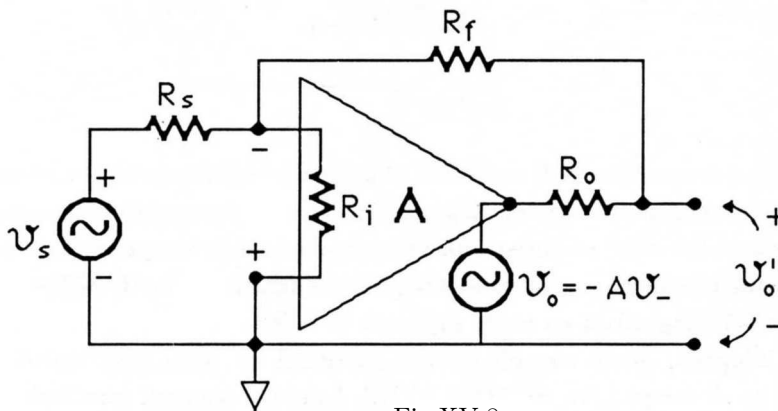


Fig.XV.8

Il blocco base è un amplificatore reale di tensione avente le caratteristiche medie descritte nel paragrafo precedente. Si noti che il terminale di ingresso + è cortocircuitato con l'elettrodo di riferimento; pertanto il segnale v_s è di fatto applicato fra il terminale - e il comune. Inoltre esiste un collegamento, tramite la resistenza R_f , fra il terminale di uscita e il terminale "-" di ingresso: questo tipo di collegamento costituisce proprio, nel caso preso in esame, la cosiddetta *reazione negativa*.

Guardiamo ora di esprimere il rapporto A_f fra la tensione v_o' e la tensione v_s del generatore. Tale rapporto rappresenta il guadagno in tensione del nostro *amplificatore reazionato*.

Per calcolare A_f , procediamo alla risoluzione del circuito, facendo ricorso allo schema equivalente dell'amplificatore base (Fig.9):

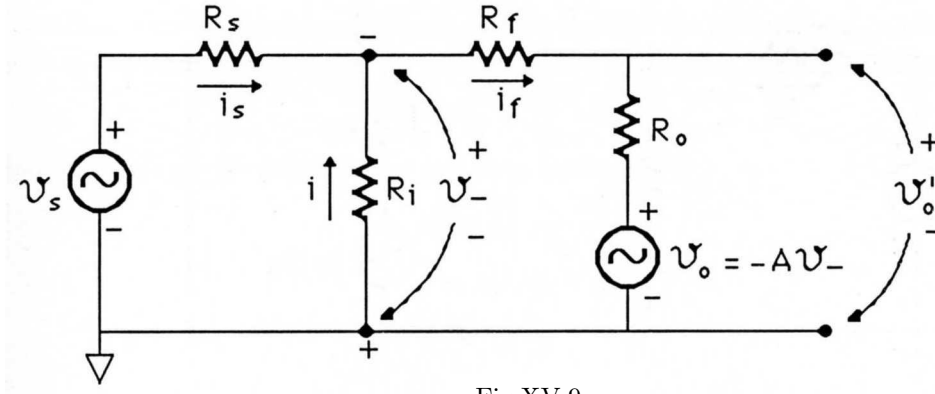


Fig.XV.9

Notiamo anzitutto che $v_o' \neq v_o$ poiché $R_o \neq 0$ e inoltre (vedi (2)):

$$v_o = A(v_+ - v_-) = -Av_- \quad (\text{XV.10})$$

essendo $v_+ = 0$. Con riferimento al circuito di Fig.9 possiamo scrivere le seguenti equazioni:

$$v_s = i_s R_s - i R_i \quad (\text{XV.11})$$

$$Av_- = i R_i + i_f (R_f + R_o) \quad (\text{XV.12})$$

$$i_s + i = i_f \quad (\text{XV.13})$$

$$v_- = -i R_i \quad (\text{XV.14})$$

Dalle (12) e (14) si ottiene:

$$-i R_i (1 + A) = i_f (R_f + R_o) \quad (\text{XV.15})$$

Ricavando i_s dalla (11) e i_f dalla (15) in funzione di i e sostituendole nella (13) si ottiene:

$$i = -v_s \frac{(R_f + R_o)}{(R_s + R_i)(R_f + R_o) + R_i R_s (1 + A)} \quad (\text{XV.16})$$

Tenendo presente che la tensione di uscita a circuito aperto vale:

$$v_o' = -Av_- + i_f R_o = Ai R_i + i_f R_o \quad (\text{XV.17})$$

e sostituendo nell'espressione di v_o' , i e i_f prima calcolati si ottiene:

$$v_o' = -v_s \cdot \frac{R_i (AR_f - R_o)}{(R_s + R_i)(R_f + R_o) + R_i R_s (1 + A)} = A_f v_s \quad (\text{XV.18})$$

Moltiplicando entrambi i membri della (16) per R_i e sfruttando la (14), si può vedere che nel limite di $A \rightarrow \infty$, $v_- \rightarrow 0$. La drastica riduzione della ddp fra i due terminali di ingresso è proprio l'effetto *caratteristico della reazione negativa* introdotta nel nostro sistema; più avanti impareremo a sfruttare ampiamente questo risultato.

Se vogliamo ora calcolare la resistenza di uscita R_o' fra i terminali dove misuriamo v_o' , possiamo chiudere con un corto circuito questi terminali, calcolarci la corrente i_{cc} che fluisce in questo corto circuito e determinare R_o' come rapporto fra la ddp a circuito aperto v_o' (18) e i_{cc} .

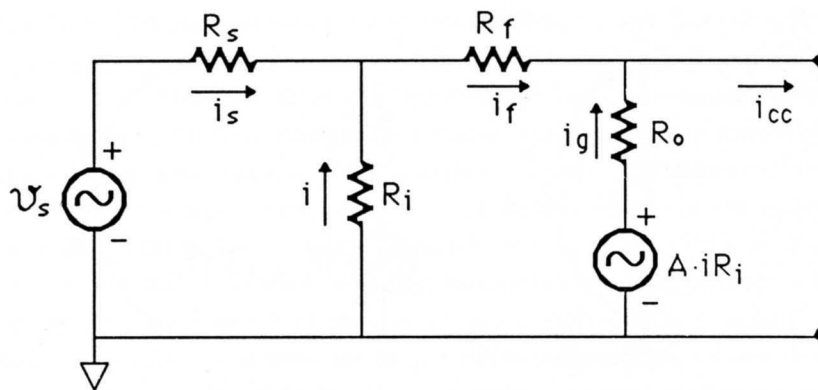


Fig.XV.10

Il circuito per calcolare i_{cc} è disegnato in Fig.10. Abbiamo

$$v_s = -iR_i + i_s R_s \quad (\text{XV.19})$$

$$AiR_i = i_g R_o \quad (\text{XV.20})$$

$$iR_i + i_f R_f = 0 \quad (\text{XV.21})$$

$$i = (i_f - i_s) \quad (\text{XV.22})$$

$$i_{cc} = i_f + i_g \quad (\text{XV.23})$$

Ricavando dalle prime quattro i_s , i_f , i_g e i in funzione di parametri noti, dalla (23) si ottiene:

$$i_{cc} = -\frac{v_s}{R_o} \frac{R_i(AR_f - R_o)}{(R_s + R_i)R_f + R_i R_s} \quad (\text{XV.24})$$

Quindi per R_o' abbiamo

$$R_o' = \frac{v_o'}{i_{cc}} = R_o \frac{R_f + \frac{R_i R_s}{R_i + R_s}}{R_f + R_o + \frac{R_i R_s}{R_s + R_i}(1 + A)} \quad (\text{XV.25})$$

Se avessimo voluto calcolare R_o' sostituendo i generatori con le loro resistenze interne e applicando una ddp fra i terminali di uscita, avremmo dovuto farlo con raziocinio, cioè avremmo dovuto cortocircuitare v_s , ma non $-Av_-$, poiché quest'ultimo generatore (propriamente detto *generatore controllato*) si *accende* in virtù della presenza di una ddp v_i , indipendentemente dalla causa che la produce (in questo caso il generatore applicato all'uscita).

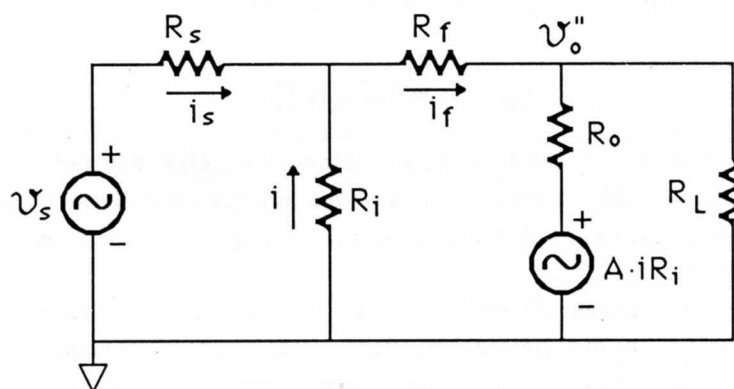


Fig.XV.11

Calcoliamo ora la resistenza di ingresso $R_{in} + R_s$ vista dal generatore v_s : consideriamo il caso generale di una resistenza di carico R_L qualsiasi e, con riferimento alla Fig.11, calcoliamoci

$$R_{in} = \frac{v_s}{i_s} - R_s \quad (XV.26)$$

Le equazioni utili per la risoluzione del problema sono ora:

$$v_o'' = v_o' \cdot \frac{R_L}{R_L + R_o'} \quad (XV.27)$$

$$v_s = i_s R_s - i R_i \quad (XV.28)$$

$$i R_i + i_f R_f = -v_o'' \quad (XV.29)$$

$$i_f = i + i_s \quad (XV.30)$$

Svolgendo i conti si trova

$$R_{in} = \frac{v_s}{i_s} - R_s = \frac{R_s(R_i + R_f) + R_i R_f}{(R_i + R_f) + \frac{R_i^2 (AR_f - R_o)}{(R_s + R_i)(R_f + R_o) + R_i R_s (1 + A)} \cdot \frac{R_L}{R_L + R_o'}} - R_s \quad (XV.31)$$

Guardiamo ora un po' più da vicino i risultati ottenuti; intanto va detto che le espressioni (18), (25) e (31) sono relativamente poco intelleggibili. Se però consideriamo il caso realistico in cui si utilizzi un blocco base di amplificatore con $A \geq 10^5$, allora tutto diviene estremamente più chiaro; infatti:

$$v_o' \xrightarrow{A \rightarrow \infty} -v_s \frac{AR_f}{(1 + A)R_s} \quad (XV.32)$$

$$R_o' \xrightarrow{A \rightarrow \infty} R_o \cdot \frac{\left(1 + \frac{R_f(R_i + R_s)}{R_s R_i}\right)}{A} \quad (XV.33)$$

$$R_{in} \xrightarrow{A \rightarrow \infty} \frac{R_s(R_i + R_f) + R_i R_f}{R_i + R_f + \frac{R_i R_f A}{R_s(1+A)}} - R_s \quad (XV.34)$$

e quindi con approssimazione decisamente buona se $A \simeq 10^5$, $v_o' = -v_s \frac{R_f}{R_s}$ cioè

$$A_f = -\frac{R_f}{R_s} \quad (XV.35)$$

e $R_o' \simeq 0$ e $R_{in} \simeq 0$.

Pertanto l'*amplificatore reazionato* si comporta, rispetto al generatore v_s , come l'amplificatore reale di tensione rappresentato in Fig.12 cioè resistenza di ingresso finita e pari a R_s , guadagno A_f finito e negativo (dipendente dal rapporto di due resistenze) e resistenza di uscita praticamente uguale a zero.

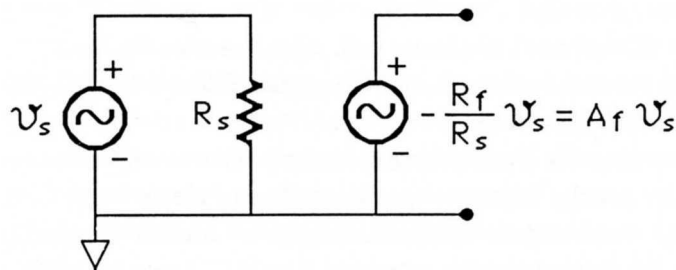


Fig.XV.12

Alle medesime conclusioni si può giungere con un ragionamento semplificato che non è esatto, ma ha il vantaggio di portare a risultati sostanzialmente corretti nei casi pratici e soprattutto aiuta a comprendere meglio il comportamento del sistema; inoltre questo schema di ragionamento ha il pregio di potersi applicare a molti altri casi simili a quello in esame. Consideriamo quindi nuovamente il nostro circuito, riprodotto in Fig.13.

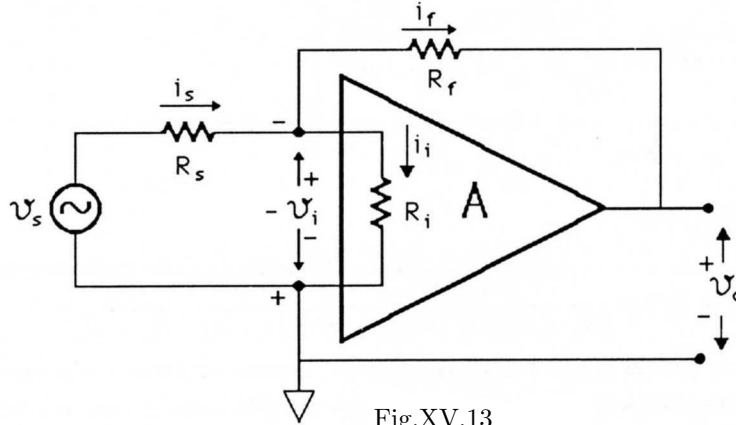


Fig.XV.13

Abbiamo già visto che la ddp v_i fra gli ingressi, proprio a causa della reazione negativa, tende ad assumere un valore prossimo a zero. A questa medesima conclusione si giunge anche più semplicemente notando che per tensioni v_o finite, valendo la (1) ed essendo $A \gg 1$, la ddp presente ai due ingressi deve necessariamente essere molto piccola:

$$-v_i = v_- - v_+ = -\frac{v_o}{A} \quad (\text{XV.36})$$

Ammettiamo quindi che v_i sia trascurabile rispetto a v_s . In questa ipotesi possiamo dire che v_- è allo stesso potenziale di v_+ , cioè zero, e quindi possiamo calcolare i_s come

$$i_s \simeq \frac{v_s}{R_s} \quad (\text{XV.37})$$

A questo punto osserviamo che i terminali v_- e v_+ oltre a trovarsi praticamente allo stesso potenziale, sono collegati fra loro da una resistenza finita (magari anche molto grande, ma ciò non è essenziale); questo autorizza a dire che nella resistenza R_i circolerà una corrente i_i molto piccola (dell'ordine di $|\frac{v_o}{AR_i}|$): poniamo quindi questa corrente uguale a 0. Conseguentemente la corrente i_f sarà uguale a i_s e la tensione v_o' potrà calcolarsi come:

$$v_o' \simeq v_- - i_f R_f \simeq -i_f R_f = -i_s R_f = -v_s \cdot \frac{R_f}{R_s} \quad (\text{XV.38})$$

Quanto alla resistenza di ingresso, essendo $v_- \simeq 0$, evidentemente $R_{in} \simeq R_s$.

Il ragionamento è rigoroso solo se $A = \infty$, ma l'approssimazione resta più che buona nei casi reali quando $A \simeq 10^5 - 10^6$, se $R_f/R_s \ll A$.

Nella configurazione ora descritta il circuito complessivo è detto *amplificatore operazionale* (il motivo del nome lo vedremo fra poco); l'ingresso $-$, nella condizione ideale di $A \rightarrow \infty$, si trova allo stesso potenziale dell'ingresso $+$ ed essendo questo alla tensione comune (massa), l'ingresso $-$ è detto *massa virtuale*. Si usa l'aggettivo *virtuale*, perché pur essendo il terminale alla tensione di massa, la corrente i_i che effettivamente fluisce da questo nodo verso massa è zero, cioè il terminale è di fatto *isolato* da massa.

Abbiamo detto all'inizio che quello ora esaminato è un circuito con *reazione negativa*: il motivo di questo nome discende dal fatto che una frazione del segnale di uscita viene ripresentata (in questo senso si parla di *reazione*, contrazione di *retroazione*) in ingresso in modo da diminuire (in questo senso si parla di *reazione negativa*) il segnale di eccitazione v_i . E' abbastanza facile rendersi conto che se invece colleghiamo l'uscita con l'ingresso +, l'effetto è quello di un ulteriore aumento della tensione v_i . Si parla in questo caso di *reazione positiva*. La reazione positiva viene generalmente impiegata per costruire oscillatori e circuiti di scatto e solo molto raramente per realizzare amplificatori; noi comunque non parleremo di nessuna di queste applicazioni.

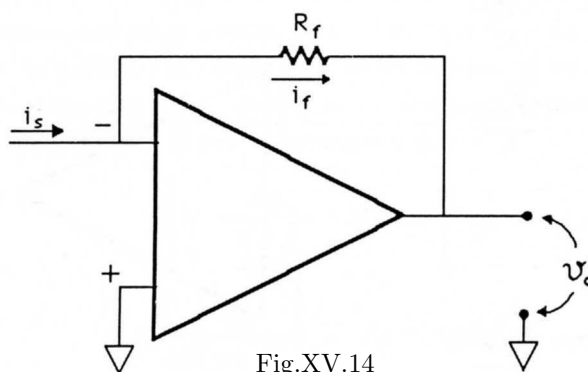


Fig.XV.14

Il circuito amplificatore operazionale può essere anche interpretato come un *convertitore corrente-tensione*. Infatti tutto il ragionamento fatto precedentemente può ripetersi nel caso della Fig.14 in cui non è specificata l'origine della corrente i_s : resta cioè vero che $v_- = v_+$ e quindi che $i_f = i_s$ indipendentemente da come è ottenuta i_s e quindi

$$v_o' = -i_s \cdot R_f \quad (\text{XV.39})$$

Il circuito converte cioè la corrente i_s in una tensione a essa proporzionale.

Nel prossimo paragrafo vedremo alcune delle molte funzioni che un amplificatore operazionale è in grado di svolgere e comprenderemo anche il motivo del suo nome. Ora ci preme richiamare l'attenzione su un punto molto importante, accennato alla fine del paragrafo precedente: che cioè tramite la procedura (qui vista in un caso particolare) della reazione negativa, è stato possibile realizzare un circuito amplificatore le cui caratteristiche non dipendono più in maniera critica dai parametri costruttivi del circuito base, a patto che quest'ultimo abbia un guadagno $A \rightarrow \infty$. Se questa condizione è soddisfatta si ottiene -nel caso esaminato- un guadagno dell'amplificatore reazionato che dipende solo dal rapporto di due resistenze; inoltre l'amplificatore reazionato possiede una resistenza di uscita circa $(R_s/R_f) \cdot A$ volte più piccola di quella dell'amplificatore base; quanto alla resistenza di ingresso essa dipende solamente dal valore R_s della resistenza in serie al generatore di segnale. Possiamo quindi ora dire che se in un'apparecchiatura è utilizzato un amplificatore di questo tipo e se la funzione svolta dall'apparecchiatura dipende dal guadagno A_f del circuito reazionato, la sostituzione del circuito base (perché ad esempio danneggiato) non porta assolutamente a revisioni della taratura dell'apparecchio; infatti il guadagno A_f dipende dal rapporto di due resistenze e niente affatto (fintanto che $A \rightarrow \infty$) dalle caratteristiche particolari del circuito sostituito. Tutto questo guadagno in *stabilità* ha ovviamente un prezzo: il guadagno A_f è molto minore di A .

Per concludere ricordiamo che il blocco base, cioè l'amplificatore integrato, è molto spesso chiamato impropriamente "amplificatore operazionale"; *impropriamente* perché questo è il nome che compete al particolare amplificatore reazionato che utilizza quell'amplificatore base.

4. – Alcune configurazioni dell'amplificatore operazionale

Supponiamo di avere n generatori di tensione v_i (in genere dipendenti dal tempo) collegati ognuno tramite una resistenza R_i alla massa virtuale di un unico amplificatore operazionale (Fig.15).

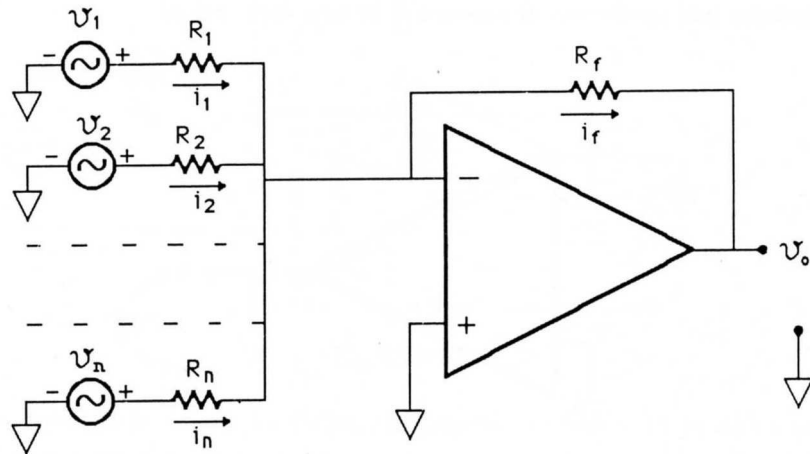


Fig.XV.15

La corrente i_f è pari alla somma $\sum_i^n i_i$ e quindi la ddp in uscita è pari alla somma algebrica (cambiata di segno) delle ddp dei segnali, pesate ognuna con l'inverso della propria resistenza in serie:

$$v_o = -R_f \cdot \sum_i^n \frac{v_i}{R_i} \quad (\text{XV.40})$$

Se tutte le resistenze R_i sono uguali, allora $v_o \propto \sum_i v_i$. L'origine del nome "circuitto operazionale" è associata proprio ad applicazioni quali quella ora vista, cioè alla capacità di compiere operazioni matematiche sui segnali (e non solo somme algebriche, come vedremo).

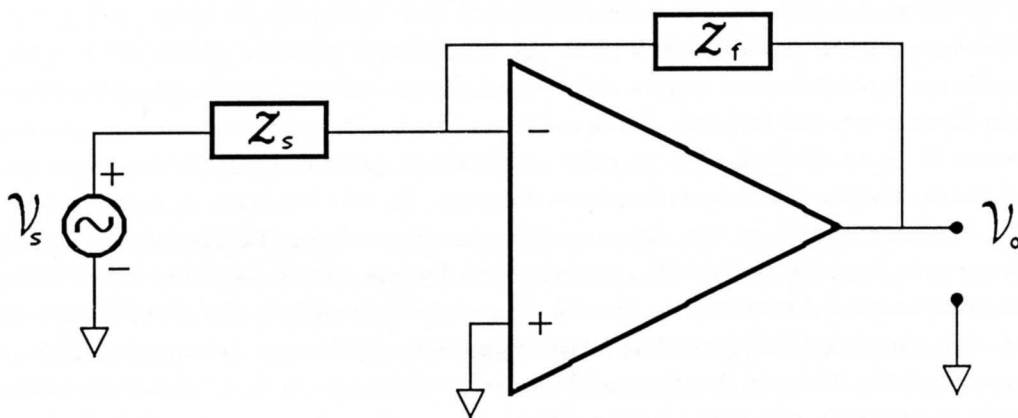


Fig.XV.16

Se il circuito operazionale presenta in serie all'ingresso – e in reazione, invece che resistenze pure, impedenze complesse e se la eccitazione è sinusoidale (Fig.16), varranno formalmente le stesse

relazioni viste prima per A_f salvo che questa volta si tratterà di numeri complessi:

$$\mathcal{V}_o = -\frac{\mathcal{Z}_f}{\mathcal{Z}_s} \cdot \mathcal{V}_s = \mathcal{A}_f \cdot \mathcal{V}_s \quad (\text{XV.41})$$

con \mathcal{A}_f complesso.

La (41) descriverà correttamente il comportamento del circuito operativo fintanto che $A(f)$ del circuito base si mantenga sufficientemente grande: ciò vuol dire che la frequenza f_s del segnale \mathcal{V}_s potrà anche essere assai maggiore di f_H (vedi §1), purché $A(f > f_H)$ sia ancora $\gg 1$.

Più precisamente, notiamo che se il guadagno del circuito base dipende dalla frequenza, allora esso è rappresentabile come un numero complesso \mathcal{A} il cui modulo ha, ad esempio, l'andamento di Fig.3 e la cui fase è quella caratteristica di un circuito passa basso con frequenza di taglio superiore f_H . Allora sappiamo (Cap.XII,§2) che \mathcal{A} si può rappresentare come:

$$\mathcal{A} = \frac{A_o}{1 + j\frac{f}{f_H}} = |\mathcal{A}| \exp j\theta_H \quad (\text{XV.42})$$

con

$$|\mathcal{A}| = \frac{A_o}{\sqrt{1 + (\frac{f}{f_H})^2}} \quad \theta_H = -\text{atan} \frac{f}{f_H}$$

con A_o (reale) guadagno in bassa frequenza ($\ll f_H$). Il guadagno \mathcal{A}_f (un numero complesso) sarà dato da una espressione identica alla (18), salvo le impedenze \mathcal{Z}_f e \mathcal{Z}_s al posto di R_f e R_s : tale espressione si riduce alla (41) se $|\mathcal{A}|$ è molto maggiore di 1, ovvero anche per frequenze f maggiori di f_H , ma tali che $\frac{f}{f_H} \ll A_o$; se ad esempio $A_o = 10^6$ e se $\frac{|\mathcal{Z}_f|}{|\mathcal{Z}_s|} \ll A_o$, anche per $f = 10^2 \cdot f_H$ $|\mathcal{A}| \simeq 10^4$ e la (41) resta valida, pur con una approssimazione leggermente meno buona che per $f < f_H$ (si può verificare che la bontà dell'approssimazione è tanto migliore quanto più $\frac{|\mathcal{Z}_f|}{|\mathcal{Z}_s|}$ è piccolo rispetto a A_o).

Questo ora descritto è un altro degli effetti benefici caratteristici della reazione negativa: essa cioè *allarga la banda passante* dell'amplificatore reazionato rispetto alla banda passante dell'amplificatore base; più precisamente si trova che con buona approssimazione il prodotto $A_o \cdot f_H$ dell'amplificatore non reazionato è uguale all'analogo prodotto $|\mathcal{A}_{of}| \cdot f_H$ dell'amplificatore reazionato, cioè la banda si estende di tanto quanto si riduce il fattore di amplificazione.

Tornando al circuito operativo realizzato con impedenze complesse, consideriamo alcune configurazioni particolari. Supponiamo che l'impedenza in reazione (così si chiama \mathcal{Z}_f) sia un condensatore di capacità C_f e che \mathcal{Z}_s sia viceversa puramente resistiva; allora:

$$\mathcal{A}_f = -\frac{\mathcal{Z}_f}{\mathcal{Z}_s} = -\frac{1}{j\omega R_s C_f} \quad (\text{XV.43})$$

Pertanto l'uscita \mathcal{V}_o risulterà proporzionale all'integrale di \mathcal{V}_s in quanto sappiamo che nella rappresentazione delle grandezze sinusoidali mediante numeri complessi, dividere per $j\omega$ equivale a integrare rispetto al tempo. Similmente nel caso che $\mathcal{Z}_f = R_f$, $\mathcal{Z}_s = \frac{1}{j\omega C_s}$ abbiamo:

$$\mathcal{A}_f = -j\omega C_s R_f \quad (\text{XV.44})$$

vale a dire il segnale di uscita è proporzionale alla derivata rispetto al tempo del segnale di ingresso. Quanto visto sopra non è risultato di un puro trucco matematico, ma corrisponde a un fatto fisico che

vale in generale, non solo quando le differenze di potenziale variano in maniera sinusoidale rispetto al tempo.

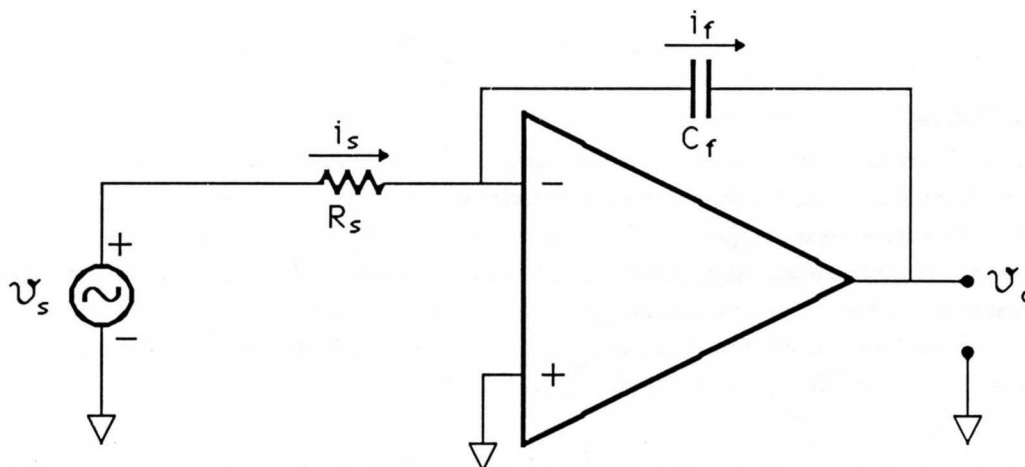


Fig.XV.17

Infatti, supponendo che $v_s(t)$ sia una qualunque funzione del tempo avremo, nel caso del circuito di Fig.17:

$$i_f = i_s = \frac{v_s}{R_s} \quad (\text{XV.45})$$

a motivo del solito fatto che per avere una tensione in uscita finita occorre che l'ingresso $-$ sia allo stesso potenziale dell'ingresso $+$. D'altronde, la tensione v_o sarà uguale alla ddp ai capi del condensatore :

$$v_o = -\frac{q_f}{C_f} = -\frac{1}{C_f} \int_0^t i_f dt = -\frac{1}{C_f R_s} \int_0^t v_s dt \quad (\text{XV.46})$$

dove il tempo 0 è scelto come quello in cui $q_s = 0$, per esempio subito dopo aver scaricato il condensatore C_f mediante un dispositivo non riportato in figura. Si vede così che il circuito si comporta come un vero *integratore matematico* (a parte un segno), indipendentemente dalla effettiva dipendenza funzionale di v_s da t .

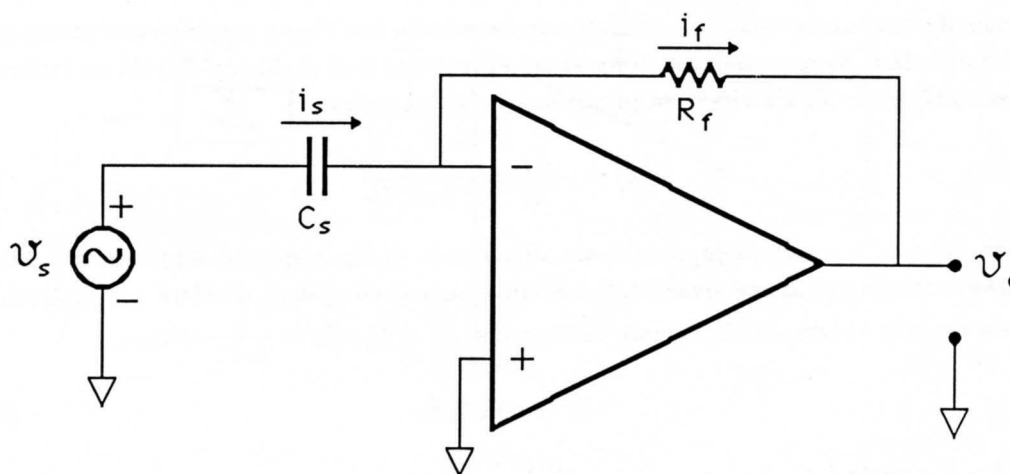


Fig.XV.18

Analogamente si vede che nella configurazione di Fig.18 vale:

$$v_o = -i_f \cdot R_f = -i_s \cdot R_f = -C_s R_f \cdot \frac{dv_s}{dt} \quad (\text{XV.47})$$

cioè la tensione in uscita è proporzionale alla derivata istantanea del segnale v_s cambiata di segno. Consideriamo ora una configurazione circuitale che utilizza un amplificatore base del tipo visto sopra e che consente la realizzazione di un amplificatore di tensione pressoché ideale (resistenza di ingresso molto elevata, resistenza di uscita molto bassa, guadagno indipendente dalla frequenza).

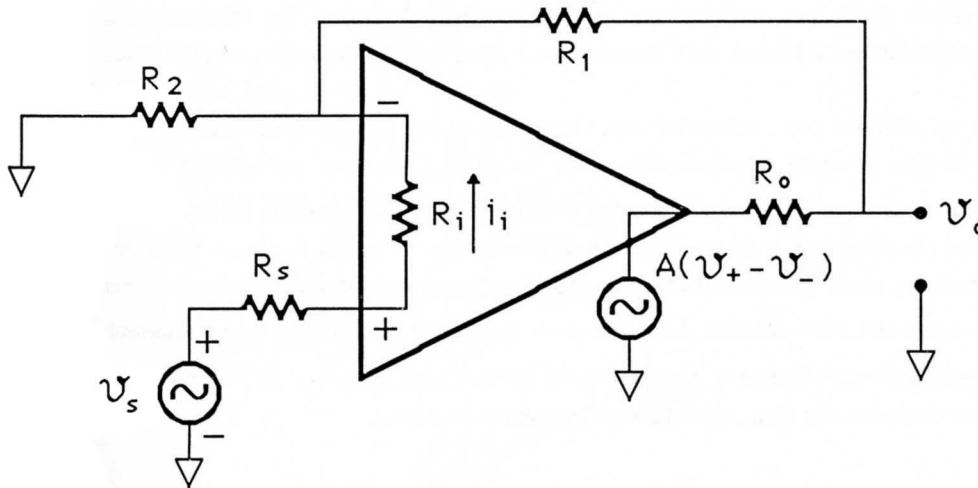


Fig.XV.19

Il circuito è rappresentato nella Fig.19: se A è molto grande possiamo dire che la tensione del terminale $-$ dovrà essere sostanzialmente la stessa del terminale $+$, differendone per una quantità del tipo $-\frac{v_o}{A}$. Dovrà allora essere $v_- = v_s = v_o \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$ poiché, come visto precedentemente, la corrente i_i fra i due terminali $+$ e $-$ sarà sostanzialmente nulla, in quanto gli estremi del ramo sono equipotenziali e sono collegati con una resistenza finita. Pertanto

$$v_o = v_s \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_2} \quad (\text{XV.48})$$

cioè $A_f = \frac{R_1 + R_2}{R_2}$. Si può inoltre dimostrare che la resistenza di uscita tende al valore $\frac{R_o}{A} \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_2}$ e la resistenza di ingresso vale circa $R_i \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} A$. Ciò significa, partendo dai valori di R_o , R_i e A dell'amplificatore base ($\sim 200 \Omega$, $> 10^{10} \Omega$, $> 10^5$ rispettivamente) avere in pratica resistenza di uscita uguale a zero e resistenza di ingresso infinita. Comunque, anche se R_i non fosse stata così grande, per esempio se il blocco base non ha ingressi a Fet, la resistenza di ingresso dell'amplificatore reazionato sarebbe stata comunque elevata.

Questa ora descritta è una configurazione molto comune e assai utilizzata in tutti i casi in cui occorra amplificare una differenza di potenziale e avere un'uscita con una bassa resistenza in serie. A motivo del fatto che il fattore di amplificazione è positivo, l'amplificatore è detto *non-invertente* (mentre la configurazione a operazionale è detta *invertente*).

Se si fa $R_2 \gg R_1$, o addirittura si omette il collegamento fra il terminale $-$ e il comune, si ha (vedi Fig.20a) quello che si chiama un *ripetitore di tensione* (o “+1”, o *follower*, o *buffer*); nella parte b) della Fig.20 è riportato il simbolo che generalmente si usa per tale configurazione.

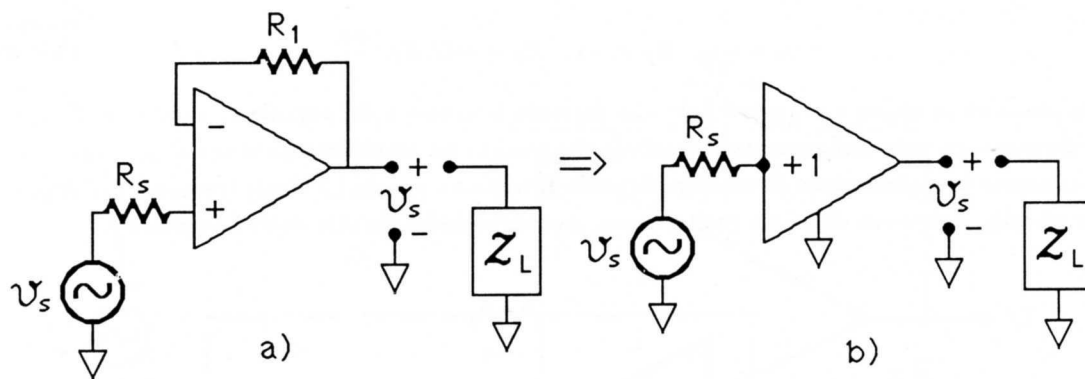


Fig.XV.20

R_1 può anche essere un corto circuito e il ripetitore di tensione funziona ugualmente bene. La funzione del ripetitore di tensione è quella di presentare in uscita la stessa differenza di potenziale, rispetto a massa, che è presente in ingresso, indipendentemente dalla impedenza in serie al generatore in ingresso; la resistenza interna del generatore equivalente di uscita è praticamente zero $\left(\frac{R_o}{A}\right)$ e quindi la tensione resta la stessa qualunque sia l'impedenza di carico Z_L , purché non venga superata la massima corrente che l'amplificatore può erogare in uscita.

5.— Le applicazioni nel campo della strumentazione

Un buffer o un amplificatore di tensione non invertente è un tipico *stadio di ingresso* di un Convertitore analogico digitale (CAD): abbiamo infatti visto che la resistenza di ingresso di un CAD deve essere tanto grande da non influenzare il valore del partitore in ingresso. Stadi di ingresso del tutto simili avranno quei voltmetri elettronici che presentano in ingresso resistenze particolarmente elevate. Ad esempio un *microvoltmetro* di quelli utilizzati come rivelatori di zero, può essere realizzato come in Fig.21.

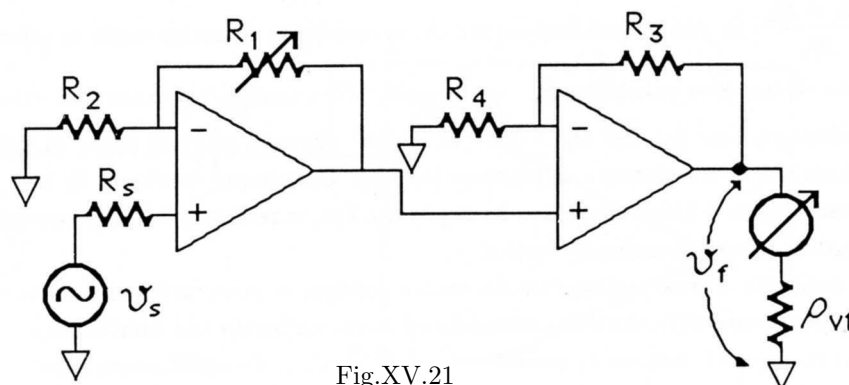


Fig.XV.21

La tensione di uscita

$$v_f = \frac{R_1 + R_2}{R_2} \cdot \frac{R_3 + R_4}{R_4} \cdot v_s \quad (\text{XV.49})$$

è inviata a uno strumento analogico a zero centrale, particolarmente utile se il microvoltmetro deve essere usato per rivelare uno zero. Poiché v_f dovrà essere dell'ordine del Volt (per comandare lo strumento), occorrono guadagni complessivi dell'ordine di $10^5 - 10^6$ e questo è ottenuto tramite due stadi di amplificazione in cascata. Variando R_1 (lasciando R_2, R_3 e R_4 costanti) si può variare la sensibilità dello strumento. Se lo strumento deve essere adoperato per misurare ddp e non come rivelatore di zero, allora invece di presentare l'uscita su uno strumento analogico, si potrà inviare la ddp v_f a un CAD; a parte la precisione del CAD, l'accuratezza dello strumento dipenderà dalla stabilità delle resistenze che determinano il guadagno e dalla precisione con cui esse sono note.

Un microvoltmetro non è realizzabile con un amplificatore base qualunque, ma occorre piuttosto che questo abbia caratteristiche particolari; a questo proposito nel prossimo paragrafo vedremo, anche in connessione con alcuni problemi intrinseci degli amplificatori base (per ora sottaciuti), quali sono i limiti minimi di tensione misurabile.

Come un amplificatore non-invertente si presta perfettamente all'utilizzo come stadio di ingresso di un misuratore ideale di tensione, così un misuratore pressoché ideale di corrente si può realizzare con una configurazione invertente a operazionale (Fig.22).

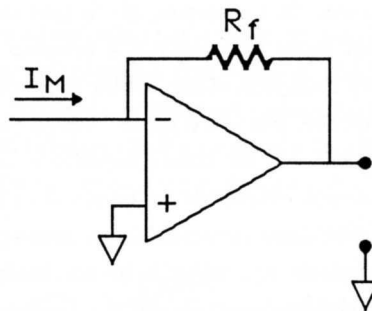


Fig.XV.22

La ddp in uscita è proporzionale alla corrente da misurare e poiché l'ingresso + è a potenziale comune, la resistenza di ingresso è nulla e la caduta di potenziale sullo strumento è zero. E' possibile usare questo milliamperometro elettronico come un comune misuratore di corrente in serie su un ramo di un circuito (Fig.23).

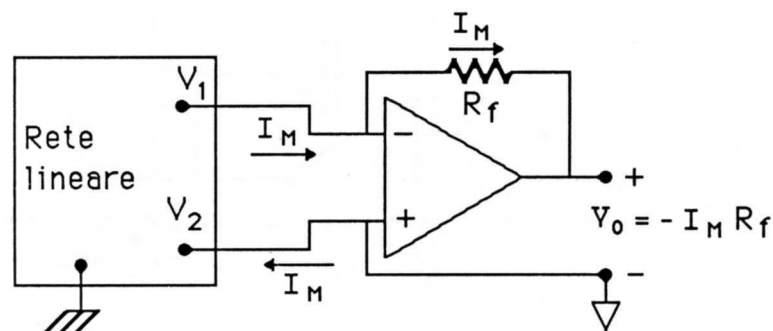


Fig.XV.23

Nell'esempio della figura, $V_1 = V_2$ rappresenta la ddp del terminale comune dell'amplificatore rispetto al terminale di riferimento della rete lineare (che abbiamo ammesso sia a terra). Affinché la configurazione sia effettivamente realizzabile, occorre che la corrente I_M si richiuda attraverso il terminale 2 e non segua altri percorsi, ovvero il terminale (∇) deve essere isolato da terra. Una

maniera semplice di realizzare questa condizione è alimentare lo strumento a pile *(vedi Fig.24): la tensione comune è il “meno” di una pila (V_P) e il “più” dell'altra (V_N).

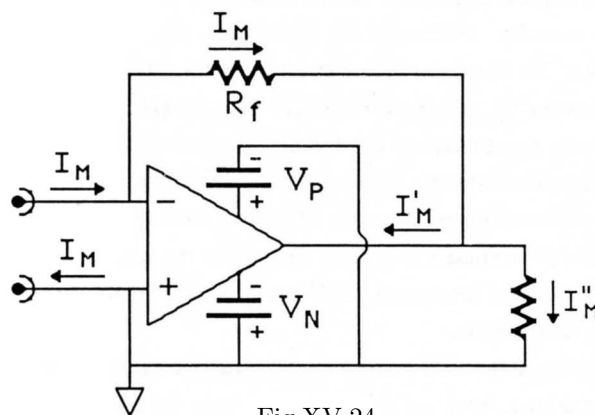


Fig.XV.24

La corrente I_M scorre attraverso la resistenza R_f e pertanto -in definitiva- viene erogata o ricevuta dall'amplificatore e quindi dalle pile (infatti è proprio per questa via che I_M ricompare sul terminale comune); il fatto che l'amplificatore debba erogare questa corrente, fa sì che questa configurazione di misuratore di corrente, per altro ideale, venga raramente impiegata nei multimetri. Infatti ciò porterebbe per prima cosa a un limite superiore assai basso sulla corrente massima misurabile, pari alla corrente massima ottenibile in uscita dall'amplificatore; secondariamente, la presenza di I_M all'uscita dell'amplificatore causerebbe un drenaggio di corrente dalle pile e un loro rapido esaurimento. La configurazione ora vista è invece molto spesso adoperata per costruire strumenti molto sensibili, i cosiddetti *picoAmperometri* o *pAmperometri*, strumenti cioè che riescono a misurare correnti fino a frazioni di pA . La resistenza di reazione in queste applicazioni dovrà essere assai elevata, se si vuole avere in uscita una ddp facilmente misurabile o comunque che non richieda amplificazioni successive particolarmente spinte: ad esempio se $R_f = 1 G\Omega$ una corrente di $1 pA$ dà luogo in uscita a una ddp di $1 mV$ per la quale una successiva amplificazione di un fattore 100 è più che sufficiente.

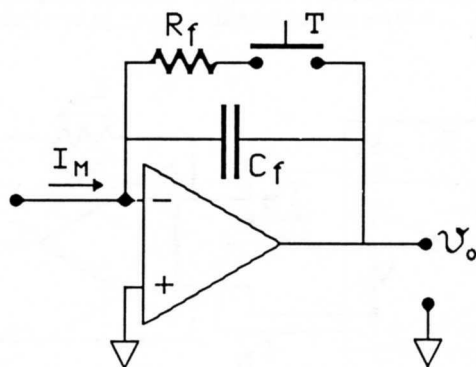


Fig.XV.25

Vale anche qui quanto detto a proposito dei μ Voltmetri, che cioè per costruire un pAmperometro occorre che l'amplificatore base risponda a precisi requisiti e questo sarà visto nel prossimo paragrafo.

* anche se non si usano pile si riesce ugualmente, tramite trasformatori, a ottenere delle tensioni di alimentazione isolate, ovvero con il terminale di riferimento isolato da altri conduttori (Cap.XVII,§8).

Col medesimo circuito base adatto per misurare piccole correnti, si può realizzare un integratore di carica estremamente sensibile, che può vantaggiosamente rimpiazzare il galvanometro balistico in (quasi) tutte le applicazioni (Fig.25). Supponendo di tener chiuso il tasto T fino al tempo $t = 0$ e successivamente di aprirlo, la tensione v_o in uscita sarà proporzionale a $\int_0^t I_M dt$:

$$v_o = -\frac{1}{C_f} \int_0^t I_M dt = -\frac{q_M}{C_f} \quad (\text{XV.50})$$

e sarà tanto più elevata quanto più C_f è piccolo. Valgono per questo circuito, riguardo alla chiusura dei percorsi delle correnti, le identiche considerazioni fatte per il circuito misuratore di corrente. La corrente I_M non deve mai, durante il tempo di integrazione, superare il valore massimo erogabile dall'amplificatore; se questo accade, il meccanismo della reazione diventa inefficace, l'ingresso - non è più alla stessa tensione dell'ingresso + e la risposta non riproduce l'integrale di I_M (vedi anche Cap.VII,§5). L'influenza dei parametri del circuito di base sul funzionamento dell'integratore, anche con riguardo alla resistenza del generatore che invia la corrente I_M , saranno discusse nel paragrafo successivo.

Per quanto riguarda la misura di resistenze, l'impiego di un circuito operativo nei multimetri può risultare utile, soprattutto in connessione con l'uso di CAD del tipo *a rapporto* (in inglese *ratio-metric*), che danno cioè una conversione numerica proporzionale al rapporto della tensione da misurare rispetto a una tensione di riferimento V_{REF} prodotta all'interno del multimetro. Il circuito per la misura di resistenze che sfrutta questa prerogativa del CAD può essere realizzato come in Fig.26.

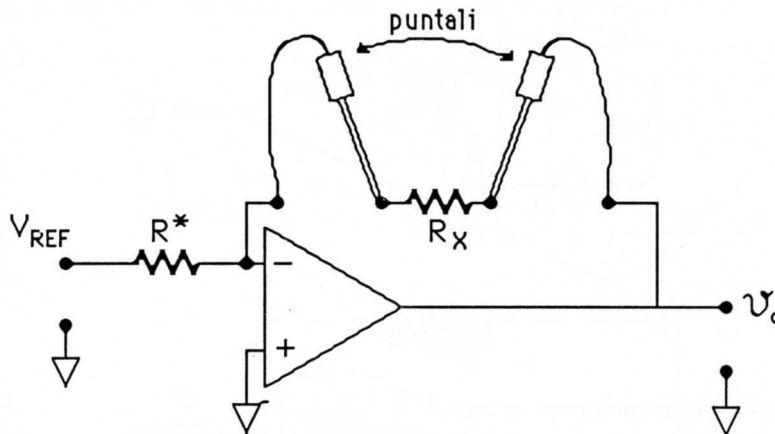


Fig.XV.26

R^* è una resistenza campione interna allo strumento, il cui valore dipende dal fondo scala impostato. La tensione v_o vale:

$$v_o = -V_{REF} \cdot \frac{R_x}{R^*} \quad (\text{XV.51})$$

Il CAD a rapporto (vedi Cap.XVI,§3) presenta poi un codice numerico proporzionale a $\left| \frac{v_o}{V_{REF}} \right| = \frac{R_x}{R^*}$ che dipende solo da R^* e R_x e non da V_{REF} (e quindi neppure da sue instabilità).

Per valori di R_x molto elevati, per non avere tensioni di uscita troppo grandi, conviene invertire R_x con R^* e in questo caso l'uscita del multimetro dà valori di conduttanza e non di resistenza. Anche nel caso dello schema ora descritto, valgono le solite considerazioni sull'influenza della resistenza dei puntali, particolarmente importanti se R_x è di valore non elevato.

6.— Tensione di offset e corrente di bias

Consideriamo un amplificatore usato come blocco base di amplificatori reazionati dei tipi precedentemente descritti. Finora abbiamo assunto che $v_o = A(v_+ - v_-)$; più realisticamente si trova che*:

$$v_o = A(v_+ - v_- - V_{off}) \quad (\text{XV.52})$$

dove V_{off} è una tensione in genere piccola ($< 10^{-2} V$) detta *tensione di offset* (di ingresso); essa rappresenta la ddp presente tra l'ingresso + e l'ingresso - quando l'uscita è a 0 V. L'origine fisica di questo tipo di comportamento dipende dalla non perfetta uguaglianza degli stadi di ingresso, ma non discuteremo questi aspetti e ci limiteremo a considerare alcune procedure atte a ridurre gli effetti indesiderati indotti dalla presenza di questa tensione spuria. Una maniera molto semplice per tenere conto della V_{off} , è quella di ammettere che il nostro circuito sia costituito da un amplificatore con tensione di offset nulla, ma che presenti all'utente due terminali (-, +) che non sono esattamente quelli (N, P) fra i quali è presente la ddp da amplificare (Fig.27), ma ne differiscano per un generatore di tensione V_{off} in serie.

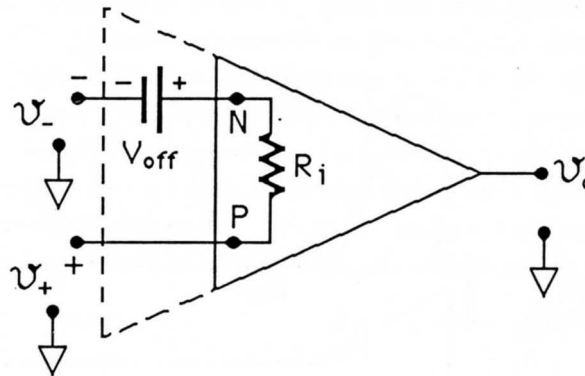


Fig.XV.27

In questa schematizzazione abbiamo infatti:

$$v_o = A(V_P - V_N) = A(v_+ - v_- - V_{off}) \quad (\text{XV.53})$$

La linea a tratteggio sta a indicare che i terminali accessibili sono - e + (e non N e P). Usando questo schema equivalente è facile rendersi conto quale è l'effetto della tensione di offset in configurazioni di amplificatori reazionati. Ad esempio nella configurazione a operazione vera e proprio abbiamo lo schema riportato nella Fig.28:

* Come accennato all'inizio del capitolo non considereremo il fatto, per altro molto importante, che nei casi pratici la tensione di uscita dipende anche dalla somma $v_+ + v_-$; ammettiamo cioè che nelle nostre applicazioni l'effetto spurio associato a questa dipendenza sia meno importante degli altri che andiamo a considerare.

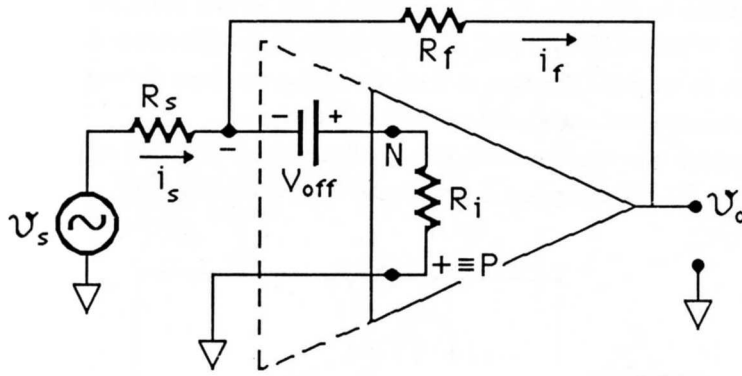


Fig.XV.28

Nell'ipotesi che $A \gg 1$, il terminale N deve trovarsi a massa e quindi il terminale $-$ sarà a $-V_{off}$. Avremo quindi

$$i_s = \frac{v_s + V_{off}}{R_s} \quad (XV.54)$$

$$i_s = i_f \quad (XV.55)$$

e conseguentemente:

$$v_o = -V_{off} - i_f \cdot R_f = -V_{off} - \frac{v_s + V_{off}}{R_s} \cdot R_f = -\frac{v_s R_f}{R_s} - V_{off} \frac{R_s + R_f}{R_s} \quad (XV.56)$$

Nella configurazione non invertente abbiamo invece la situazione di Fig.29:

$$v_- = v_s - V_{off} \quad (XV.57)$$

e quindi

$$v_- = v_s - V_{off} = v_o \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (XV.58)$$

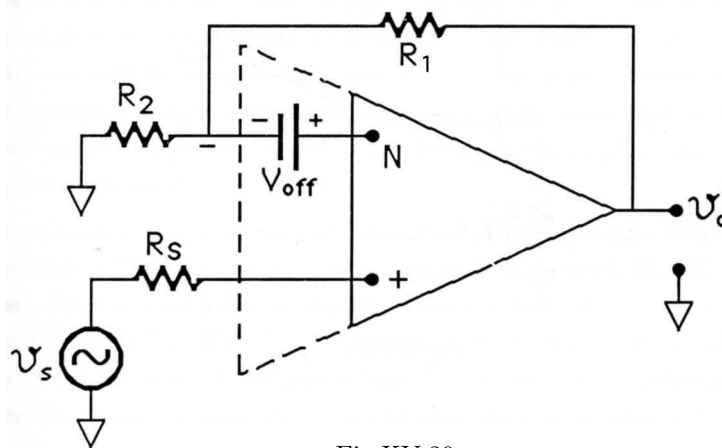


Fig.XV.29

Conseguentemente abbiamo:

$$v_o = (v_s - V_{off}) \cdot \frac{R_2 + R_1}{R_2} \quad (XV.59)$$

In entrambe le configurazioni la presenza di V_{off} introduce un errore nella relazione fra v_o e v_s rispetto al caso in cui $V_{off} = 0$ (vedi (38) e (48) da confrontare rispettivamente con (56) e (59)). In entrambe le configurazioni la tensione di offset si mescola con la tensione del segnale e rischia, per v_s piccole, di dare un contributo sostanziale alla tensione di uscita.

Questi effetti spuri si possono eliminare nella prima configurazione (Fig.28) aggiungendo in serie all'ingresso + un generatore V_z che compensi esattamente V_{off} (vedi Fig.30).

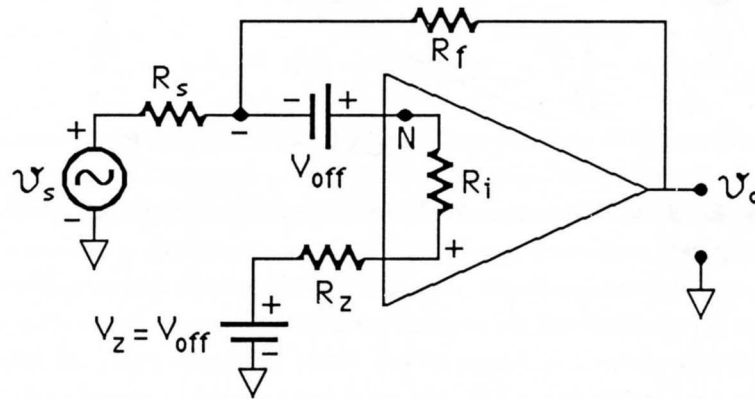


Fig.XV.30

In questo modo si ripristina una configurazione equivalente a quella di un amplificatore con tensione di offset $V_{off} = 0$. Il generatore V_z può ottenersi, mediante un forte rapporto di partizione, da una tensione di riferimento V_{REF} (Fig.31).

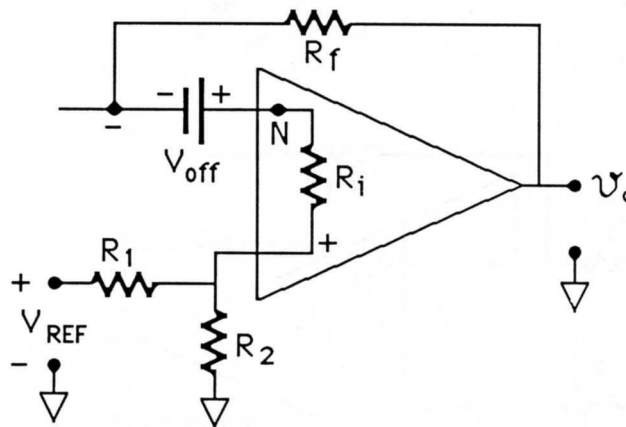


Fig.XV.31

E' facile rendersi conto che la resistenza interna R_z del generatore è di fatto influente (purché il guadagno A sia $\gg 1$ e R_i sia finita). Nella configurazione non invertente si potrebbe operare similmente (Fig.32) aggiungendo il generatore $V_z = V_{off} \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_1}$ in serie a R_2 ; la resistenza interna di V_z deve essere questa volta $\ll R_2$, altrimenti occorre tenerne conto.

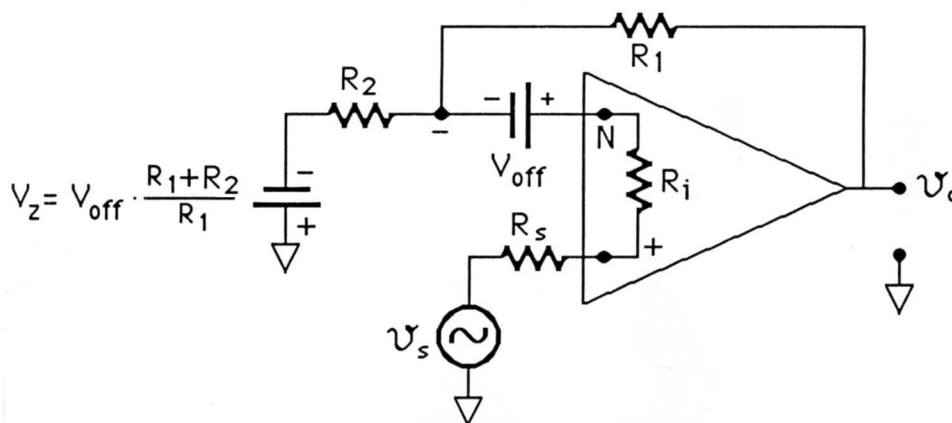


Fig.XV.32

Esistono altri sistemi, anche più diffusi dei precedenti, per eliminare i contributi della tensione di offset; tuttavia queste soluzioni rimuovono solamente il *valore statico* della tensione di offset e non possono compensare le instabilità della tensione di offset associate alla sua dipendenza dalla temperatura. Il costruttore, a questo riguardo, fornisce il valore tipico di $\frac{\Delta V_{off}}{\Delta T}$ (in μV per $^{\circ}C$), ovvero la variazione per grado centigrado della tensione di offset. Valori di V_{off} e $\frac{\Delta V_{off}}{\Delta T}$ per amplificatori abbastanza curati da questo punto di vista (LF157) sono: $|V_{off}| \simeq 2 \text{ mV}$, $\left| \frac{\Delta V_{off}}{\Delta T} \right| \simeq 5 \mu V/^{\circ}C$. Per costruire dei microvoltmetri è chiaro che occorre disporre di amplificatori base con caratteristiche decisamente superiori a queste, per rendere effettivamente possibile la misura di differenze di potenziale dell'ordine dei μV : la tecnica è in grado di produrre amplificatori con caratteristiche ottime riguardo alla tensione di offset (AMP-01): $|V_{off}| \simeq 15 \mu V$, $\left| \frac{\Delta V_{off}}{\Delta T} \right| \simeq 10^{-1} \mu V/^{\circ}C$, che si prestano perfettamente per il primo stadio di amplificazione di un microvoltmetro. Per la presenza di una V_{off} statica residua di qualche μV , un microvoltmetro deve comunque possedere un controllo sulla tensione di offset (del tipo di quelli in Fig.31 o 32 a seconda della configurazione). Mediante tale controllo si effettua l'azzeramento di v_o quando lo strumento è collegato ai terminali fra i quali deve misurare la ddp e i generatori della rete sono sostituiti dalle loro resistenze interne. A questo controllo di offset si dà sempre un margine di regolazione assai maggiore di quello necessario per compensare la sola tensione di offset del circuito amplificatore base: in questo modo è allora possibile correggere anche altri effetti spuri, per esempio le ddp termoelettriche e di contatto presenti nel circuito (vedi anche Cap.IV,§8).

Un'altra sorgente di errore negli amplificatori reali adoperati come blocchi base di circuiti operazionali è la *corrente di bias* (polarizzazione): questa è la corrente che entra nei due terminali di ingresso, in genere differente per i due terminali, dovuta al fatto che gli ingressi + e - sono costituiti dai gates di due Fet (vedi Cap.XVIII). Le correnti in questione (impropriamente dette "di bias") nient'altro sono che le correnti di polarizzazione inversa del *diodo gate-canale* contropolarizzato; come tali sono praticamente indipendenti da qualunque altro parametro, salvo la temperatura, dalla quale dipendono viceversa fortemente (tipicamente per Fet al silicio raddoppiano a ogni aumento di $10^{\circ}C$).

Tenendo conto di queste correnti negli ingressi, l'amplificatore base va disegnato come in Fig.33. Il segno delle correnti sarà il medesimo per i due ingressi e dipende solo dal fatto se il Fet è canale n o canale p .

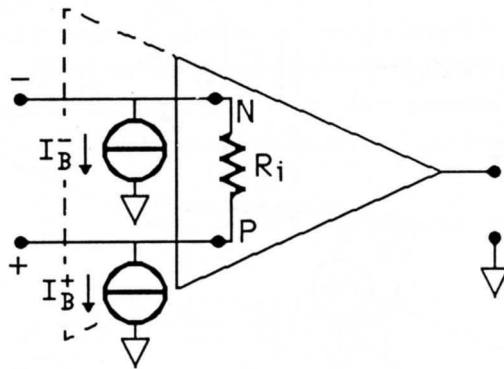


Fig.XV.33

Nello schema di sopra è stata omessa la tensione di offset, ma in genere anche essa andrà considerata. Valori tipici (LF157) delle correnti di bias (a 25°C) sono $\sim 50 \text{ pA}$, con una differenza fra le due correnti (*input offset current*) di un ordine di grandezza inferiore.

Guardiamo come queste correnti alterano il comportamento di un circuito reazionato, considerando dapprima la configurazione a operazionale vero e proprio, cioè invertente (Fig.34).

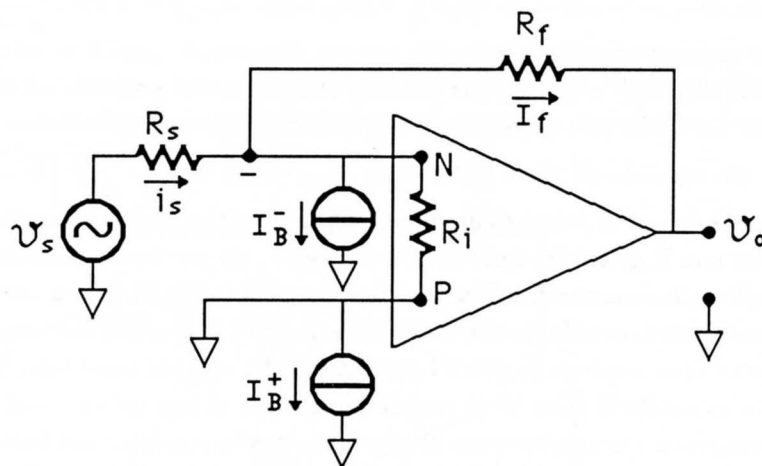


Fig.XV.34

Per quanto riguarda la corrente I_{B+} essa è inessenziale perché essa scorre dal terminale comune verso il terminale + e non provocherà alcuna caduta essendo zero la resistenza del collegamento. Se anche vi fosse una resistenza, essa, per dare qualche effetto misurabile, dovrebbe essere assai elevata, dato il valore di I_{B+} . Il problema è viceversa presente nel nodo - in quanto la presenza di I_{B-} fa sì che:

$$i_f = i_s - I_{B-} \quad (\text{XV.60})$$

e quindi

$$v_o = -i_s \cdot R_f + I_{B-} \cdot R_f \quad (\text{XV.61})$$

(la condizione che $v_- \simeq v_+$ resta ferma, perché $A \gg 1$). Abbiamo così :

$$v_o = -(i_s - I_{B-}) \cdot R_f = -v_s \frac{R_f}{R_s} + I_{B-} R_f \quad (\text{XV.62})$$

La relazione (60) è quella che interessa nel caso che si voglia realizzare un misuratore di corrente e si vede direttamente che la corrente di bias I_{B-} va a sommarsi algebricamente con i_s .

Nella configurazione non invertente (Fig.35), la corrente di bias I_{B+} modifica la tensione del terminale +.

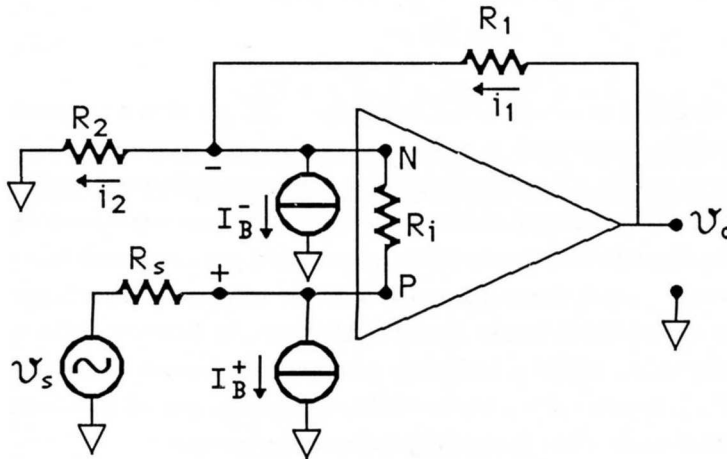


Fig.XV.35

Inoltre la presenza di I_{B-} fa sì che

$$i_2 = i_1 - I_{B-} \quad (\text{XV.63})$$

e quindi essendo

$$i_1 = \frac{v_o - v_s + I_{B+} R_s}{R_1} \quad (\text{XV.64})$$

e

$$i_2 = \frac{v_s - I_{B+} R_s}{R_2} \quad (\text{XV.65})$$

abbiamo finalmente:

$$v_o = v_s \left(\frac{R_1 + R_2}{R_2} \right) - I_{B+} R_s \frac{(R_1 + R_2)}{R_2} + I_{B-} R_1 \quad (\text{XV.66})$$

Anche qui si vede che prima di avere effetti sensibili sulla tensione v_o , il valore delle resistenze (principalmente R_s e R_1) deve essere assai elevato.

Torniamo alla configurazione a operazionale, impiegata per misurare correnti (Fig.36).

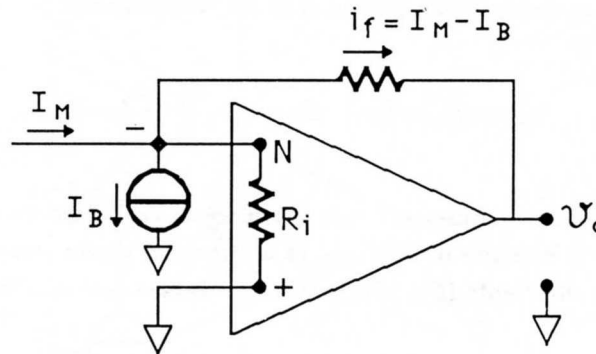


Fig.XV.36

Abbiamo visto che in realtà si misura non I_M , bensì $I_M - I_B$; per eliminare questo contributo in linea di principio basterebbe, tramite un opportuno generatore di corrente, inviare nel nodo $-$ un'altra corrente esattamente uguale a I_B . Purtroppo, come nel caso della tensione di offset, questa operazione toglie il contributo della corrente di bias solo fintanto che essa è costante; sappiamo viceversa che la corrente di bias dipende fortemente dalla temperatura per cui questo tipo di correzione rischia di essere assolutamente priva di senso a meno di non termostatare il tutto (oppure di inviare una corrente di correzione che abbia lo stesso tipo di andamento in funzione della temperatura). Amplificatori base particolarmente adatti a realizzare pAmperometri hanno correnti di bias anche assai inferiori al pA (a $25^\circ C$); spesso questa caratteristica si accompagna a una tensione di offset e a una instabilità della tensione di offset non corrispondentemente basse. Nelle varie applicazioni si tratterà di ottimizzare o l'una o l'altra delle caratteristiche (scegliendo cioè l'opportuno amplificatore base), per ridurre al minimo gli errori a esse associati. Studiamo questo problema nel caso di un integratore operazionale. Sia la configurazione in esame quella di Fig.37.

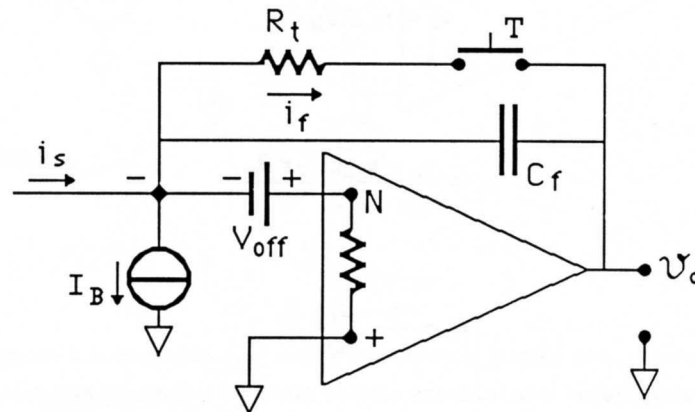


Fig.XV.37

I_B e V_{off} sono i residui *non compensati* della corrente di bias e della tensione di offset, cioè o le componenti erratiche o le variazioni associate agli inevitabili sbalzi termici. In ingresso è indicata semplicemente la corrente i_s ; nel seguito esprimeremo i_s in funzione delle grandezze misurabili, a seconda del tipo di eccitazione inviata all'integratore. Calcoliamoci ora la tensione v_o : il nodo $-$ deve trovarsi in ogni istante alla tensione $-V_{off}$ (per

mantenere a zero la ddp fra i terminali N e $+$); inoltre $i_f = i_s - I_B$. Pertanto:

$$v_o(t) + V_{off} = -\frac{Q_f(t)}{C_f} = -\frac{1}{C_f} \int_0^t i_f dt - \frac{Q(0)}{C_f} = -\frac{1}{C_f} \int_0^t i_s dt + \frac{I_B}{C_f} t - \frac{Q(0)}{C_f} \quad (\text{XV.67})$$

Per il tempo $t = 0$ è scelto l'istante in cui si apre il tasto dopo averlo tenuto chiuso per un tempo sufficiente a scaricare C_f , quando la corrente i_s era ancora nulla (cioè il segnale è $\neq 0$ solo per $t > 0$). $Q(0)$ rappresenta la carica che il condensatore possiede all'istante dell'apertura del tasto. Il collegamento a resistenza molto bassa fra l'ingresso $-$ e l'uscita rende questi due elettrodi equipotenziali * e pertanto:

$$Q(0) = (v_o(0) + V_{off}) \cdot C_f = 0 \quad (\text{XV.68})$$

Abbiamo così :

$$v_o(t) = -\frac{1}{C_f} \int_0^t i_s dt + \frac{I_B}{C_f} \cdot t - V_{off} \quad (\text{XV.69})$$

Si tratta ora di vedere l'espressione di i_s nei vari casi che si possono presentare: consideriamo dapprima la condizione in cui si voglia scaricare un condensatore C_s su cui è accumulata una carica Q_{s0} (Fig.38).

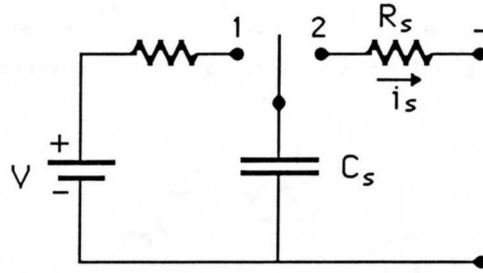


Fig.XV.38

Non si ridisegna tutto il circuito operativo, ma solo il terminale $-$ che si trova costantemente a tensione $-V_{off}$. Il condensatore sia inizialmente carico a tensione $V = \frac{Q_{s0}}{C_s}$; una volta che al tempo $t = \theta$ si stabilisce il collegamento con la resistenza R_s , esso si scaricherà secondo la legge:

$$Q_s = (Q_{s0} + V_{off}C_s) \exp\left(-\frac{t-\theta}{\tau}\right) - V_{off}C_s \quad (t > \theta) \quad (\text{XV.70})$$

come si può ricavare applicando la seconda legge di Kirchhoff alla maglia C_s, R_s ($\tau = R_s C_s$); l'integrale di i_s fra l'inizio della scarica (per $t = \theta > 0$) e un tempo $(T + \theta) \gg \tau$ sarà dato da

$$\int_{\theta}^{T+\theta} i_s dt = Q_s(\theta) - Q_s(T + \theta) = Q_{s0} + V_{off}C_s = (V + V_{off})C_s \quad (\text{XV.71})$$

Quindi sostituendo la (71) nella (69) abbiamo:

$$v_o(T + \theta) = -(V + V_{off})\frac{C_s}{C_f} + \frac{I_B}{C_f} \cdot (T + \theta) - V_{off} \quad (\text{XV.72})$$

* stiamo ammettendo che V_{off} non cambi fra prima e dopo l'apertura di T e che il tasto non introduca ddp di contatto confrontabili con V_{off} ; quest'ultima ipotesi francamente può essere non molto realistica.

Entrambi gli effetti spuri (V_{off} , I_B) sono presenti; tuttavia mentre V_{off} contribuisce solo a modificare il valore della tensione di carica del condensatore C_s (pochi μV su qualcosa dell'ordine del Volt), la corrente di bias introduce una *deriva* nella tensione v_o e quindi un errore tanto più grande quanto più è grande T , cioè quanto più è lungo l'intervallo di tempo fra la commutazione del tasto su C_s e la lettura di v_o . In genere, in casi come quello ora descritto, questa deriva della tensione è un effetto relativamente piccolo. Infatti se mettiamo dei numeri realistici ($C_s = 1 \mu F$, $V = 1 V$, $R_s = 1 k\Omega$, $C_f = 1 \mu F$, $V_{off} = 5 \mu V$ e $I_B = 50 pA$) troviamo che la parte per così dire *regolare* di v_o , cioè $V \frac{C_s}{C_f}$, vale $1 V$, mentre $V_{off} \cdot \frac{C_s}{C_f} = 5 \mu V$ e $\frac{I_B}{C_f} T$ per ($T \simeq 10 s$) vale $5 \cdot 10^{-4} V$ molto maggiore del contributo di V_{off} , ma comunque ancora trascurabile in molti casi. Si può anche osservare che il rapporto *parte regolare/effetto spurio* non dipende da C_f poiché entrambi vengono scalati del medesimo fattore al variare di C_f . Si noti piuttosto che nei casi pratici possono intervenire effetti spuri molto più importanti della corrente di bias, ma con essa confondibili come sintomi: ad esempio un non perfetto isolamento dei due contatti (1 e 2) del tasto (Fig.38) può portare a una corrente pari al rapporto fra V e la resistenza R_{is} di isolamento fra i due contatti che, entrando nel nodo $-$, si comporta come una corrente di bias. Riprendendo l'esempio di prima, se $V = 1 V$ e $R_{is} = 10^{10} \Omega$ (un valore ragionevole), tale corrente risulta di $100 pA$, maggiore di quella di bias.

Consideriamo ora il caso in cui i_s sia dovuta alla variazione di flusso di B in una bobina; il circuito di eccitazione è riportato in Fig.39 con $v_s = -\frac{d\Phi(B)}{dt}$; supponiamo che la variazione di flusso $\Delta\Phi$ avvenga entro due limiti di tempo $\theta > 0$ e $T + \theta$, e che quindi $v_s(t) = 0$ per $t < \theta$ e per $t > T + \theta$.

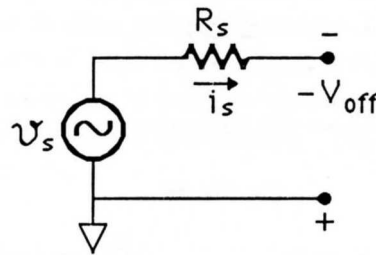


Fig.XV.39

Avremo così

$$i_s = \frac{v_s + V_{off}}{R_s} \quad (XV.73)$$

e quindi

$$\int_{\theta}^{T+\theta} i_s dt = \frac{1}{R_s} \int_{\theta}^{T+\theta} v_s dt + \frac{V_{off}}{R_s} \cdot T = -\frac{\Delta\Phi}{R_s} + \frac{V_{off}}{R_s} \cdot T \quad (XV.74)$$

Inserendo la (74) nella (69), che contiene ora un termine aggiuntivo pari a $\frac{V_{off}}{C_f R_s} \cdot t$, otteniamo per v_o :

$$v_o = \frac{\Delta\Phi}{R_s C_f} + \frac{1}{C_f} \left(I_B - \frac{V_{off}}{R_s} \right) \cdot (T + \theta) - V_{off} \quad (XV.75)$$

Il segno di $\Delta\Phi$ dipenderà dalla particolare condizione sperimentale, ma in genere siamo interessati al valore assoluto della variazione; il segno di I_B e V_{off} non è in genere sotto il nostro controllo e quindi in una fase di stima degli effetti sarà bene considerare pessimisticamente la loro combinazione. Si vede che a una risposta *regolare* dell'integratore, si aggiunge una deriva dovuta a V_{off} che molto spesso, se R_s non è sufficientemente grande, può dominare largamente rispetto al contributo di I_B : infatti supponendo di avere $V_{off} = 5 \mu V$, se $R_s = 1 k\Omega$ abbiamo $\frac{V_{off}}{R_s} \simeq 5 nA$ contro $I_B = 50 pA$; in queste condizioni, aumentare R_s non migliora la situazione (come cambiare C_f) poiché il rapporto

parte regolare/effetto spurio rimane costante.

La scelta di un particolare circuito base può quindi essere diversa a seconda delle applicazioni; occorre valutare i contributi di V_{off} e I_B , tenendo conto delle misure che con l'integratore vengono fatte. Gli esempi ora fatti suggeriscono comunque che, per applicazioni in cui si abbia in ingresso un generatore con bassa resistenza interna, diventa indispensabile ridurre la tensione di offset, mentre per alte resistenze del generatore di ingresso la cura maggiore va posta nel ridurre la corrente di bias. Prima di concludere con questi aspetti è opportuno ricordare che l'intervallo T in molti casi pratici (quelli che si presentano in laboratorio) è principalmente determinato dai tempi necessari per scaricare il condensatore C_f , commutare il tasto di C_s (o far variare il flusso di B) e poi compiere la lettura della tensione v_o , per esempio con un multimetro (il tempo τ di scarica di C_s in genere sarà assai piccolo, nel caso precedente $\sim 10^{-3}$ s); facilmente il tutto può richiedere qualche secondo. In un sistema di procedura elettronico in cui l'intervento umano fosse escluso e la lettura affidata a sistemi tipo *sample and hold*, questi tempi si riducono notevolmente e rendono il contributo degli effetti di deriva trascurabili anche in applicazioni di grande precisione.

Per completare il panorama delle fonti di indeterminazione nelle misure con un integratore operativo, vanno citati i problemi associati al guadagno finito A e al rumore (e questi problemi sono generali per ogni applicazione, non valgono solo per l'integratore).

Il fatto che A sia finito fa sì che l'ingresso $-$ e l'ingresso $+$ non siano esattamente equipotenziali, ma si trovino a $\frac{v_o}{A}$ Volt; se $v_o \simeq 1$ V e $A \simeq 10^5$, ciò corrisponde ad avere una tensione di $10 \mu\text{V}$ in ingresso dello stesso ordine di V_{off} ; tale ddp avrà anche effetti simili a V_{off} , salvo il fatto che il suo valore cresce proporzionalmente all'uscita (e quindi complica un po' la quantificazione dell'effetto). La cura consiste ovviamente nell'aumentare A , cioè scegliere un amplificatore base con il guadagno A più alto possibile; di fatto però amplificatori con $A \gg 10^6$ non vengono costruiti, poiché, proprio a causa dell'alto guadagno, negli amplificatori reazionati che li utilizzano si innescano facilmente oscillazioni permanenti. Se siamo interessati ad applicazioni in bassa frequenza, riducendo la banda passante si può riuscire ad aumentare A di uno o due ordini di grandezza rispetto ai valori detti prima, senza avere oscillazioni e quindi si può ridurre sufficientemente anche questo effetto.

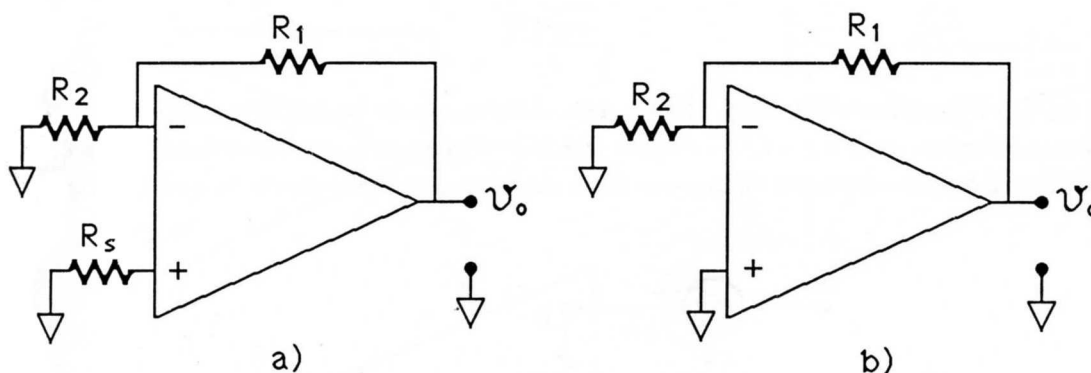


Fig.XV.40

Infine esaminiamo il problema del *rumore*, che stabilisce un limite al minimo segnale effettivamente misurabile: supponiamo di avere un amplificatore base con tensione di offset e corrente di bias uguali a zero (oppure perfettamente annullate); orbene, anche in queste ipotesi, circuiti come quelli in Fig.40a e 40b avrebbero una uscita non identicamente uguale a zero: precisamente, se osservassimo con un oscillografo v_o , troveremmo un andamento erratico di questa tensione, che si manterrebbe comunque a media nulla. Nella Fig.41 è riprodotta proprio una fotografia dell'immagine

che effettivamente si presenta su uno schermo oscillografico misurando la tensione v_o .



Fig.XV.41

Questa tensione fluttuante è il *rumore* dell'amplificatore ed è dovuto a vari contributi (temperatura finita, granularità della corrente ...) in genere assai complicati da trattare; quello che a noi interessa per il momento sapere, è che questo contributo è intrinsecamente presente e interessa tutta la banda passante dell'amplificatore. Il rumore può cioè scomporsi in componenti sinusoidali e si trova che l'ampiezza (media) di queste componenti dipende dalla frequenza e che non si annulla per nessun valore di essa. L'ampiezza di queste componenti è diversa per ogni tipo di amplificatore base e il costruttore dichiara quale è il rumore all'ingresso di quel particolare modello, dando la radice della cosiddetta *densità spettrale di rumore*:

$$\sqrt{\frac{\overline{v_R^2}(f)}{\delta f}} \quad (\text{XV.76})$$

dove $\overline{v_R^2}(f)$ è il quadrato del valore efficace delle componenti sinusoidali di tensione di rumore con frequenza compresa fra f e $f + \delta f$. Il rumore cioè lo si attribuisce (come la tensione di offset) a un generatore di tensione presente all'ingresso di un amplificatore ideale esente da rumore (Fig.42).

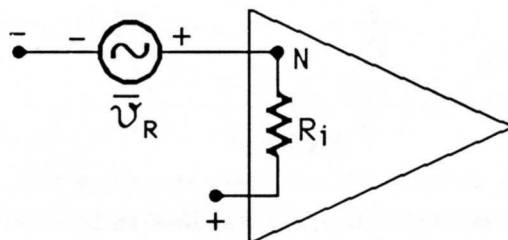


Fig.XV.42

Con $\overline{v_R}(f)$ nel seguito indicheremo il valore efficace della tensione di rumore integrata su una banda larga 1 Hz ($\delta f = 1 \text{ Hz}$) attorno a f ; esso quindi numericamente coincide con la radice della

densità spettrale di rumore a quella frequenza .
 Valori tipici sono (LF157):

$$f = 100 \text{ Hz} : \quad \sqrt{\frac{v_R^2}{\delta f}} = 15 \frac{nV}{\sqrt{Hz}}$$

$$f = 1000 \text{ Hz} : \quad \sqrt{\frac{v_R^2}{\delta f}} = 12 \frac{nV}{\sqrt{Hz}}$$

Sperimentalmente si trova che il rumore aumenta al diminuire della frequenza; per frequenze inferiori a 10 Hz si possono avere ampiezze dell'ordine dei μV in amplificatori particolarmente curati da questo punto di vista. Se non si prendono particolari precauzioni, le tensioni di uscita contengono sempre contributi di rumore che, solo se le ddp di ingresso sono relativamente grosse, saranno trascurabili. In quelle applicazioni in cui viceversa il rumore può dare un contributo importante, come ad esempio in un μV oltmetro o in un pAmpmetro, si sfrutta il fatto che le misure generalmente si riferiscono a grandezze continue o comunque molto lentamente variabili nel tempo: si può così limitare fortemente la banda passante dell'amplificatore a una frequenza di taglio superiore $f'_H \ll f_H$, con f_H definita nel §1, Fig.3 e praticamente eliminare tutte le componenti di rumore a frequenza più grande di f'_H . Per limitare la banda si può procedere come illustrato nella Fig.43a e 43b per le configurazioni invertente e non invertente rispettivamente; nella configurazione di Fig.43a si trova, per il segnale v_s :

$$v_o = -v_s \cdot \frac{Z_f}{R_s} = -v_s \cdot \frac{\frac{R_f}{1 + j\omega R_f C_f}}{R_s} = -v_s \frac{R_f}{R_s} \frac{1}{1 + j\omega R_f C_f} \quad (XV.77)$$

cioè

$$|A_f| = \frac{R_f}{R_s} \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R_f^2 C_f^2}} \quad (XV.78)$$

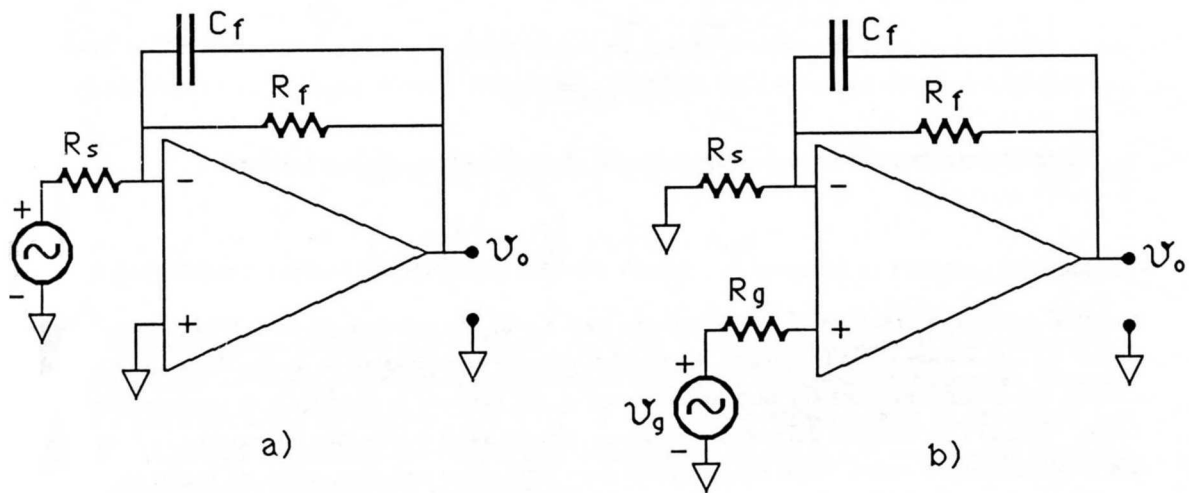


Fig.XV.43

Per il circuito di Fig.43b si ha per la risposta a una eccitazione v_g :

$$v_g = v_o \left(\frac{R_s}{R_s + \frac{R_f}{1 + j\omega C_f R_f}} \right) \quad (XV.79)$$

e pertanto

$$v_o = v_g \left(1 + \frac{R_f}{R_s} \frac{1}{1 + j\omega R_f C_f} \right) \quad (\text{XV.80})$$

$$\mathcal{A}_f = 1 + \frac{R_f}{R_s} \frac{1}{1 + j\omega R_f C_f} \quad (\text{XV.81})$$

Si vede così che il primo caso (vedi (77) e (78)) corrisponde alla risposta di un filtro passa basso con una frequenza di taglio superiore $f'_H = \frac{1}{2\pi R_f C_f}$; il secondo caso è leggermente diverso, poiché l'amplificazione \mathcal{A}_f tende, per $\omega \rightarrow \infty$, non a 0 come nel passa basso, ma a 1. Tuttavia ciò di fatto significa che, se $R_f/R_s \gg 1$, solo le componenti armoniche del segnale v_s o v_g con frequenza minore di f'_H vengono amplificate dai nostri sistemi, mentre le armoniche con $f \gg f'_H$ risultano sostanzialmente assenti in uscita. Se le eccitazioni sono ddp continue, esse risultano amplificate come se fosse $C_f = 0$. Questo è vero per i generatori esterni di segnale; il generatore equivalente di rumore \bar{v}_R si trova però in una configurazione topologicamente differente, la stessa in entrambi i casi (Fig.44).

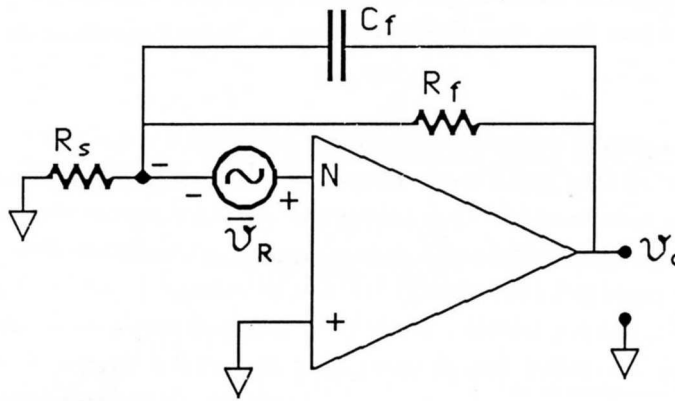


Fig.XV.44

Si trova, ragionando in maniera pressoché identica al caso ultimo trattato

$$v_o = -\bar{v}_R \left(1 + \frac{R_f}{R_s} \frac{1}{1 + j\omega R_f C_f} \right) \quad (\text{XV.82})$$

e quindi a parte la presenza di un contributo pari a $-\bar{v}_R$, la restante parte dell'amplificazione tende a zero all'aumentare della frequenza, cosicché il rumore complessivo in uscita diminuisce rispetto al caso in cui il condensatore C_f non fosse presente; ciò avviene in entrambe le configurazioni, e pertanto, essendo l'eccitazione del segnale continua, risulta assai migliorato il rapporto *segnale/disturbo*. Un μ Voltmetro da usare come rivelatore di zero può avere una frequenza di taglio superiore (ottenuta tramite il condensatore C_f) anche dell'ordine di qualche secondo. Ciò spiega la lentezza della risposta di strumenti di questo genere alle variazioni di tensione ΔV , che si hanno durante la procedura di azzeramento di un ponte; infatti un amplificatore di questo genere ha una risposta che, a parte costanti moltiplicative e il termine uguale a 1 nella configurazione non invertente, è identica a un filtro passa basso; esso, a una variazione brusca ΔV di tensione, risponde come $V_C = \Delta V [1 - \exp(-\frac{t}{\tau})]$, $\tau = RC = \frac{1}{2\pi f'_H}$ (vedi Cap.XII,§2 e Cap.VI,§2). Le componenti residue, molto lente, di rumore sono osservabili solo quando lo strumento è posto nella massima

sensibilità; si osservano allora variazioni erratiche nell'indicazione, nonostante che il valore medio non si discosti sostanzialmente da zero.

Il generatore di tensione di rumore in ingresso non descrive completamente tutte le sorgenti di rumore del sistema; infatti, per avere una completa caratterizzazione del rumore del sistema, occorre introdurre, in parallelo agli ingressi, anche un generatore di corrente i_R con densità spettrale $\sqrt{\frac{i_R^2}{\delta f}}$. Per valutare gli effetti complessivi di tutte le sorgenti di rumore nel sistema reazionato dovremo considerare lo schema della Fig.45.

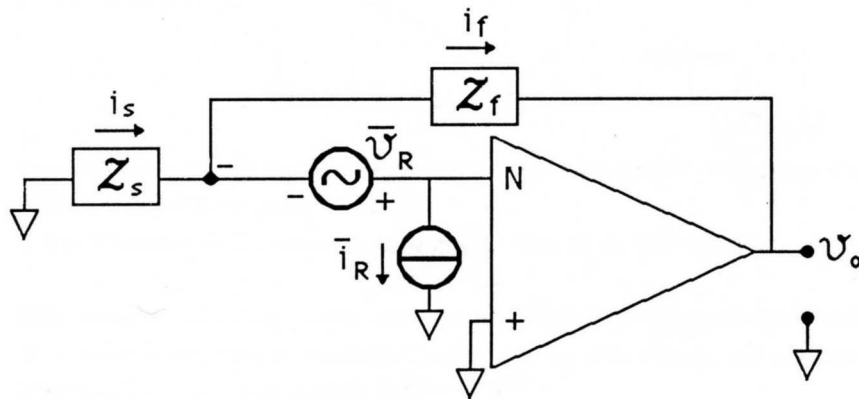


Fig.XV.45

Sempre nell'ipotesi semplificativa di avere $A \rightarrow \infty$, per la tensione di rumore in uscita troveremo (vedi ragionamenti fatti per il caso formalmente identico della tensione di offset e la corrente di bias) :

$$v_{or}^2 = \overline{v_R^2} \left| \frac{Z_f + Z_s}{Z_s} \right|^2 + \overline{i_R^2} |Z_f|^2 \quad (\text{XV.83})$$

Si noti che si sommano i quadrati dei valori efficaci, essendo le sorgenti di rumore, per ipotesi, incoerenti.

Prendendo dei valori tipici (LF157) ($\overline{v_R} = 15 \text{ nV}$, $\overline{i_R} = 10^{-2} \text{ pA}$ su una banda di 1 Hz centrata a 100 Hz) si trova che il rumore associato al generatore di tensione è largamente dominante: dovremo infatti avere una impedenza di modulo $|Z_f| > 10^6 \Omega$ e $|Z_s|$ dello stesso ordine di grandezza per osservare un contributo del rumore di corrente confrontabile con quello di tensione; questo risultato è tipico per amplificatori integrati con ingressi a Fet.

7.— Il ripetitore di tensione come un potenziometro ad azzeramento automatico

Consideriamo un ripetitore di tensione realizzato con un amplificatore avente guadagno base $A \gg 1$ (Fig.46).

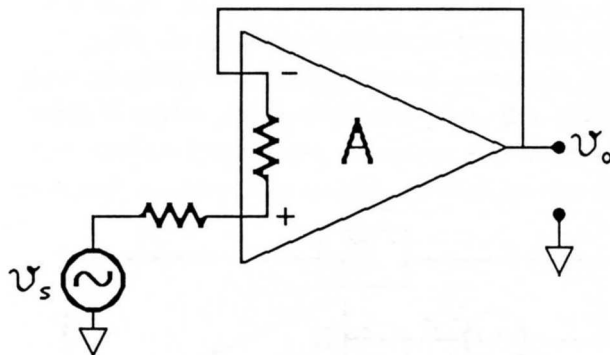


Fig.XV.46

La tensione di uscita v_o è tale per cui:

$$(v_s - v_o)A = v_o \quad (\text{XV.84})$$

cioè

$$v_o = \frac{Av_s}{1 + A} \quad (\text{XV.85})$$

e quindi se $A \gg 1$, $v_o = v_s$ come avevamo già dimostrato (vedi (48) con $R_2 \gg R_1$). Il punto che vogliamo ora mettere in evidenza è che il sistema può essere interpretato in modo suggestivo come un'applicazione del metodo potenziometrico di opposizione di due fem, avente però una procedura automatica di azzeramento: infatti qualunque variazione del segnale v_s provoca una variazione dello stesso segno in uscita, e quindi sull'ingresso $-$, che tende a compensare la divaricazione, fra le tensioni dei terminali, che l'aveva provocata. Le due fem in ingresso vengono cioè mantenute uguali (in realtà a una differenza di potenziale molto piccola: $\frac{v_s}{A}$) esattamente come la tensione da misurare e quella di confronto in un potenziometro. Abbiamo già visto che nel caso del ripetitore di tensione è proprio il bilanciamento delle ddp agli ingressi che rende la corrente derivata dal generatore v_s comunque assai piccola, cioè molto elevata la resistenza verso massa, anche se R_i non è particolarmente grande: e questo è quanto accade anche nel metodo potenziometrico di confronto di due fem, nel quale infatti la corrente all'equilibrio è nominalmente zero.

Altre applicazioni dei circuiti amplificatori operazionali saranno viste nel seguito; in particolare vedremo come si possono realizzare *diodi di precisione* e *generatori di corrente* pressoché ideali. Questi argomenti saranno trattati quando si parlerà rispettivamente dei diodi a semiconduttore (Cap.XVII) e dei transistori a effetto di campo (Cap.XVIII).

Prima di concludere questo capitolo è bene soffermarsi su un'implicita ipotesi che sta alla base di tutta la trattazione dell'argomento di questo capitolo: precisamente che un amplificatore reale possa sempre caratterizzarsi dal punto di vista circuitale come una rete lineare. Ciò è sicuramente una buona, in molti casi ottima, approssimazione, ma sicuramente resta una *schematizzazione*. Se avessimo voluto compiere una descrizione accurata dell'amplificatore considerando anche le non linearità

della sua risposta (ad esempio una dipendenza del fattore di amplificazione A dal valore del segnale di ingresso o di uscita), la trattazione si sarebbe oltremodo complicata. Vogliamo solo ricordare che tali effetti *comunque* esistono per cui, dal punto di vista pratico, l'operazione di amplificazione comporta sempre, almeno a un certo livello, anche la *distorsione* del segnale amplificato: ovvero, in termini di analisi di Fourier, un segnale sinusoidale v_i in ingresso all'amplificatore con il contributo di una sola armonica fondamentale ω_F , non è accompagnato da un segnale amplificato v_o caratterizzato dalla sola componente di frequenza ω_F (come ci aspetteremmo se l'amplificatore equivallesse a una rete puramente lineare), ma v_o conterrà piuttosto anche componenti armoniche diverse con ampiezze non nulle. Un po' schematicamente si può dire, e ne vedremo il perché quando faremo un esempio concreto di amplificatore (Cap.XVIII), che le distorsioni del segnale di uscita saranno tanto più marcate, quanto più vicina sarà l'ampiezza della ddp amplificata alle tensioni di alimentazione dell'amplificatore .

NOTA BIBLIOGRAFICA

Esistono numerosissimi testi ben fatti sull'argomento del capitolo. Per citarne uno dei più diffusi, precisi e chiari : **MI 72** (Cap.13, 15, 16).

Per i concetti fondamentali della reazione negativa il Cap.11 di **TE 57**, è esemplare per sintesi e chiarezza.

L'influenza della tensione di offset, della corrente di bias e del rumore nelle misure di basso livello e alta precisione è studiata in maniera elementare, ma esauriente, nel già citato "Low Level Measurements" della Keithley Instruments Inc.

IL CONVERTITORE ANALOGICO-DIGITALE

1.- Introduzione

In questo capitolo descriveremo alcuni tipi di *Convertitore analogico-digitale* (CAD) impiegati nella strumentazione di misura in continua o in bassa frequenza; si tratta quindi di convertitori in cui sono ottimizzate caratteristiche di *linearità integrale* e di *precisione*, non il *tempo di conversione*. Faremo anche un esempio in qualche modo “complementare”, cioè di un convertitore veloce, ma non particolarmente preciso. Prima di illustrare i principi di funzionamento dei CAD è importante definire alcuni termini e descrivere alcuni dispositivi presenti comunemente in un CAD.

Clock: si intende un segnale ripetitivo del tipo in Fig.1 caratterizzato da una frequenza $f_C = \frac{1}{T_C}$ e una ampiezza V rispetto a zero; valori tipici di V possono essere dell'ordine di alcuni *Volt*.

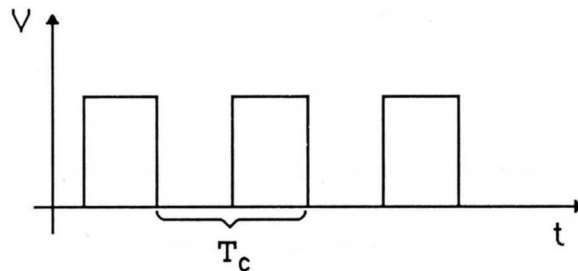


Fig.XVI.1

Switch (interruttore) elettronico: un contatto che si apre o si chiude (cioè presenta resistenza infinita o zero fra due terminali 1-2) a seconda del valore della ddp V_C fra un terminale di controllo C e uno di riferimento. Come simbolo possiamo usare quello in Fig.2.

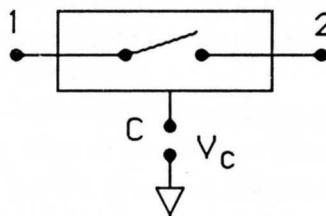


Fig.XVI.2

Un sistema di questo genere si può realizzare tramite un Fet (Cap.XVIII); a seconda che si tratti di un Fet *canale n* o di un Fet *canale p* la apertura avverrà con una tensione V_C negativa o positiva

rispettivamente, mentre il tasto risulterà chiuso, per entrambi i tipi di Fet, quando $V_C = 0$; affinché lo stato di apertura e chiusura dell'interruttore dipenda solo dal valore di V_C , i terminali 1 e 2 della Fig.2 devono trovarsi a potenziali assai prossimi a quello del riferimento in ogni condizione di lavoro (vedi Cap.XVIII). Facendo ricorso anche ad altri tipi di transistori a effetto di campo (MosFet a *depletion* e a *enhancement*), si riescono a costruire interruttori elettronici che si dispongono in chiusura e apertura (o *viceversa*) a seconda che la ddp V_C si trovi nell'intorno di 0 V e 5 V; negli esempi che faremo nei prossimi paragrafi non ci soffermeremo a precisare il tipo di interruttore adoperato per quella certa funzione, ma specificheremo soltanto la relazione che intercorre fra lo stato di apertura e chiusura e il valore di V_C .

Comparatore: si tratta di un *amplificatore differenziale* (Fig.3) con guadagno $A \gg 1$ in cui il terminale dell'ingresso + si trova a una tensione di riferimento V_R .

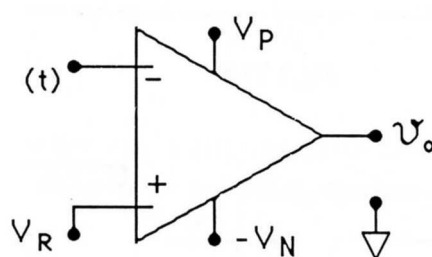


Fig.XVI.3

Quando la tensione $v(t)$ è minore di V_R la tensione v_o è positiva [$v_o = A(v_+ - v_-)$], mentre quando $v(t)$ è maggiore di V_R , l'uscita andrà negativa. Solo nel caso in cui le due tensioni di ingresso siano identiche l'uscita v_o si trova a zero. Un amplificatore non progettato per funzionare da comparatore, per differenze anche piccole fra $v(t)$ e V_R presenta una tensione di uscita molto vicina alle tensioni di alimentazione ($+V_P$ o $-V_N$) e, come si dice, *satura*; si trova che ciò compromette la prontezza con la quale l'uscita v_o cambia valore in corrispondenza dell'attraversamento del valore V_R da parte della tensione $v(t)$; nei circuiti progettati per funzionare da comparatori si fa in modo che l'uscita sia comunque limitata fra due valori di tensione V^+ e V^- lontani dalla saturazione; in questo modo il sistema è capace di reagire prontamente al cambiamento di segno della differenza $v(t) - V_R$. Con riferimento alla Fig.4, la tensione v_o passa da uno stato stazionario all'altro nell'istante in cui la tensione $v(t)$ assume momentaneamente il valore V_R della tensione all'altro terminale. I livelli V^+ e V^- dipendono dal tipo di comparatore e non sono necessariamente uno positivo e l'altro negativo; spesso lo stato basso corrisponde a una tensione prossima a 0 V.

Contatore (a N bit): Un contatore binario a N bit è un dispositivo elettronico con un terminale di ingresso, detto di *Clock*, al quale si può applicare un clock; sugli N terminali di uscita, secondo un criterio del tipo visto nel Cap.XIV,§2, in ogni istante è composto il numero (binario) di oscillazioni compiute dal segnale di clock a partire dall'istante in cui il numero era costituito da N zeri. Ciò si realizza con N moduli base detti *bistabili* o *flip-flop* posti in cascata, cioè con l'uscita di uno collegata con l'ingresso del successivo. Ognuno di questi moduli ha le seguenti caratteristiche (Fig.5):

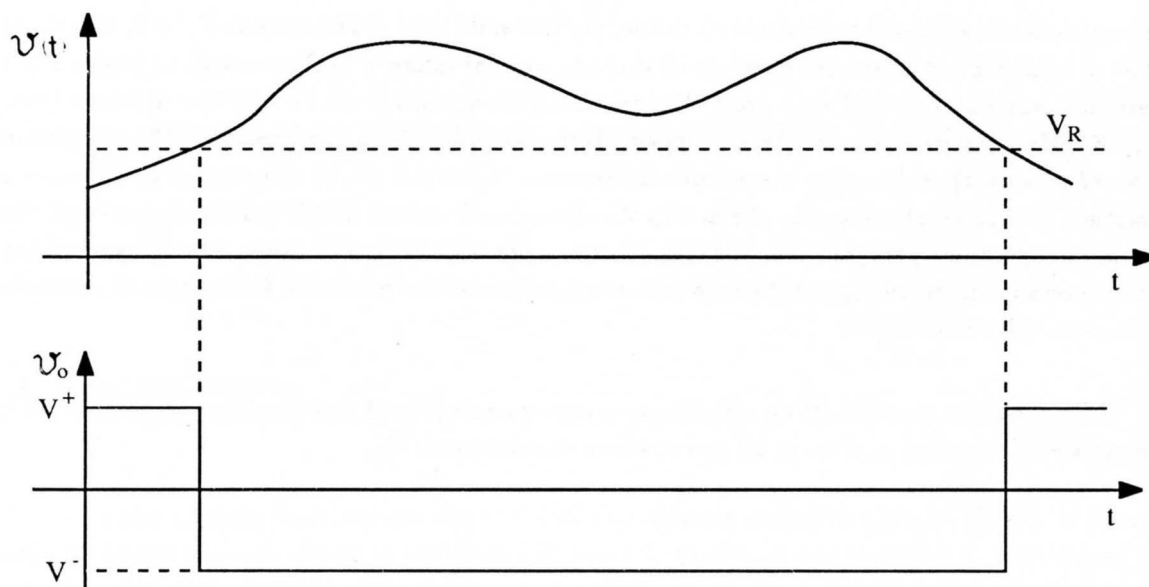


Fig.XVI.4

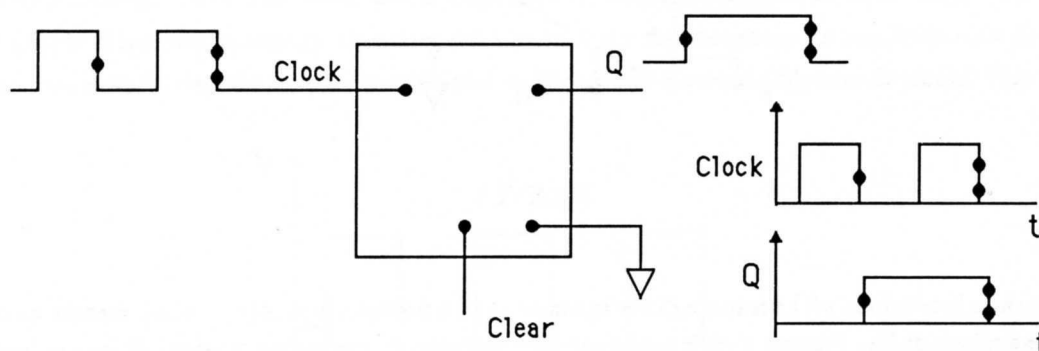


Fig.XVI.5

L'uscita Q del circuito può assumere solo due stati stazionari di tensione (identificabili simbolicamente come "0" e "1") per esempio $0 V$ e $5 V$ (nel caso della cosiddetta logica TTL "0" corrisponde a $V < 0.8 V$, "1" a $V > 2 V$). La transizione fra l'uno e l'altro di questi stati avviene quando il segnale di Q compie una transizione dal livello alto di tensione (diciamo $5 V$) a quello basso (diciamo $0 V$). Applicando una tensione definita (per esempio $0 V$) al terminale di $Clear$, si può forzare l'uscita Q del bistabile a "0" ovvero -secondo la nostra convenzione- $0 V$. Se colleghiamo N bistabili in cascata, con l'uscita Q di uno collegata con l'ingresso Q del successivo, abbiamo realizzato un contatore binario a N bit, il numero binario essendo composto dall'insieme delle uscite Q degli N contatori (Fig.6). Infatti, supponiamo di aver portato a zero le uscite Q di tutti i bistabili tramite il terminale $Clear$ e quindi di applicare un segnale di clock all'ingresso omonimo del primo flip-flop; all'atto della prima transizione verso il basso del primo impulso di clock, l'uscita Q_1 del primo bistabile andrà a "1"; tale transizione è inefficace nei confronti del bistabile successivo. La uscita Q_2 viceversa farà la transizione "0" \rightarrow "1" quando il secondo fronte discendente dell'impulso di clock ribalterà l'uscita del primo bistabile facendola passare da "1" a "0"; avremo così "0" sul primo bistabile e "1" sul secondo e ancora "0" su tutti gli altri. Ragionando così anche per gli impulsi

successivi di clock ci si rende conto che il numero binario corrispondente a M ($< 2^N - 1$) impulsi di clock è composto dalle uscite Q ordinate dei bistabili del contatore, a ognuna delle quali è quindi associato un bit. "Ordinate" si riferisce al fatto che il primo flip-flop dà il bit meno significativo (LSB, *least significant bit*), l'ultimo il bit più significativo (MSB, *most significant bit*).

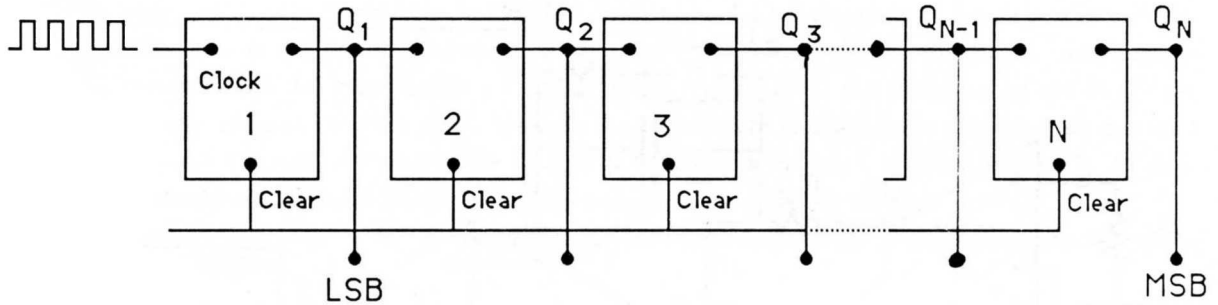


Fig.XVI.6

Monostabile: è un dispositivo che in risposta a un impulso di tensione in ingresso, anche estremamente rapido, genera all'uscita un segnale di ampiezza V (per esempio 5 V) e durata T_M (Fig.7).

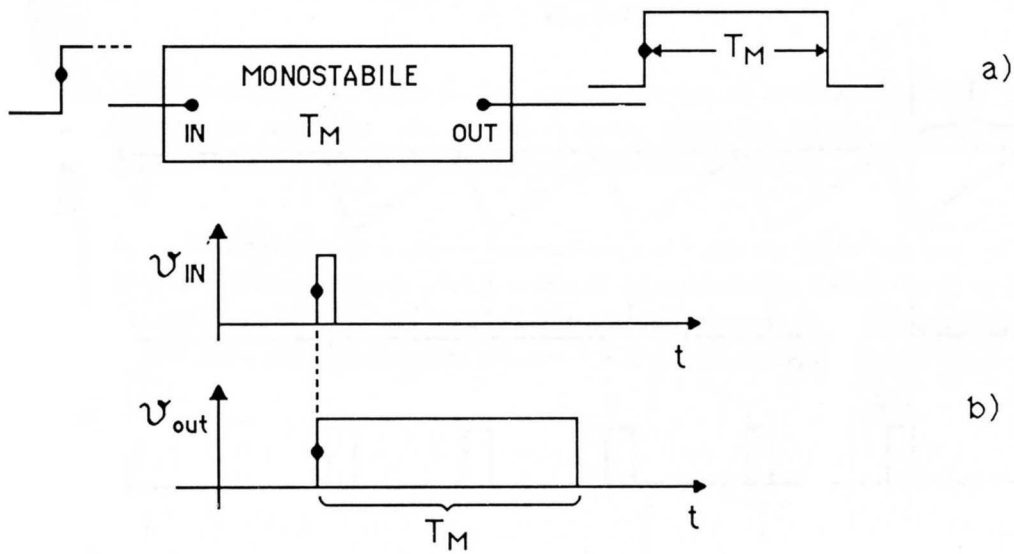


Fig.XVI.7

Il motivo per cui l'impulso di ingresso (detto *trigger*) può anche essere molto più breve della durata T_M , è che l'ingresso del monostabile è sensibile alle transizioni "0" → "1" e non a quelle "1" → "0" (o viceversa, a secondo del tipo di monostabile).

2.- Il Convertitore analogico-digitale basato sulla conversione tensione-frequenza

Supponiamo di avere il seguente circuito (Fig.8a).

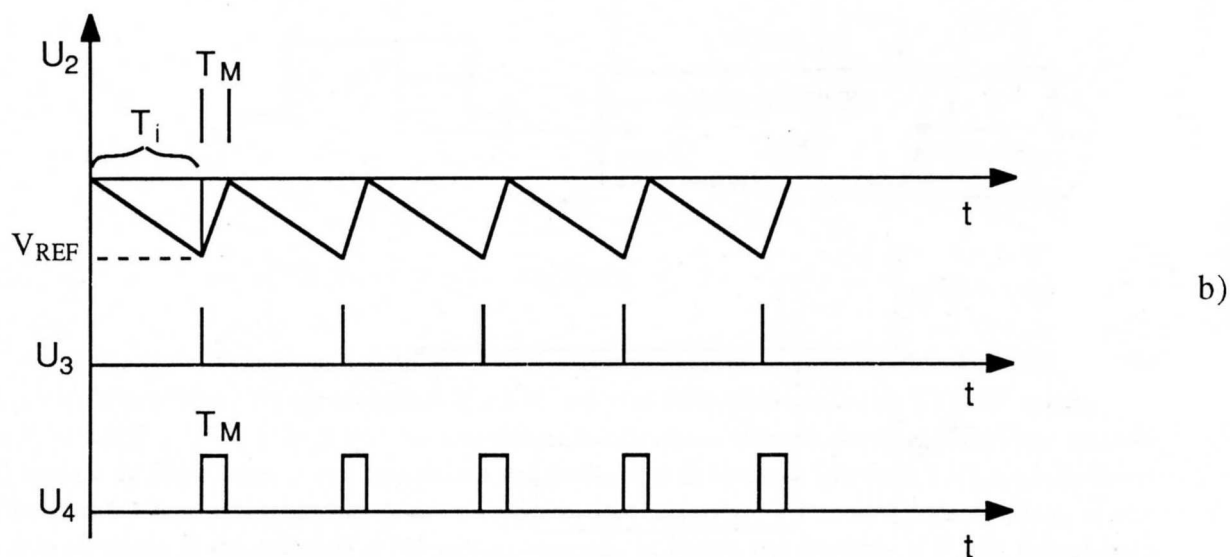
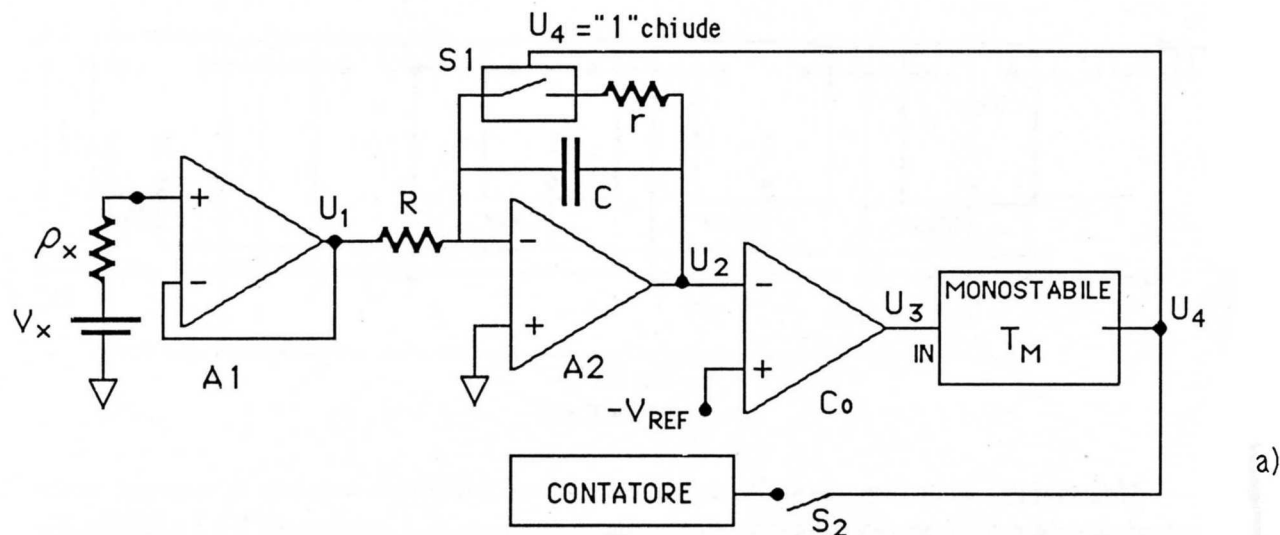


Fig.XVI.8

A1 è un ripetitore di tensione che invia all'integratore successivo A2 una corrente $I = V_x/R$. A2 è un integratore la cui uscita comanda il comparatore Co. Supponiamo di trovarci nella condizione in cui U_2 è negativo, ma in valore assoluto minore di V_{REF} (Fig.8b): l'uscita U_3 del comparatore è nello stato basso, U_4 nello stato logico "0" e lo switch S1 aperto, vale a dire A2 sta integrando la tensione $V_x = U_1$; l'uscita U_2 diminuisce linearmente in funzione del tempo:

$$U_2 = -\frac{V_x}{RC}t \quad (\text{XVI.1})$$

(l'origine dei tempi è scelta come in Fig.8b).

Quando, al tempo

$$T_i = \frac{V_{REF}}{V_x} \cdot RC \quad (XVI.2)$$

il segnale U_2 raggiunge il valore $-V_{REF}$, l'uscita U_3 del comparatore passa a una tensione positiva (stato logico "1"): tale transizione fa scattare l'uscita U_4 del monostabile al valore positivo e pertanto, chiudendo lo switch $S1$, provoca la scarica del condensatore C . La durata T_M dell'impulso in U_4 , caratteristica del monostabile, è scelta molto minore di T_i ma molto maggiore di rC per assicurare una completa scarica di C . Quando il condensatore si è scaricato e la tensione di uscita dell'integratore è a zero, il monostabile compie la transizione inversa e riapre il tasto $S1$; $A2$ ricomincia pertanto a integrare la corrente I e il ciclo si ripete indefinitamente.

Nella nostra ipotesi ($T_M \ll T_i$), la frequenza di ripetizione della forma d'onda all'uscita del monostabile è data da:

$$f = \frac{1}{T_i} = \frac{V_x}{V_{REF}} \cdot \frac{1}{RC} \quad (XVI.3)$$

corrispondente al numero di transizioni che l'uscita U_4 compie in un secondo.

Il circuito ora descritto è detto *Convertitore tensione-frequenza*; da esso, molto facilmente, si può ottenere un Convertitore analogico-digitale. Infatti basta inviare il segnale U_4 a un contatore per un tempo definito T per registrare su di esso un numero di conteggi N_c pari a:

$$N_c = f \cdot T = \frac{V_x}{V_{REF}RC} \cdot T \quad (XVI.4)$$

Nella Fig.8a abbiamo indicato $S2$ come un interruttore meccanico, mentre ovviamente si tratterà di uno switch elettronico aperto per una durata di tempo molto ben precisa, definita tramite un orologio di precisione contenuto nello strumento (un oscillatore al quarzo).

L'uscita di questo convertitore è quindi proporzionale al rapporto fra la tensione da misurare V_x e una tensione di riferimento V_{REF} (cioè si tratta di un convertitore a rapporto); un difetto di questo tipo di convertitore è che la sua taratura dipende dal valore di R , C e T e pertanto la sua accuratezza dipende dalla stabilità di queste grandezze in funzione del tempo e della temperatura.

3.— Il Convertitore a pendenza duale o a doppia rampa

Questo CAD è particolarmente adatto all'impiego nei multimetri per le caratteristiche di precisione che lo contraddistinguono e per l'indipendenza della sua taratura dalla stabilità di componenti, quali resistenze e capacità (a differenza dall'esempio del paragrafo precedente).

Il principio su cui tale convertitore (a N bit) si basa è spiegato con riferimento alla Fig.9.

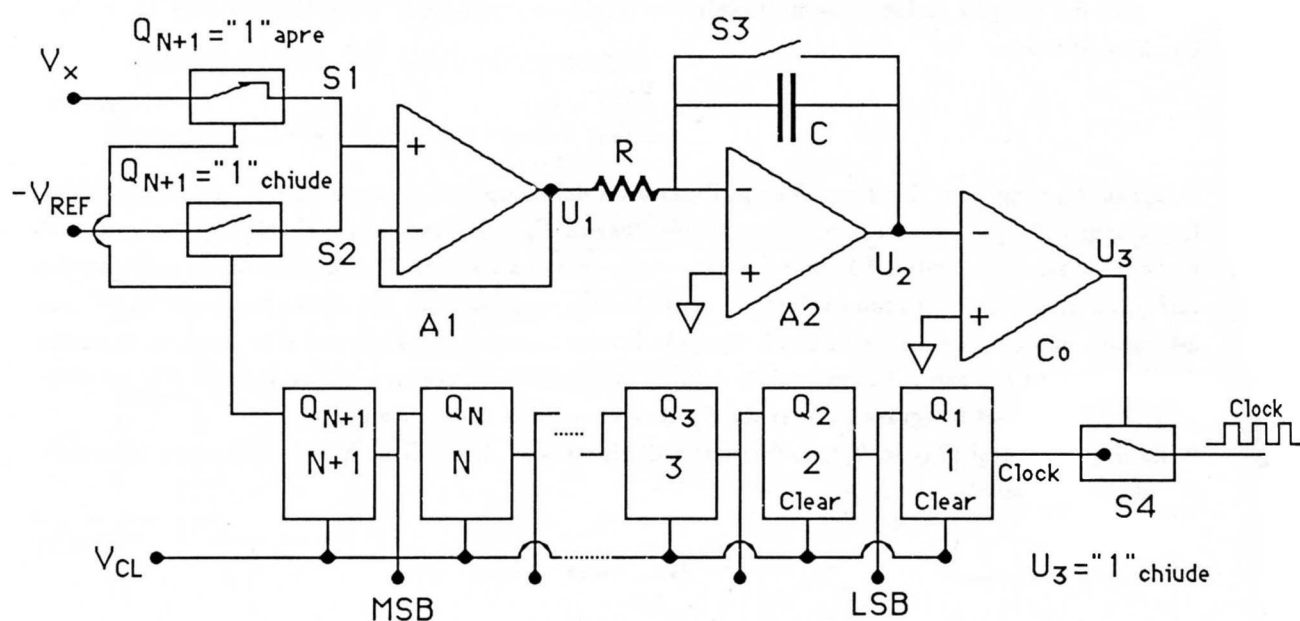


Fig.XVI.9

All'istante $t = 0$ si apre lo switch $S3$ che ha mantenuto scarico il condensatore C , e si rimuove la tensione V_{CL} applicata sui terminali *Clear* dei flip-flop che li forzava a "0" (*Reset*). Queste funzioni sono compiute automaticamente, mediante dispositivi elettronici, dal convertitore; non entriamo in questi dettagli che sono inessenziali per i nostri scopi. Essendo tutte le uscite degli $N + 1$ flip-flop a "0" e in particolare quella dello $(N + 1)$ -esimo, lo switch $S1$ è chiuso (e $S2$ aperto) e la tensione da misurare V_x è applicata all'integratore tramite il buffer $A1$. Pertanto la tensione U_2 comincia a decrescere linearmente col tempo: (Fig.10)

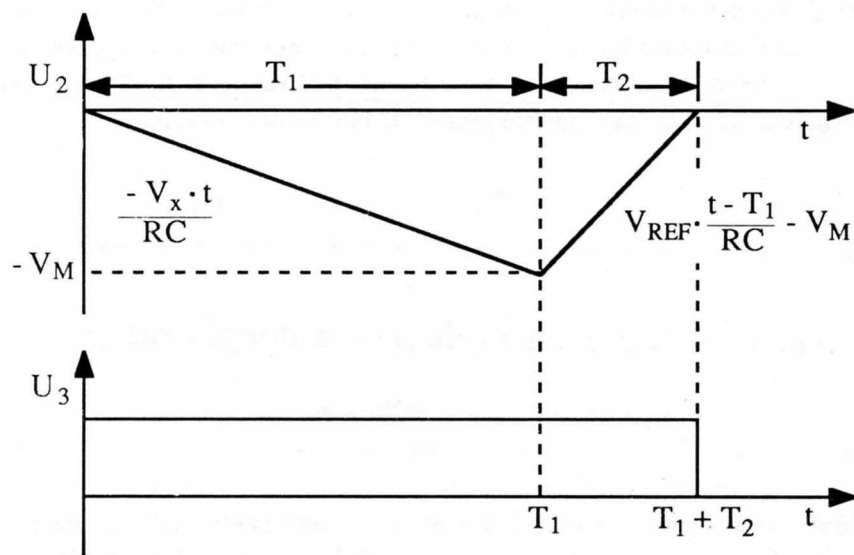


Fig.XVI.10

$$U_2 = -\frac{V_x}{RC} \cdot t \quad (\text{XVI.5})$$

Il comparatore è collegato in modo che, se la tensione U_2 è negativa, la sua uscita è a “1” e tiene chiuso l’interruttore $S4$ consentendo agli impulsi di clock provenienti da un oscillatore al quarzo (quindi molto ben stabile in frequenza) di essere registrati dal contatore. Pertanto mentre il segnale U_2 decresce secondo la (5), il contatore registra il numero delle oscillazioni del clock; il processo si arresta quando è passato un tempo T_1 corrispondente a 2^N oscillazioni del segnale di clock ($T_1 = 2^N \cdot T_c$ con T_c periodo dell’impulso di clock): infatti quando il contatore ha accumulato questo numero, tutti i bit (le uscite Q) sono “0”, meno il bit $N + 1$ (l’uscita Q_{N+1}) che è l’unico a trovarsi nello stato “1”; quando tale uscita assume il valore “1”, si apre $S1$ e si chiude $S2$ e la tensione di riferimento (negativa) $-V_{REF}$ viene applicata all’integratore. La tensione $-V_M$ raggiunta dalla tensione U_2 è data da:

$$-V_M = -\frac{V_x \cdot T_1}{RC} = -\frac{V_x}{RC} \cdot 2^N \cdot T_c \quad (\text{XVI.6})$$

Dall’istante T_1 in poi il condensatore inizia a perdere la carica accumulata, la tensione U_2 prende cioè a crescere linearmente con una pendenza pari a $\frac{V_{REF}}{RC}$. Poiché $V_{REF} > V_x$ (V_x deve soddisfare a questa condizione affinché si possa avere una conversione) il tempo T_2 che il segnale impiega per tornare a zero a partire dal valore $-V_M$ è minore di T_1 . Pertanto, quando al tempo $T_1 + T_2$, U_2 vale 0 e l’uscita del comparatore fa la transizione “1” \rightarrow “0” e blocca il segnale di clock, sui primi N bit del contatore sarà registrato un numero α pari a $\frac{T_2}{T_c}$; infatti al tempo $t = T_1$ i primi N bit si trovavano a “0” e da quel momento in poi essi registrano i conteggi afferenti alle oscillazioni successive.

Pertanto essendo $T_2 = \frac{V_M}{V_{REF}} \cdot RC$, in base alla (6) avremo:

$$\alpha = \frac{T_2}{T_c} = \frac{V_x}{V_{REF}} \cdot 2^N \quad (\text{XVI.7})$$

In un multimetro che utilizza questo tipo di CAD, quando il comparatore blocca gli impulsi di clock, il convertitore abilita anche il trasferimento del numero α dal contatore al display. Successivamente vengono eseguite le seguenti operazioni: chiusura del tasto $S3$, messa a 0 della tensione sui terminali *Clear* di tutti i bistabili (e quindi azzeramento di tutte le uscite Q), chiusura di $S1$ e $S4$, apertura di $S2$. A questo punto inizia un’altra conversione.

Rispetto al caso del convertitore tensione–frequenza, il numero risultante dalla conversione dipende solo dal rapporto fra V_x e V_{REF} , a patto che entro il tempo $T_1 + T_2$ (frazioni di secondo) R , C e T_c restino stabili (e questo non è un requisito particolarmente difficile da soddisfare). Il tempo di conversione ($T_1 + T_2$) è sempre minore di $2^{N+1} \cdot T_c$, che per valori tipici di $T_c \simeq 10 \mu s$ e per $N = 15$ significa minore di $\sim 0.7 s$.

Il convertitore è un tipico convertitore a rapporto e l’uscita numerica può rappresentare direttamente (a parte il punto decimale) la tensione V_x purché V_{REF} sia, anch’esso a parte il punto decimale, uguale a 2^N . Di fatto nei moderni multimetri questo tipo di problema non si pone neppure poiché essi contengono un microprocessore che prende cura di fare tutte queste trasformazioni di scala, prima di trasferire i dati dal convertitore al display; in altri termini, quando è presente un microprocessore, i dati dal convertitore passano al microprocessore e solo successivamente al display.

Esiste anche un’altra fase, assai importante, nel processo di conversione, quella cosiddetta di *auto-zero*. Senza entrare nei dettagli, si tratta in sostanza di una fase immediatamente precedente la conversione vera e propria in cui il convertitore mette a massa l’ingresso ($V_x = 0$) e memorizza gli offset dei vari amplificatori e comparatori, così poi da tenerne conto nella conversione seguente.

E' anche presente un sistema automatico per adeguare il CAD alla polarità della tensione di V_x ; lo strumento è quindi in grado di convertire tensioni sia positive, sia negative.

4.— Il Convertitore ad approssimazioni successive

Accenniamo qui al principio di funzionamento del *Convertitore ad approssimazioni successive o a pesiera*. Si tratta di un convertitore particolarmente veloce che però richiede molta cura nella sua messa a punto, principalmente a causa della presenza di componenti la cui precisione e stabilità a lungo termine è essenziale per il mantenimento delle sue caratteristiche di precisione.

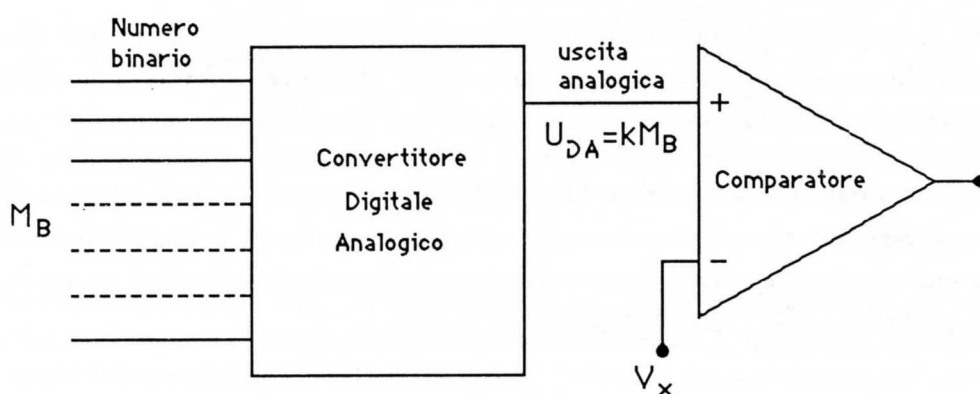


Fig.XVI.11

Il principio di funzionamento (Fig.11) si basa su un *Convertitore Digitale-Analogico* (CDA) di precisione, un dispositivo cioè che accetta in ingresso una certa configurazione di bit (un numero binario) e dà in uscita una tensione U_{DA} proporzionale a questo numero. Se l'uscita del comparatore che confronta U_{DA} con la tensione V_x da misurare è zero significa che la tensione U_{DA} di uscita del CAD è uguale a quella V_x , vale a dire il numero binario in ingresso del CDA rappresenta proprio la conversione digitale di V_x . Il metodo di conversione pertanto si basa su una procedura "intelligente" per indovinare col minor numero possibile di tentativi il codice binario che rappresenta V_x (o meglio il più prossimo a rappresentare V_x). Ciò viene fatto sfruttando l'uscita del comparatore. Consideriamo la conversione di una tensione V_x positiva e ammettiamo che all'inizio tutti gli N bit del CDA siano a "0". L'uscita del comparatore sarà allora negativa. Comincerà a questo punto (comandata da un clock interno al convertitore) l'operazione di *pesiera*. Viene portato a "1" il bit più significativo e l'uscita U_{DA} va a un valore positivo; se il comparatore commuta, cioè la sua uscita va positiva, significa che $U_{DA} > V_x$; abbiamo cioè una stima in eccesso e pertanto il bit più significativo va fatto tornare a "0"; di ciò, automaticamente, si occupa proprio l'uscita del comparatore che, se positiva, *cancella*, mediante un dispositivo non riportato in figura, l'ultimo dei bit su cui si è operato. Il clock successivamente porta a "1" il bit immediatamente meno significativo del precedente e l'uscita del comparatore si preoccuperà di cancellarlo o confermarlo a seconda che sia positiva o negativa. La sequenza procede fino al bit meno significativo. Dopo N tentativi (quanti sono i bit) la conversione è finita. E' chiaro che la precisione della conversione dipende da quella del CDA. Brevemente vediamo ora (Fig.12) come può essere fatto un CDA a 5 bit.

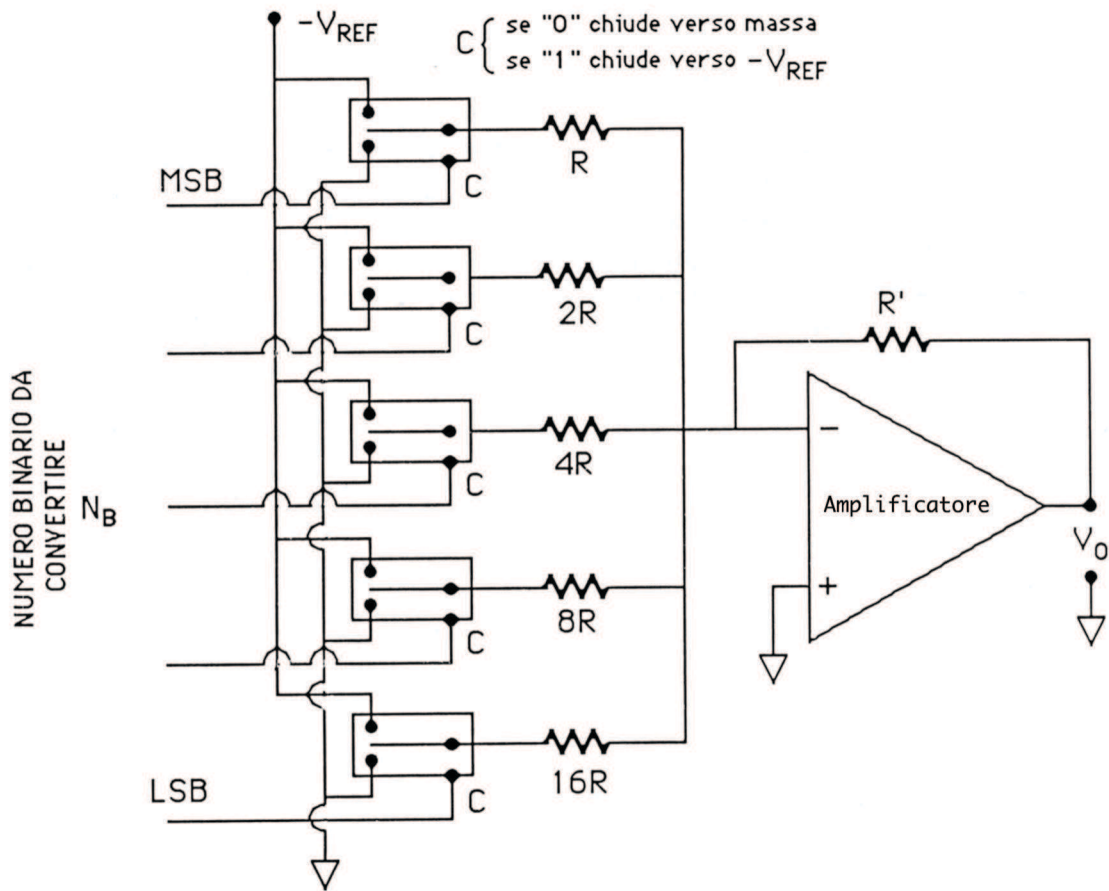


Fig.XVI.12

Le resistenze sono collegate o a una tensione di riferimento $-V_{REF}$ oppure a massa a seconda che il bit corrispondente sia alla tensione associata al valore "1" o al valore "0" rispettivamente. Se tutti i bit sono a "0", l'uscita V_o è a zero; se viceversa il codice binario contiene degli "1", allora la tensione V_o è uguale alla somma pesata di V_{REF} (per i bit a "1") con i pesi dati da $\frac{R'}{2^{i-1}R}$. Abbiamo allora (vedi Cap.XV,§4, (40))

$$V_o = \sum_{i=1}^N \frac{V_{REF} \cdot R'}{2^{i-1}R} \cdot b_i \quad (XVI.8)$$

dove $i = 1$ corrisponde al MSB, $i = N$ al LSB. Inoltre $b_i = 0$ se il bit i -esimo è a "0" e $b_i = 1$ se il bit i -esimo è a "1".

La relazione (8) può anche scriversi:

$$V_o = \frac{V_{REF}}{2^{N-1}} \cdot \frac{R'}{R} \sum_{i=1}^N (2^{N-i} \cdot b_i) = k N_B \quad (XVI.9)$$

che rappresenta una tensione proporzionale al numero binario $N_B = \sum_{i=1}^N 2^{N-i} \cdot b_i$. La costante di proporzionalità k dipende da V_{REF} , da R' e da R e pertanto tutte queste grandezze dovranno essere

molto accuratamente calibrate, ovvero vuol dire che *tutta* la catena di resistenze di valore $2^{i-1} \cdot R$ dovrà essere accuratamente calibrata e stabile.

NOTA BIBLIOGRAFICA

Per approfondire le nozioni di elettronica logica illustrate nel capitolo, si consiglia **MI 79**. Esempi di convertitori analogico digitali si trovano su Taub, Shilling: "Digital Integrated Electronics" Mac Graw-Hill (1977). Su **MI 79** (Cap.6) si trovano cenni ai principali metodi di conversione analogico digitale e viceversa. **BE 84** tratta abbastanza dettagliatamente l'argomento del capitolo: sono descritti numerosi tipi di convertitori e sono esaminate le sorgenti di indeterminazione nel processo di conversione.

XVII

IL DIODO A GIUNZIONE P-N

1.— *Semiconduttori*

Nel Cap.I,§1 abbiamo visto che in un *metallo* esistono elettroni capaci di muoversi liberamente all'interno del reticolo cristallino e che il loro numero è pari a quello degli atomi presenti o a un suo multiplo; infatti essi sono gli elettroni più esterni dei singoli atomi che hanno completamente perduto la loro identità e sono in compartecipazione con tutto il materiale. Abbiamo anche visto che tali elettroni sono in continuo movimento caotico, a causa della temperatura finita del corpo cui appartengono; per la stessa ragione gli atomi oscillano in maniera stocastica attorno alle posizioni di equilibrio che occupano nel reticolo. Quest'ultimo fatto provoca la resistenza al moto degli elettroni e tende a isotropizzare una eventuale componente media di velocità trasferita agli elettroni da un campo esterno. Le mobilità ($\mu = v_d/E$) risultanti degli elettroni sono assai piccole; abbiamo infatti trovato (Cap.I, §1) che le velocità di deriva \vec{v}_d sono estremamente basse e corrispondono a $\mu \approx 2.2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/(V \cdot s)$ per il Rame a temperatura ambiente. Le correnti ottenibili con l'applicazione di campi elettrici anche estremamente piccoli sono tuttavia grosse a causa del grande numero di portatori per unità di volume (nel Rame circa $8 \cdot 10^{22} \text{ elettroni/cm}^3$).

Negli *isolanti* (per esempio: Zolfo, Diamante, per parlare di elementi puri) la situazione è completamente diversa a motivo del fatto che anche gli elettroni esterni, quelli di valenza cioè, *appartengono* a gruppi di atomi contigui e non sono liberi di abbandonarli, a meno che non sia ceduta a essi dall'esterno energia sufficiente; tale energia è detta *Energia di legame*. Ad esempio, per il Diamante l'energia di legame degli elettroni è dell'ordine di 6 eV . Poiché tali elettroni sono confinati dall'attrazione coulombiana dei nuclei in una regione dello spazio molto limitata, cioè dell'ordine delle dimensioni atomiche, è estremamente arduo trasferire quantità significative di energia a questi elettroni applicando campi elettrici, anche intensi nella scala macroscopica, al materiale; solo meccanismi microscopici possono di fatto far acquistare agli elettroni energia sufficiente per abbandonare il loro legame (per esempio particelle ionizzanti che urtino contro gli elettroni). Fra questi meccanismi la agitazione termica gioca un ruolo importante; tenendo infatti presente che l'ordine di grandezza dell'energia termica media è di qualche centesimo di eV , ma che la distribuzione di energia a essa associata non ha un limite superiore, può accadere che un elettrone si trovi a possedere una energia cinetica tale da poter abbandonare la propria condizione di elettrone di valenza, quindi legato all'atomo, per divenire un elettrone libero, quindi di conduzione. Negli isolanti propriamente detti la frazione di elettroni liberi è estremamente piccola ($\approx 10^2/\text{cm}^3$), proprio a causa dell'elevata energia di legame e quindi di fatto densità di corrente macroscopiche non sono ottenibili.

Fra questi due estremi (metalli e isolanti) si collocano i *semiconduttori*, per esempio, sempre per rimanere nel campo di elementi puri, il Germanio e il Silicio. In realtà essi sono isolanti, nel senso che in essi non esistono, a 0 K , elettroni liberi e occorre cedere energia agli elettroni affinché essi

abbandonino i loro legami di appartenenza. Tale energia di legame, è nel caso del Germanio 0.72 eV e nel caso del Silicio 1.1 eV . Rispetto agli isolanti questi valori sono assai inferiori e tali per cui a temperatura ambiente è presente una frazione macroscopicamente significativa di elettroni liberi.

Guardiamo più da vicino la struttura di questi elementi: entrambi sono tetravalenti, cioè ogni atomo possiede 4 elettroni di valenza. Il reticolo cristallino è formato da un atomo circondato, in una struttura a tetraedro regolare, da altri quattro atomi con i quali scambia i propri elettroni di valenza: la possibilità di avere elettroni in compartecipazione con gli atomi più vicini costituisce il cosiddetto *legame covalente* che tiene unito il cristallo. Nella Fig.1 è simbolicamente rappresentata la struttura di un cristallo di Ge; per semplicità grafica la struttura è raffigurata piana.

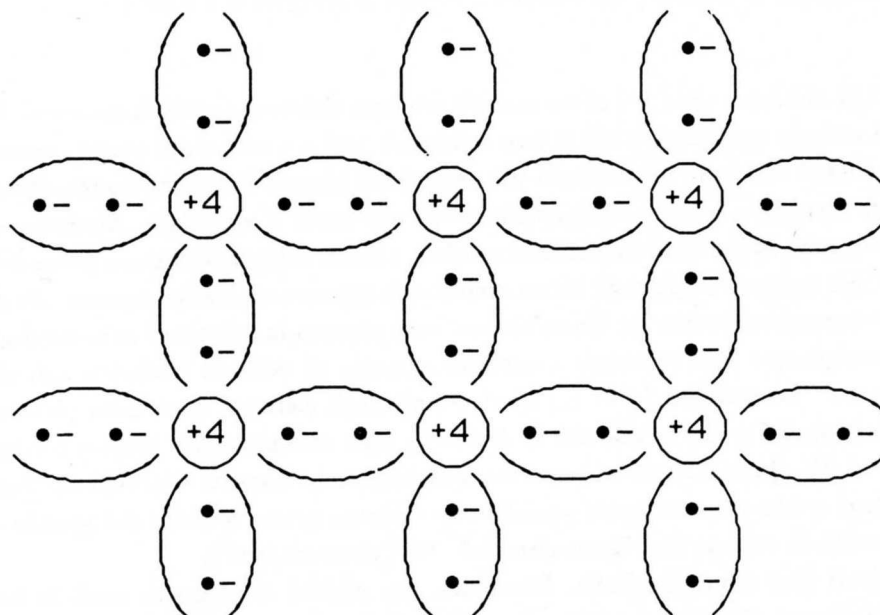


Fig.XVII.1

Lo ione Ge^{4+} è rappresentato con il cerchio grosso, mentre gli elettroni di valenza con i pallini scuri; il legame covalente è simboleggiato nella figura dalla coppia di elettroni fra due atomi di Ge adiacenti. Supponiamo che, a motivo della temperatura finita, un elettrone abbia acquistato sufficiente energia da abbandonare il legame fra due ioni. L'elettrone si troverà allora circondato da una struttura sostanzialmente inerte, con la quale interagisce esclusivamente tramite gli urti; infatti nel cristallo il campo elettrico medio è nullo essendo la neutralità assicurata anche a livello microscopico (4 elettroni intorno a ogni ione 4^+). L'applicazione di un campo elettrico esterno fa derivare l'elettrone nella direzione opposta a quella del campo e il moto dell'elettrone contribuisce a costituire una corrente. Vedremo più avanti il valore della mobilità di questi elettroni. Tornando ora al meccanismo della rottura del legame, osserviamo che l'elettrone, abbandonando il legame, vi ha lasciato quella che viene definita *lacuna* (in inglese *hole*), cioè la mancanza di un elettrone (Fig.2). Questa lacuna si comporta come un vero e proprio portatore di carica positivo: infatti, sempre a causa dell'agitazione termica, un elettrone appartenente a uno degli altri atomi, legati a quello che ha perduto l'elettrone, può andare a ripristinare quel particolare legame incompleto, lasciando al

suo posto una lacuna e così via, mettendo in moto un processo che a tutti gli effetti si può descrivere come il movimento puramente stocastico, in assenza di campo elettrico, di una carica positiva di valore assoluto pari a quella di un elettrone. Se è imposto dall'esterno un campo elettrico la lacuna si muoverà in media secondo la direzione del campo. Anche il moto delle lacune è quindi in realtà un moto di elettroni; si badi però che è un moto di elettroni legati (di valenza cioè) che abbandonano un legame completo per andare a riempirne un altro incompleto. Si trova che anche per questo tipo di conduzione elettrica è possibile definire una mobilità e più avanti ne vedremo il valore. In conclusione la rottura di un legame mette a disposizione della conduzione due portatori di carica, uno negativo (l'elettrone libero) e uno positivo (la lacuna): si dice perciò che la rottura di un legame genera una *coppia elettrone-lacuna*.

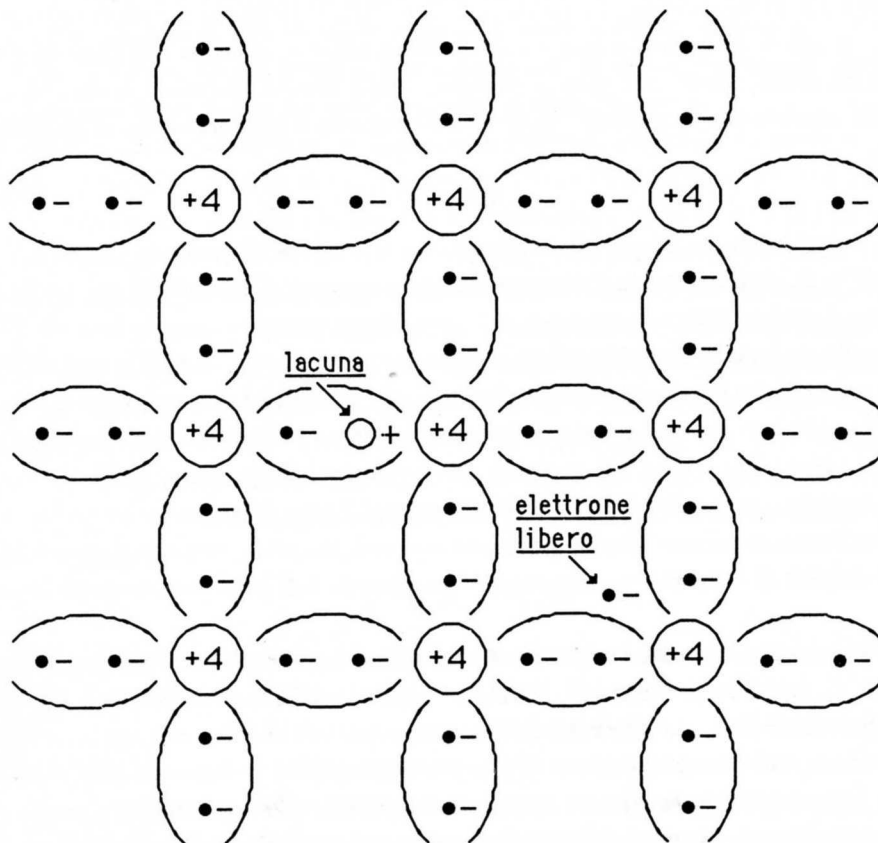


Fig.XVII.2

A temperatura ambiente esiste una quantità macroscopicamente significativa di questi portatori e sotto l'azione di un campo elettrico, avremo una densità di corrente:

$$\vec{j} = e(-n\vec{v}_n + p\vec{v}_p) \tag{XVII.1}$$

dove n rappresenta il numero di elettroni liberi per unità di volume, \vec{v}_n la velocità di deriva degli elettroni liberi, p il numero di lacune per unità di volume e \vec{v}_p la loro velocità di deriva. Purché il campo elettrico si mantenga al di sotto di un valore critico attorno a 10^3 V/cm , la conduzione è di tipo ohmico e valgono le seguenti relazioni (ammettendo il cristallo isotropo):

$$\vec{v}_n = -\mu_n\vec{E} \quad \vec{v}_p = \mu_p\vec{E} \tag{XVII.2}$$

con μ_n e μ_p mobilità degli elettroni e delle lacune. A temperatura ambiente $\mu_n = 0.38 \text{ m}^2/(\text{V} \cdot \text{s})$ e $\mu_p = 0.18 \text{ m}^2/(\text{V} \cdot \text{s})$ per il Germanio e $\mu_n = 0.13 \text{ m}^2/(\text{V} \cdot \text{s})$ e $\mu_p = 0.05 \text{ m}^2/(\text{V} \cdot \text{s})$ per il Silicio.

Se i materiali sono puri, le concentrazioni n e p coincidono, in quanto dovute alla rottura di legami a causa della temperatura. Tali concentrazioni sono spesso indicate con il simbolo $n_i = p_i$. L'indice i sta a significare concentrazione "intrinseca", e i semiconduttori puri ora descritti sono detti *semiconduttori intrinseci*. La concentrazione n_i dei portatori liberi dipende, in assenza di altri meccanismi capaci di rompere i legami, solo dalla temperatura. Si trova che a temperatura ambiente $p_i = n_i = 2.5 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ portatori per il Germanio e $p_i = n_i = 1.5 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ per il Silicio. La dipendenza dalla temperatura di n_i è del tipo:

$$n_i^2(T) = A_0 T^3 \exp - \frac{E_G}{kT} \quad (\text{XVII.3})$$

dove E_G è l'energia di legame già incontrata nel Cap.VIII. Il fatto che n_i raggiunga, per una data temperatura, un valore di regime e non cresca indefinitamente, dipende dal fatto che esiste anche il processo di *ricombinazione*, cioè una probabilità finita che un elettrone libero vada a riempire una lacuna. Si intuisce che la probabilità di ricombinazione è proporzionale al prodotto delle due concentrazioni

$$n_i p_i = n_i^2 \quad (\text{XVII.4})$$

Supponendo di partire da un blocco di semiconduttore a 0 K e di portarlo repentinamente a una temperatura $T > 0$, assisteremo inizialmente a un aumento del numero di coppie prodotte dalla rottura di legami a causa della temperatura; tale aumento si arresterà quando il ritmo di produzione di coppie eguaglia il ritmo di ricombinazione, ovvero quando è $n_i = p_i = n_i(T)$, con $n_i(T)$ dato dalla (3). Tenendo presente che il numero di atomi di Germanio (di Silicio) per cm^3 è pari a $N_{Ge} = 4.4 \cdot 10^{22}$ ($N_{Si} = 5 \cdot 10^{22}$) abbiamo che la concentrazione di portatori n_i ($T = 300 \text{ K}$) corrisponde ad avere un elettrone e una lacuna liberi ogni 10^9 atomi di Germanio (nel Silicio circa 10^{12}). Se si confrontano queste concentrazioni con quelle degli elettroni liberi nel Rame, ci si rende immediatamente conto che, nonostante l'aumentata mobilità dei portatori nel semiconduttore rispetto a quella degli elettroni nei metalli, le densità di corrente che si potranno ottenere da tali semiconduttori saranno comunque assai piccole.

E' tuttavia possibile, tramite l'aggiunta di opportune impurezze nel cristallo, ottenere correnti di molti ordini di grandezza superiori. Vediamo - almeno qualitativamente - come questo possa avvenire. Supponiamo di avere aggiunto nell'elemento puro fuso delle minime quantità di un elemento pentavalente, ad esempio Fosforo (P), o Antimonio (Sb) o Arsenico (As): sia il livello di impurezze di 1 ppm (10^{-6}), ovvero un atomo di impurezze per ogni 10^6 di atomi di Germanio o Silicio. Quando l'elemento cristallizza, tali impurezze vanno a prendere il posto degli atomi di Germanio, essendo oltretutto le loro dimensioni paragonabili a quelle dell'elemento predominante. Questi atomi si comportano nel reticolo come atomi di Germanio, salvo il fatto che essi possiedono un elettrone di valenza in più rispetto a esso; questo elettrone "sovrabbondante" può abbandonare il suo legame con l'impurezza molto più facilmente di quanto possa fare un elettrone di un normale legame covalente; si trova che basta una energia di circa 0.01 eV nel Germanio e 0.05 eV nel Silicio, contro 0.72 eV e 1.1 eV per la rottura di un legame covalente. Questo basso valore dell'energia di legame degli elettroni delle impurezze fa sì che a temperatura ambiente praticamente tutti questi atomi di impurezze siano stati abbandonati dal quinto elettrone: pertanto il cristallo si presenta come un cristallo di Germanio puro salvo che, circa ogni 100 atomi lungo ogni direzione, si incontra uno ione positivo dell'elemento pentavalente e che nel materiale tanti elettroni quanti sono gli atomi di impurezze si muovono liberamente, trascurando per il momento il fatto che la concentrazione definitiva dipende

anche dalla concentrazione dei portatori dovuta alla temperatura. Gli atomi pentavalenti sono detti atomi *donatori*, sottintendendo “di elettroni”. La neutralità complessiva del materiale continua a essere conservata, poiché tanti sono gli elettroni liberi, quanti gli ioni positivi fissi. Supponiamo ora di compiere un procedimento analogo a quello sopra descritto, salvo che le impurezze sono ora costituite da atomi trivalenti come Boro (B), Alluminio (Al), Indio (In); quando il materiale si solidifica gli atomi di impurezze si vanno a collocare al posto degli atomi di Germanio e nella struttura di questo legame tetraivalente manca un elettrone rispetto ai 4 caratteristici del legame normale; si trova che l'energia complessiva richiesta per togliere un elettrone da un legame “normale” vicino e ripristinare un legame a 4 elettroni nella zona dell'impurezza è di solo 0.01 eV per il Germanio e 0.08 eV nel caso del Silicio. Pertanto a temperatura ambiente tutti questi centri di impurezze trivalenti hanno catturato un elettrone da qualche atomo di Germanio adiacente lasciandovi una lacuna che è divenuta così un portatore libero di muoversi. Le impurezze trivalenti sono dette *accettori*. I materiali, indipendentemente dal fatto che si tratti di Germanio o Silicio, in cui ci siano impurezze di tipo donatori sono detti *semiconduttori estrinseci di tipo n* o semplicemente *semiconduttori n*. Quelli in cui le impurezze sono trivalenti, cioè atomi accettori, sono detti *semiconduttori estrinseci di tipo p* o semplicemente *semiconduttori p*.

Facciamo ora alcune considerazioni quantitative sul numero di portatori in un caso reale. Abbiamo supposto che la frazione di impurezze aggiunte fosse dell'ordine di 10^{-6} ; d'altronde sappiamo anche che a temperatura ambiente esiste una concentrazione $n_i = p_i = n_i(T)$ di portatori liberi - elettroni e lacune - prodotti dalla agitazione termica. Tale produzione permane anche nel caso in cui il materiale non sia puro e ciò è assai plausibile poiché - data la piccola frazione di impurezze aggiunte - molte delle proprietà del materiale si manterranno sostanzialmente immutate rispetto al caso di semiconduttori intrinseci. Altrettanto può dirsi della probabilità di ricombinazione che continua a dipendere solo dal prodotto delle concentrazioni; supponendo di avere un materiale estrinseco di tipo n, il prodotto delle concentrazioni non è più $n_i \cdot p_i$, bensì $n_n \cdot p_n$ dove a n_n contribuiscono sia gli elettroni messi a disposizione dai donatori che quelli dovuti all'agitazione termica, mentre p_n riceverà un contributo solo dall'agitazione termica (e come vedremo non coincide con p_i): si trova che, a una temperatura T ,

$$n_n \cdot p_n = n_i^2(T) \quad (\text{XVII.5})$$

cioè il prodotto delle concentrazioni dei due tipi di portatori è uguale al valore che esso assume nel materiale intrinseco. Questo risultato va sotto il nome di Legge di azione di massa e si spiega qualitativamente col fatto che l'aumentata concentrazione di elettroni aumenta la probabilità di ricombinazione delle lacune e ne riduce notevolmente la concentrazione rispetto al caso di materiale intrinseco; il valore di regime delle concentrazioni è però tale da garantire una probabilità di ricombinazione pari a quella di produzione per agitazione termica, in modo da consentire concentrazioni stabili, ovvero di regime; essendo rimasto il ritmo di produzione per agitazione termica praticamente inalterato a causa delle piccole perturbazioni introdotte dalle impurezze, si ha appunto il risultato espresso dalla (5). Tutto questo ha come conseguenza che *drogaggi* (così si chiama l'introduzione di impurezze) anche moderati, oltre a introdurre molti più portatori di un tipo rispetto al caso di materiale intrinseco, eliminano quasi del tutto i portatori del tipo opposto: infatti essendo $n_n \cdot p_n = n_i^2(T)$ e $n_n \approx 10^3 n_i$ per drogaggi di 10^{-6} in Germanio, si trova che $p_n \approx 10^{-3} n_i = 10^{-3} p_i$ cioè la concentrazione di lacune è ulteriormente ridotta rispetto al valore, già piccolo, che ha nel materiale intrinseco. Nel materiale n gli elettroni sono detti *portatori maggioritari*, le lacune *portatori minoritari*; nel materiale di tipo p, elettroni e lacune si scambiano i ruoli.

Possiamo quindi dire che in un semiconduttore tipo n in cui la concentrazione di atomi donatori N_D sia $\gg n_i$ (per esempio $N_D \approx 10^{-6} N(Ge)$ contro $n_i \approx 10^{-9} N(Ge)$), la densità di regime degli

elettroni liberi sarà data con ottima approssimazione da N_D , poiché solo una piccola frazione degli elettroni messi a disposizione dagli atomi donatori andrà perduta per ricombinazione con le lacune prodotte per agitazione termica. Similmente in un materiale di tipo p, con drogaggio dello stesso ordine di grandezza, la densità di lacune sarà con ottima approssimazione data proprio da N_A , essendo N_A il numero di atomi accettori per unità di volume. In entrambi i casi la densità dei portatori minoritari è inferiore al valore che essi avrebbero, alla stessa temperatura, nel materiale puro, in quanto la probabilità di ricombinarsi è aumentata a causa dell'aumentato numero di portatori dell'altro tipo.

Queste considerazioni continuano a valere anche in quei casi - molto più realistici di quelli ora descritti - in cui un semiconduttore di tipo n è in realtà il risultato del predominio di un certo tipo di impurezze rispetto all'altro (e così per un semiconduttore p). Questo avviene a causa del fatto che la metallurgia dei semiconduttori, pur avendo avuto sviluppi imponenti negli ultimi decenni, non è in grado di controllare a livello di frazioni di parti per miliardo la quantità delle impurezze che finiscono nel materiale puro durante la sua produzione: vale a dire in un semiconduttore n, i portatori minoritari - le lacune - avranno una concentrazione che sarà non solo data dalla produzione di coppie dovute alla temperatura, ma anche da un certo numero di impurezze residue di tipo accettore. Resta però vera la conclusione data dalla (5); altrettanto avverrà in un semiconduttore di tipo p ove siano presenti anche atomi donatori, cioè sarà $n_p \cdot p_p = n_i^2$; ovviamente nei due casi sarà $n_n > p_n$ e $p_p > n_p$ rispettivamente, affinché il semiconduttore sia effettivamente del tipo detto. Per fare un esempio supponiamo che in un materiale n con una concentrazione di N_D atomi per unità di volume sia aggiunta una concentrazione N_A di atomi accettori, pari al 1% di N_D . Come conseguenza di ciò, poiché sia prima che dopo deve valere la relazione $n_n \cdot p_n = n_i^2(T)$, accade che quasi tutte le lacune introdotte si ricombinano con un corrispondente numero di elettroni liberi: avremo quindi quasi lo stesso numero di lacune che si avevano prima dell'immissione delle impurezze di accettori e un numero di elettroni liberi inferiore al valore precedente di circa l'1%.

Per concludere, in un semiconduttore di tipo n (p) i portatori di carica sono quasi tutti elettroni (lacune) e sono detti portatori maggioritari; il loro numero n_n (p_p) nei casi in cui il numero degli atomi accettori (donatori) sia molto minore di quello di donatori (accettori), praticamente coincide con N_D (N_A). Considerando solo le concentrazioni dei portatori maggioritari, le correnti che si osservano in conseguenza dell'applicazione di un campo elettrico \vec{E} sono legate al flusso del vettore \vec{j} dato dalle seguenti relazioni ohmiche:

semiconduttori n:

$$\vec{j}_n = -e\vec{v}_n \cdot n_n = eN_D\mu_n\vec{E} = \sigma_n\vec{E} \quad (\text{XVII.6})$$

semiconduttori p:

$$\vec{j}_p = e\vec{v}_p \cdot p_p = eN_A\mu_p\vec{E} = \sigma_p\vec{E} \quad (\text{XVII.7})$$

I valori di μ_n e μ_p sono gli stessi del materiale intrinseco, o almeno assai simili, fintanto che - come nei casi reali - la concentrazione di impurezze si mantiene piccola. Conseguentemente la conducibilità che si ottengono nei due casi valgono per drogaggi tipici (10^{-6} di concentrazioni di impurezze): $\sigma_n \approx 27(\Omega\text{cm})^{-1}$ e $\sigma_p \approx 13(\Omega\text{cm})^{-1}$ (per Germanio a temperatura ambiente) da confrontarsi con le conducibilità tipiche dei metalli $\approx 10^5(\Omega\text{cm})^{-1}$. I valori ottenibili sono quindi assai inferiori rispetto a un metallo, ma, come vedremo, ancora tali da consentire trasporti di carica macroscopici.

2.— Giunzione p-n non polarizzata

Supponiamo di aver realizzato un contatto, confinato idealmente da uno spessore monoatomico, fra un semiconduttore n e un semiconduttore p, entrambi dello stesso elemento. Una tale configurazione è detta *giunzione p-n* (Fig.3).

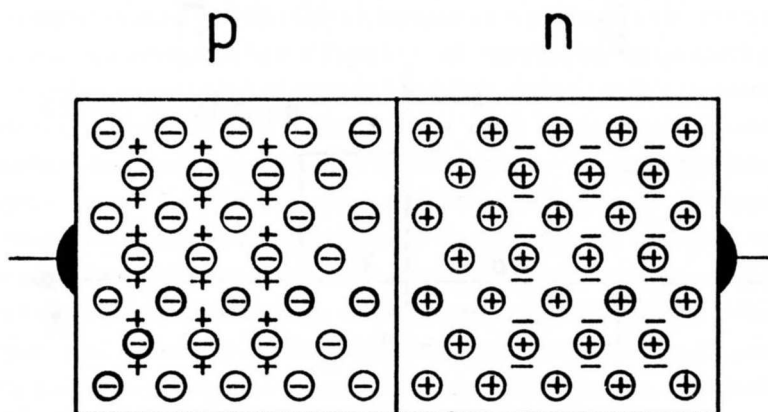


Fig.XVII.3

Studiamone qualitativamente il comportamento in assenza di campi elettrici esterni applicati. Nella zona di confine fra i due semiconduttori si crea una zona in cui sono virtualmente assenti portatori di carica: infatti i portatori che sono maggioritari in una delle due porzioni del materiale, tenderanno per effetto della temperatura finita a diffondere nell'altra, come farebbero due gas posti in un contenitore separati da un setto, all'atto della rimozione di questo. A differenza del caso di due gas dove le particelle sono neutre, nella giunzione abbiamo un processo diffusivo da parte di particelle cariche, che presenta quindi caratteristiche affatto speciali: quando un portatore diffonde dalla regione dove è maggioritario in quella dove è minoritario, molto rapidamente si ricombina e questo processo riduce nella zona di confine la densità di portatori liberi. Conseguentemente, nella zona di confine fra le due porzioni di semiconduttore, insorge un campo elettrico diretto in modo da opporsi alla ulteriore diffusione di portatori maggioritari nell'altra zona e dovuto alla presenza di ioni fissi nel reticolo (donatori nella zona n e accettori nella zona p) non più neutralizzati da una uguale e opposta densità di carica di portatori liberi; il campo elettrico cresce, ovvero la zona di carica non neutralizzata si espande fino a che viene raggiunto il valore "giusto" per impedire ulteriori diffusioni. Se si riporta in grafico l'andamento della densità di carica, del campo e della ddp nella zona della giunzione, nell'ipotesi (francamente poco "fisica") di una giunzione brusca e di una densità costante di atomi donatori e accettori nelle due zone n e p rispettivamente, avremo, ponendo a $x = 0$ la giunzione, la situazione di Fig.4. I calcoli dettagliati che portano agli andamenti riportati nella Fig.4 saranno svolti più avanti, per ora limitiamoci a fare alcune considerazioni fenomenologiche. Avendo assunto come $V = 0$ il potenziale della zona p molto distante dalla giunzione, la zona n si colloca a una ddp V_B , che si sviluppa per un tratto largo $W_n + W_p$ intorno alla giunzione. Nei casi tipici, la dimensione $W_n + W_p$ è dell'ordine di $10^{-6}m$ e la ddp vale poco meno di 1 V. La zona dove è presente il campo elettrico è detta *zona di svuotamento* o *zona di carica spaziale*. Si trova che il valore di V_B , detta *differenza di potenziale di contatto* o *barriera di giunzione*, dipende dal drogaggio relativo delle due zone n e p e dalla temperatura. Dette p_p e p_n ($p_p \gg p_n$) le concentrazioni di lacune,

lontane dalla giunzione, nella zona p ed n rispettivamente e n_p e n_n ($n_n \gg n_p$) le corrispondenti concentrazioni di elettroni si trova che:

$$V_B = kT \ln \frac{p_p}{p_n} = kT \ln \frac{n_n}{n_p} \quad (\text{XVII.8})$$

dove nell'ultimo passaggio si è sfruttata la condizione imposta dalla legge di azione di massa (5) $p_n \cdot n_n = p_p \cdot n_p = n_i^2(T)$.

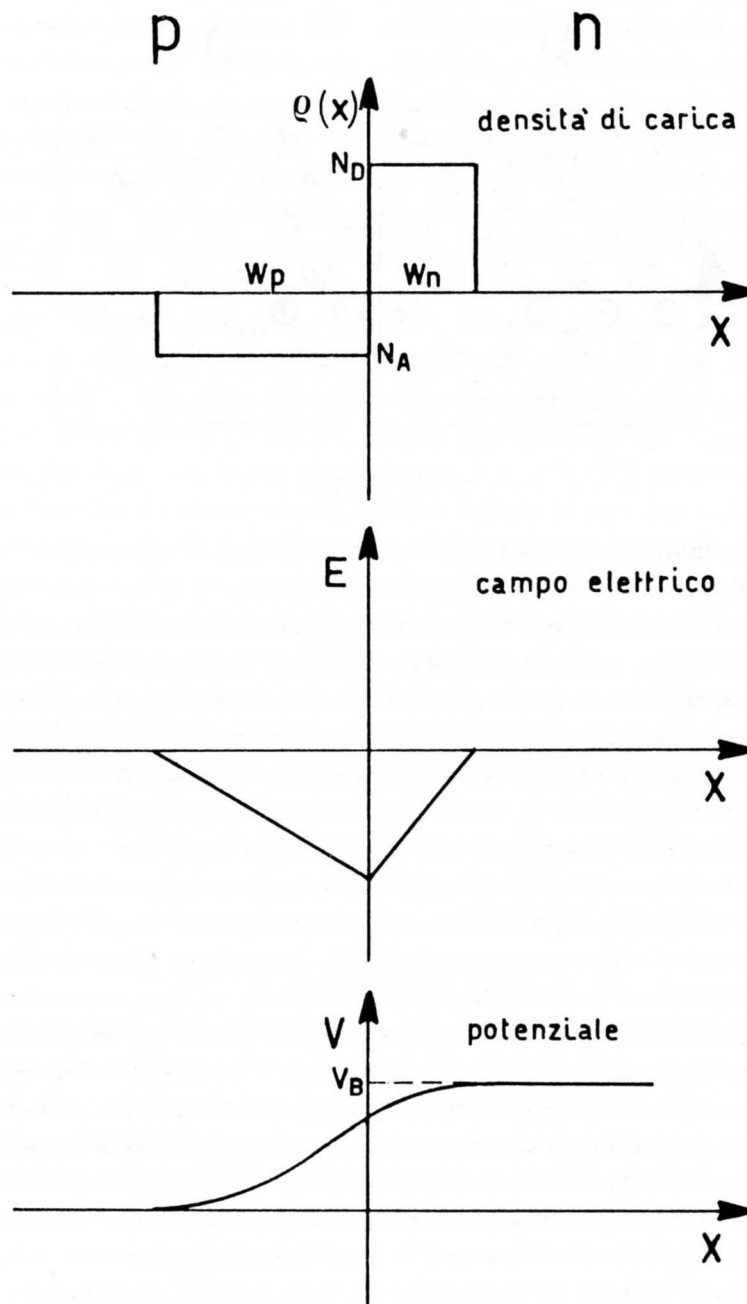


Fig.XVII.4

Il fatto che V_B dipenda dalla temperatura è facilmente comprensibile, in quanto tale barriera

deve proprio opporsi alla diffusione - puramente termica- dei portatori, ovvero delle lacune dalla zona p alla zona n e degli elettroni dalla zona n alla zona p; ricordando poi che questi portatori, come gli elettroni in un metallo, hanno velocità distribuite isotropicamente nello spazio con modulo non limitato superiormente e valor medio crescente con T, è ovvio che quanto più alta è la temperatura del sistema, tanto più alta dovrà risultare la ddp V_B , cioè l'altezza della barriera che inibisce la diffusione. Il fatto che la distribuzione di velocità di questi portatori non abbia un limite superiore (si ricordi quanto visto per gli elettroni in un metallo nel Cap.I,§2 e Cap.VIII,§2) implica che il valore della ddp V_B - finito- può al più limitare la intensità di questa corrente di diffusione, ma non inibirla completamente; infatti esisterà sempre un numero piccolo, ma non nullo, di portatori che possiederanno un'energia termica superiore all'energia potenziale corrispondente al valore eV_B . Pertanto, tenendo presente che nel materiale esistono sempre delle concentrazioni non nulle di portatori minoritari e che comunque, a regime, si deve avere un passaggio di corrente complessivamente nullo attraverso la giunzione, si ha -più realisticamente- la seguente situazione: la corrente di diffusione *residua*, lacune dalla zona p alla n e elettroni dalla zona n alla zona p, entrambi con energia termica maggiore di eV_B , è controbilanciata da una corrente uguale in valore assoluto, ma che attraversa la giunzione nell'altro senso e che è sostenuta dai pochi portatori minoritari (lacune nel materiale n ed elettroni nel materiale p) che sono prodotti dalla rottura di legami covalenti per effetto della temperatura; si noti che anche i portatori minoritari prodotti nella zona di campo nullo, cioè lontano dalla giunzione, possono - a causa della agitazione termica - diffondere fino alla zona della giunzione dove il forte campo elettrico li spinge poi verso l'altra porzione di semiconduttore; chiamiamo questa corrente *corrente di saturazione inversa* e vedremo più avanti il motivo di questo nome; indicheremo questa corrente col simbolo I_0 . Essa, come tutte le correnti ora esaminate, sarà dovuta a due contributi aventi la stessa origine fisica, ma uno associato alle lacune che si muovono in una direzione e un altro agli elettroni nel verso opposto.

Il fatto che, una volta stabilitosi l'equilibrio termodinamico, si formi una differenza di potenziale fra la zona p e la zona n, potrebbe far supporre che se andassimo a collegare le estremità opposte dei due semiconduttori mediante un conduttore, dovremmo osservare il passaggio di una corrente attraverso di esso, dovuto alla presenza di questa ddp. Di fatto ciò non accade e qualunque tentativo di voler misurare la ddp V_B ai capi dei due semiconduttori avrebbe esito negativo (Fig.5)

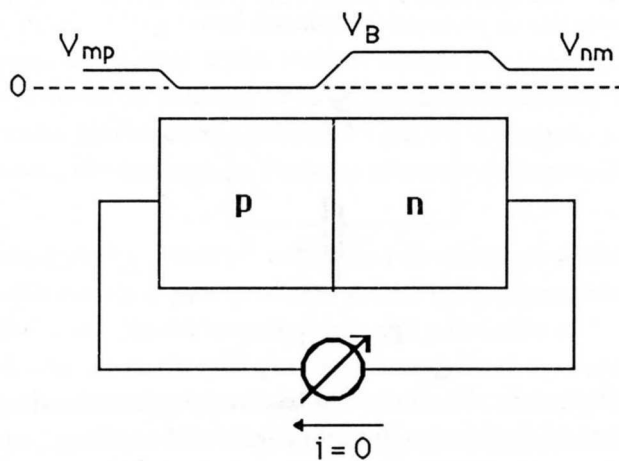


Fig.XVII.5

Ciò si può spiegare col fatto che in prossimità dei due contatti "ohmici" fra semiconduttore e metallo si creano due ddp V_{nm} e V_{mp} tali che la loro somma controbilancia esattamente V_B :

$V_{nm} + V_{mp} - V_B = 0$, come impone la seconda legge di Kirchhoff applicata alla maglia ($i = 0$). In altri termini, secondo la meccanica statistica, ciò corrisponde al fatto che all'equilibrio termodinamico l'energia di Fermi, ovvero il potenziale elettrochimico, di tutti gli elettroni della catena di conduttori e semiconduttori è costante e quindi non esiste alcuna tendenza netta allo spostamento di elettroni da una porzione del circuito all'altra; i voltmetri difatti non misurano differenze di potenziali elettrostatici, ma differenze di potenziali elettrochimici, cioè di livelli di Fermi.

3.— Il Diodo a giunzione

Supponiamo di disporre di una giunzione p-n del tipo descritto precedentemente e realizzata secondo le particolari tecniche metallurgiche che si sono venute via via perfezionando e che realizzano con approssimazione più o meno buona il caso ideale di transizione brusca fra il materiale p e il materiale n. Supponiamo anche di realizzare due contatti di tipo ohmico semiconduttore-metallo e quindi di collegare le due estremità delle porzioni n e p a due conduttori esterni; una giunzione di questo tipo è detta *diodo a semiconduttore a giunzione p-n* e il simbolo che lo rappresenta è quello della Fig.6 dove la porzione a freccia rappresenta la parte p (*anodo*) e la sbarretta la parte n (*catodo*).



Fig.XVII.6

Collegiamo ora il diodo a un generatore di differenza di potenziale V (Fig.7). Il comportamento elettrico del sistema è totalmente differente se applichiamo V nel senso concorde a quello della ddp di barriera V_B , cioè se rendiamo la zona p negativa rispetto a quella n (come in figura) oppure se il segno di V è quello opposto. Consideriamo il primo caso (come in Fig.7): si dice che la giunzione è contropolarizzata.

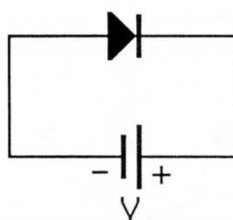


Fig.XVII.7

La ddp V tende a svilupparsi nella zona della barriera rimuovendo ulteriori cariche libere ai confini della zona di carica spaziale (la zona di svuotamento cioè si allarga, vedi §4) e quindi tende a inibire ulteriormente la corrente di diffusione dei maggioritari: infatti se la temperatura rimane immutata rispetto al valore che aveva in assenza di ddp applicata dal generatore, la distribuzione di velocità dei portatori è anch'essa inalterata ed essendo aumentata la ddp da superare, il numero di portatori maggioritari con energia sufficiente per riuscirci sarà diminuito. La costanza di T , comporta la costanza del numero per unità di tempo di portatori minoritari che, per diffusione,

raggiungono la zona di carica spaziale e vengono poi avviati verso l'altra porzione di semiconduttore dal campo elettrico; questo significa che il contributo di corrente di saturazione inversa I_0 è costante e indipendente da V .

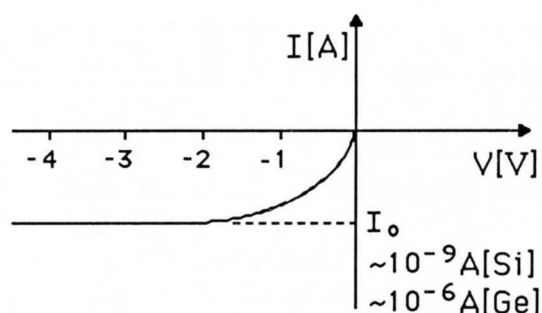


Fig.XVII.8

Nella Fig.8 è riportato in grafico I in funzione di V (V applicata è convenzionalmente presa positiva quando è nel verso opposto a quello della barriera). Salvo un primo tratto (poche decine di mV ove la corrente non ha ancora raggiunto il valore asintotico) si trova che la corrente, per qualunque valore della tensione di contropolarizzazione, assume un valore costante e pari a I_0 . Da qui l'origine del nome *corrente di saturazione inversa*. I valori tipici di I_0 per una giunzione al Silicio di sezione dell'ordine del mm^2 sono assai piccoli (a temperatura ambiente): $\approx 10^{-9}A$. Per il Germanio tali valori sono alcuni ordini di grandezza superiori, fino a qualche μA . In entrambi i casi si osserva comunque una forte dipendenza di I_0 dalla temperatura (nel Silicio raddoppia circa ogni aumento di 10^0C). Nei casi reali, si osserva un aumento della corrente inversa, all'aumentare del valore assoluto della tensione di contropolarizzazione; ciò dipende da contributi spuri di corrente che possono essere anche molto più grandi di I_0 (detta anche *corrente di volume*), per esempio perdite attraverso le superfici del diodo.

In un diodo reale esiste una tensione inversa massima oltre la quale il campo nella zona di barriera diviene così elevato che i legami covalenti vengono spezzati e il diodo passa a condurre anche correnti elevate (*breakdown*). Se questa situazione non viene rapidamente interrotta, il diodo si danneggia irreversibilmente, a causa dell'innalzamento violento della temperatura prodotto dalla potenza VI che viene dissipata alla giunzione. Alcuni diodi sono tuttavia progettati e dimensionati in modo da sfruttare utilmente il fenomeno del *breakdown*; li studieremo nel §5.

Quando la ddp applicata è nel verso di polarizzare direttamente il diodo, cioè il polo positivo del generatore collegato alla zona p (opposto al caso della Fig.7), allora, trascurando eventuali cadute ohmiche nel materiale, interviene un abbassamento del potenziale di barriera V_B di valore pari a quello della ddp applicata: pertanto quei portatori maggioritari di energia termica così elevata da riuscire a superare la barriera V_B , ora diventano assai più numerosi; non si ha - come nel caso del diodo aperto- nessun accumulo di carica con conseguente ricombinazione, poiché in questo caso il generatore si preoccupa di rimuovere ogni eccesso di carica e una corrente comincia a fluire. La corrente, a parità di altre condizioni, in particolare di temperatura, sarà tanto più elevata quanto più ridotta, a opera di V , sarà la barriera complessiva che i portatori maggioritari devono attraversare; l'aumento è di tipo esponenziale in quanto la corrente è proprio associata all'integrale della coda esponenziale della distribuzione termica di energia dei portatori (si ricordi la legge di

Richardson-Dushman dell'emissione termoionica). La curva caratteristica teorica complessiva, per tensioni positive e negative di V , è la seguente:

$$I = I_0 \left(\exp \frac{V}{\eta V_T} - 1 \right) \quad (\text{XVII.9})$$

$V_T = kT/e$ vale 26 mV per $T = 300 \text{ K}$. Il fattore η che compare nella (9) vale 1 per diodi al Germanio e circa 2 per diodi al Silicio; esso ha una giustificazione semiempirica che non stiamo a descrivere. La (9) riproduce il fatto già anticipato, che per $|V| \gg V_T$, con V negativo, $I = -I_0$ cioè uguale alla corrente di saturazione inversa. Per $V = 0$, cioè quando alla barriera è presente solo V_B , $I = 0$; la (9) mostra, come già sappiamo, che questo zero deriva da due contributi uguali e contrari di cui uno, la corrente di saturazione inversa sempre presente e l'altro dovuto alla piccola coda di maggioritari che riescono a passare la barriera. Per $V > 0$ questa "coda" diviene sempre più importante e si possono avere anche correnti estremamente elevate. Riportiamo nella Fig.9 il grafico dell'andamento di I in funzione di V per un diodo al Silicio, corrispondente alla (9).

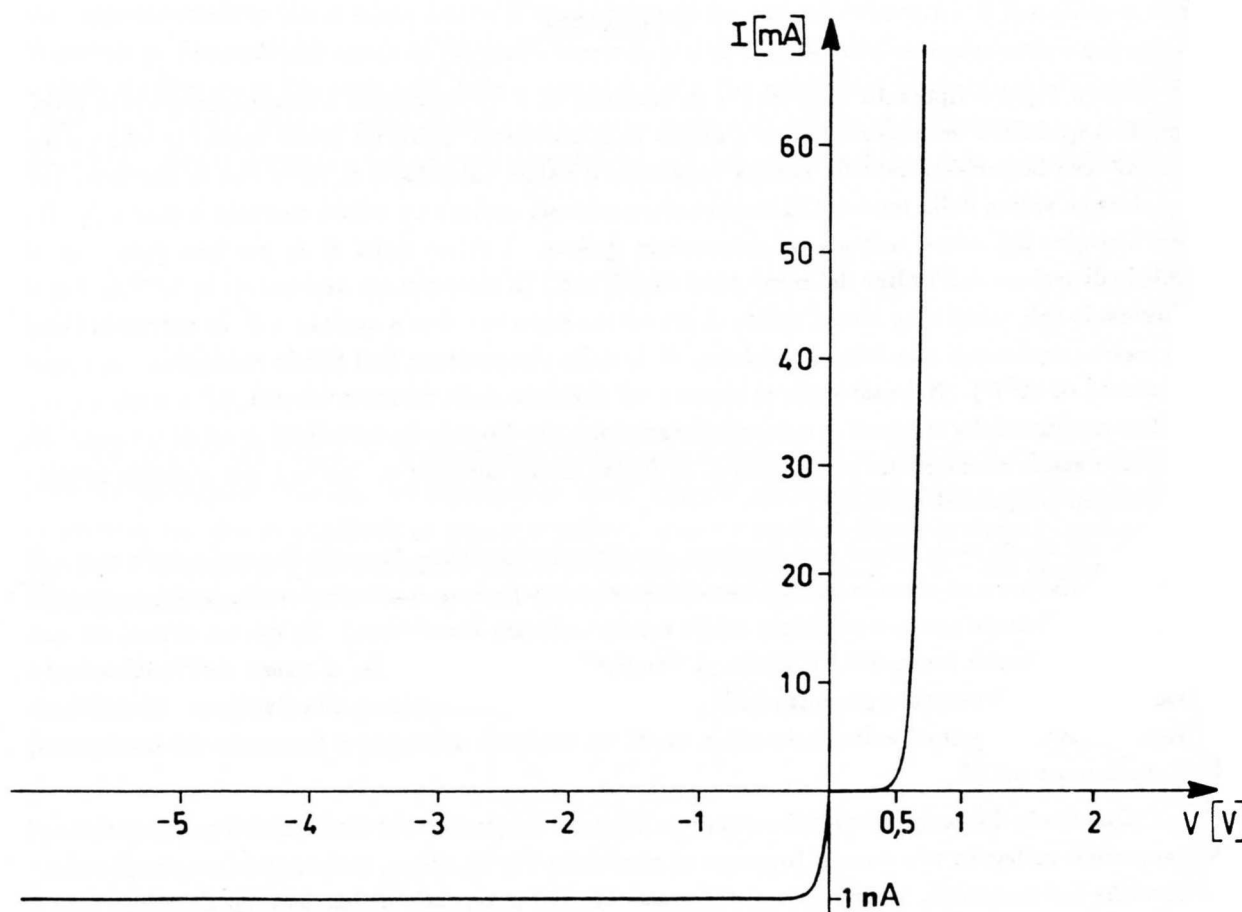


Fig.XVII.9

Sperimentalmente si trova che l'andamento dato dalla (9) è ben riprodotto, almeno per valori di I non troppo elevati, quando cioè si possono ancora trascurare le cadute ohmiche sul materiale. Si noti il cambiamento di scala verticale per l'asse negativo della correnti; se avessimo mantenuto la stessa scala dell'asse positivo (mA) la curva non sarebbe distinguibile dall'asse delle x . La curva riprodotta nella Fig.9 è detta *caratteristica statica del diodo*. Più avanti vedremo che il diodo si presta a utilissime applicazioni di elettronica che sfruttano proprio il fatto che il diodo "lascia passare" la

corrente in un verso (dall'anodo al catodo) e ne impedisce di fatto il passaggio in senso opposto.

La caratteristica ottenuta vale nell'ipotesi che le cadute ohmiche dentro il materiale semiconduttore siano trascurabili; di fatto non è esattamente così, soprattutto all'aumentare della ddp applicata: infatti quando la corrente diretta - quella cioè che scorre conseguentemente all'applicazione di una ddp positiva - cresce, allora parte della ddp applicata va spesa per mantenere il gradiente di tensione nelle zone p e n necessario a sostenere la corrente in materiali di resistività piccola ma non nulla. L'effetto è sempre più importante al crescere della corrente e finisce col distorcere pesantemente (*linearizzare* in pratica) la curva esponenziale teoricamente prevista dalla (9).

Tornando a esaminare la zona della caratteristica dove la corrente diretta è ancora molto debole, si definisce *tensione di soglia* V_γ quella al di sotto della quale la corrente non si è ancora sensibilmente discostata da zero. Per rendere più quantitativa questa definizione diciamo che essa non ha ancora superato una frazione opportuna (per esempio l'1%) della massima corrente diretta che il diodo può condurre senza soverchi riscaldamenti del materiale e che il costruttore avrà premura di farci sapere; tale tensione V_γ vale approssimativamente 0.2 V per diodi al Germanio e 0.6 V per diodi al Silicio. Si noti altresì che in tutto il campo di valori di corrente diretta in cui il diodo si utilizza generalmente, la ddp applicata varia, a causa della dipendenza esponenziale della corrente dalla tensione, solo di 0.1 - 0.2 V.

4.- *Larghezza della zona di svuotamento e capacità di transizione*

Ricaviamo ora la relazione che lega - in alcune ipotesi semplificative - la larghezza della zona di svuotamento alla ddp V_B di barriera e alle concentrazioni N_D e N_A di atomi donatori e accettori nelle zone n e p rispettivamente.

La schematizzazioni che adotteremo sono le seguenti:

- 1) le dimensioni delle due porzioni di materiale ortogonali all'asse x (introdotto nella Fig.4) siano molto maggiori dello spessore della zona di barriera ($W_n + W_p$)
- 2) la giunzione sia brusca cosicché si passi in maniera discontinua da una concentrazione costante N_A di atomi accettori fissi per unità di volume nel materiale p a una concentrazione N_D di donatori nella zona n
- 3) in maniera altrettanto brusca si passi dalla zona di svuotamento dove non ci sono cariche libere alla zona in cui i centri di carica fissi sono perfettamente neutralizzati dai portatori aventi carica di segno opposto.

Il punto 1), che non è molto irrealistico nei casi pratici, consente la trattazione del problema in maniera unidimensionale; il punto 2) può essere una schematizzazione brutale a seconda del sistema adottato dal costruttore per realizzare la giunzione e comunque sarà tanto meno essenziale quanto più la zona di svuotamento si estenderà rispetto alle dimensioni in cui si passa con continuità da un tipo di semiconduttore all'altro, ovvero l'approssimazione è migliore per grossi valori di contropolarizzazione; il punto 3) può essere senz'altro una approssimazione grossolana poiché ci aspettiamo che la concentrazione di portatori, anche a causa dell'agitazione termica, si diluisca con continuità nel passare dal materiale neutro alla zona di svuotamento; comunque, anche in questo caso l'approssimazione è tanto migliore quanto più la giunzione è contropolarizzata.

Indichiamo con V_{TOT} la ddp complessiva fra la zona n e la zona p (a potenziale 0 per convenzione) e con $V(x)$ la ddp generica alla coordinata x . Il segno è tale che la ddp può scriversi:

$V_{TOT} = V_B - V_e$ dove V_B è quella di barriera e V_e è quella applicata, negativa se contropolarizza il diodo, positiva se lo polarizza direttamente (coerentemente con quanto assunto precedentemente); ricordiamo qui che l'unica ddp misurabile fra i reofori esterni al diodo è V_e , essendo V_B compensata da altre due analoghe ddp alle giunzioni semiconduttore-metallo.

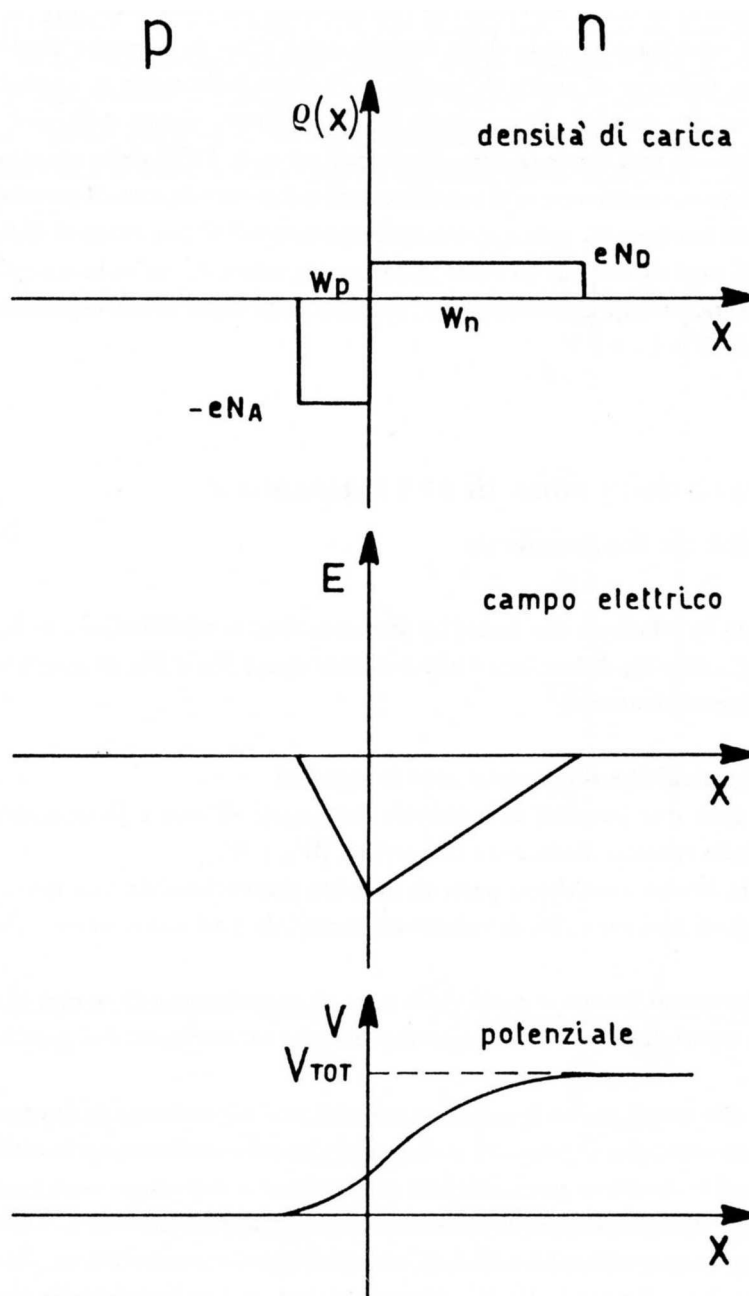


Fig.XVII.10

L'equazione di Poisson nel caso unidimensionale in questione si scrive:

$$\frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (\text{XVII.10})$$

ovvero

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (\text{XVII.11})$$

essendo $E_x = -\frac{\partial V(x)}{\partial x}$; ϵ rappresenta la costante dielettrica del semiconduttore, la stessa per entrambe le zone, assumendo che le concentrazioni di impurezze non alterino la costante dielettrica relativa del mezzo $\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$. Ricaviamo ora $E_x(x)$. Per valori di $x < 0$, cioè nel materiale p, avremo (Fig.10):

$$-W_p < x < 0 \quad \rho = -eN_A \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} = -\frac{eN_A}{\epsilon} \quad (\text{XVII.12})$$

mentre nel materiale n:

$$0 < x < W_n \quad \rho = eN_D \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{eN_D}{\epsilon} \quad (\text{XVII.13})$$

Pertanto avremo, imponendo che $E_x = 0$ per $x < -W_p$ e $x > W_n$:

$$-W_p < x < 0 \quad E_x = -\frac{eN_A}{\epsilon}(x + W_p) \quad (\text{XVII.14})$$

$$0 < x < W_n \quad E_x = \frac{eN_D}{\epsilon}(x - W_n) \quad (\text{XVII.15})$$

La condizione di neutralità complessiva della zona di svuotamento dà:

$$N_A \cdot W_p = N_D \cdot W_n \quad (\text{XVII.16})$$

che, come è evidente dalle (14) e (15), corrisponde ad avere continuità della componente x del campo $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ nel passare da un mezzo all'altro; essendo ϵ la stessa in entrambi i mezzi, la condizione di continuità di D_x è la stessa che per E_x . Per esprimere V_{TOT} in funzione di N_A, N_D e W_p, W_n dobbiamo integrare E_x fra $x = -W_p$ e $x = W_n$:

$$\begin{aligned} V_{TOT} &= - \left[\int_{-W_p}^0 \left(\frac{-eN_A}{\epsilon} \right) (x + W_p) dx + \int_0^{W_n} \left(\frac{eN_D}{\epsilon} \right) (x - W_n) dx \right] = \\ &= \frac{eN_A}{2\epsilon} W_p^2 + \frac{eN_D}{2\epsilon} W_n^2 \end{aligned} \quad (\text{XVII.17})$$

che sfruttando la (16) può scriversi:

$$V_{TOT} = \frac{eN_D}{2\epsilon} W_n^2 \left(1 + \frac{N_D}{N_A} \right) = \frac{eN_A}{2\epsilon} W_p^2 \left(1 + \frac{N_A}{N_D} \right) \quad (\text{XVII.18})$$

Nei casi pratici, proprio a causa del tipo di trattamento metallurgico adottato per realizzare la giunzione, uno dei due drogaggi è molto inferiore all'altro per cui l'ampiezza complessiva della zona di svuotamento è dominata dalla larghezza che si sviluppa nel materiale a minor concentrazione di impurezze (e quindi anche a minor conducibilità). Per esempio dalla (18) si vede che se $N_A \gg N_D$

$$V_{TOT} \approx \frac{eN_D}{2\epsilon} W_n^2 \quad (\text{XVII.19})$$

e quindi

$$W_n \approx \left(\frac{2\epsilon}{eN_D} V_{TOT} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{XVII.20})$$

ovvero, per valori di $V_{TOT} = V_B - V_e$ per cui $-V_e \gg V_B$ cioè per contropolarizzazioni energiche, la larghezza della zona di svuotamento cresce con la radice del valore assoluto della tensione applicata. Facciamo un esempio numerico, realistico per un diodo al Silicio:

$$N_D \approx 10^{21} \text{ Atomi}/m^3, N_A \gg N_D \quad \epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 = 12 \cdot 8.8 \cdot 10^{-12} \text{ F}/m \quad V_{TOT} = 10 \text{ V} \text{ abbiamo:}$$

$$W_n = 3.6 \cdot 10^{-6} m$$

Spessori di zone di svuotamento anche tre ordini di grandezza superiori si possono avere in diodi a giunzione contropolarizzati con tensioni di alcune centinaia di *Volt*, impiegati come rivelatori di particelle ionizzanti: l'ottenimento di tali spessori è ovviamente legato all'alto grado di purezza (ovvero alla bassa concentrazione di impurezze) di una delle due sezioni del semiconduttore.

Alla zona di svuotamento si può associare la cosiddetta *capacità di transizione* del diodo; infatti, riprendendo la (19) e differenziandola abbiamo: ($V_{TOT} \rightarrow V$, $W_n \rightarrow W$):

$$dV = \frac{eN_D}{\epsilon} W dW \quad (\text{XVII.21})$$

Moltiplicando il numeratore e il denominatore del membro di destra per la area S della superficie affacciata abbiamo:

$$dV = \frac{dq}{\epsilon} \frac{W}{S} \quad (\text{XVII.22})$$

avendo posto

$$dq = eN_D S dW \quad (\text{XVII.23})$$

in quanto essa rappresenta proprio l'aumento di carica accumulata in una delle due zone della giunzione dovuta all'allargamento dW . La relazione (23) può anche essere posta nella forma:

$$dV = \frac{dq}{C_T} \quad (\text{XVII.24})$$

dove

$$C_T = \frac{\epsilon S}{W} \quad (\text{XVII.25})$$

rappresenta la cosiddetta capacità di transizione del diodo. Si noti che essa varia a seconda della tensione V e che è tanto più piccola quanto più il diodo è contropolarizzato. La dipendenza funzionale di C_T dalla geometria è la stessa che avrebbe un condensatore a facce piane e parallele distanti W fra di loro e aventi superficie S , in cui il mezzo dielettrico fra le due facce avesse permittività elettrica ϵ ; questo risultato non deve stupire, ricordando le ipotesi semplificatrici fatte. Valori tipici di questa capacità sono assai piccoli: riprendendo l'esempio precedente, con $S = 1 \text{ mm}^2$ troviamo:

$$C_T \approx 29 \text{ pF}$$

(per $V_{TOT} = 10 \text{ V}$). Nonostante il suo piccolo valore, questa capacità in alcune applicazioni non può trascurarsi, anche a motivo del fatto che, quando il diodo è contropolarizzato, presenta una resistenza equivalente R_i fra i due elettrodi p e n molto elevata e quindi in tensione alternata l'impedenza $Z_C = \frac{1}{j\omega C_T}$ può divenire dominante, cioè molto più piccola, di R_i ; si noti che stiamo schematizzando il comportamento del diodo contropolarizzato con una resistenza, in contraddizione con l'andamento teorico atteso - corrente inversa costante, vedi (9) - ma in ragionevole accordo con gli andamenti sperimentali osservati.

5.— Il Diodo Zener

I *diodi Zener* o *diodi a valanga* (in inglese *breakdown diodes*) sono diodi a giunzione costruiti in modo tale da poter lavorare continuamente alla tensione di breakdown; particolari caratteristiche costruttive consentono di produrre diodi Zener con valori di tensione di breakdown da pochi *Volt* ad alcune centinaia di *Volt*. La caratteristica statica (Fig.11) di un diodo Zener, a parte la regione del breakdown, è estremamente simile a quella di un normale diodo a giunzione.

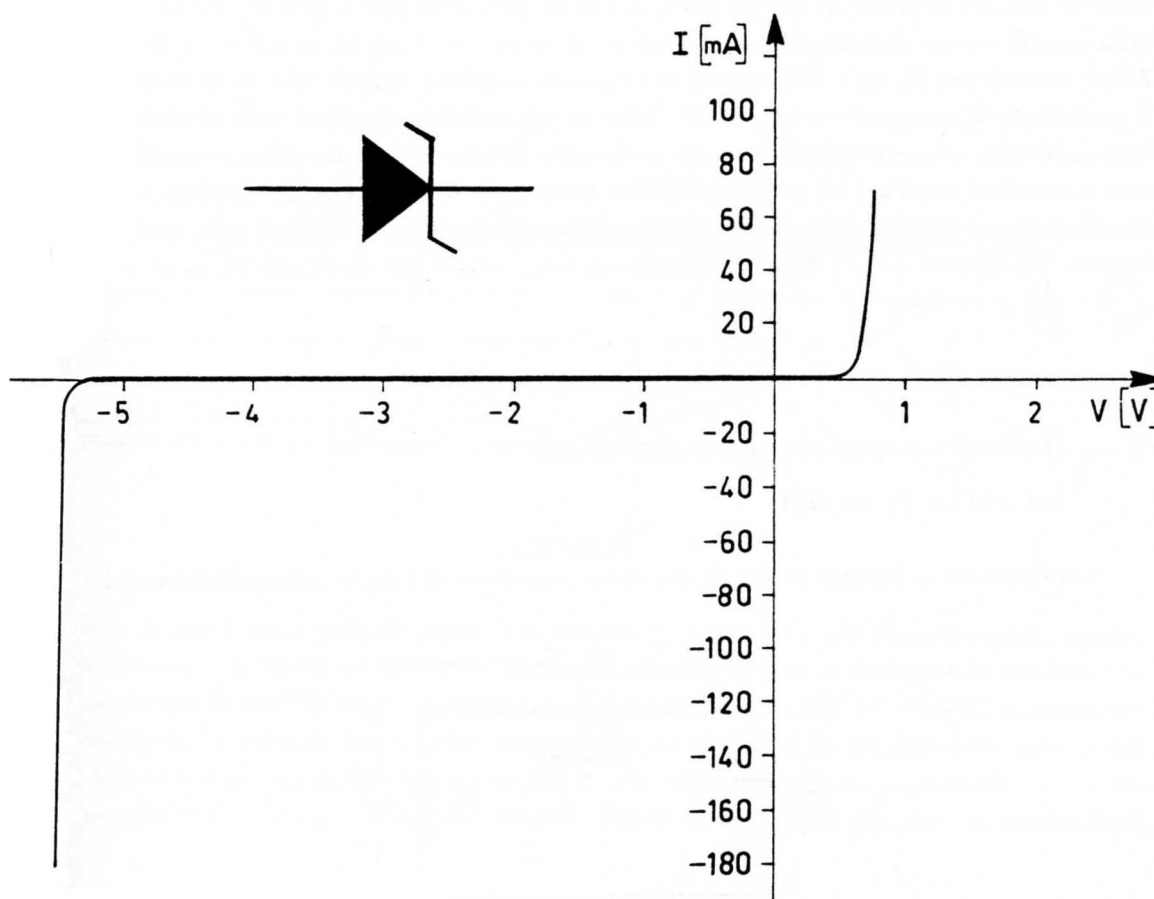


Fig.XVII.11

In figura è mostrata la caratteristica di un diodo Zener da 5.5 V: si noti che una volta innescato il processo di breakdown, anche variazioni grosse di corrente, provocano solo piccole variazioni di tensione ai capi del diodo; questo fatto - come vedremo fra qualche paragrafo - viene proprio sfruttato per costruire dei generatori di ddp continua. Il simbolo circuitale del diodo Zener è riportato nella Fig.11, dove la freccia rappresenta l'anodo.

Il diodo Zener viene impiegato quasi esclusivamente in condizioni di polarizzazione inversa, cioè con il catodo positivo rispetto all'anodo, ovvero ai suoi capi è presente la ddp di breakdown. I meccanismi fisici alla base del breakdown sono almeno due: uno - detto propriamente *effetto Zener* - è la rottura dei legami covalenti nella zona della giunzione a opera dell'alto campo elettrico ivi presente (si trova che tale effetto domina in quei diodi con tensioni V_Z di breakdown inferiori a 6 V); l'altro meccanismo è quello per cui i portatori minoritari responsabili della debole corrente inversa

acquistano, a causa del loro libero cammino medio assai lungo, tanta energia nell'attraversamento della zona della barriera da rompere i legami covalenti; i portatori così liberati acquistano a loro volta energia sufficiente da rompere altri legami e si innesca così il processo propriamente detto di *valanga*. Esso domina nei diodi Zener con tensioni V_Z maggiori di 6 V. Vediamo ora la dipendenza di V_Z dalla temperatura, con riguardo al meccanismo che stabilisce l'innesco della scarica. Per quanto riguarda l'effetto Zener propriamente detto, la rottura dei legami avviene a tensioni inferiori se la temperatura aumenta poiché l'agitazione termica, rendendo mediamente meno legati gli elettroni agli atomi, facilita la rottura dei legami. Per quanto riguarda l'effetto a valanga invece, l'aumento della temperatura ritarda la scarica poiché riduce il libero cammino medio dei portatori e conseguentemente abbassa il valore di energia cinetica che un portatore può acquistare fra un urto e l'altro nella zona di campo elettrico elevato. Concludendo si ha che, se nel diodo utilizzato domina l'effetto Zener, avremo per V_Z un coefficiente di temperatura negativo, mentre se domina l'effetto valanga, il coefficiente di temperatura è positivo. Diodi in cui entrambi gli effetti sono presenti con contributi opportuni, possono quindi avere un coefficiente di temperatura complessivo molto prossimo a zero e quindi si prestano a utili applicazioni come generatori di tensioni continue estremamente stabili; vedremo nel §9 i dettagli. Da quanto abbiamo detto sopra, tali diodi sono quelli che hanno tensioni V_Z attorno a 6 V; tipici coefficienti di temperatura per diodi con $V_Z \approx (5 \div 6) V$ sono $\frac{\Delta V_Z}{V_Z} \cdot \frac{1}{\Delta T} < 10^{-5}/^{\circ}C$.

6.— Il diodo come elemento circuitale

La retta di carico

Consideriamo il circuito di Fig.12: sia v_i un generatore di fem, in genere funzione del tempo.

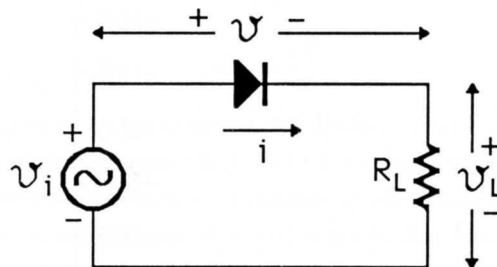


Fig.XVII.12

La risoluzione del circuito consiste nella conoscenza di $i(t)$ ovvero di $v_L(t) = i(t)R_L$; per arrivare a esprimere i in funzione di t , possiamo esprimere i in funzione di v_i applicando la seconda legge di Kirchhoff alla maglia:

$$v_i = v + iR_L \quad (\text{XVII.26})$$

Se poi esprimiamo v in funzione di i , per esempio sfruttando la (9), abbiamo risolto il nostro problema. In genere non si procede così, anche perché la dipendenza di v da i è teoricamente descritta dalla (9), ma sperimentalmente si trovano andamenti leggermente diversi; si preferisce procedere per via grafica (Fig.13) partendo dalla caratteristica sperimentale del diodo e osservando che la relazione (26) in un grafico (i, v) è rappresentata da una retta passante per $(i = 0, v = v_i(t))$

e ($i = \frac{v_i(t)}{R_L}, v = 0$), avente quindi pendenza pari a $-\frac{1}{R_L}$; per ogni valore di $v_i(t)$ si può tracciare una di queste rette, tutte parallele fra loro.

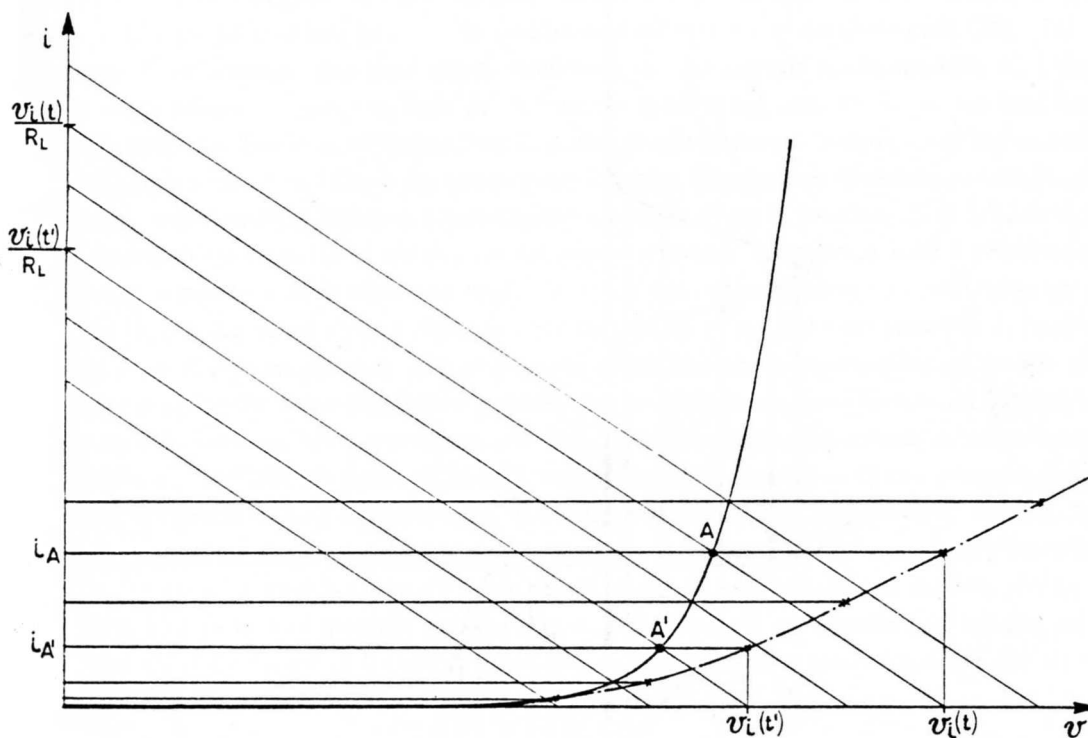


Fig.XVII.13

Ognuna di esse è detta *retta di carico*. L'intercetto di queste rette con la caratteristica statica del diodo determina la soluzione del nostro problema iniziale, in quanto stabilisce la corrente che circola nel circuito in quell'istante t , quando cioè $v_i = v_i(t)$ (i_A nella Fig.13). Questa osservazione ci consente anche di costruire la cosiddetta *caratteristica dinamica* del diodo: essa è la curva (i, v_i) che lega la corrente che passa nel circuito in Fig.12 alla ddp applicata dal generatore; tale curva è rappresentata come tratteggiata e a puntini nella Fig.13 ed è ottenuta dai punti di coordinate (i, v_i) .

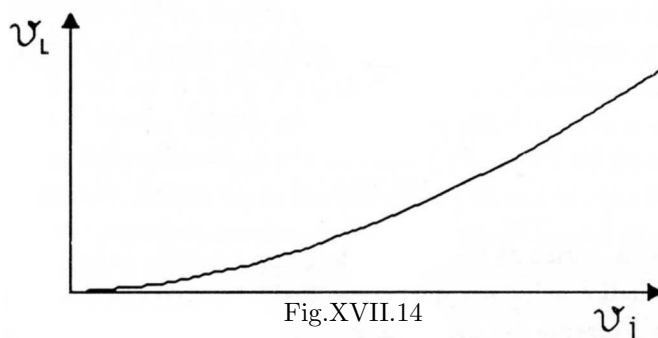


Fig.XVII.14

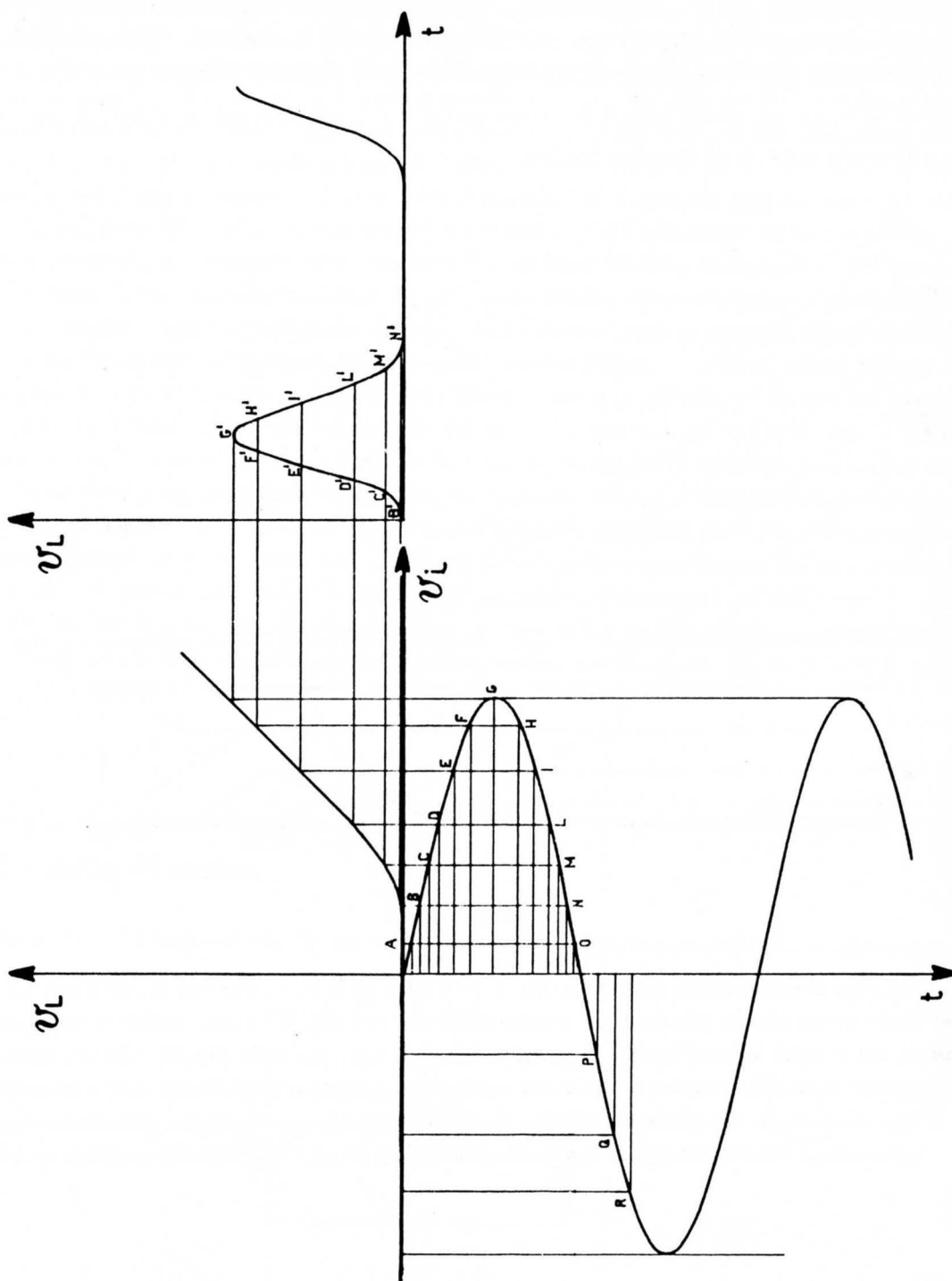


Fig.XVII.15

Mentre la caratteristica statica dà la corrente che passa nel diodo in funzione della ddp applicata agli estremi di esso, e quindi è unica per quel certo diodo, la caratteristica dinamica è diversa per ogni valore di R_L e dà i (corrente nel diodo) in funzione di v_i , ddp applicata dal generatore. Dal grafico è evidente che la caratteristica dinamica si presenta assai più lineare della caratteristica

statica; il motivo di ciò va ricercato nel fatto che la resistenza R_L utilizzata nell'esempio è maggiore della resistenza che *punto per punto* si può associare al diodo (l'inverso della pendenza della sua curva caratteristica): quanto più grande è R_L , tanto più trascurabile è nella (26) il contributo di v rispetto a iR_L .

Se siamo interessati a conoscere la tensione v_L ai capi della resistenza R_L , detta *resistenza di carico*, possiamo disegnare la caratteristica dinamica per il nostro circuito, riportando però in ordinata iR_L anziché i ; otteniamo così la cosiddetta *caratteristica di trasferimento* (Fig. 14). Essa ci consente di determinare per ogni valore della tensione del segnale v_i , la tensione v_L . Vediamo ora una applicazione di questi metodi di costruzione grafica nel caso in cui v_i sia una funzione sinusoidale (Fig.15). Tracciamo l'andamento di v_i sfruttando l'asse già disegnato per la caratteristica di trasferimento e tracciamo l'asse dei tempi verso il basso. Similmente sfruttiamo lo stesso asse v_L per tracciare a destra della curva di trasferimento il grafico di v_L in funzione di t . L'andamento di v_L in funzione di t è ottenuto graficamente nel seguente modo: la tensione $v_i(t)$ è proiettata sulla curva di trasferimento e determina una ordinata $v_L(t)$: tale valore insieme a t individua un punto nel grafico (v_L, t) . La costruzione è riportata per vari valori di v_i . Nel caso prescelto si osserva che per valori di $v_i < 0$ la tensione v_L non si discosta sensibilmente da zero e ciò corrisponde al fatto che il diodo contropolarizzato non lascia passare che una debole corrente inversa; si osserva inoltre che, non essendo la curva di trasferimento una retta, si ha una certa distorsione, principalmente per valori di $v_i \leq V_\gamma$ ($\approx 0.6 V$ nel diodo al Silicio); vale a dire i lobi positivi di v_i non vengono riprodotti fedelmente, a parte il fattore moltiplicativo, ma vengono, più o meno leggermente, distorti. Questo metodo di costruzione grafica è talvolta assai tedioso da utilizzare e poiché nonostante tutto ha una precisione limitata, proprio a causa del fatto che si tratta di una costruzione grafica, più spesso si preferisce procedere in una maniera ancora diversa, introducendo un circuito equivalente, anche se approssimato, del diodo; esso è il cosiddetto *modello a linea spezzata* o *piecewise model* che riconduce il problema a quello della risoluzione di una rete lineare.

7.— Il “piecewise model”

Un esempio di applicazione

In questo modello si approssima la caratteristica statica di un diodo con una linea spezzata, (vedi Fig.16) costituita da due semirette; la semiretta per $v < V_\gamma$ coincide con l'asse delle v , mentre la semiretta per $v > V_\gamma$ ha pendenza finita esprimibile come $\frac{1}{R_f}$ e intercetto con l'asse delle ascisse pari a V_γ . Questa approssimazione grafica corrisponde a schematizzare il diodo come una resistenza infinita per $v < V_\gamma$ e come un generatore di fem costante pari a V_γ in serie a una resistenza R_f (detta *resistenza diretta del diodo*) per $v > V_\gamma$. I valori di V_γ e R_f dipendono dal particolare diodo che si usa e anche dal punto di lavoro. Infatti, con riferimento alla Fig.17, se si intende adoperare il diodo fino a correnti massime dell'ordine di $10 mA$ la retta 1 ($V_\gamma \approx 0.5 V$, $R_f \approx 12\Omega$) può risultare una ragionevole approssimazione, mentre per correnti attorno a $50 mA$ la retta 2 ($V_\gamma \approx 0.8 V$, $R_f \approx 1.5\Omega$) riproduce più soddisfacentemente l'andamento. E' chiaro che il circuito (Fig.18) studiato nel §6, può ora essere risolto sfruttando il circuito equivalente del diodo. Supponiamo che l'andamento di v_i sia sinusoidale $v_i = v_0 \sin \omega t$. Per $v_i < V_\gamma$ avremo una ddp nulla ai capi di R_L , poiché, essendo il diodo in queste condizioni schematizzato come una resistenza infinita, la corrente nel circuito sarà zero e tale la caduta su R_L .

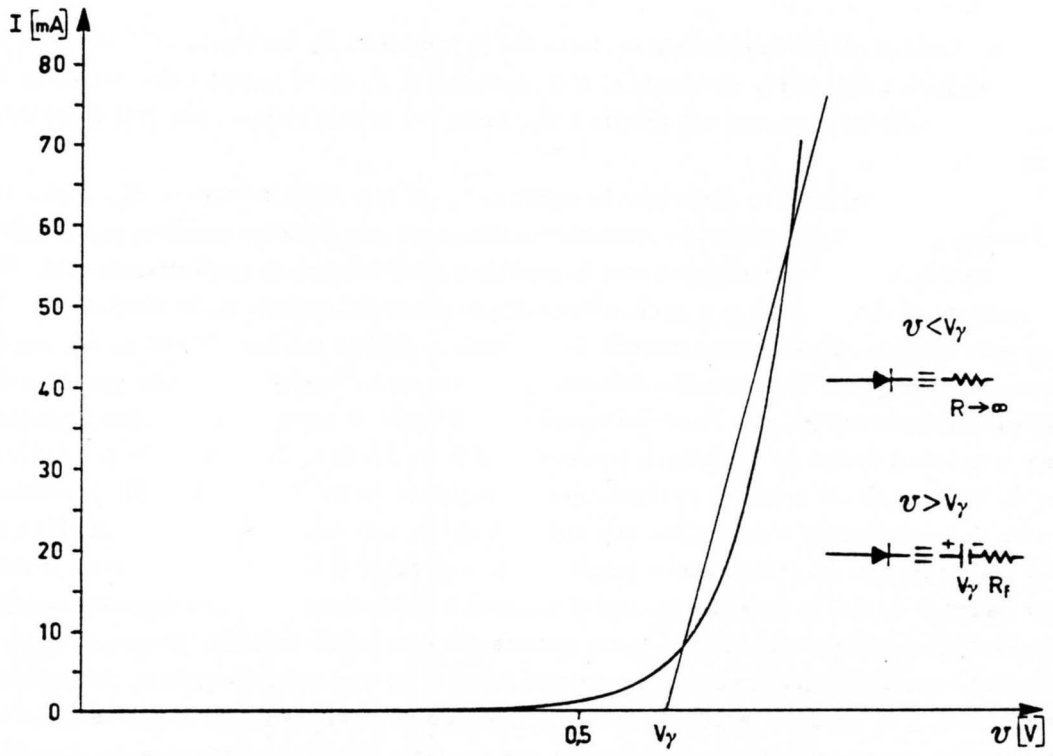


Fig.XVII.16

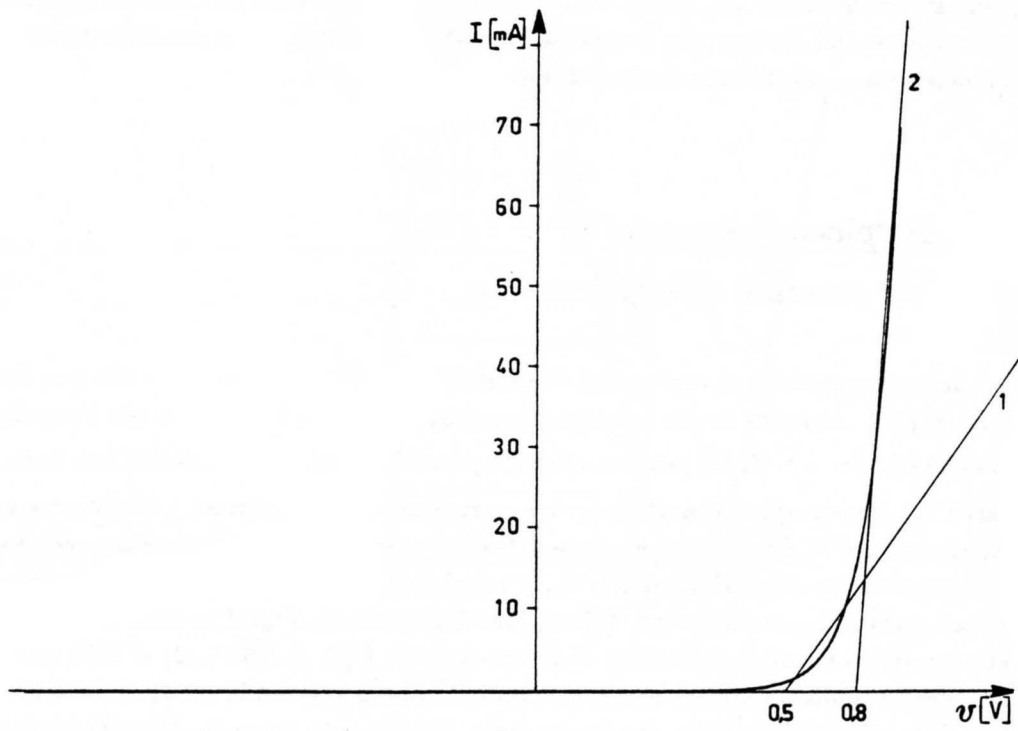


Fig.XVII.17

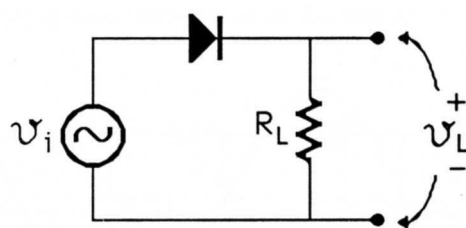


Fig.XVII.18

Per $v_i > V_\gamma$ possiamo risolvere il circuito sostituendo al diodo il suo equivalente (Fig.19).

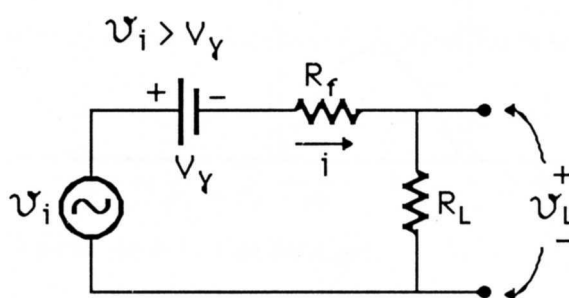


Fig.XVII.19

La seconda legge di Kirchhoff questa volta ci consente la risoluzione del problema poiché è possibile esplicitare la dipendenza di v da i :

$$v_i - V_\gamma = i(R_f + R_L) \quad (\text{XVII.27})$$

e quindi

$$v_L = iR_L = \frac{v_i - V_\gamma}{R_f + R_L} R_L = \frac{v_i}{R_f + R_L} R_L - \frac{V_\gamma R_L}{R_f + R_L} \quad (\text{XVII.28})$$

Riportando in grafico l'andamento di v_i e v_L otteniamo le curve di Fig.20. Per quanto riguarda v_L , l'andamento, per $v_i > V_\gamma$, è una sinusoide pura alla quale è sottratto un termine costante. La principale approssimazione introdotta dal modello consiste nella discontinuità con cui si passa dal segnale uguale a zero (per $v_i < V_\gamma$) a valori diversi da zero; si veda per confronto il raccordo continuo nella costruzione grafica della Fig.15, esente da approssimazioni.

Se vogliamo compiere una analisi dettagliata del comportamento di un circuito ove sia presente un diodo, il modello "a linea spezzata" non è adatto poiché approssimato; tuttavia in molti casi la possibilità di poter affrontare il problema mediante le tecniche di risoluzione delle reti lineari costituisce un indubbio vantaggio. Vedremo ciò su un esempio di applicazione molto comune del diodo: il *raddrizzamento delle correnti alternate*.

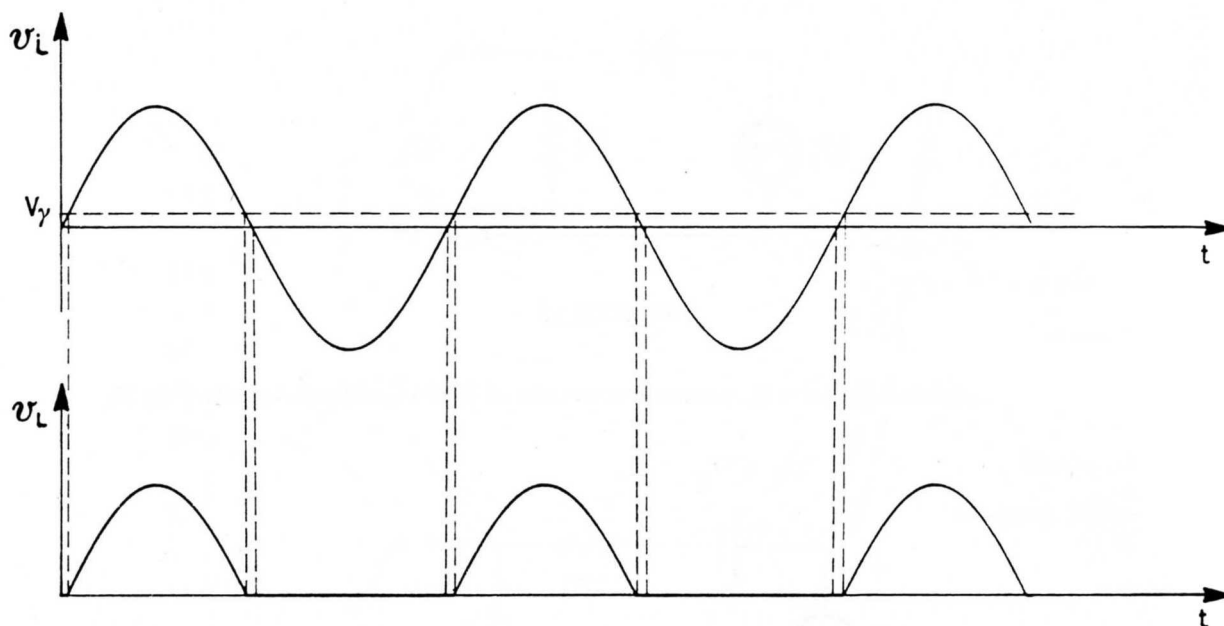


Fig.XVII.20

8.- Il diodo come raddrizzatore

Un esempio di generatore elettronico di fem continua

Consideriamo il circuito in Fig 21. La tensione v_R , che supponiamo essere quella di rete (220 V di valore efficace, frequenza 50 Hz) è applicata al primario di un trasformatore; sul secondario appare una ddp alternata che con buona precisione può esprimersi come (vedi Cap. IX, §6)

$$v_S = v_R \frac{N_S}{N_P} = \alpha v_R \quad (\text{XVII.29})$$

dove α è il rapporto di trasformazione pari al rapporto fra il numero di spire del secondario e quelle del primario.

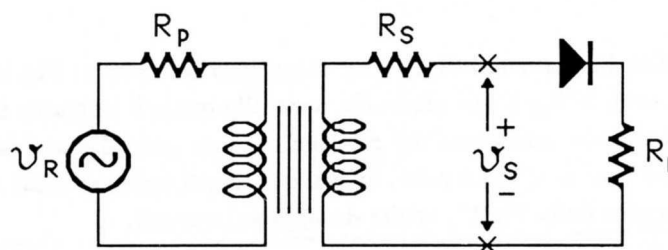


Fig.XVII.21

Sappiamo anche che se $\alpha < 1$, come spesso accade in questo tipo di applicazioni, la impedenza interna del generatore v_S è dell'ordine di grandezza di R_S , la resistenza ohmica dell'avvolgimento

del secondario. Pertanto il circuito del secondario può essere rappresentato come in Fig.22, con $v_S = V_M \cos \omega t$ (scegliendo opportunamente l'origine dei tempi).

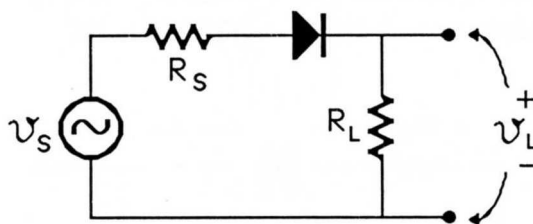


Fig.XVII.22

Dall'analisi del paragrafo precedente sappiamo che se $V_\gamma \ll V_M$ la tensione v_L ha un andamento del tipo:

$$v_L = 0 \quad \text{se} \quad v_S < 0 \quad \text{(XVII.30)}$$

$$v_L = v_S \frac{R_L}{R_S + R_f + R_L} \quad \text{se} \quad v_S > 0 \quad \text{(XVII.31)}$$

L'andamento di v_S e v_L è riportato nella Fig.23.

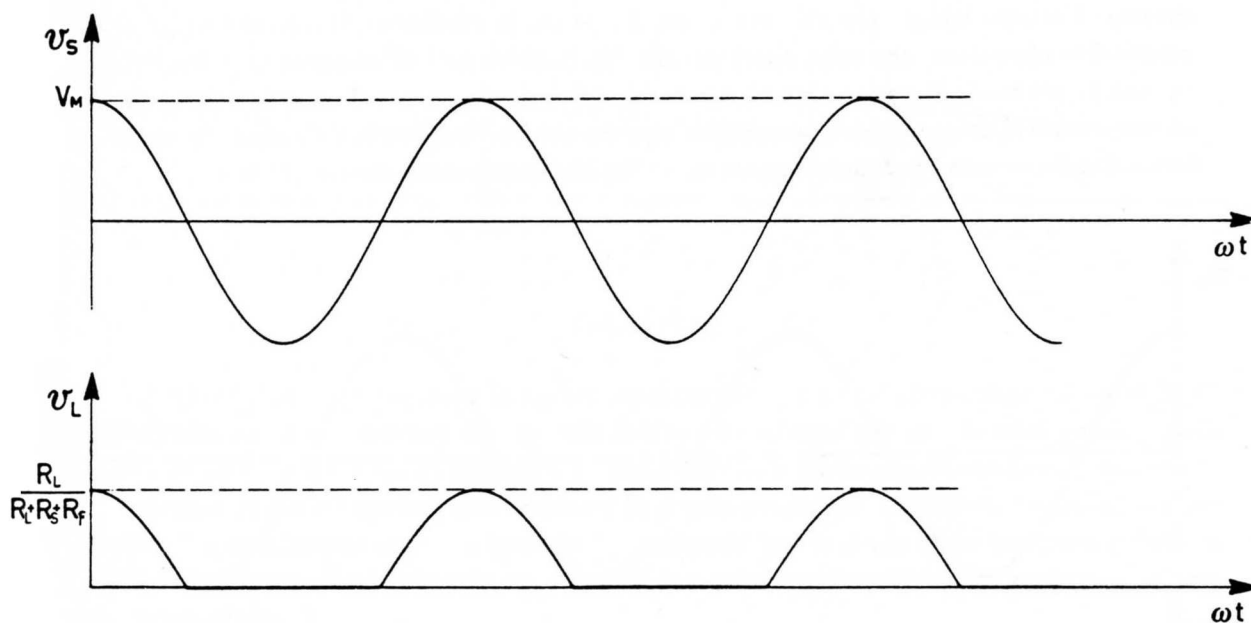


Fig.XVII.23

Vediamo che sulla resistenza R_L è presente una ddp con media diversa da zero pari precisamente a

$$\langle v_L \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} V_M \frac{R_L}{R_L + R_S + R_f} \cos \omega t \, d(\omega t) = \frac{1}{\pi} \frac{V_M R_L}{(R_S + R_L + R_f)} \quad \text{(XVII.32)}$$

La funzione espletata dal circuito, di ottenere una forma d'onda a media non nulla partendo da una forma d'onda a media nulla, è detta di *raddrizzamento* o *rettificazione*. Questa è la prima e

fondamentale operazione che occorre fare per passare da una tensione sinusoidale a una ddp continua o almeno il più possibile costante. La forma d'onda $v_L(t)$ ha sì media non nulla, ma necessita di altre operazioni prima di poter anche solo approssimare una ddp continua. Aggiungiamo per questo un condensatore in parallelo a R_L e riconsideriamo la risposta v_L del nostro circuito alla applicazione della medesima tensione di eccitazione v_S (Fig.24)

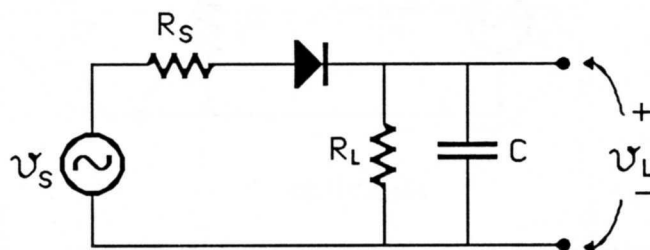


Fig.XVII.24

Lo studio di questo circuito (*raddrizzatore a singola semionda con filtro a condensatore*) è abbastanza complicato se lo si vuole trattare rigorosamente, proprio a motivo della presenza dell'elemento *non lineare* diodo. Diamo pertanto una descrizione approssimata del funzionamento che, sfruttando i circuiti equivalenti del §7, permette di descrivere almeno il grosso degli effetti caratteristici del circuito. Notiamo intanto che nel caso in cui $R_L \rightarrow \infty$, la condizione di regime è $v_L(t) = V_M$ in quanto il condensatore, una volta caricatosi alla ddp positiva pari all'ampiezza massima del segnale v_S , non ha più modo di scaricarsi in quanto la ddp sul diodo è sempre nel verso di contropolarizzarlo ed esso quindi si comporta sempre come un circuito aperto. Qualora la resistenza R_L sia finita, la forma d'onda assume l'andamento riportato in Fig.25 (ammettiamo che $\omega R_L C \gg 1$).

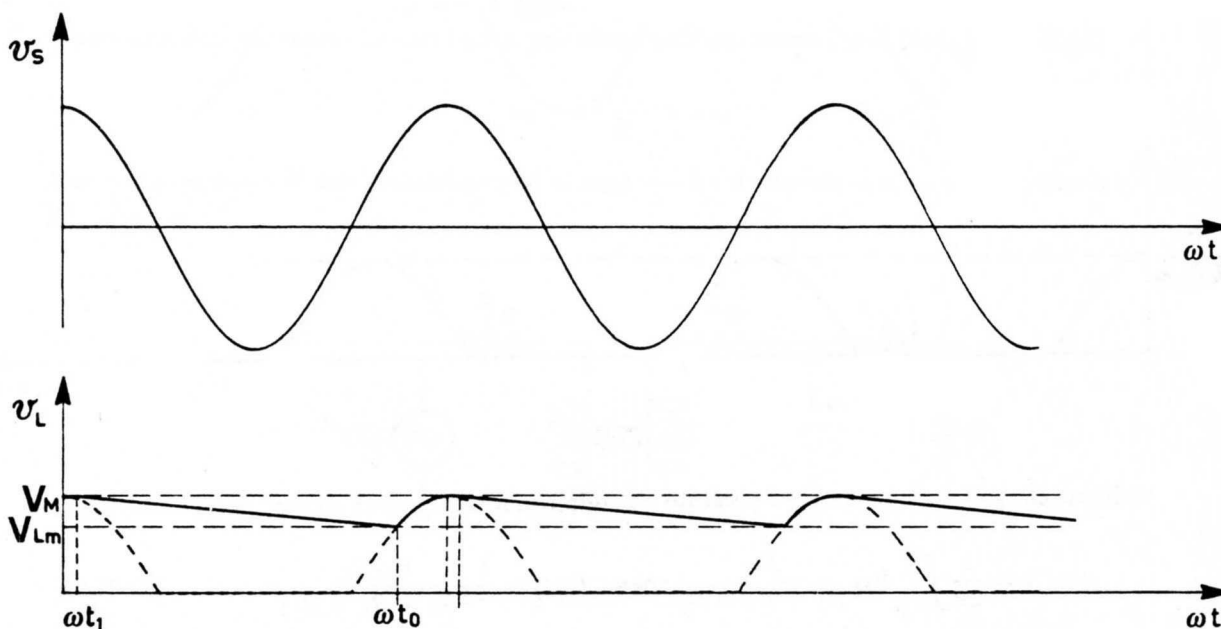


Fig.XVII.25

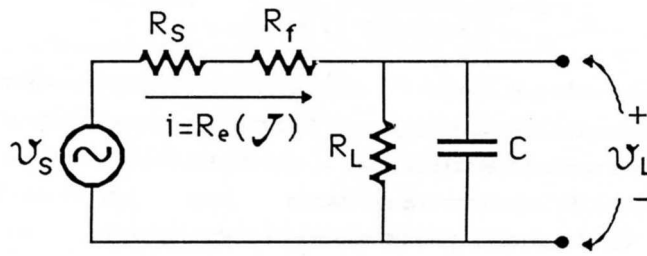


Fig.XVII.26

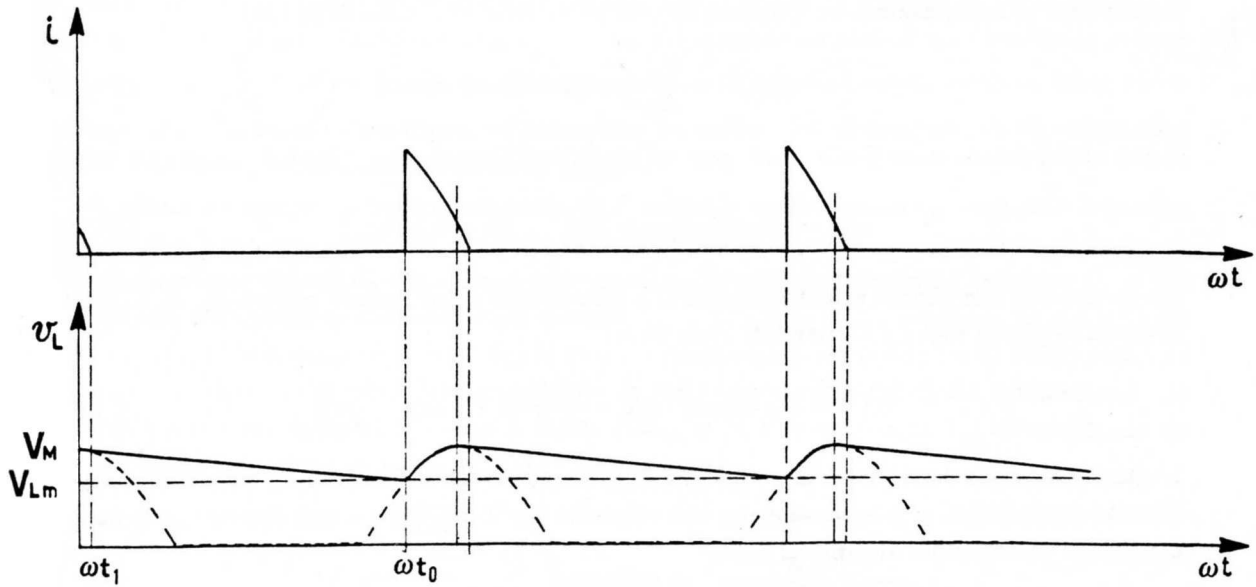


Fig.XVII.27

I tratti rettilinei rappresentano la scarica esponenziale, per tempi piccoli rispetto a $\tau = R_L C$, del condensatore sulla resistenza R_L , quando il diodo è contropolarizzato; le altre porzioni della tensione di uscita sono archi di sinusoidi e corrispondono a quelle condizioni in cui, essendo la ddp applicata al diodo positiva, esso conduce; in queste condizioni, sfruttando l'approssimazione "piecewise" e trascurando anche la tensione V_γ , trattando cioè il diodo come una pura resistenza R_f (Fig.26), abbiamo che la corrente attraverso di esso potrà esprimersi come la parte reale di una corrente complessa \mathcal{J} :

$$\mathcal{J} = \frac{V_M \exp j\omega t}{R_f + R_s + \frac{R_L}{1 + j\omega C R_L}} \quad (\text{XVII.33})$$

Facciamo l'ulteriore approssimazione di trascurare le cadute su R_s e R_f , vale a dire trascuriamo R_s e R_f rispetto a R_L e inoltre assumiamo che $\omega C R_s, \omega C R_f \ll 1$; questa può essere una ragionevole approssimazione nei casi reali, almeno fintanto che il trasformatore è stato dimensionato sufficientemente bene e il diodo lavora mediamente a corrente elevata (così da avere una R_f piccola).

In queste ipotesi

$$\mathcal{J} = \frac{V_M}{R_L} \exp j\omega t \cdot (1 + j\omega CR_L) \quad (\text{XVII.34})$$

La (34) può essere applicata solo nel campo di valori di t (vedi Fig.25) compresi fra t_0 e t_1 ; per $t = t_0$ la corrente presenta una discontinuità (Fig.27) in quanto immediatamente prima di t_0 è il condensatore che eroga la corrente necessaria a fare la caduta su R_L (la tensione ha derivata negativa), immediatamente dopo è il generatore a inviare la medesima corrente su R_L più un ulteriore contributo di corrente nel condensatore; quest'ultimo è di segno opposto rispetto alla corrente che fluiva attraverso il condensatore nell'istante immediatamente precedente (infatti la derivata di v_L : $\frac{dv_L}{dt} = \frac{dQ}{dt} \frac{1}{C}$ cambia repentinamente di segno). Queste discontinuità non intervengono nei casi reali poiché esse vengono rimosse dalla presenza di resistenze R_S e R_f non nulle; considerare queste resistenze finite complicherebbe eccessivamente il calcolo, senza aiutare molto la comprensione del meccanismo di raddrizzamento. Considerando la parte reale di \mathcal{J} data dalla (34):

$$i = \text{Re}(\mathcal{J}) = \frac{V_M}{R_L} \cos \omega t - V_M \omega C \sin \omega t \quad (\text{XVII.35})$$

si può anche determinare il valore ωt_1 per cui $i = 0$, cioè l'istante in cui il diodo cessa di condurre:

$$\omega t_1 = \text{atan} \frac{1}{\omega CR_L} + 2n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{XVII.36})$$

che ci dice che tale istante è tanto più vicino a zero ovvero a $2n\pi$ quanto più $\omega CR_L \gg 1$. Il tratto di curva $v_L(t)$ che segue è descrivibile nella forma

$$v_L(t) = V_M \cos \omega t_1 \cdot \exp -\frac{t - t_1}{R_L C} \approx V_M \exp -\frac{t - t_1}{R_L C} \quad (\text{XVII.37})$$

L'ultimo passaggio della (37) è tanto più giustificato quanto più $\omega CR_L \gg 1$; in questa stessa ipotesi il tratto esponenziale può approssimarsi con una retta $V_M(1 - \frac{t-t_1}{R_L C})$ e si può ricavare t_0 in base alla condizione di ddp nulla ai capi del diodo:

$$V_{Lm} = V_M(1 - \frac{t_0 - t_1}{R_L C}) = V_M \cos \omega t_0 \quad (\text{XVII.38})$$

La forma d'onda v_L (Fig.25) ricorda molto più da vicino una ddp continua di quanto non succedesse in assenza di condensatore (Fig.23). Se si vuole quantificare l'entità degli scarti di $v_L(t)$ dal valore medio, possiamo procedere così: il valor medio di v_L è, almeno approssimativamente, dato dalla semisomma dei valori massimo (V_M) e minimo ($V_{Lm} = V_M(1 - \frac{t_0 - t_1}{R_L C})$); l'approssimazione è tanto migliore quanto più lineare è il tratto fra ωt_1 e ωt_0 , in sostanza quanto più $\omega CR_L \gg 1$.

$$\langle v_L \rangle = \frac{1}{2} \left(V_M + V_M - V_M \frac{t_0 - t_1}{R_L C} \right) = V_M - V_M \frac{t_0 - t_1}{2CR_L} \quad (\text{XVII.39})$$

Se, come abbiamo supposto, $\omega R_L C \gg 1$, allora sarà $t_0 - t_1 \approx T = \frac{1}{f}$ dove f è la frequenza del generatore, nel nostro caso la rete, quindi 50 Hz; nell'ambito delle attuali schematizzazioni, il fattore $\frac{1}{2fR_L C}$ è $\ll 1$ e pertanto potremmo porre $\frac{V_M}{R_L} \approx \frac{\langle v_L \rangle}{R_L} = \langle I \rangle$, con $\langle I \rangle$ corrente media su R_L ; possiamo quindi scrivere:

$$\langle v_L \rangle = V_M - \frac{\langle I \rangle}{2fC} \quad (\text{XVII.40})$$

Quest'ultima relazione suggerisce che il nostro sistema, con riferimento ai due terminali cui è collegato R_L , si comporta *in media* come un generatore di Thévenin avente fem a circuito aperto

pari a V_M ($R_L \rightarrow \infty, \langle I \rangle \rightarrow 0$) e una resistenza interna equivalente pari a $\frac{1}{2fC}$. Vale a dire, considerando questo generatore, la tensione media che esso mantiene ai capi di un carico R_L , è tanto più vicina al valore asintotico V_M , quanto più grande è R_L .

A questo punto possiamo esemplificare il meccanismo secondo il quale avviene il raddrizzamento della tensione alternata v_S : durante tutta la fase in cui il diodo è contropolarizzato, di fatto la maggior parte del tempo, il condensatore eroga la corrente richiesta dall'utilizzatore, cioè fornisce energia all'esterno; solo per brevi istanti il diodo risulta polarizzato direttamente e in queste fasi una corrente di elevata intensità viene inviata dal generatore sia per sostenere la caduta su R_L che per rifornire al condensatore la carica perduta nella fase in cui il diodo era contropolarizzato; una eventuale riduzione della resistenza R_L ha come effetto che la corrente media richiesta per mantenere approssimativamente la stessa ddp aumenta e quindi il condensatore perde più carica fra un intervento del diodo e il successivo e quindi lo scarto medio della tensione di uscita rispetto al valore massimo aumenta; l'effetto medio è descritto nei termini ora visti di una *resistenza interna efficace* pari a $\frac{1}{2fC}$. Il residuo di componente alternata attorno al valore medio è detto *ripple* (increspatura); da quanto visto sopra, all'aumentare del carico, cioè al diminuire di R_L , diminuisce il valore medio $\langle v_L \rangle$ e aumenta anche il "ripple".

Facciamo un esempio numerico: supponiamo di avere un trasformatore con rapporto di trasformazione 10 a 1 con una resistenza sul secondario R_S dell'ordine di 1Ω . Supponiamo di avere un diodo di caratteristiche tali da poter essere approssimato dal modello "piecewise", con una $R_f \approx 1\Omega$. La ampiezza della tensione sinusoidale sul secondario è: $\frac{220}{10}\sqrt{2} \approx 31\text{ V}$; supponendo che il carico massimo (ovvero la minima resistenza R_L) al quale vogliamo applicare la ddp sia di 100Ω , possiamo trascurare la resistenza interna del secondario e la resistenza diretta del diodo commettendo un errore di qualche per cento; inoltre dato il valore di $V_M \approx 31\text{ V}$, trascuriamo V_γ , commettendo un ulteriore errore di qualche per cento nella stima del massimo.

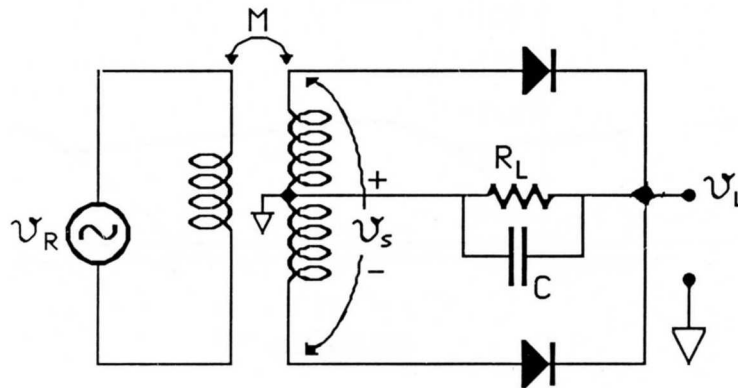


Fig.XVII.28

Se ora vogliamo che per il carico massimo di 100Ω si abbia una *regolazione* del 10%, ovvero che il valor medio della tensione non diminuisca di più del 10% rispetto al valore per carico nullo ($R_L = \infty$), abbiamo una prescrizione riguardo a C ; infatti dalla (40) otteniamo: $\frac{\langle I \rangle}{2fC} \leq 10^{-1}V_M$ e quindi $C \geq 1000\ \mu\text{F}$ che è senz'altro un condensatore di valore assai elevato, ma ancora facilmente reperibile (condensatori elettrolitici). Quanto alla resistenza interna equivalente $R_e = \frac{1}{2fC}$ essa vale: $R_e = 10\Omega$. Si verifica così che la resistenza efficace domina rispetto a quella del trasformatore e del diodo; se avessimo viceversa trovato un valore dell'ordine di qualche *Ohm* non avremmo più potuto dimenticarci degli altri contributi; ovviamente tutto ciò si è verificato perché la *regolazione* richiesta

è stata del 10%, che equivale proprio ad accettare una resistenza interna di 10Ω . Prima di passare a descrivere un circuito che utilizza un diodo Zener per migliorare le prestazioni di questo generatore di tensione "continua", notiamo che un raddrizzatore di questo tipo costringe il diodo e il trasformatore a lavorare in maniera assai poco efficiente, che oltretutto può mettere a dura prova i componenti: infatti, richieste repentine di corrente intensa per brevi periodi, richiedono al diodo densità di corrente molto elevata, molto superiore al valore medio della corrente richiesta dal carico; pertanto il diodo va scelto fra i tipi che siano in grado di sopportare un tale genere di funzionamento (per esempio di sezione grossa, in modo che le cadute ohmiche al suo interno siano piccole); anche per il trasformatore erogare grosse correnti di spunto può portare a problemi, in quanto si richiedono potenze istantanee estremamente elevate. Il sistema ora descritto, *raddrizzamento a singola semionda*, si può facilmente migliorare sfruttando anche la semionda successiva, ricorrendo a due diodi e a un trasformatore a presa centrale (Fig.28). Non entreremo nei dettagli, ma diremo soltanto che il miglioramento è ottenuto principalmente facendo in modo che il trasferimento di energia dal trasformatore al condensatore avvenga più frequentemente e quindi a parità di valori di V_M , C , R_L la regolazione migliora di un fattore 2 (Fig.29).

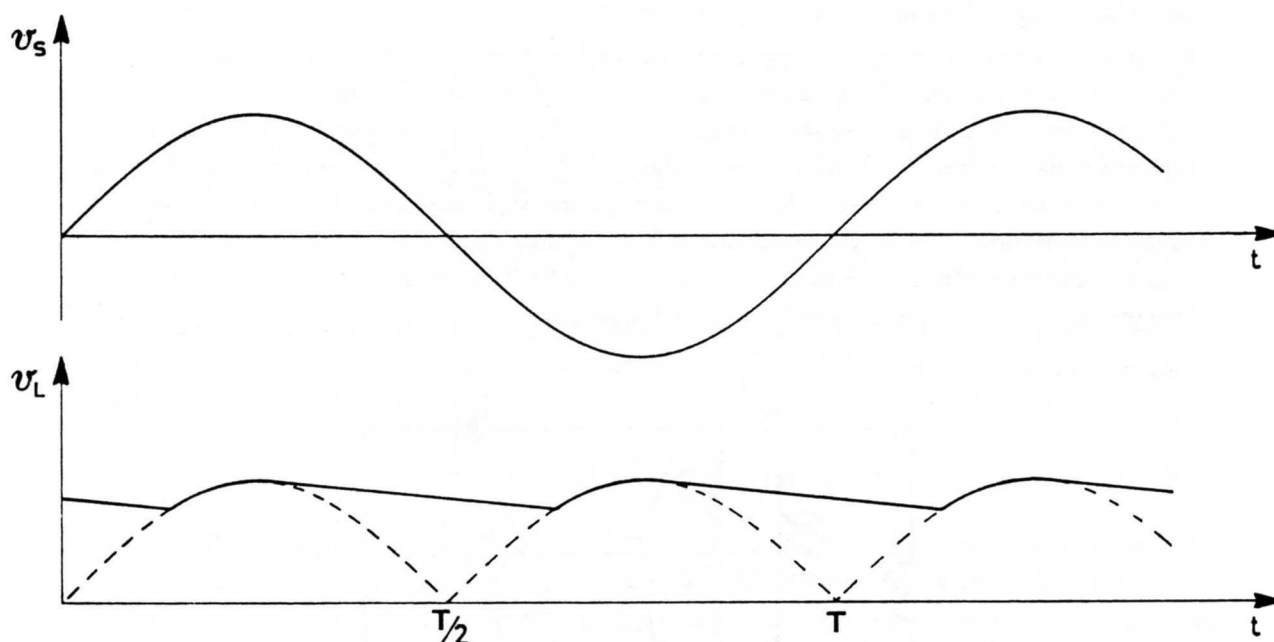


Fig.XVII.29

9.— Un regolatore di tensione a diodo Zener

Abbiamo ora visto che, usando un raddrizzatore a diodi con un filtro a condensatore, se si vuole realizzare un generatore di fem il più possibile costante e il più possibile insensibile al carico, cioè con una piccola resistenza interna, occorre - fissata la frequenza - aumentare il valore del condensatore; questo pone alcuni problemi di funzionamento sia al diodo che al trasformatore che si trovano a lavorare praticamente in regime impulsivo. Quest'ultimo fatto stabilisce un limite superiore al

valore del condensatore e pertanto un valore minimo del ripple e della regolazione (indipendenza dal carico) ad alimentatori di questo tipo. Si possono ottenere risultati migliori sia dal punto di vista della costanza del valore medio rispetto al carico che da quello del ripple realizzando un alimentatore mediante un diodo Zener. Riportiamo in Fig.30 la caratteristica di un diodo Zener e notiamo che quando la corrente inversa supera un certo valore minimo I_{Zmin} la tensione ai capi del diodo V_Z si mantiene pressoché costante e indipendente da I .

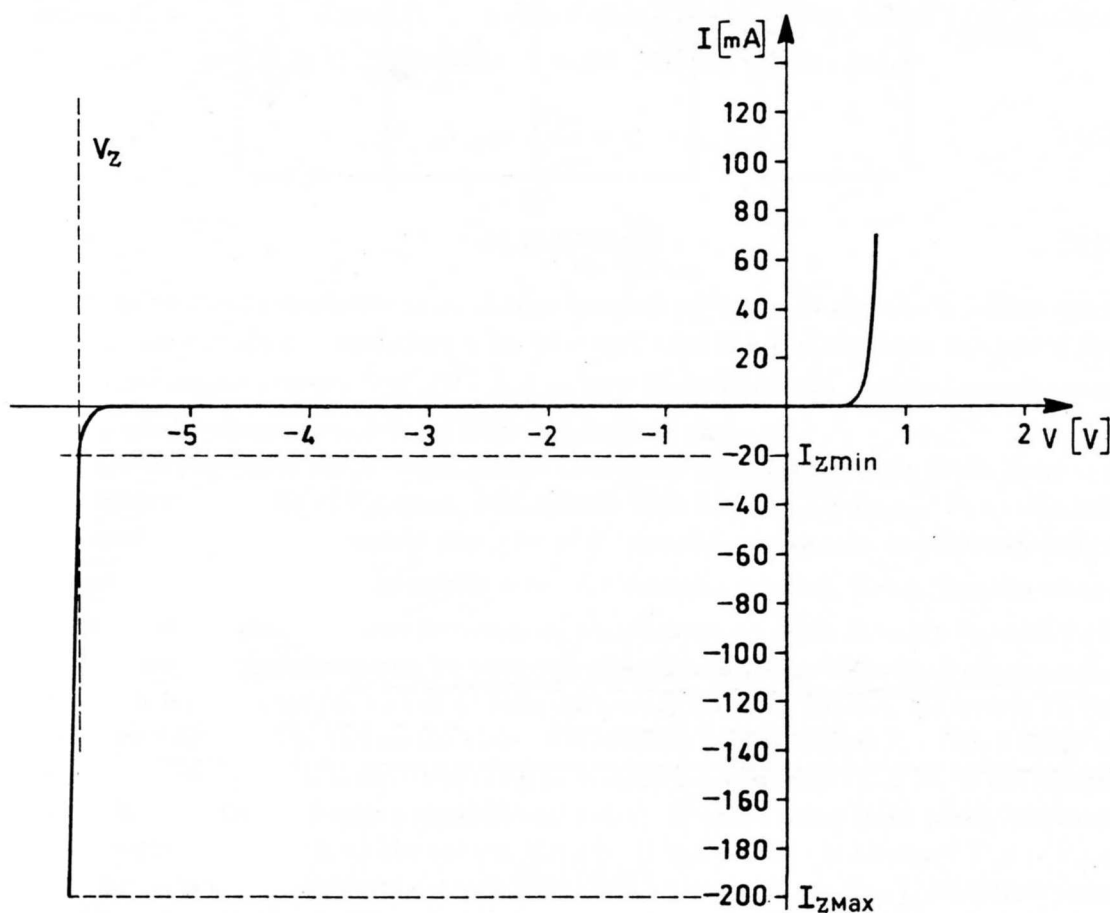


Fig.XVII.30

La zona della caratteristica dove si passa da una corrente praticamente nulla al valore I_{Zmin} è detta *ginocchio* dello Zener. Il limite massimo I_{ZMax} della corrente nel diodo è determinato dalla potenza massima W_M che si può dissipare ($V_Z I_{ZMax} < W_M$) sul diodo medesimo. Vediamo ora (Fig.31) come si può realizzare un discreto generatore di fem costante di valore V_Z con una massima corrente erogabile attorno al valore $(I_{ZMax} - I_{Zmin})$: innanzitutto occorre disporre di un raddrizzatore del tipo descritto nel paragrafo precedente, avente magari un "ripple" residuo anche grosso, purché la tensione minima V_m che presenta ai suoi capi (A,B) sia comunque abbastanza superiore a V_Z , quando eroghi una corrente media nell'intorno del valore I_{ZMax} . Oltre alla variazione della tensione fra A e B dovuta al ripple, sarà anche presente una instabilità associata alla fluttuazione

della tensione sul primario, ovvero della rete, tipicamente $\pm 10\%$.

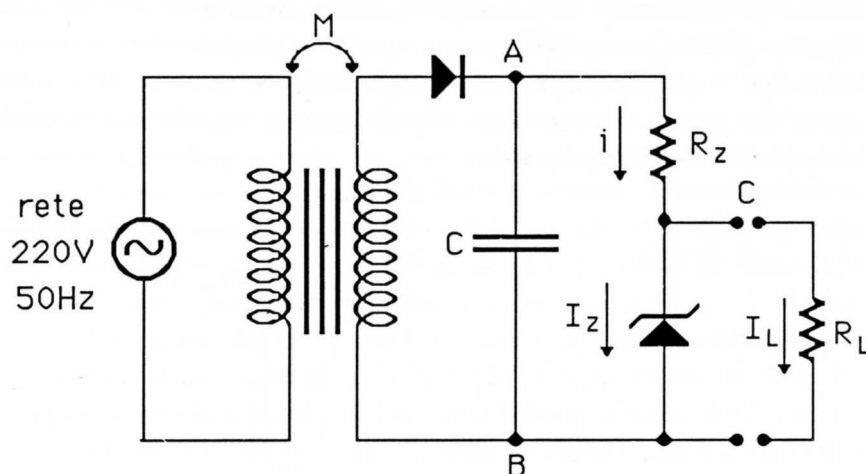


Fig.XVII.31

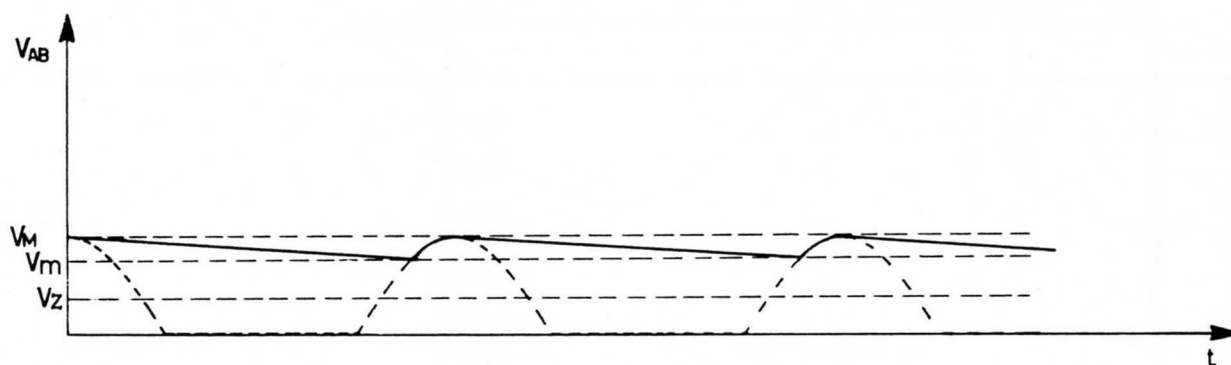


Fig.XVII.32

Poiché, almeno fintanto che $I_Z > I_{Zmin}$, la ddp ai capi del diodo Zener è pari a V_Z , avremo che la corrente i su R_Z oscillerà fra due valori, corrispondenti al massimo (V_M) e al minimo (V_m) di V_{AB} (vedi Fig.32), di cui il più elevato pari a

$$i_M = \frac{V_M - V_Z}{R_Z} \quad (\text{XVII.41})$$

e l'altro

$$i_m = \frac{V_m - V_Z}{R_Z} \quad (\text{XVII.42})$$

Nel caso in cui fra C e B (terminali del nostro generatore) non sia collegato alcun carico, sarà $i = I_Z$ e pertanto, se non vogliamo danneggiare lo Zener in questa situazione di lavoro, R_Z dovrà essere scelta in modo da fare i_M al più uguale a I_{ZMax} ; pertanto avremo

$$R_Z \geq \frac{V_M - V_Z}{I_{ZMax}} \quad (\text{XVII.43})$$

Scegliamo R_Z in modo da soddisfare la relazione di uguaglianza. In corrispondenza dei minimi di $V_{AB} = V_m$ avremo una corrente nello Zener in assenza di carico, pari a (vedi (42) e (43)):

$$i_m = \frac{V_m - V_Z}{V_M - V_Z} I_{ZMax} \quad (\text{XVII.44})$$

Se a questo punto colleghiamo fra C e B il carico R_L , esso deriverà una corrente I_L , che andrà a sottrarsi alla corrente I_Z che circolava nel diodo Zener; fintanto che la corrente residua nel diodo si mantiene superiore a I_{Zmin} la ddp V_{CB} resta uguale a V_Z ; questa considerazione, insieme alla relazione $I_L = \frac{V_Z}{R_L} = i - I_Z$ stabilisce un limite minimo per la resistenza R_{Lm} (e un massimo I_{LM} per I_L), quello per cui I_Z si è ridotta fino al minimo valore consentito I_{Zmin} :

$$I_{LM} = \frac{V_Z}{R_{Lm}} = i_m - I_{Zmin} \quad (\text{XVII.45})$$

ovvero

$$R_{Lm} = \frac{V_Z}{i_m - I_{Zmin}} \quad (\text{XVII.46})$$

Si noti che abbiamo considerato la condizione peggiore per i , quella cioè che si verifica quando la tensione V_{AB} è minima. Concludendo, finché il carico fra C e B si mantiene inferiore a R_{Lm} , se vengono cioè erogate correnti $I_L \leq \frac{V_Z}{R_{Lm}} = I_{LM}$, nello Zener scorre una corrente comunque superiore a I_{Zmin} , quella minima necessaria ad avere una tensione pari a V_Z .

L'analisi precedente non è esatta, poiché dalle caratteristiche reali di un diodo Zener si ricava una variazione non nulla di V_Z , quando la corrente varia fra I_{ZMax} e I_{Zmin} . Tale variazione può anche ammontare anche a qualche per cento ed è calcolabile conoscendo la pendenza della curva caratteristica $\frac{\Delta I_Z}{\Delta V_Z}$, il cui inverso è detto *resistenza dinamica* del diodo Zener. Facendo un esempio che verrà poco più avanti trattato nuovamente, consideriamo un diodo Zener da $V_Z = 20 V$, $W_M = 10 W$; ammettiamo anche che esso, per correnti dell'ordine di $(100 \div 300) mA$ abbia una resistenza dinamica di 4Ω . Pertanto per variazioni della corrente I_Z da 100 a 300 mA, la tensione V_Z varia di $0.8 V$, ovvero del 4%. Il miglioramento rispetto al semplice raddrizzamento con filtro a condensatore è comunque netto, anche tenendo conto che si ha stabilizzazione sia rispetto al carico che rispetto alla tensione di alimentazione (ripple e instabilità della rete). E' chiaro tuttavia che questo miglioramento ha una contropartita nel fatto che occorre disporre di una tensione raddrizzata $V_{AB} > V_Z$ e che, anche quando la potenza richiesta dal carico fosse molto piccola ($R_L \gg R_{Lm}$), dissipiamo comunque energia in quanto la corrente $i \approx I_{ZMax}$ è sempre erogata fra i terminali A e B. Il sistema - in altri termini - è poco efficiente dal punto di vista energetico: supponiamo infatti di voler realizzare un generatore di fem da $20 V$ con una disponibilità massima di $100 mA$ (vale a dire che riesca ad alimentare un carico massimo $R_{Lm} = 200\Omega$). Ammettiamo che la tensione raddrizzata abbia una escursione fra $V_M = 50 V$ e $V_m = 40 V$ con la resistenza $R_Z = 100\Omega$. Ciò corrisponde a erogare sullo Zener (a carico nullo) una corrente variabile fra 300 e 200 mA. Il diodo Zener dovrà pertanto essere in grado di dissipare una potenza di $6 W$ (in genere si dimensiona il wattaggio dello Zener con larghezza, tipicamente con un fattore di sicurezza 2, ovvero nel nostro caso sarebbe opportuno utilizzare un diodo da almeno una *decina* di Watt). Quando si applica in parallelo al diodo Zener il carico di 200Ω scorre nel diodo una corrente compresa fra 100 e 200 mA. Il fatto che entrambi i valori siano $\gg I_{Zmin}$ (pochi mA per casi reali) assicura una minor variazione di V_Z e quindi una migliore regolazione. Tutto questo comporta però che anche nel caso di carico massimo con una richiesta di potenza di utilizzo di $2 W$, nel generatore complessivamente si dissipano poco meno di $15 W$.

Nella pratica i generatori di tensione non sono quasi mai fatti con questi criteri: pur utilizzando un diodo Zener per creare la tensione di riferimento necessaria per “costruire” la tensione di uscita dell'alimentatore, il circuito è però realizzato in modo che la corrente attraverso lo Zener è mantenuta nominalmente costante. Si ottiene così che la tensione V_Z resta estremamente stabile sia perché è eliminata la sua variazione indotta dalle variazioni di I_Z , sia perché la potenza dissipata sul diodo resta costante e con essa la temperatura, riducendo le instabilità indotte dalle variazioni termiche.

10.— Cenni al transistoro bipolare

Diamo qui una sommaria descrizione del principio di funzionamento del *transistore* (più propriamente del *transistore bipolare*), dispositivo sul cui vastissimo impiego non occorre neppure soffermarsi.

Il transistoro è costituito da due giunzioni p-n affacciate e con una porzione di semiconduttore a comune (nelle Fig.33 è rappresentato un transistoro pnp).

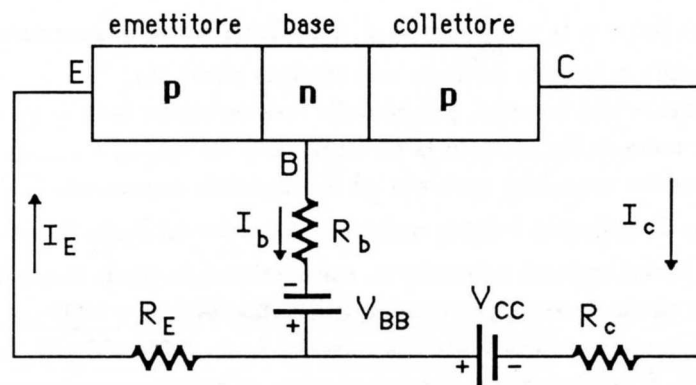


Fig.XVII.33

Alle tre porzioni di semiconduttore sono collegati dei reofori metallici tramite opportuni contatti ohmici. Supponiamo di polarizzare il transistoro in modo da avere il diodo *Emettitore-Base* (E-B, secondo la terminologia corrente) in conduzione diretta e quello *Collettore-Base* (C-B) contropolarizzato. Se non esistesse interazione fra le operazioni dei due diodi, per quanto abbiamo finora visto, dovremmo avere una corrente I_E di alcuni mA (a seconda della tensione V_{EB} , attorno comunque a $0.7-0.8 V$) e invece una debolissima corrente I_C (di saturazione inversa); conseguentemente la corrente I_B dovrebbe essere praticamente uguale a I_E . Quello che si osserva è totalmente diverso: infatti poiché il drogaggio della zona della base è stato fatto deliberatamente inferiore (almeno di due ordini di grandezza) a quello dell'emettitore, in essa il libero cammino medio per ricombinazione dei portatori è maggiore della dimensione della base e pertanto la concentrazione di lacune che dalla zona p dell'emettitore sono diffuse nella zona n della base si estende fino alla barriera fra la base e il collettore dove il campo elettrico le sospinge verso il collettore. Si ottiene così una corrente $I_C \approx I_E$ e la corrente I_B resta molto piccola, poiché poche sono le lacune che si sono ricombinate nella base con gli elettroni riforniti dal polo negativo del generatore V_{BB} . Con la piccola potenza associata al generatore V_{BB} ($V_{BB}I_B$) si riesce a controllare una potenza molto più elevata ($V_{CC} \cdot I_C$). Il simbolo

circuitale del transistor è quello in Fig.34a e 34b, per il transistor pnp e npn rispettivamente. Riportiamo nella Fig.35, come esempio, le cosiddette caratteristiche di uscita a emettitore comune di un transistor pnp; V_{CE} rappresenta la ddp fra collettore ed emettitore, I_C la corrente uscente dal collettore, I_B la corrente uscente dalla base.

Curve simili le otterremo per il transistor a effetto di campo (Fet), del quale studieremo nel prossimo capitolo principio di funzionamento e applicazioni.

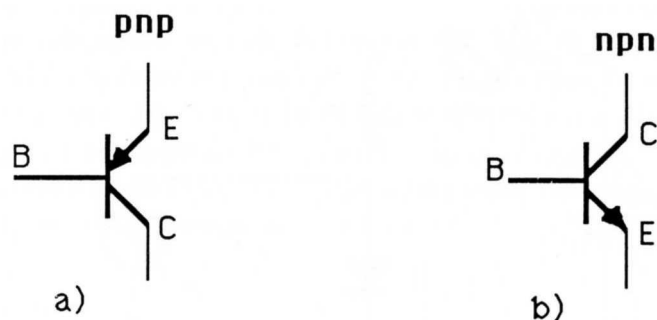


Fig.XVII.34

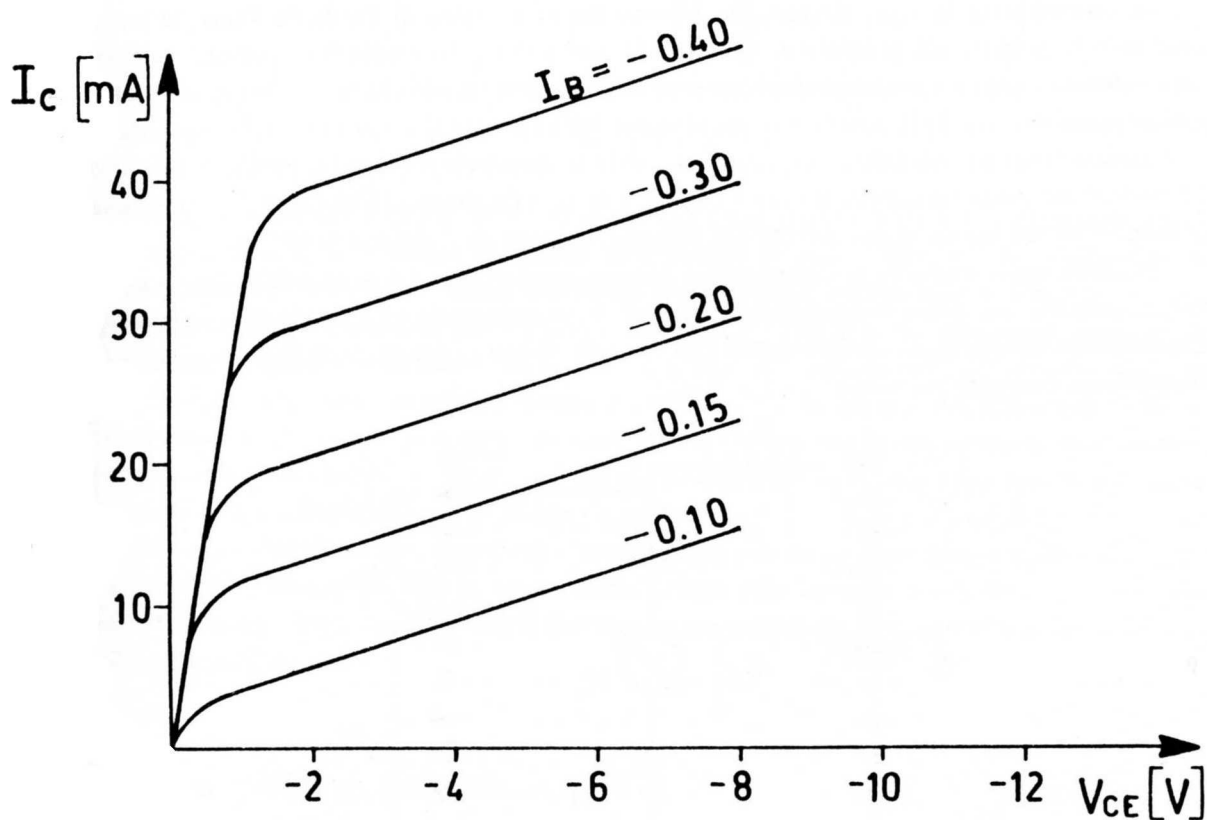


Fig.XVII.35

11.— Determinazione della caratteristica statica di un diodo a semiconduttore

Mediante il circuito di Fig.36 è possibile costruire la caratteristica statica del diodo D.

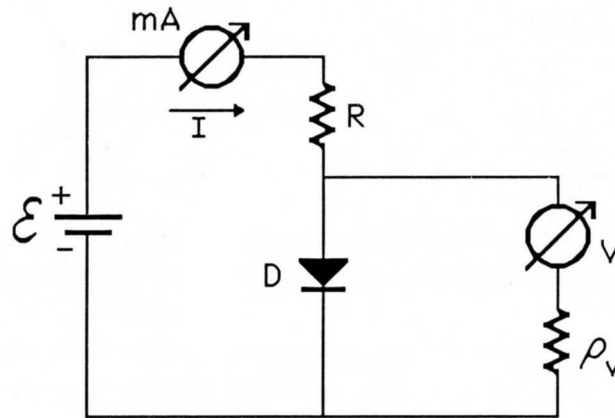


Fig.XVII.36

La caratteristica inversa, interessante soprattutto se si tratta di un diodo Zener, si studierà invertendo la polarità del generatore. Quanto alla scelta della strumentazione converrà adoperare come voltmetro uno strumento ad alta resistenza di ingresso in modo che la corrente I , misurata dal milliamperometro, sia il più possibile vicina al valore della corrente che passa nel diodo. Quest'ultima condizione è facile da soddisfare per quanto riguarda la caratteristica diretta, poiché la ddp ai capi del diodo si mantiene comunque al di sotto di 1 V e se ρ_V vale almeno $10^7\Omega$, tipici di un multimetro elettronico, al più verranno derivati 10^{-7} A , rispetto al valore di I attorno ai 10^{-3} A .

Tuttavia, nello studio della caratteristica inversa, per tensioni dell'ordine della decina e più di Volt, la corrente attraverso il voltmetro dà un contributo sostanziale a I (si ricordi che la corrente di saturazione inversa di un diodo è dell'ordine dei $n\text{ A}$). Pertanto per studiare la parte inversa della caratteristica conviene procedere come in Fig.37:

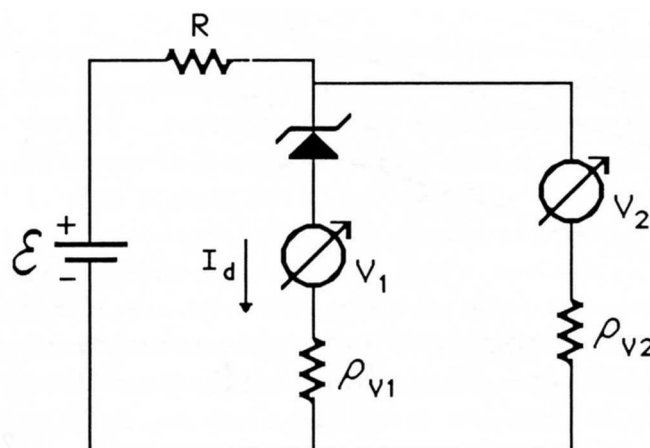


Fig.XVII.37

Se $\rho_{V1} = 10^7\Omega$, anche una corrente I_d di 1 nA darà una caduta misurabile (10^{-2} V) con V_1 .

$V_2 - V_1$ dà la ddp ($\approx V_2$) sul diodo e pertanto è possibile determinare - pur con un errore non proprio piccolo - la corrente di saturazione inversa. Alternativamente, disponendo di un misuratore di corrente sufficientemente sensibile, lo si potrà impiegare al posto di V_1 e ricavare direttamente I_d .

La determinazione della caratteristica statica con questo metodo, soprattutto se si tratta di un diodo Zener, comporta alcuni piccoli problemi, dovuti al fatto che ogni punto della nostra curva corrisponde a una temperatura della giunzione differente da quello degli altri; infatti la potenza dissipata sul nostro componente dipende fortemente dal punto di lavoro. Ciò è particolarmente evidente nel caso del diodo Zener ove, una volta passato il ginocchio, la potenza cresce linearmente con la corrente e si possono raggiungere facilmente temperature elevate della giunzione. Occorre perciò fare attenzione a non superare il wattaggio massimo consentito. Anche nella caratteristica diretta, la potenza cresce pressappoco con I , però questa volta, essendo la ddp piccola, difficilmente si raggiungono potenze, e quindi temperature, elevate.

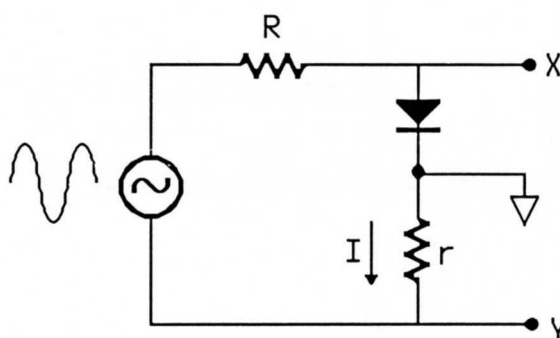


Fig.XVII.38

Con questo sistema è quindi arduo ottenere una caratteristica statica corrispondente a una temperatura fissa, cosa viceversa necessaria se si volesse provare a fare un "fit" dell'andamento sperimentale con la dipendenza teorica. Per far ciò occorre ricorrere a un *caratteristigrafo*, ovvero un oggetto che automaticamente cambia il punto di lavoro (I, V) e registra su uno schermo oscillografico i due parametri corrente e tensione. Se la frequenza con cui i parametri V e I vengono aggiornati è sufficientemente grande rispetto all'inverso del tempo di propagazione del calore nel diodo, e il ciclo di scansione è ripetuto continuamente, si può ritenere che la temperatura della giunzione sia costante in tutti i punti di lavoro. Un metodo di realizzare la funzione ora descritta - limitata allo studio delle caratteristiche di un diodo - è quello (Fig.38) di inviare ai capi del diodo una ddp variabile (una sinusoide va benissimo) che comandi l'asse x di un oscillografo e di inviare al canale Y del medesimo oscillografo la ddp provocata dalla caduta della corrente del diodo su una resistenza nota r . Otteniamo così un grafico (I, V); l'escursione dei parametri dipende dall'ampiezza della ddp applicata nonché da R e r .

12.- Un diodo di precisione

Abbiamo visto che uno dei problemi connessi con l'uso di diodi a semiconduttore nelle applicazioni come raddrizzatori di segnali non troppo ampi, è la presenza della tensione V_γ ; a causa di essa una tensione sinusoidale con ampiezza $< V_\gamma$ dà addirittura un segnale raddrizzato di ampiezza

zero. Un sistema per eliminare questo inconveniente è quello di inserire il diodo nel ramo di reazione negativa di un operazionale montato a inseguitore di tensione (Fig.39).

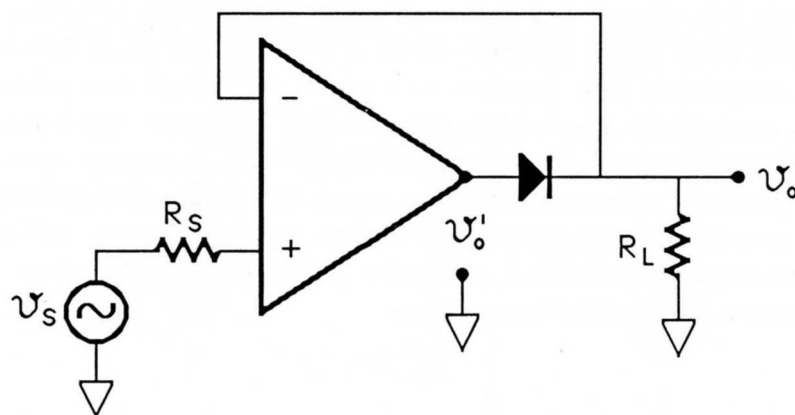


Fig.XVII.39

Supponiamo che v_S sia > 0 ; l'uscita v'_0 sarà al valore di tensione

$$v'_0 = A(v_S - v_0) \quad (\text{XVII.47})$$

Inoltre

$$v'_0 = v_0 + v_d \quad (\text{XVII.48})$$

dove v_d rappresenta la ddp presente ai capi del diodo quando si trova a essere percorso dalla corrente $i = \frac{v_0}{R_L}$ (l'ingresso dell'operazionale si suppone a Fet). A v_d contribuisce in modo essenziale V_γ (Fig.40); ad esempio il modello "piecewise" ci dice che $v_d \approx V_\gamma + iR_f$. Dalle (47) e (48) abbiamo allora:

$$v_0 = \frac{Av_S - v_d}{A + 1} \approx v_S - \frac{v_d}{A} \quad (\text{XVII.49})$$

cioè la tensione di uscita riproduce (a meno di un termine $\frac{v_d}{A}$ che può essere trascurato nella maggior parte dei casi se, ad esempio, $A > 10^5$) la tensione applicata v_S , se positiva. Quando v_S è negativa la tensione v'_0 tende a diventare negativa e a contropolarizzare il diodo cosicché v_0 resta praticamente a 0.

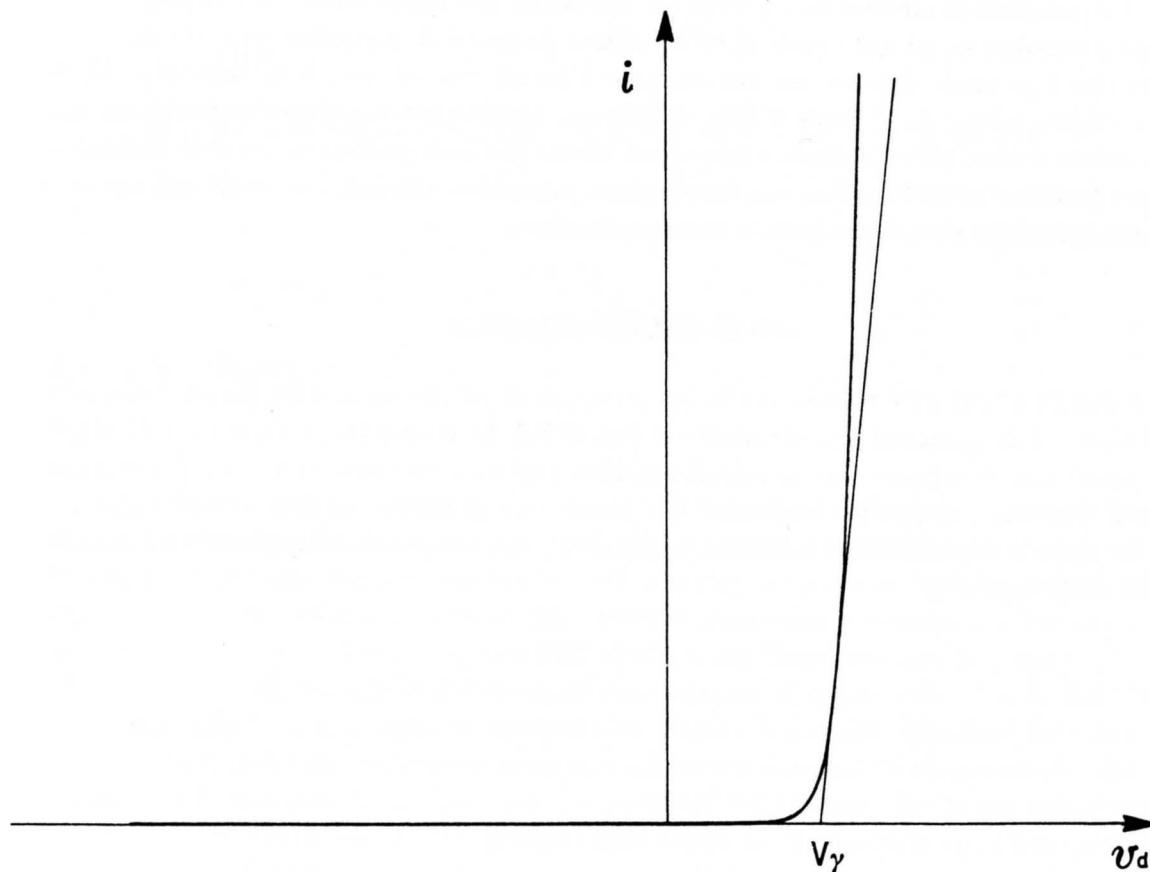


Fig.XVII.40

Abbiamo così realizzato un diodo praticamente perfetto, nel senso che v_0 riproduce esattamente v_S quando $v_S > 0$, mentre l'uscita sta praticamente a zero quando $v_S < 0$. Quindi la caratteristica di trasferimento (v_0, v_S) di questo dispositivo è una semiretta a 45° ; raddrizzatori realizzati con questo dispositivo al posto del diodo tradizionale e con un filtro a condensatore sono adoperati per realizzare convertitori AC-DC di precisione in alcuni multimetri (Fig.41).

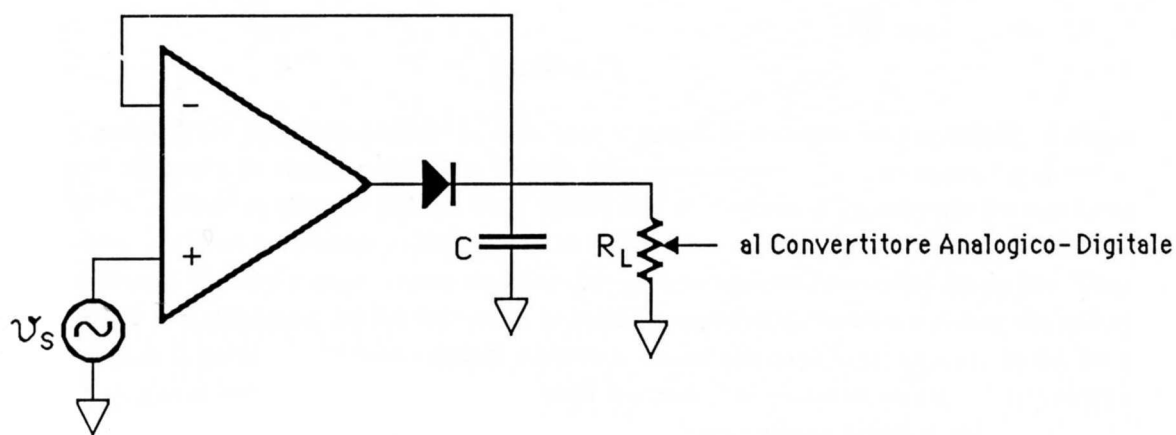


Fig.XVII.41

La ripartizione di tensione su R_L serve per passare da una ddp continua pari all'ampiezza del segnale sinusoidale v_S a una uguale al valore efficace (rapporto di partizione $\frac{1}{\sqrt{2}}$). Un sistema di questo tipo è pertanto calibrato per una sinusoide e quindi solo nel caso di v_S sinusoidale dà un valore efficace esatto. Se la forma d'onda ripetitiva in ingresso ha un andamento non sinusoidale la situazione è assai più complicata e solo alcuni multimetri sono predisposti per dare indicazioni corrette (multimetri TRMS - *true root mean square, vero valore efficace*); per far ciò essi ricorrono a manipolazioni del segnale che qui non stiamo a descrivere.

NOTA BIBLIOGRAFICA

Il Cap.21 di **TE 57** è tuttora una buona introduzione all'argomento delle proprietà dei semiconduttori e delle giunzioni p-n; altrettanto si dica di **FR 71** (Cap.4,§3). I Capp.1 e 2 di **MI 72** contengono una descrizione delle principali proprietà elettriche dei conduttori, isolanti e semiconduttori. Uno studio di tipo più fondamentale si può trovare su **KI 76**. Le proprietà delle giunzioni p-n, del diodo a semiconduttore e delle sue applicazioni sono abbastanza dettagliatamente descritte su **MI 72** (Capp.3 e 4).

XVIII

IL TRANSISTORE A EFFETTO DI CAMPO

1. – Introduzione

Il *transistore a effetto di campo* è un dispositivo elettronico a tre terminali; conseguentemente il suo comportamento elettrico non è più descrivibile mediante una semplice relazione I, V come nel caso dei componenti bipolari, ma occorre –ad esempio– conoscere la famiglia di curve (I, V) rispetto a due terminali con la tensione del terzo terminale come parametro. Il dispositivo che studieremo è comunemente indicato come FET (Field Effect Transistor), più propriamente JFET (Junction.....), per distinguerlo dall'altro tipo di transistore a effetto di campo, il MOSFET (Metal Oxide Semiconductor....). In maniera estremamente schematica possiamo dire che il Fet consiste in una sbarretta di materiale semiconduttore recante agli estremi due contatti ohmici per due elettrodi conduttori, detti terminali di *Source* e *Drain*. La conducibilità fra Source e Drain, cioè della sbarretta di semiconduttore –detta *canale*–, è controllata dalla differenza di potenziale fra il terzo elettrodo, detto *Gate*, e gli altri due (da qui il nome transistore a effetto di campo, sottintendendo elettrico). Il materiale semiconduttore del canale può essere di tipo p o di tipo n, nel qual caso il Fet si chiama Fet canale-p o Fet canale-n rispettivamente. I simboli circuitali sono quelli delle Fig.1a e Fig.1b.

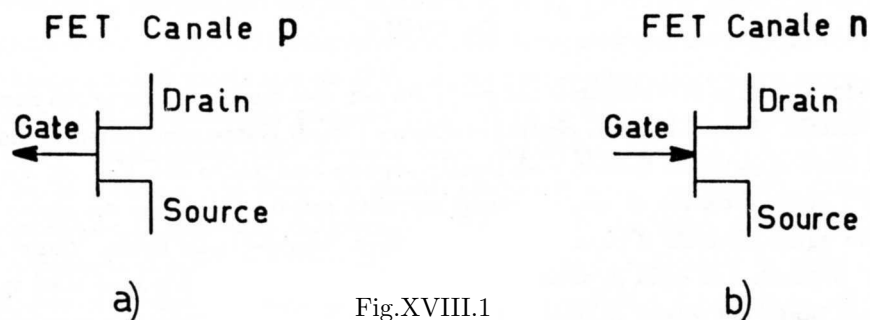


Fig.XVIII.1

La possibilità del Fet di controllare la resistenza e quindi la corrente fra i terminali di Drain e di Source mediante la tensione del Gate ricorda una caratteristica del transistore bipolare descritto molto sommariamente nel §10 del Cap. XVII, cioè il controllo della corrente fra collettore ed emettitore mediante la corrente di base. Di fatto molte delle funzioni che un transistore bipolare svolge nei circuiti elettrici possono essere espletate (in qualche caso anche meglio) da un Fet. Conseguentemente le applicazioni del Fet sono vaste in tutti i campi dell'elettronica e principalmente in quelle applicazioni in cui sono richieste grandi miniaturizzazioni alle quali le caratteristiche del Fet e dei Mosfet meglio si prestano di quelle dei transistori bipolari. Nei paragrafi seguenti descriveremo dapprima la fisica del dispositivo e quindi passeremo a descriverne alcune applicazioni.

2.— Comportamento di un Fet per piccoli valori della tensione Source-Drain

Consideriamo ora e nel seguito un Fet canale-p: con riferimento alla Fig.2, che rappresenta la sezione del canale in un caso di geometria non molto realistica, ma utile per comprendere il principio di funzionamento, si nota che il Gate è costituito da due elettrodi equipotenziali; essi sono in realtà due zone di materiale semiconduttore del tipo opposto a quello del canale, cioè n, molto drogato rispetto al drogaggio del canale (un drogaggio forte si indica aggiungendo il simbolo + alla concentrazione).

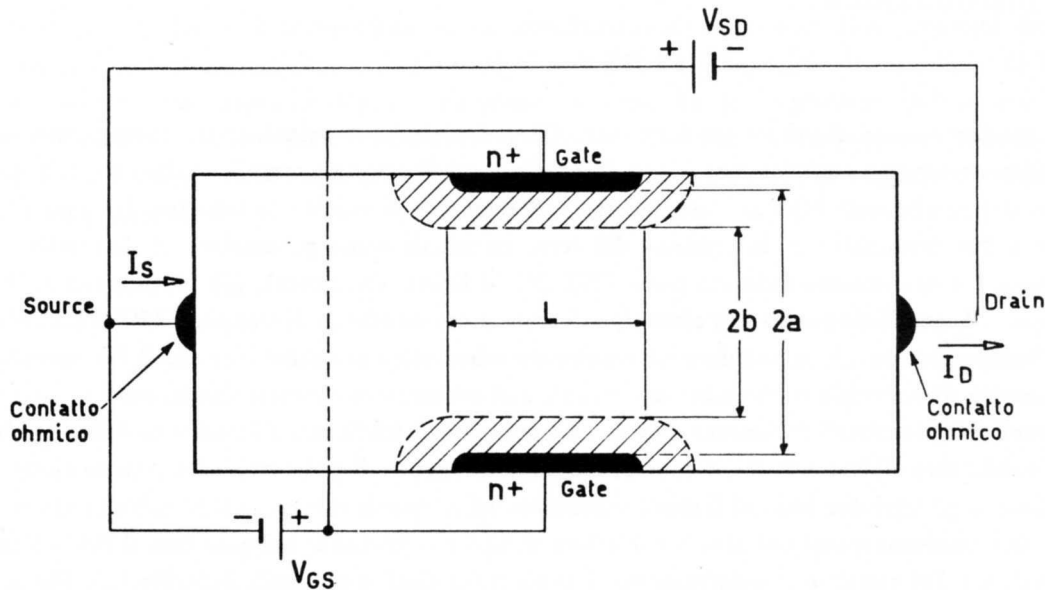


Fig.XVIII.2

Pertanto fra Gate e canale abbiamo due giunzioni p-n, cioè due diodi simmetrici rispetto al piano mediano del canale. Supponiamo di contropolarizzare i diodi Gate-canale, mantenendo positivo il terminale di Gate rispetto al Source e al Drain; supponiamo anche che $V_{SD} \ll V_{GS}$, ovvero la caduta ohmica lungo il canale di una eventuale corrente attraverso di esso sia molto piccola, così da considerare equipotenziale il conduttore complessivo Source-canale-Drain. Sappiamo che una giunzione p-n presenta una zona di svuotamento ove i portatori di carica sono stati tutti rimossi e che tale zona è tanto più estesa quanto più la giunzione è contropolarizzata; sappiamo anche che se una delle due zone è molto meno drogata dell'altra, allora la zona di svuotamento si estende praticamente solo in essa. Nel nostro caso una contropolarizzazione Gate-canale dà luogo quindi all'avanzamento entro il canale di una zona svuotata di portatori e quindi di fatto non disponibile per la corrente di canale dal Source al Drain. Nel disegno tale zona è stata disegnata come tratteggiata (non si prendano troppo sul serio i profili disegnati ai confini verso il Source e il Drain). Detta $2a$ l'altezza complessiva del canale in corrispondenza del Gate e $2b$ l'altezza della porzione atta alla conduzione, cioè non svuotata, ricordando il risultato (XVII.20), abbiamo:

$$(a - b) = \left(\frac{2\epsilon}{eN_A} V_{GC} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{XVIII.1})$$

dove V_{GC} rappresenta la differenza di potenziale di contropolarizzazione fra Gate e canale, com-

prendente anche la ddp di contatto (o di diffusione) V_B : $V_{GC} = V_B + V_{GS}$ dove V_{GS} è la ddp applicata dall'esterno fra Gate e Source (e Drain, avendo supposto Drain e Source equipotenziali). Si ricordi che la (1) vale nell'ipotesi di giunzione brusca e di densità di accettori costante; queste sono senz'altro ipotesi poco realistiche, ma sappiamo che il grosso del comportamento di un diodo contropolarizzato viene discretamente riprodotto anche con queste schematizzazioni. Ricordandoci i valori calcolati nel Cap.XVII, §4, abbiamo che se a è dell'ordine di qualche μm (e nei Fet usuali è questo il caso), per tensioni non particolarmente elevate applicate fra Gate e Source il canale risulta completamente "strozzato". Tale ddp fra Gate e Source è detta tensione di *pinch-off* (restringimento, chiusura) e indicata con V_P . In letteratura esiste un po' di confusione nel definire V_P come comprensiva o meno di V_B (ovviamente il problema non è poi così importante se $V_P \gg V_B$); noi la definiremo comprensiva di V_B , cioè $V_P = V_{GP} + V_B$, dove V_{GP} è la tensione applicata fra Gate e Source cui corrisponde lo strozzamento del canale; al "pinch-off", avremo ($b = 0$ nella 1)):

$$a = \left(\frac{2\epsilon}{eN_A} V_P \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{XVIII.2})$$

ovvero

$$V_P = \frac{eN_A}{2\epsilon} a^2 \quad (\text{XVIII.3})$$

e quindi

$$V_{GP} = \frac{eN_A}{2\epsilon} a^2 - V_B \quad (\text{XVIII.4})$$

Il valore della tensione di pinch-off dipende dalla geometria e dalle concentrazioni di impurezze specifiche del Fet in esame e quindi la (2) può dare solo poco più che un ordine di grandezza. Nei casi reali V_P varia da pochi *Volt* a una decina di *Volt*, a seconda dei Fet.

A questo punto è forse anche più chiaro il significato dell'approssimazione di equipotenzialità del canale, perché è stata introdotta una unità di misura *fisica* della tensione applicata, vale a dire V_P : pertanto finché la corrente nel canale, uguale a $I_S = I_D$ (poiché il diodo Gate-canale essendo contropolarizzato conduce solo la piccolissima corrente di saturazione inversa) provoca una caduta di potenziale lungo il canale molto minore di V_P , allora potremo ragionare come sopra e considerare il profilo della zona di svuotamento costante lungo tutta la dimensione longitudinale del canale, trascurando così la modulazione dello spessore della zona di svuotamento indotto da un gradiente di potenziale lungo il canale medesimo. Su questo punto torneremo nel seguito. Calcoliamoci ora, nell'ipotesi sopradette, la resistenza del canale fra Source e Drain; detta W la profondità del Fet (dimensione ortogonale al piano del disegno), ammettendo che la resistenza sia tutta dominata dal tratto L compreso fra i due elettrodi di Gate, detta μ la mobilità delle lacune sul materiale p, ricordando che

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\mu e N_A} \quad (\text{XVIII.5})$$

abbiamo per una certa altezza $2b$ del canale effettivo:

$$R(2b) = \frac{\rho L}{S} = \frac{L}{\mu e N_A W 2b} \quad (\text{XVIII.6})$$

Dalla (1) e (2) si ricava l'espressione di b in funzione di quantità o note (V_B) o misurabili:

$$b = a \left[1 - \left(\frac{V_{GC}}{V_P} \right)^{\frac{1}{2}} \right] = a \left[1 - \left(\frac{V_{GS} + V_B}{V_{GP} + V_B} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (\text{XVIII.7})$$

e quindi

$$R(2b) = R(V_{GC}) = \frac{L}{\mu e N_A W 2a} \frac{1}{1 - \left(\frac{V_{GS} + V_B}{V_{GP} + V_B} \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{XVIII.8})$$

Pertanto se esprimiamo la corrente di Drain $I_D (= I_S)$ in funzione della ddp V_{SD} fra Source e Drain per vari valori di V_{GS} , sempre nell'ambito della nostra ipotesi di $|V_{SD}| \ll |V_{GC}| = |V_{GS} + V_B|$ abbiamo:

$$I_D = \frac{V_{SD}}{R(V_{GC})} = \frac{2\mu e N_A W a}{L} \left[1 - \left(\frac{V_{GC}}{V_P} \right)^{\frac{1}{2}} \right] V_{SD} \quad (\text{XVIII.9})$$

La relazione ora scritta vale indipendentemente dal segno di V_{SD} purché $|V_{SD}| \ll V_P$.

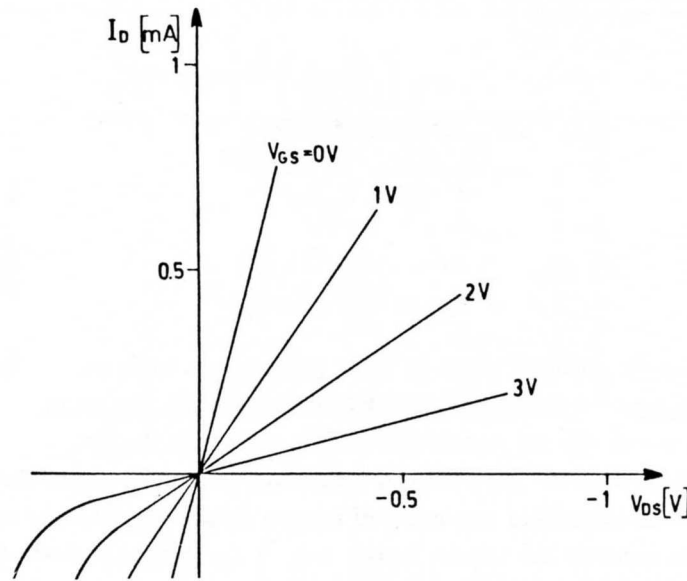


Fig.XVIII.3

Il grafico di I_D in funzione di V_{SD} per vari valori di V_{GS} nell'intorno dell'origine ha l'andamento di Fig.3 (nelle ascisse è riportato V_{DS} , negativa, per rispettare la convenzione normalmente usata dai costruttori). Si osserva che il valore della resistenza del canale $\left(\frac{V_{SD}}{I_D} \right)$ passa da valori $\approx 100\Omega$ (per $V_{GS} = 0 V$) a valori attorno a $10^4\Omega$ per V_{GS} attorno a $3 V$. Quando poi V_{GS} corrisponde al pinch-off la resistenza di canale cresce fino a valori estremamente elevati ($10^{10} \div 10^{11}\Omega$); in queste condizioni infatti sono stati rimossi dal canale quasi tutti i portatori di carica. La relazione (9) può anche essere scritta come:

$$I_D = \left[1 - \left(\frac{V_{GC}}{V_P} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \frac{V_{SD}}{r_{d(on)}} \quad (\text{XVIII.10})$$

dove

$$r_{d(on)} = \frac{L}{2a\mu e N_A W} \quad (\text{XVIII.11})$$

rappresenta la resistenza del canale corrispondente a $V_{GC} = 0$, cioè a una tensione di polarizzazione diretta pari a V_B . A seconda dei Fet, $r_{d(on)}$ può essere compresa fra una decina di *Ohm* e qualche decina di migliaia di *Ohm*.

Da quanto detto sopra si evince che un Fet può essere usato come una resistenza (fra Source e Drain)

variabile e controllabile mediante una ddp (fra Gate e Source); vedremo nei paragrafi seguenti un possibile e comune utilizzo di questa prerogativa del Fet.

3.— La caratteristica statica di un Fet

Il grafico riportato nella Fig.3 rappresenta un particolare attorno all'origine della *caratteristica statica a Source comune* di un Fet canale-p. La caratteristica statica del Fet è il grafico di I_D in funzione di V_{DS} per vari valori di V_{GS} ; la locuzione "a Source comune" indica che l'elettrodo di Source è preso come riferimento per la misura delle tensioni. Un esempio di tale caratteristica è ora riportato nella Fig.4 per tutta la parte di interesse, non limitata cioè, come nel paragrafo precedente, all'intorno dell'origine; la curva caratteristica di un Fet reale può anche differire assai da quella riportata in figura, che va vista più che altro come rappresentativa degli andamenti di massima.

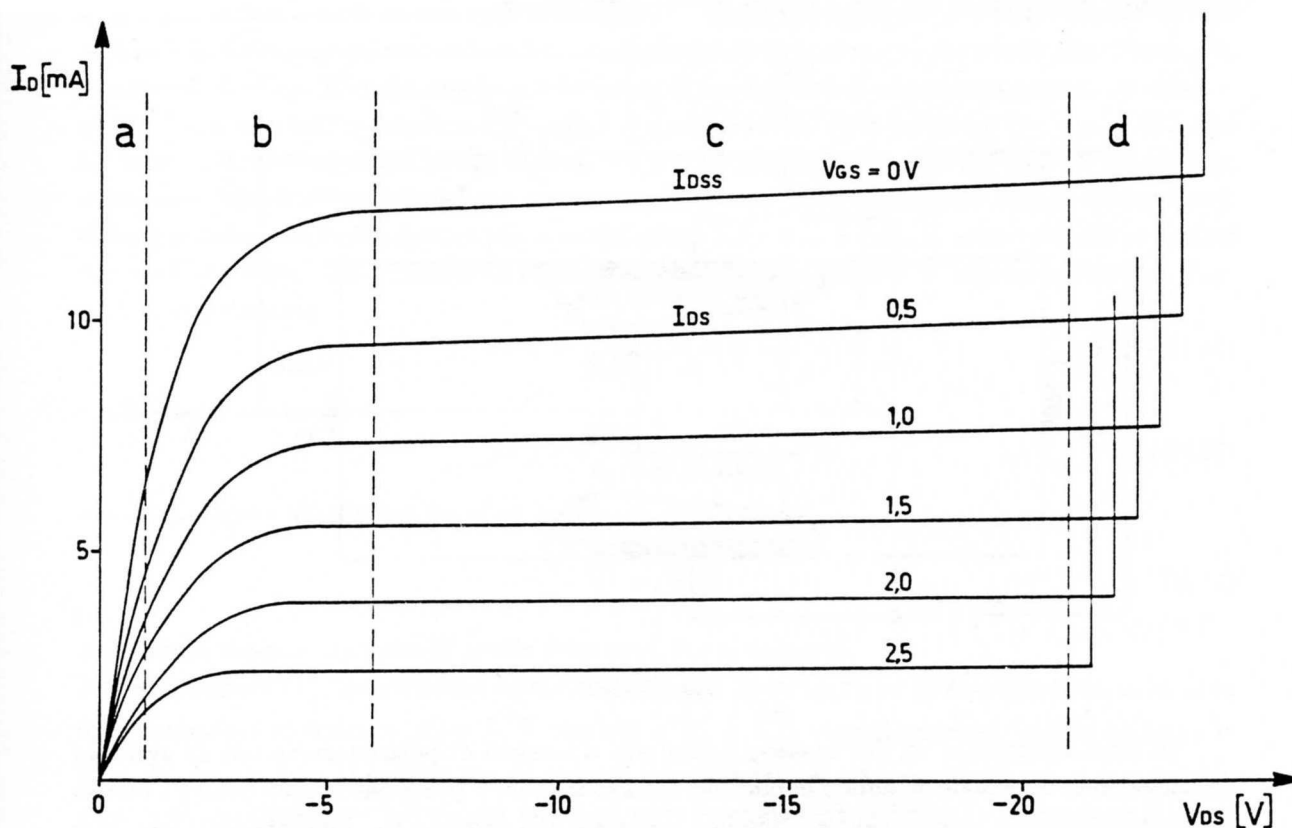
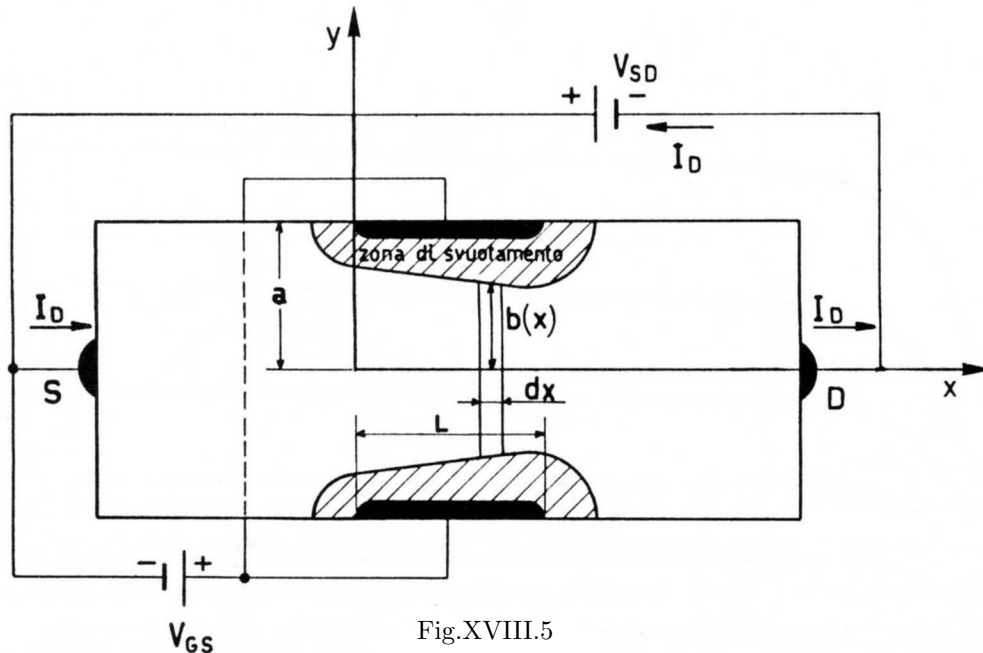


Fig.XVIII.4

Queste curve determinano completamente il comportamento elettrico del Fet nelle sue applicazioni più comuni in bassa frequenza; infatti in queste applicazioni il diodo Gate-canale è sempre contropolarizzato o comunque mai polarizzato direttamente e pertanto la corrente I_G di Gate può con buona approssimazione considerarsi nulla; le altre grandezze che determinano le caratteristiche elettriche del transistor, cioè le tensioni dei terminali e la corrente di Drain $I_D = I_S$, sono legate fra loro dalla relazione rappresentata appunto dalla caratteristica a Source comune di Fig.4. La curva caratteristica a Source comune è stata suddivisa nella Fig.4 in quattro zone a seconda del valore di

V_{DS} : nella prima zona (a) il Fet si comporta come un conduttore ohmico la cui resistenza dipende dalla tensione applicata fra Gate e Source e di ciò abbiamo parlato nel paragrafo precedente; nella parte (b) si osserva che, fissato V_{GS} (cioè una curva della famiglia di caratteristiche), la relazione fra I_D e V_{DS} si discosta fortemente dalla linearità; la parte (c) è detta zona a *pentodo*, in analogia con la caratteristica di un particolare tubo elettronico a vuoto, il pentodo appunto, o a *corrente costante* e si osserva una sostanziale indipendenza di I_D da V_{DS} ; infatti, fissata V_{GS} , la pendenza della curva è ora molto inferiore di quella per $V_{DS} \rightarrow 0$; infine la zona di *breakdown* (d) dove il diodo Gate-Drain entra in "breakdown" in conseguenza della forte contropolarizzazione. La permanenza anche per periodi brevi in regime di breakdown può danneggiare irreversibilmente il Fet.

E' facile rendersi conto che il comportamento delle curve nella zona (b) della caratteristica è dovuto al fatto che non è più possibile trascurare la ddp V_{DS} (che sostiene la corrente I_D) rispetto alla tensione V_{GS} . Abbiamo cioè un gradiente nel profilo del canale che è più largo nelle vicinanze del Source che non nelle vicinanze del Drain, poiché la profondità della zona di svuotamento è maggiore dove maggiore è la contropolarizzazione. E' possibile ricavare analiticamente la dipendenza $I_D = I_D(V_{DS}, V_{GS})$ nell'ambito del modello estremamente semplificato del Fet introdotto nel paragrafo precedente, aggiungendo qualche ulteriore ipotesi semplificativa.



In Fig.5 è riportato un Fet canale-p sottoposto a tensioni di polarizzazione tali da avere un restringimento del canale modulato in funzione della coordinata x (direzione Source-Drain) a motivo della caduta ohmica lungo il canale medesimo, associata alla corrente I_D . Limitandoci, come fatto anche precedentemente, a considerare soltanto il contributo della zona del canale lunga L e compresa fra i due elettrodi di Gate avremo, considerando una fetta di canale avente dimensioni $dx \cdot 2b(x) \cdot W$, che la caduta di potenziale dV lungo di essa nella direzione del dx , provocata dalla corrente I_D , sarà esprimibile come:

$$dV(x) = I_D dR = I_D \frac{\rho dx}{2Wb(x)} \quad (\text{XVIII.12})$$

Si tratta ora di esprimere $b(x)$ in funzione della tensione di contropolarizzazione fra canale e Gate, alla coordinata generica x . Tale tensione di contropolarizzazione $V_{GC}(x)$ sarà data da $V_{GS} + V_B$ (per $x = 0$) più la caduta ohmica $V(x)$ prodotta dalla corrente I_D lungo il canale fra $x = 0$ e la

coordinata generica x (la differenza di potenziale complessiva fra $x = 0$ e $x = L$ sarà quindi data da V_{SD} , sempre trascurando la caduta al di fuori della zona del Gate). Tenendo quindi presente che:

$$V_{GC}(x) = V_{GS} + V_B + V(x) \quad (\text{XVIII.13})$$

e ricordando il risultato (7) avremo:

$$b(x) = a \left[1 - \frac{(V(x) + V_{GS} + V_B)^{\frac{1}{2}}}{V_P^{\frac{1}{2}}} \right] \quad (\text{XVIII.14})$$

e quindi, sostituendo la (14) nella (12):

$$dV(x) = \frac{I_D \rho dx}{2Wa \left[1 - \frac{(V(x) + V_{GS} + V_B)^{\frac{1}{2}}}{V_P^{\frac{1}{2}}} \right]} \quad (\text{XVIII.15})$$

Prima di procedere all'integrazione dell'equazione differenziale (15) che darà la relazione cercata fra V_{SD} e I_D , soffermiamoci su una approssimazione implicita nel ragionamento fatto, ma sottaciuta. Abbiamo infatti applicato al nostro caso di canale modulato il risultato (7) che a sua volta si basa sulle conclusioni del Cap. XVII, §4, ottenute nell'ipotesi di una barriera di dimensione trasversale infinita; questa volta non solo la lunghezza è finita (L) come nel caso della relazione (7), ma addirittura la tensione di contropolarizzazione dipende da x . Le conclusioni tratte nel caso di dimensione trasversale della barriera infinita non potranno quindi mai essere considerate esatte; saranno però tanto più vicine alla realtà quanto più la modulazione del canale è dolce e quanto più siamo lontani dai bordi del Gate. Una trattazione rigorosa del problema esigerebbe di imporre all'interno della zona di svuotamento

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = -\frac{eN_A}{\epsilon} \quad (\text{XVIII.16})$$

e nella zona del canale

$$\text{div } \vec{j} = \sigma \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} \right) = 0 \quad (\text{XVIII.17})$$

con la condizione al contorno fra zona di svuotamento e canale

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{db(x)}{dx} \quad (\text{XVIII.18})$$

cioè campo elettrico tangente al profilo della zona di svuotamento.

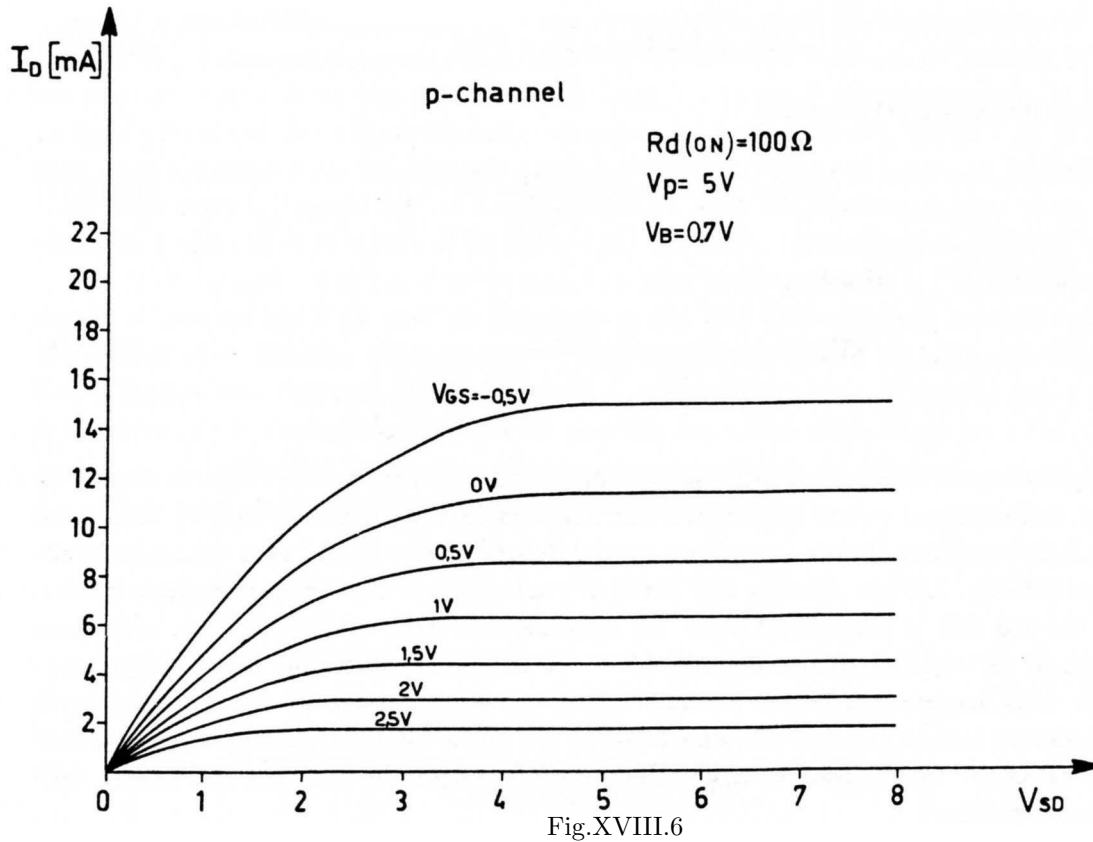
Matematicamente la "modulazione dolce" che abbiamo ammesso significa che all'interno della zona di svuotamento si trascura E_x e $\frac{\partial E_x}{\partial x}$ rispetto a E_y e $\frac{\partial E_y}{\partial y}$ rispettivamente; inoltre in tutta la zona del canale, fino al confine con la zona di svuotamento, si assume che E_y sia nullo; di fatto questa ultima condizione è stata già ammessa quando abbiamo supposto che le equipotenziali nel canale fossero fette perpendicolari all'asse x . Tenendo presenti questi limiti dell'approccio seguito, procediamo all'integrazione della (15). Separando le variabili e integrando fra $x = 0$ e $x = L$ si ottiene:

$$V \Big|_0^{V_{SD}} - \frac{2}{3V_P^{\frac{1}{2}}} (V + V_{GS} + V_B)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{V_{SD}} = \frac{I_D \rho L}{2Wa} = I_D r_{d(on)} \quad (\text{XVIII.19})$$

Otteniamo finalmente:

$$I_D = \frac{1}{r_{d(on)}} \left[V_{SD} - \frac{2}{3V_P^{\frac{1}{2}}} \left((V_{SD} + V_{GS} + V_B)^{\frac{3}{2}} - (V_{GS} + V_B)^{\frac{3}{2}} \right) \right] \quad (\text{XVIII.20})$$

Riportando in grafico $I_D = I_D(V_{SD} = -V_{DS}, V_{GS})$ per $V_P = 5V$, $V_B = 0.7V$, $r_{d(on)} = 100\Omega$ si ottiene la famiglia di curve in Fig.6.



Per un dato valore di V_{GS} , non tutta la curva corrisponde effettivamente alla soluzione (20), poiché il modello non è proprio più applicabile quando la tensione fra Source e Drain raggiunge il valore V_{SDM} per cui il diodo Gate-canale, all'estremo corrispondente al Drain, risulta contropolarizzato con la tensione V_P di pinch-off: $V_{SDM} + V_{GS} + V_B = V_P$; infatti quando è raggiunta tale condizione, essendo il canale all'estremità verso il Drain completamente strozzato, la corrente dovrebbe andare a zero. Torneremo poco più avanti sull'argomento, dopo aver studiato, sempre nell'ambito di questo modello, il profilo modulato del canale per una certa tensione V_{GS} al variare di V_{DS} . Per far ciò è sufficiente ricordarsi l'espressione (12) e anziché esprimere b in funzione di V mediante la (14), proprio dalla (14) ricavare dV . Abbiamo così :

$$dV = -2V_P \left(1 - \frac{b}{a}\right) \frac{db}{a} \quad (\text{XVIII.21})$$

che sostituito nella (12) dà, dopo separazione delle variabili:

$$\frac{I_D \rho}{2W} dx = -2V_P \left(1 - \frac{b}{a}\right) \frac{b}{a} db \quad (\text{XVIII.22})$$

Integrando la (22) fra $x = 0$ e la coordinata generica x si ottiene

$$\frac{I_D \rho}{2W} x = -V_P a \left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{b^2(0)}{a^2}\right) + \frac{2}{3} V_P a \left(\frac{b^3}{a^3} - \frac{b^3(0)}{a^3}\right) \quad (\text{XVIII.23})$$

D'altronde dalla (7) si ricava che

$$\frac{b(0)}{a} = 1 - \frac{(V_{GS} + V_B)^{\frac{1}{2}}}{V_P^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{XVIII.24})$$

Adoperando il risultato (20) e l'espressione (11) per $r_{d(on)}$, si ottiene:

$$\begin{aligned} & \frac{x}{L} \left[V_{SD} - \frac{2}{3V_P^{\frac{1}{2}}} \left((V_{SD} + V_{GS} + V_B)^{\frac{3}{2}} - (V_{GS} + V_B)^{\frac{3}{2}} \right) \right] = \\ & = -V_P \left[\frac{b^2}{a^2} - \left(1 - \frac{(V_{GS} + V_B)^{\frac{1}{2}}}{V_P^{\frac{1}{2}}} \right)^2 \right] + \frac{2}{3} V_P \left[\frac{b^3}{a^3} - \left(1 - \frac{(V_{GS} + V_B)^{\frac{1}{2}}}{V_P^{\frac{1}{2}}} \right)^3 \right] \end{aligned} \quad (\text{XVIII.25})$$

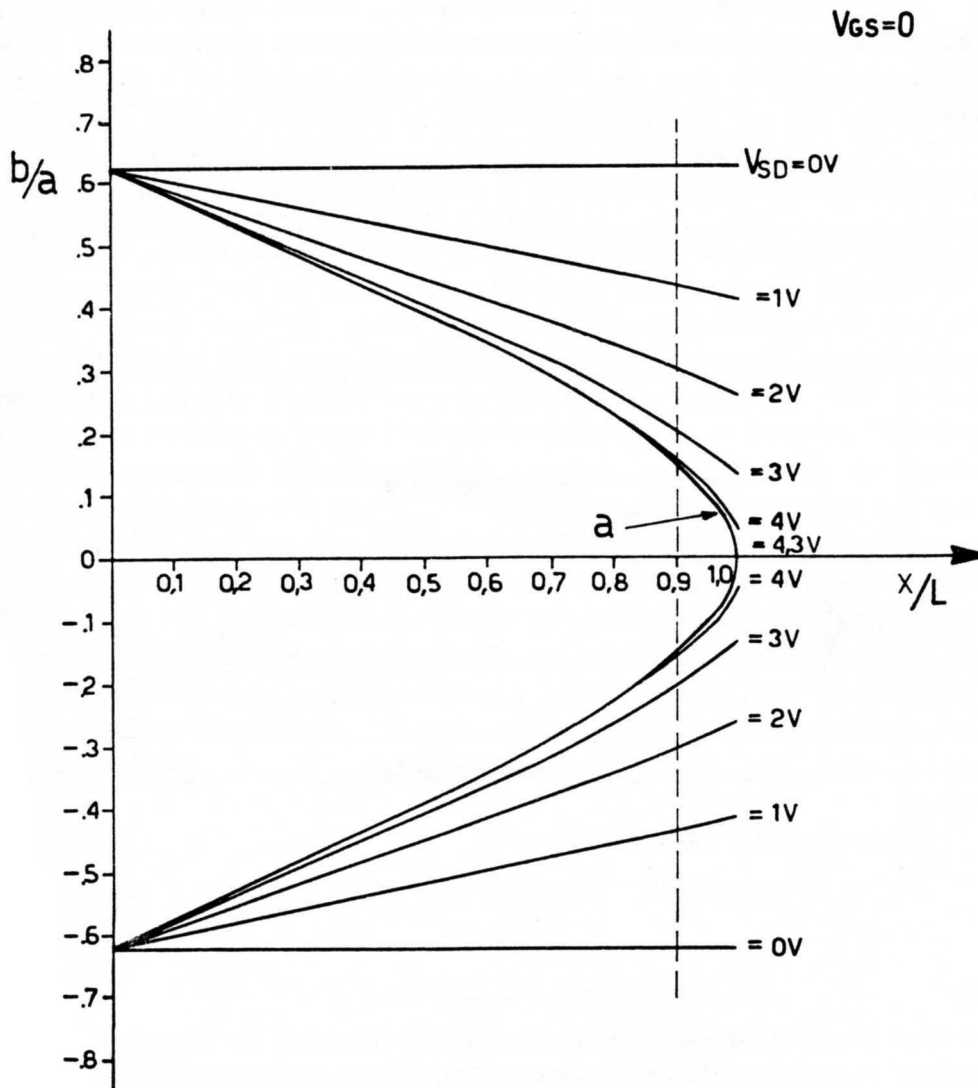


Fig.XVIII.7

In base a questa relazione sono calcolate le curve in Fig.7 per $V_{GS} = \text{cost} = 0$, per vari valori di V_{SD} ; si noti come all'aumentare della ddp applicata fra Source e Drain, il canale si va via via restringendo; questo comporta che a un aumento della tensione corrisponde anche un aumento della resistenza del canale e conseguentemente la corrente sale meno che linearmente con la tensione (vedi Fig.6). Si noti che per $V_{SD} = V_{SDM} = V_P - V_{GS} - V_B (= 4.3V$ nel caso in figura) il canale raggiunge la condizione di strozzamento proprio in corrispondenza della estremità verso il Drain. Ripensando

alle approssimazioni fatte circa la *gradualità* della modulazione del profilo del canale, ci si rende immediatamente conto che alla destra della linea verticale tratteggiata in Fig.7, l'andamento di $b(x)$ non è da prendere eccessivamente sul serio, vista la pendenza della curva. Inoltre anche un ragionamento di autoconsistenza esclude che si possa avere un effettivo strozzamento dalla parte del Drain associato alla caduta ohmica lungo il canale: infatti ciò porterebbe a una chiusura del canale con conseguente interruzione della corrente; quest'ultimo fatto porterebbe alla scomparsa della modulazione e quindi della strozzatura del canale medesimo, proprio quella che impedisce alla corrente di fluire. Anche sperimentalmente, d'altronde, si sa (si vedano le caratteristiche reali all'inizio del paragrafo, Fig.4) che la corrente passa nel canale anche per tensioni $V_{SD} > V_{SDM} = V_P - V_{GS} - V_B$ e che mantiene un valore pressoché costante. L'interpretazione di questo andamento sperimentale che allo stato attuale delle conoscenze sembra essere la più ragionevole, è la seguente: il canale in realtà non arriva mai a strozzarsi completamente, diciamo che al più raggiungerà una dimensione minima pari a $2\delta \ll 2a$ in corrispondenza della estremità verso il Drain quando $V_{SD} = V_{SDM} = V_P - V_{GS} - V_B$; aumentando ulteriormente la ddp V_{SD} , cioè portando il terminale di Drain ancora più negativo rispetto al Source (e al Gate) la geometria del canale a sinistra della strozzatura resta praticamente inalterata e quello che accade è un *allungamento* verso il Drain del canale "strozzato".

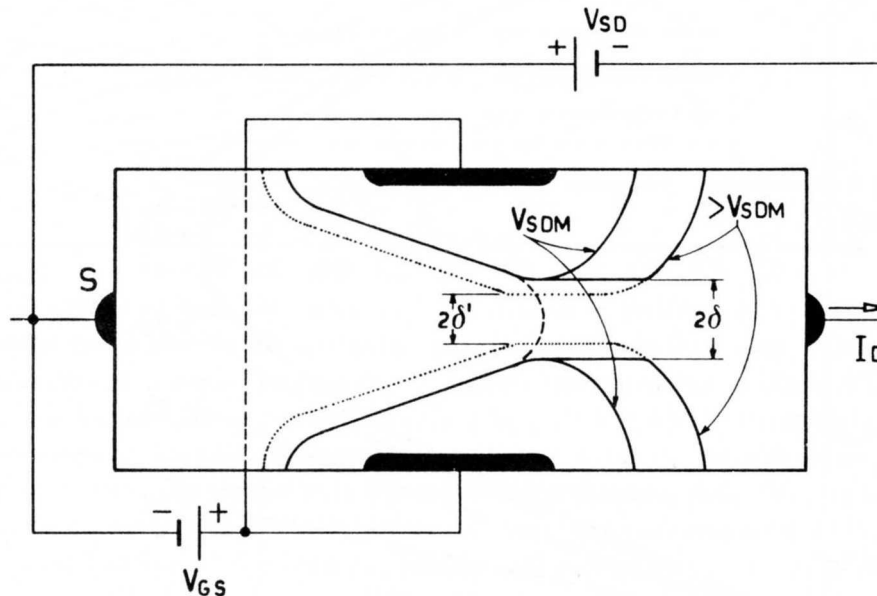


Fig.XVIII.8

Nella Fig.8 è riportato qualitativamente l'andamento del canale per due valori di V_{SD} : $V_{SD} = V_{SDM}$ e $V_{SD} > V_{SDM}$ (entrambi con lo stesso V_{GS}). Limitandoci a considerare la porzione di canale compresa fra le parti piane dei due elettrodi di Gate, il profilo di canale (tratto continuo) coincide per $V_{SD} = V_{SDM}$ con la curva a) della Fig.7 fino a che la larghezza del canale non raggiunge un valore critico 2δ ; da questo punto in poi il profilo si discosta da quello della curva a) della Fig.7 (disegnata a tratteggio nella Fig.8); la curva a tratto continuo è disegnata in modo da tener conto qualitativamente del fatto che la zona di svuotamento circonda tutto l'elettrodo di Gate e che verso il Drain è più vasta che non verso il Source, perché maggiore è la contropolarizzazione. Per tensioni $V_{SD} > V_{SDM}$ il profilo dello svuotamento a sinistra della strozzatura a "2δ" resta inalterato e viceversa si ha un allungamento del canale verso il Drain, coerentemente col fatto che la profondità

dello svuotamento deve aumentare, essendo cresciuta la contropolarizzazione Gate-Drain. Poiché nell'ambito di questa descrizione, la geometria a sinistra del punto di strozzamento a "2 δ " è la stessa che per $V_{SD} = V_{SDM}$ e quindi la tensione all'inizio dello strozzamento è anch'essa la stessa e pari a $V_P = V_{SDM} + V_{GS} + V_B$, l'ulteriore caduta $V_{SD} - V_{SDM}$ si sviluppa nel tratto di canale strozzato e il valore della corrente I_D per $V_{SD} > V_{SDM}$ è uguale a quello I_{DS} per $V_{SD} = V_{SDM}$.

Quanto alla dimensione minima dello strozzamento essa è determinata dal fatto che il campo elettrico che assicura il trasporto della corrente assume valori così elevati che non vale più la legge di Ohm, cioè la mobilità dei portatori (le lacune per un canale p) non è più costante; si raggiunge viceversa una condizione per cui la velocità dei portatori v_m è costante, cioè la mobilità va come $\frac{1}{E}$, e pertanto la corrente:

$$I_{DS} = 2W\delta eN_A v_m \quad (\text{XVIII.26})$$

è indipendente dal campo elettrico, purché questo sia superiore a un certo valore critico, nel Silicio $> 2 \cdot 10^6$ V/m. Si noti che se non esistesse il fenomeno della saturazione della velocità dei portatori, il canale potrebbe anche strozzarsi di più e la corrente I_D continuare a fluire; in questo caso aumenterebbe il modulo del vettore densità di corrente.

Tornando alle curve sperimentali del Fet (Fig.4), si nota che una piccola pendenza della corrente I_D in funzione di V_{SD} è pur sempre presente; essa si può interpretare pensando che quando $V_{SD} > V_{SDM}$ il canale largo "2 δ " avanza sì verso il Drain, ma presenta anche un modesto arretramento verso il Source; ciò porta a una riduzione della resistenza del canale dal Source fino allo strozzamento e quindi un moderato aumento della corrente I_D con V_{DS} . In fondo la cosa non deve minimamente sorprendere, poiché l'unico fatto fisicamente poco comprensibile sarebbe una diminuzione della corrente I_D in funzione di V_{SD} , non certo un suo aumento. Se considerassimo ora l'andamento della curva caratteristica $I_D = I_D(V_{SD}, V_{GS})$ per un valore di V_{GS} maggiore di quello ora trattato, cioè con una contropolarizzazione Gate-Source superiore, avremmo a che fare con un canale tutto più ristretto, fin dall'estremità verso il Source, e che terminerebbe, per valori di $V_{SD} > V_{SDM}$, verso il Drain con un canale strozzato avente dimensioni $2\delta' < 2\delta$ (curva a puntini in Fig.8). Infatti essendo il valore v_m della velocità saturata sempre lo stesso, la (26) ci dice che la dimensione trasversale del canale sarà inferiore, essendo inferiore la corrente, a parità di V_{SD} .

Riprendiamo ora la relazione (20). Le argomentazioni svolte precedentemente ci dicono che per $V_{SD} > V_{SDM} = V_P - V_{GS} - V_B$, I_D si mantiene costante e pari al valore che assume secondo la (20) per $V_{SD} = V_{SDM}$:

$$\begin{aligned} I_{DS} &= \frac{1}{r_{d(on)}} \left[V_P - V_{GS} - V_B - \frac{2}{3V_P^{\frac{1}{2}}} \left(V_P^{\frac{3}{2}} - (V_{GS} + V_B)^{\frac{3}{2}} \right) \right] = \\ &= \frac{V_P}{3r_{d(on)}} \left[1 - 3 \frac{(V_{GS} + V_B)}{V_P} + 2 \frac{(V_{GS} + V_B)^{\frac{3}{2}}}{V_P^{\frac{3}{2}}} \right] \end{aligned} \quad (\text{XVIII.27})$$

I_{DS} è detta *corrente di saturazione* e nella realtà segue solo approssimativamente l'andamento in funzione di V_{GS} prescritto dalla (27); tradizionalmente la corrente di saturazione per $V_{GS} = 0$ è indicata con I_{DSS} . Dalla (27) si vede che qualora $V_{GS} + V_B$ sia fatto tendere a V_P , $I_{DS} \rightarrow 0$; ciò corrisponde al fatto che se il diodo Gate-Source viene fortemente contropolarizzato, tutto il canale si restringe, fino a chiudersi completamente: questa volta lo strozzamento non è più localizzato e determinato dalla dinamica, cioè dal passaggio della corrente, ma piuttosto dalla ddp statica fra Gate e Source. Quando la ddp $V_{GS} \geq V_P - V_B$, il Fet è detto essere nella condizione di "cut-off"; in pratica fra Source e Drain, anche per valori finiti della ddp V_{SD} , non passa corrente o meglio solo una piccola corrente $I_{D(off)}$ in genere dell'ordine del nA .

Trattiamo infine il problema delle regione di breakdown: quando la ddp fra Gate e Drain raggiunge valori particolarmente elevati si può innescare la scarica a valanga caratteristica di qualunque diodo contropolarizzato oltre un certo limite; dalla curve sperimentali si nota che tale valanga si innesci per tensioni V_{DS} tanto più piccole quanto più è contropolarizzato il diodo Gate-Source; infatti l'innescio della valanga dipende dalla somma $V_{GS} + V_{SD} = V_{GD}$ (valori tipici intorno a 20 V).

L'analisi teorica del comportamento del Fet fatta fino a ora è - ripetiamolo ancora una volta - basata su alcune ipotesi riguardanti la geometria e le distribuzioni dei drogaggi del Fet (nonché su certe approssimazioni matematiche) che necessariamente sono schematizzazioni della realtà. Ad esempio una geometria molto più realistica di un Fet è quella della Fig.9.

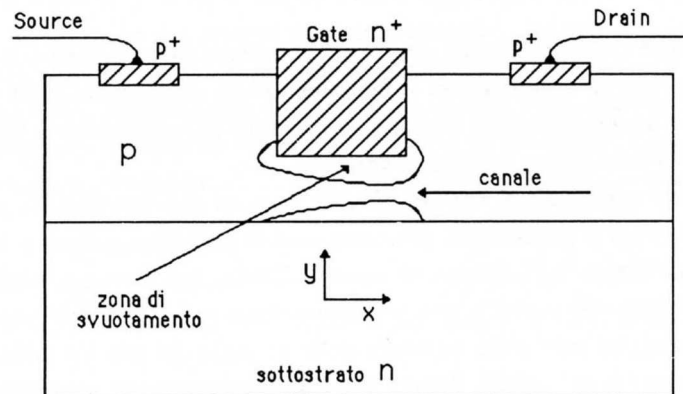


Fig.XVIII.9

Inoltre con questi tipi di geometria le tecniche di costruzione sono tali che l'approssimazione di drogaggio costante nella zona del canale non è verificata, e si ha piuttosto un drogaggio dipendente dalla coordinata y della Fig.5. Non deve quindi sorprendere che quando si vanno a considerare le caratteristiche di un Fet reale si trovino andamenti che qualitativamente sono magari assai simili a quelli teorici previsti, ma che difficilmente si possono riprodurre in modo quantitativo. In particolare la relazione fra I_{DS} e I_{DSS} si trova che è molto ben rappresentata da:

$$I_{DS} = I_{DSS} \left(1 - \frac{V_{GS}}{V_P} \right)^2 \quad (\text{XVIII.28})$$

che è sostanzialmente differente dalla (27), pur conservandone l'andamento caratteristico secondo cui la spaziatura fra due I_{DS} , ΔI_{DS} a parità di ΔV_{GS} cresce al diminuire di V_{GS} . Vedremo nei prossimi paragrafi che questa spaziatura è direttamente collegata a un parametro fondamentale del Fet nel suo impiego come amplificatore, la cosiddetta *transconduttanza*.

4.- Il Fet come interruttore

Supponiamo di avere il circuito di Fig.10 dove V_C rappresenta una ddp variabile. Essendo il Fet del tipo a canale n, V_P , la tensione fra Gate e Source che corrisponde al pinch-off, è ora negativa; se V_C è tale da contropolarizzare completamente il diodo Gate-Source ($V_C \geq |V_P|$), la

corrente nel canale $I_{D(off)}$ sarà assai piccola (tipicamente meno di 1 nA), a patto che la tensione fra Drain e Source sia inferiore al valore (tipicamente $15 \div 20\text{ V}$) corrispondente al breakdown del diodo Gate-Drain.

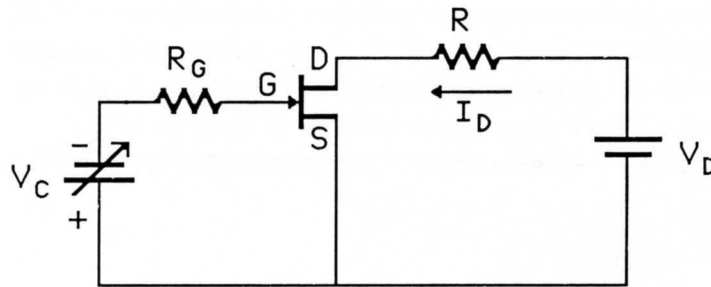


Fig.XVIII.10

Pertanto per $V_C \geq |V_P|$ il Fet si comporta praticamente come un circuito aperto, almeno per valori di R tali che $\frac{V_D}{R} \gg I_{D(off)}$: supponiamo ad esempio che $V_D = 10\text{V}$, $R = 10^4\Omega$; nel caso in cui $V_{GS} = V_P$, abbiamo, nell'ipotesi che il Fet conduca la corrente $I_{D(off)} = 1\text{nA}$:

$$V_{DS} = V_D - I_{D(off)}R = 10\text{V} - 10^{-5}\text{V}$$

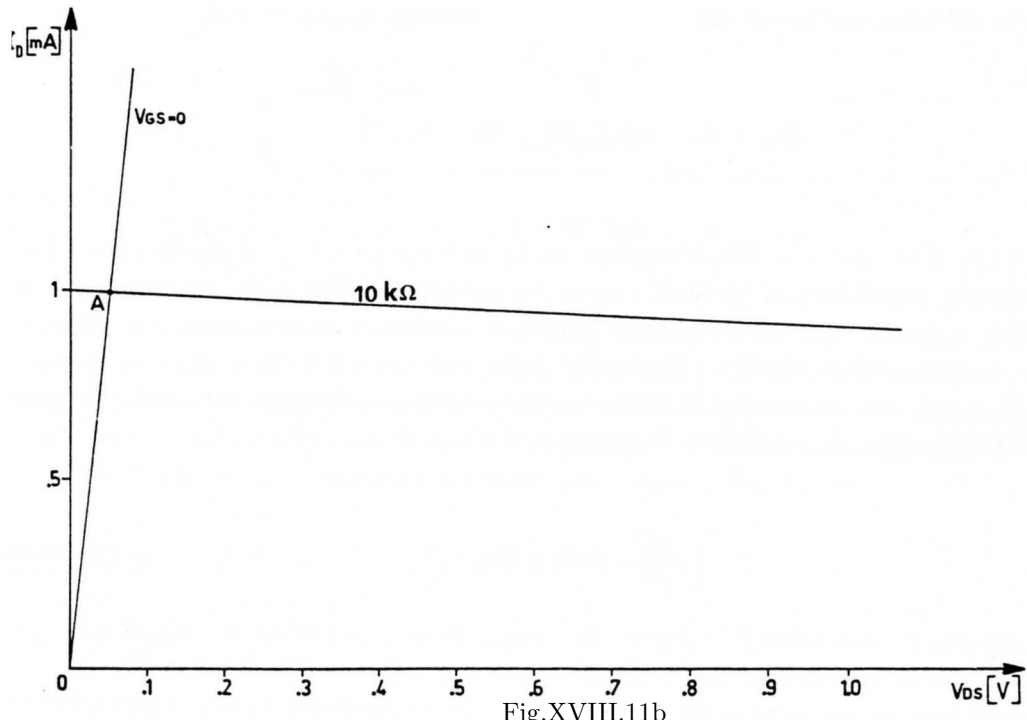
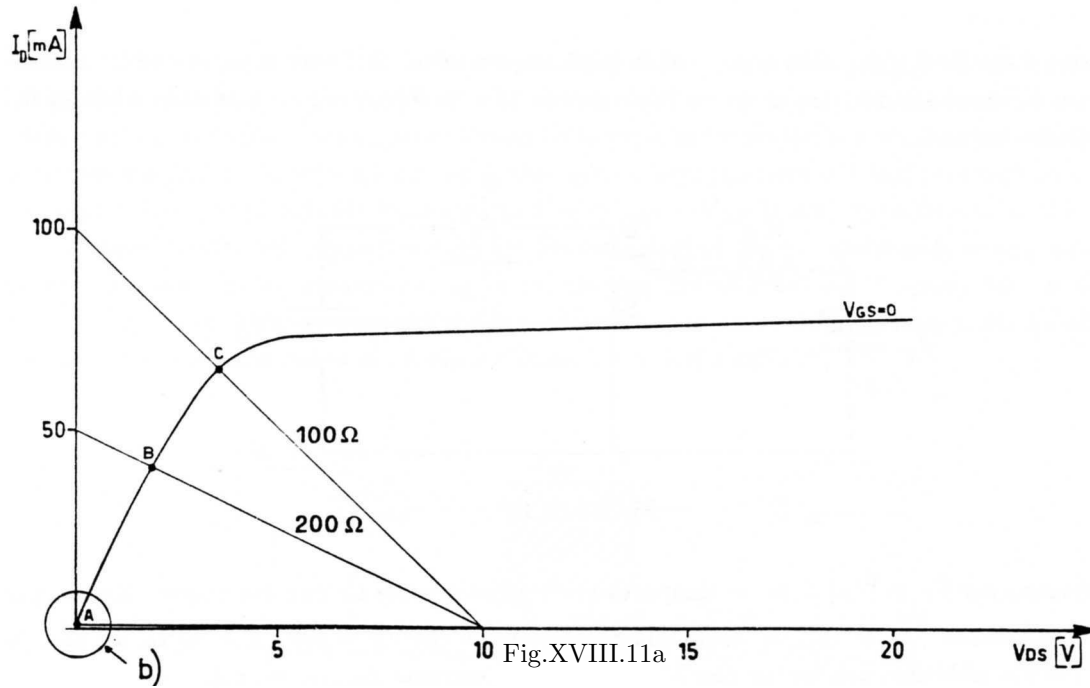
e quindi, a meno di una parte su 10^6 , la tensione sul Drain è uguale a V_D ; ciò significa che il Fet è quasi esattamente assimilabile a un tasto aperto. Se invece $V_C < |V_P|$ allora il canale non è più completamente strozzato e per definire il comportamento del circuito occorre conoscere, oltre a V_D e R , la caratteristica corrispondente a $-V_{GS} = V_C$. Nelle Fig.11a e 11b è riportata la caratteristica del Fet per $V_{GS} = 0$. Per determinare il comportamento elettrico del sistema nelle varie condizioni di lavoro, dobbiamo trovare la soluzione del sistema:

$$V_D - I_D R = V_{DS} \quad (\text{XVIII.29})$$

con

$$I_D = I_D(V_{DS}, V_{GS} = 0) \quad (\text{XVIII.30})$$

La (30) rappresenta le curve delle Fig.11a e 11b. La soluzione del sistema si può trovare per via grafica tracciando la retta corrispondente alla prima delle due equazioni nel piano I_D, V_{DS} . Tale retta passa per il punto $(I_D = 0, V_{DS} = V_D)$ e $(I_D = \frac{V_D}{R}, V_{DS} = 0)$; essa è disegnata nel grafico della figura precedente, visibile nella parte espansa b), per il caso numerico prima considerato ($R = 10^4\Omega$). Tale retta è detta -come nel caso del diodo- *retta di carico*. Dalla posizione dell'intercetto delle due curve (punto A della Fig.11b) si ha una ddp fra Drain e Source $\approx 0.05\text{V}$, che corrisponde a una $r_d(on) = 50\Omega$.



Pertanto la ddp non è esattamente uguale a 0 come nel caso di un cortocircuito, ma comunque assai piccola rispetto a V_D . Nel caso preso ora in esame non era per la verità necessario ricorrere alla costruzione grafica: sapendo che nelle condizioni considerate il Fet si comporta come un resistore di resistenza pari a $r_{d(on)}$, potevamo scrivere:

$$V_{DS} = V_D \frac{r_{d(on)}}{R + r_{d(on)}} \approx V_D \frac{r_{d(on)}}{R} \tag{XVIII.31}$$

Nel caso in cui il punto di lavoro interessi zone del Fet più lontane dall'origine allora la costruzione grafica è effettivamente indispensabile, come nei punti B e soprattutto C della Fig.11a, corrispondenti

a $R = 200\Omega$ e $R = 100\Omega$ rispettivamente. Per entrambi i casi si nota che le cadute V_{DS} ai capi del Fet non sono più trascurabili rispetto a V_D . Tornando al caso di una resistenza R dell'ordine della decina di $k\Omega$, notiamo che il Fet considerato in questo esempio, possedendo una resistenza $r_{d(on)}$ decisamente bassa (50Ω), è particolarmente indicato a funzionare come interruttore controllato dal valore di V_{GS} (applicazioni di *switching*). Senza entrare in eccessivi dettagli che comporterebbero lo studio del Fet in presenza di eccitazioni in alta frequenza, possiamo dire che con il Fet si possono fare commutazioni (come se si trattasse di un interruttore) molto rapide e frequenti, per esempio inviando sul Gate una ddp V_C periodica del tipo riportato in Fig.12.

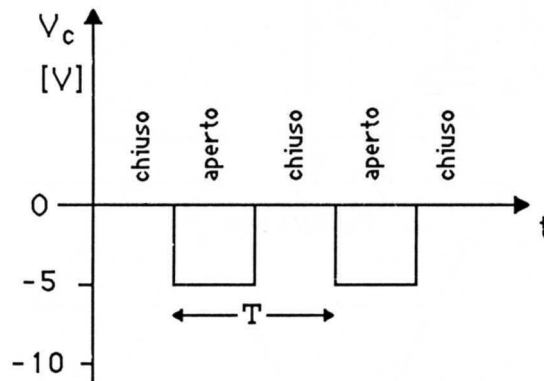


Fig.XVIII.12

In moltissime applicazioni elettroniche le operazioni di interruzione e chiusura di un ramo sono di fatto effettuate tramite transistori a effetto di campo. Alcuni esempi li abbiamo visti nel Cap.XVI, §§2 e 3, studiando il principio di funzionamento dei Convertitori analogico-digitali.

5.- Il Fet come amplificatore

Metodo di risoluzione

Supponiamo di aver montato il circuito di Fig.13 e chiediamoci quale è l'andamento della differenza di potenziale fra Drain e Source (che è a massa) in funzione della ddp v_g (che supponiamo sinusoidale). La soluzione di questo problema non è in genere semplice, soprattutto se la ddp v_g non è piccola rispetto a V_{GG} (o meglio rispetto a $|V_P|$, la tensione di pinch-off). Nel paragrafo precedente abbiamo visto che se v_g è un segnale di tensione squadrato con escursione ampia (rispetto a V_P) la ddp $V_d = V_{DS}$ varierà praticamente fra V_{DD} e 0, ma questo è un caso molto particolare, in cui senz'altro l'eccitazione v_g non è piccola rispetto a $|V_P|$.

Il problema consiste nel risolvere un sistema del tutto simile a quello dato dalle (29) e (30), cioè:

$$V_{DD} - I_d R_L = V_{DS} \quad (\text{XVIII.32})$$

$$I_d = I_d(V_{DS}, V_{GS} = V_G + v_g(t)) \quad (\text{XVIII.33})$$

Una maniera di risolvere il problema è quella della costruzione grafica seguendo una procedura che si basa sulla conoscenza delle caratteristiche del Fet e sull'intercetto con la retta di carico determinata col solito sistema (nel caso in Fig.14: $V_{DD} = 16\text{ V}$, $R_L = 2\text{ k}\Omega$).

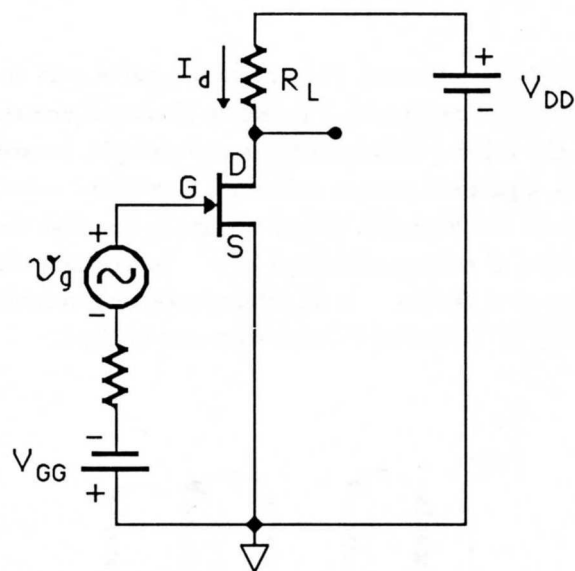


Fig.XVIII.13

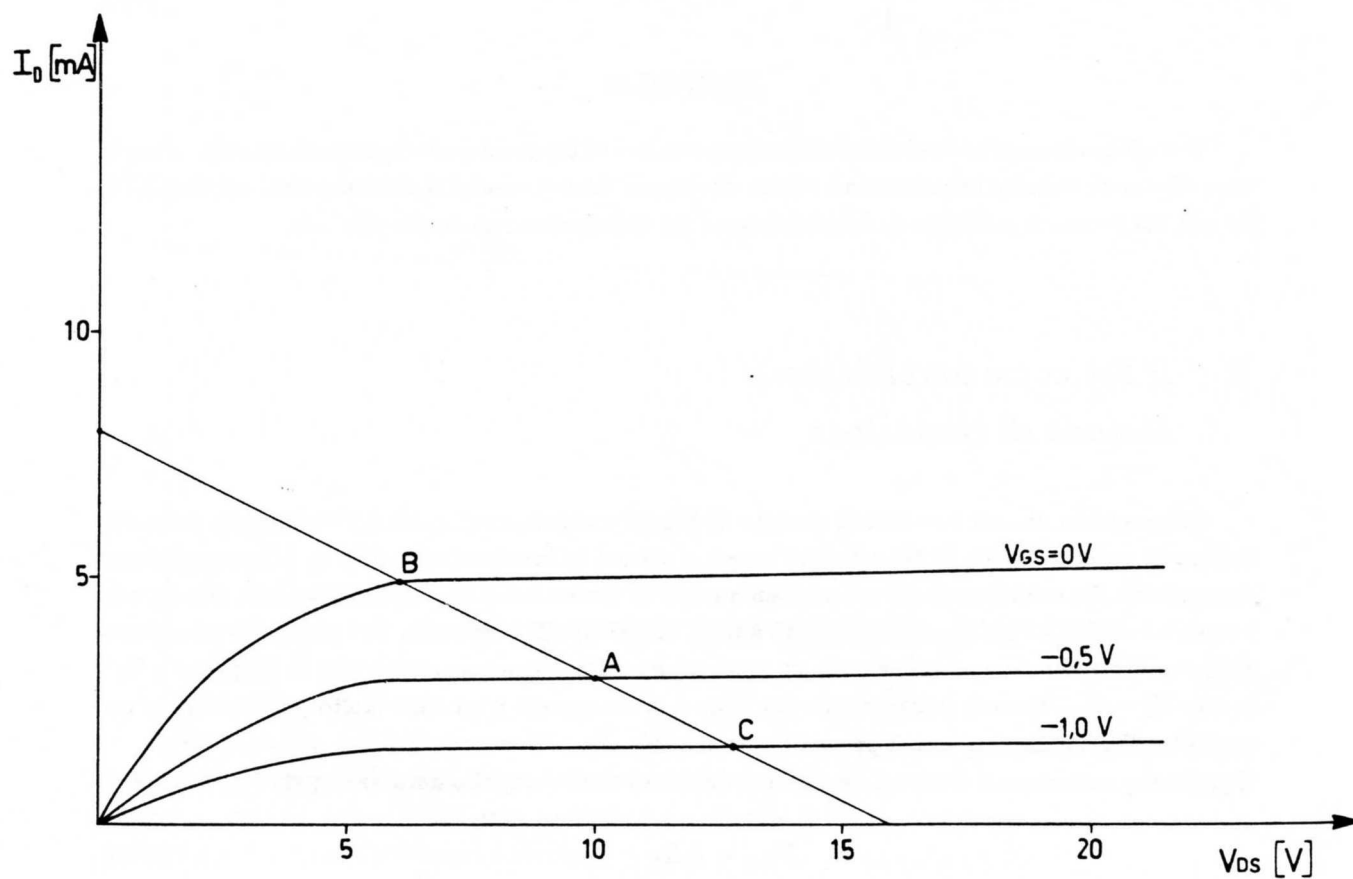


Fig.XVIII.14

La retta di carico stabilisce il vincolo imposto dalla particolare configurazione circuitale (vedi (32)), ovvero la corrente I_d e la tensione $V_d = V_{DS}$ dovranno sempre appartenere a questa retta, anche al variare della ddp complessiva $V_g = V_{GS} = -V_{GG} + v_g$. Se ad esempio (Fig.14) $V_{GG} = 0.5 V$

e $v_g = 0$ abbiamo la corrente $I_d = 3.0 \text{ mA}$ e $V_{DS} = 10 \text{ V}$ (punto A); se $v_g = v_o \cos \omega t$, con $v_o = 0.5 \text{ V}$, quando v_g è massima e pari a v_o , avremo $I_d = 4.9 \text{ mA}$, $v_d = 6.3 \text{ V}$ (punto B); quando v_g è minima avremo invece $I_d = 1.6 \text{ mA}$, $V_d = 12.8 \text{ V}$ (punto C). Questo tipo di costruzione è possibile per tutti i valori intermedi e in linea di principio può essere seguito per definire tutto l'andamento di V_d (e I_d). Nella Fig.15 riportiamo il grafico, nella stessa scala temporale, di $-V_{GG} + v_g$ e di $V_d = V_{DS}$, ottenuti come sopra descritto.

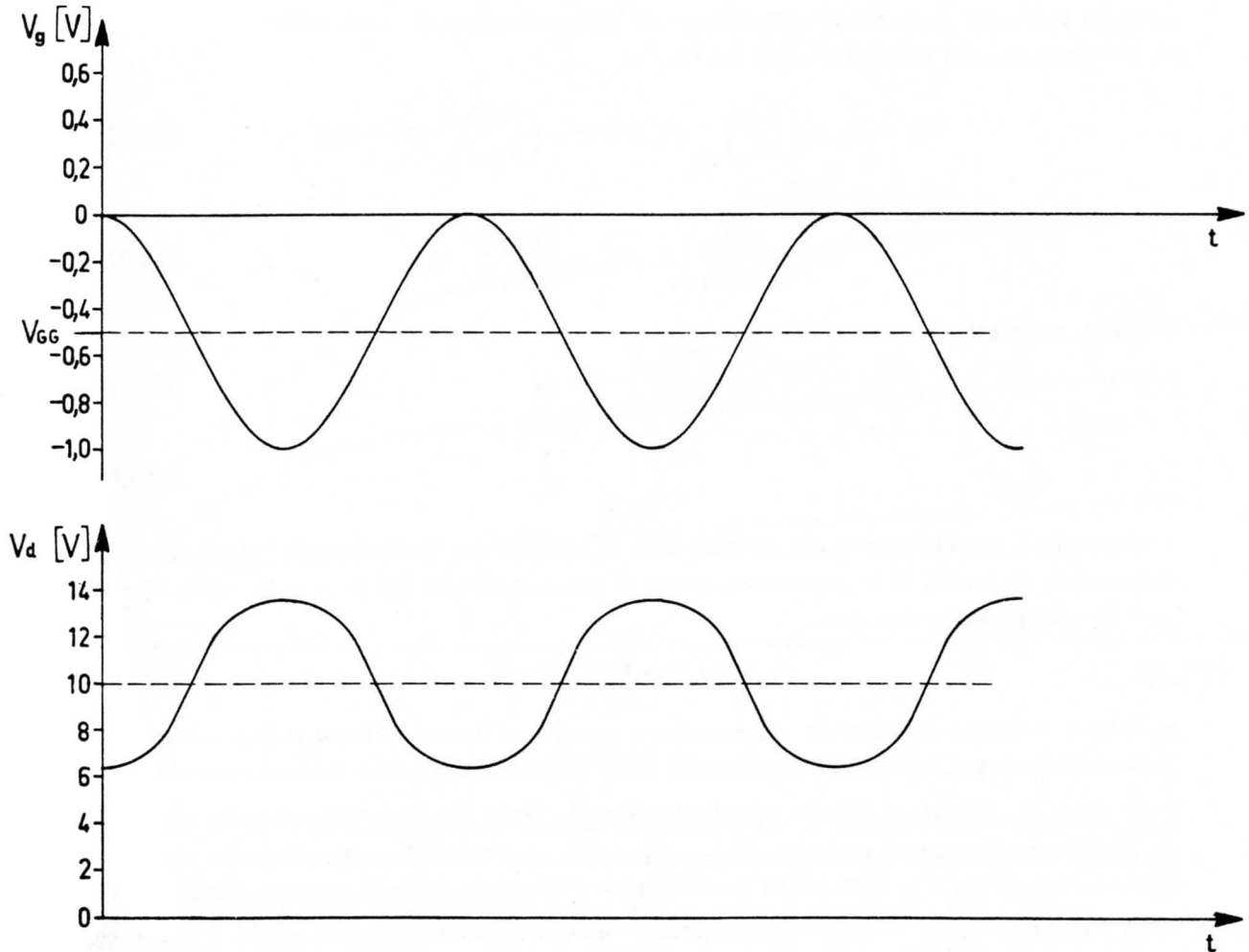


Fig.XVIII.15

Il metodo seguito, pur consentendo la soluzione del problema, è laborioso e richiede la conoscenza del grafico di tutta la famiglia, a passi molto fini di V_{GS} , della curva caratteristica. Poiché questo in genere non avviene, cioè i costruttori di Fet non forniscono queste curve dettagliate, si incontrano problemi di precisione principalmente per valori piccoli di v_g .

Notiamo intanto (Fig.15) che la oscillazione sovrainposta al valore stazionario della tensione V_{DS} è molto più ampia (attenzione al cambio di scala) delle oscillazioni del segnale v_g sul Gate; inoltre l'analisi ora fatta mostra che l'oscillazione della tensione di Drain non è simmetrica ($(10 - 6.3) \text{ V} = 3.7 \text{ V}$ contro $(12.8 - 10) \text{ V} = 2.8 \text{ V}$), vale a dire l'oscillazione della tensione del Drain è una *replica* (moltiplicata per un numero < -1) della ddp v_g , con una *distorsione* non piccola rispetto

all'ampiezza. È facile rendersi conto che tale distorsione sarebbe stata assai inferiore se l'ampiezza v_o fosse stata più piccola, cioè se avessimo considerato variazioni ancor più piccole attorno al punto di lavoro. In un caso come questo però il metodo grafico non è proprio quello più indicato; si può invece sfruttare matematicamente il fatto della piccolezza di v_g . Infatti, in queste ipotesi, anche la variazione di V_d rispetto al valore stazionario V_D ($V_D = 10 V$ nel nostro caso) sarà piccola, così come quella della corrente di Drain (il cui valore stazionario I_D vale nel nostro caso $3.0 mA$). Poiché la corrente istantanea I_d è sempre esprimibile (come abbiamo visto nel §3) in funzione dei valori istantanei V_g e V_d delle ddp fra Gate e Source e fra Drain e Source (il Source è a massa), potremo esprimere I_d mediante uno sviluppo di Taylor arrestato al primo ordine attorno al punto A, caratterizzato dai valori stazionari I_D, V_G, V_D :

$$I_d = I_D + \left(\frac{\partial I_d}{\partial V_g} \right)_{V_D} (V_g - V_G) + \left(\frac{\partial I_d}{\partial V_d} \right)_{V_G} (V_d - V_D) \quad (\text{XVIII.34})$$

ovvero

$$\Delta I_d = \left(\frac{\partial I_d}{\partial V_g} \right)_{V_D} \Delta V_g + \left(\frac{\partial I_d}{\partial V_d} \right)_{V_G} \Delta V_d \quad (\text{XVIII.35})$$

Ponendo, come generalmente si fa:

$$\left(\frac{\partial I_d}{\partial V_g} \right)_{V_D} = g_m \quad (\text{XVIII.36})$$

$$\left(\frac{\partial I_d}{\partial V_d} \right)_{V_G} = \frac{1}{r_d} \quad (\text{XVIII.37})$$

e adottando il metodo universalmente accettato di indicare con lettere corsive minuscole e indici minuscoli le variazioni delle grandezze rispetto ai valori stazionari ($i_d = I_d - I_D$, $v_g = V_g - V_G$, $v_d = V_d - V_D$) possiamo scrivere:

$$i_d = g_m v_g + \frac{1}{r_d} v_d \quad (\text{XVIII.38})$$

g_m è detta *transconduttanza* o *conduttanza mutua*, mentre r_d è detta *resistenza di Drain*. I costruttori di Fet nelle loro specifiche spesso denotano g_m come Y_{fs} (*Common Source forward transadmittance*) e $\frac{1}{r_d}$ come Y_{os} (*Common Source output admittance*). Nella Fig.16 è mostrato schematicamente un metodo per ricavare le variazioni di I_d a V_{DS} e V_{GS} costanti allo scopo di ottenere una stima approssimata di g_m e r_d della curva caratteristica a Source comune: la transconduttanza è data dalla variazione $\frac{\Delta I_d}{\Delta V_{GS}}$ a $V_{DS} = \text{cost}$, mentre $\frac{1}{r_d}$ è ottenuta come rapporto $\frac{\Delta I_d}{\Delta V_{DS}}$ a $V_{GS} = \text{cost}$. Dalla figura si ottiene, nell'intorno del punto di lavoro (A): $g_m \approx \frac{(8.2-2.5)}{1} mA/V = 5.7 mA/V$ e $\frac{1}{r_d} \approx \frac{1}{15} mA/V = \frac{1}{15} k\Omega^{-1}$. Dal grafico non si può ottenere una valutazione molto puntuale dei parametri (altrimenti avremmo potuto risolvere il nostro problema per via grafica!) e pertanto i costruttori, per un dato Fet, forniscono gli andamenti di g_m e di $\frac{1}{r_d}$ in funzione di V_{GS} o di I_D per vari valori di V_{DS} . Su questo punto e sulla dipendenza di questi parametri dalla temperatura torneremo più avanti.

Soffermiamoci ora sulla (38) e sulla portata di tale approccio: la convenzione di usare i simboli minuscoli e di aver eliminato i Δ ha un significato non solo di praticità; infatti i_d e v_d possono essere anche interpretati come la corrente e la tensione di Drain associate al generatore v_g posto sul Gate, mentre i valori stazionari di corrente I_D e di tensione V_G e V_D sono determinati dagli altri generatori di fem continue.

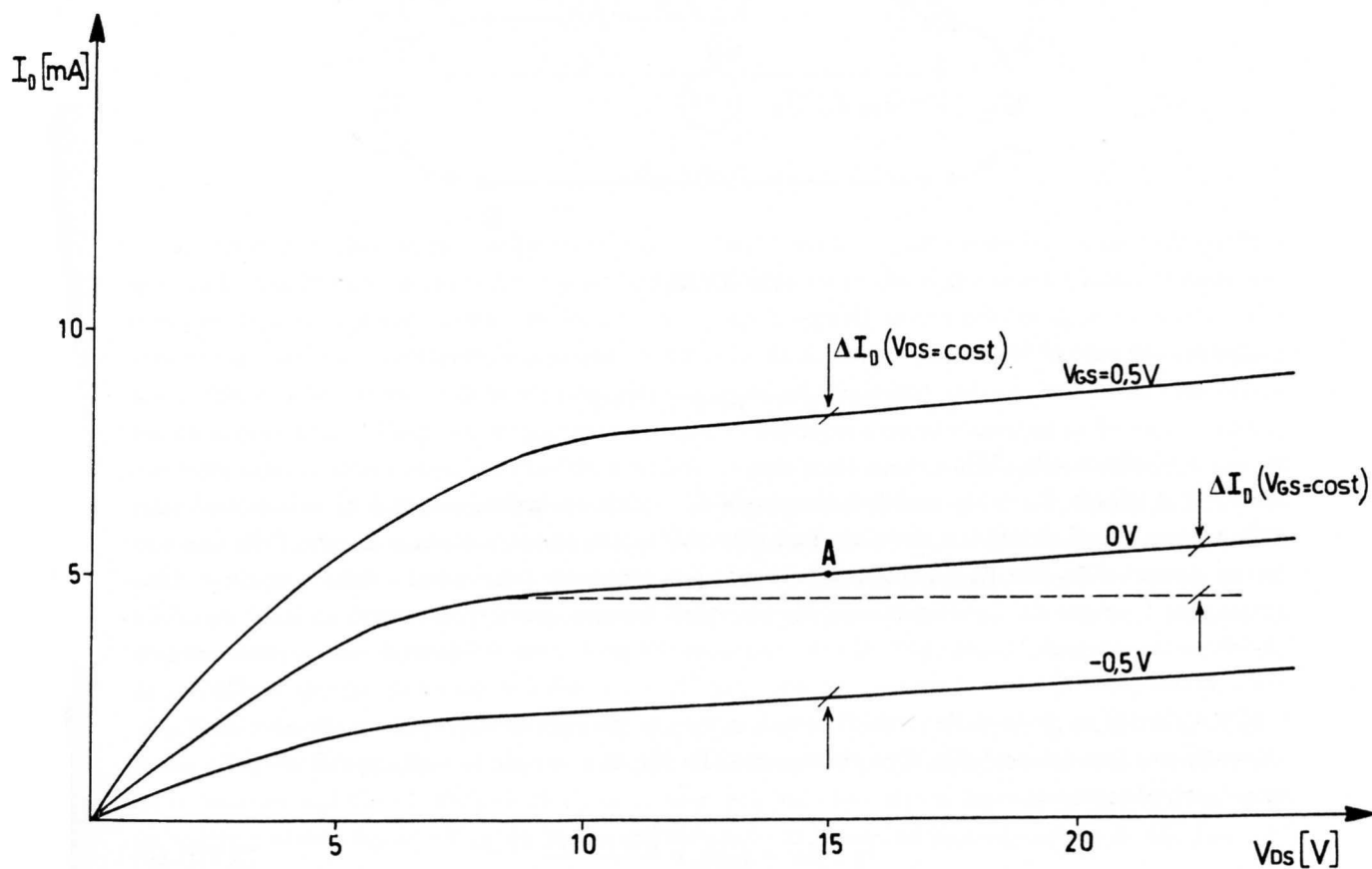


Fig.XVIII.16

Per dimostrare questa affermazione notiamo innanzitutto che la relazione lineare (38) fra v_g , v_d , e i_d è, proprio in quanto lineare, passibile di una interpretazione in termini di *equivalente circuitale*; tale equivalente è riportato nella Fig.17.

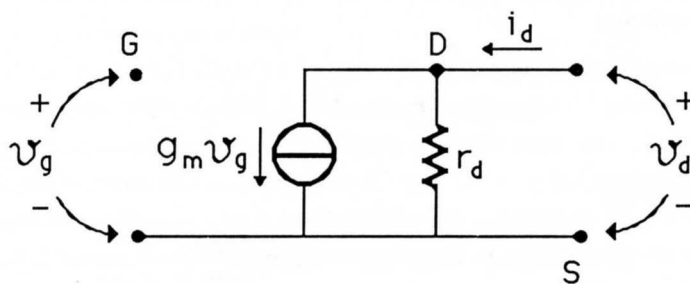


Fig.XVIII.17

L'equivalenza è immediata: infatti secondo questo schema abbiamo, applicando la legge dei nodi in D: $g_m v_g = i_d - \frac{v_d}{r_d}$ cioè esattamente la (38). Analogamente si può ottenere un circuito

equivalente che ricorra a un generatore di tensione, facendo la trasformazione generatore di corrente → generatore di tensione (Fig.18).

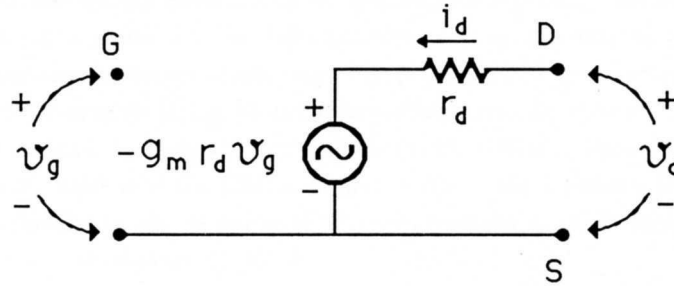


Fig.XVIII.18

In questo caso si ottiene:

$$v_d = -g_m v_g r_d + i_d r_d$$

ancora equivalente alla (38).

Pertanto il tripolo Fet può, nell'ipotesi attuale di piccole variazioni rispetto ai valori stazionari delle tensioni degli elettrodi e delle correnti entranti in essi, essere sostituito da una delle due reti lineari disegnate in Fig.17 e Fig.18; se si vuole poi conoscere l'andamento delle correnti e delle tensioni in funzione dei generatori esterni, occorrerà inserire questa rete equivalente nel resto del circuito e risolvere con i soliti metodi delle reti lineari il problema. Ad esempio del caso che stiamo esaminando (amplificatore a Source comune, Fig.13) occorrerà contemporaneamente soddisfare la (38) e il vincolo imposto dalla retta di carico, ovvero la 2ª legge di Kirchhoff applicata alla maglia Drain-Source (equazione (32)). Con riferimento alla Fig.13 e usando la solita notazione per i valori stazionari, abbiamo:

$$I_d - I_D = g_m v_g + \frac{(V_d - V_D)}{r_d} \quad (\text{XVIII.39})$$

$$V_{DD} = V_d + I_d R_L \quad (\text{XVIII.40})$$

Ricaviamo I_d dalla (40); aggiungendo e togliendo $\frac{V_D}{R_L}$ otteniamo:

$$I_d = \frac{V_{DD} - V_D}{R_L} - \frac{(V_d - V_D)}{R_L} = I_D - \frac{(V_d - V_D)}{R_L} \quad (\text{XVIII.41})$$

Da quest'ultima otteniamo:

$$i_d = I_d - I_D = -\frac{(V_d - V_D)}{R_L} = \frac{-v_d}{R_L} \quad (\text{XVIII.42})$$

che sostituita nella (39) dà:

$$v_d = V_d - V_D = -g_m v_g \frac{r_d R_L}{r_d + R_L} \quad (\text{XVIII.43})$$

E' immediato rendersi conto che tale soluzione corrisponde alla risoluzione del circuito disegnato in Fig.19, ottenuto aggiungendo alla rete equivalente il circuito esterno, con i generatori ideali di ddp, che non siano di segnale, sostituiti con dei cortocircuiti.

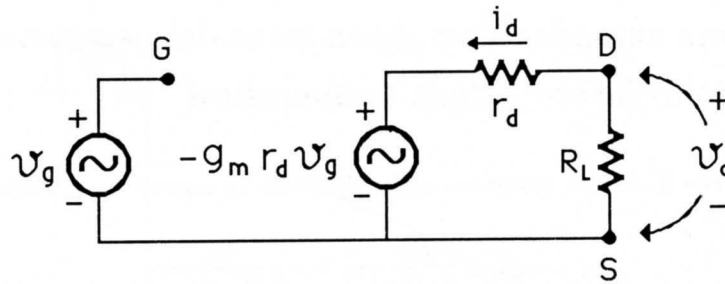


Fig.XVIII.19

Il metodo di risoluzione, rappresentato nella Fig.19 nel caso particolare in esame, vale qualunque sia la rete lineare in cui il Fet è inserito. Infatti, una volta che il problema è stato linearizzato sostituendo il Fet col suo circuito equivalente per piccoli segnali, la conoscenza delle correnti e delle tensioni nei vari rami è ottenibile mediante le tecniche di risoluzione delle reti lineari: in particolare le variazioni delle correnti e delle tensioni rispetto ai valori stazionari, essendo attribuibili esclusivamente al generatore di segnale, si possono ottenere, in ottemperanza al Principio di Sovrapposizione, cortocircuitando tutti i generatori di fem continue, ovvero sostituendoli con la loro resistenza interna e lasciando *acceso* il solo generatore di segnale. La funzione dei generatori di fem continua è esclusivamente quella di assicurare la corretta posizione del punto di lavoro o, come si dice, la *polarizzazione* del Fet; si noti anche che lasciare acceso il generatore di (piccolo) segnale, significa lasciare accesi anche tutti gli altri generatori da esso *controllati*; ad esempio nel caso preso in esame, lasciare v_g impone lasciare acceso anche il generatore di tensione $-g_m r_d v_g$ (oppure il generatore di corrente $g_m v_g$).

Tornando al nostro problema, la (43) dà, se non ce ne fossimo accorti, il risultato al quesito posto all'inizio del paragrafo, almeno nel caso di eccitazione piccola rispetto al valore stazionario della tensione sul Gate. Esso ci dice che la presenza sul Gate di un segnale v_g sovrainposto a un valore costante $V_G = -V_{GG}$ dà luogo, sull'elettrodo di Drain, a una variazione di ddp (sempre rispetto al valore stazionario V_D) pari a $-g_m \frac{r_d R_L}{r_d + R_L} v_g$. Prendendo dei numeri realistici ricavati dalla caratteristica riportata in Fig.16

$$g_m = 5.7 \text{ mA/V} \quad r_d = 15 \text{ k}\Omega$$

e assumendo che $R_L = 2 \text{ k}\Omega$ abbiamo che l'ampiezza di v_d è circa 10 volte v_g . Il rapporto $\frac{v_d}{v_g}$ è detto *guadagno in tensione* o *amplificazione* del nostro circuito; quest'ultimo è cioè interpretato come un *amplificatore* nel quale il Gate è il terminale di ingresso, il Drain quello di uscita e il Source quello di riferimento sia per l'ingresso che per l'uscita.

La correttezza del risultato (43) dipende da quanto è giustificata l'approssimazione lineare, in altri termini da quanto corretta è l'ipotesi di considerare costanti g_m e r_d entro il campo di variazione di v_g . La verifica o meno di questo punto può venire solo dalla completa definizione del problema in esame, per esempio dalle curve che il costruttore dà per g_m e r_d in funzione del punto di lavoro. In genere se l'approssimazione lineare non è particolarmente giustificata (come ad esempio nel caso risolto per via grafica all'inizio del paragrafo), osserveremo che il segnale v_d di Drain riproduce, moltiplicato per il guadagno, il segnale v_g di Gate, ma presenta componenti di armoniche superiori, segno palese della distorsione introdotta dalla non linearità del sistema. Nel paragrafo successivo vedremo alcuni tipici andamenti di g_m e r_d in funzione di V_{GS} e di I_D , nonché la loro dipendenza dalla temperatura.

6.— Il Fet come amplificatore: dipendenza dei parametri dal punto di lavoro e dalla temperatura

Abbiamo visto che il circuito disegnato nella Fig.20 dà un segnale v_d sul Drain pari a:

$$v_d = -g_m r_d \frac{R_L}{R_L + r_d} v_g = -\mu \frac{R_L}{R_L + r_d} v_g \quad (\text{XVIII.44})$$

dove abbiamo posto come si fa tradizionalmente:

$$\mu = g_m r_d \quad (\text{XVIII.45})$$

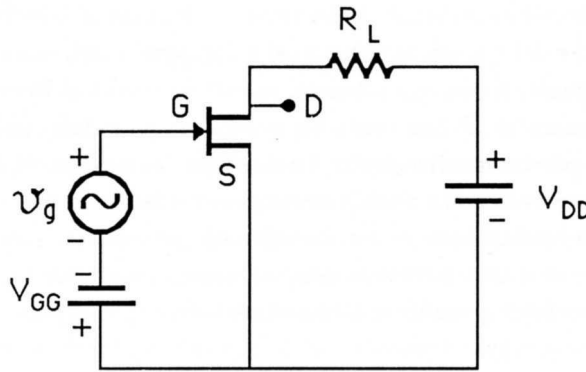


Fig.XVIII.20

Esso è detto *fattore di amplificazione* e misura, a parte il segno, il guadagno in tensione $\frac{v_d}{v_g}$ quando $R_L \gg r_d$. La configurazione ora studiata è detta *amplificatore a sorgente (Source) comune* e costituisce una configurazione che trova effettivo e vasto impiego nell'elettronica. Esistono ovviamente altre configurazioni in cui il Fet è adoperato come amplificatore e in tutte queste, in maggior o minor misura, il guadagno fra ingresso e uscita dipende dai parametri g_m e r_d . Pertanto nello stabilire il punto di lavoro del nostro amplificatore in modo che esso risponda alle esigenze particolari per cui è stato progettato, occorrerà conoscere l'andamento dei parametri g_m e r_d in funzione delle polarizzazioni. Ad esempio sappiamo che una buona stima della dipendenza della transconduttanza g_m in funzione di V_{GS} si può ottenere derivando la (28): $g_m \propto (1 - \frac{V_{GS}}{V_P})$. Sperimentalmente si trovano andamenti un po' differenti, del tipo disegnato in Fig.21 (Fet canale-p). Il fatto principale da notare è che la transconduttanza è massima attorno a piccoli valori di V_{GS} ; in tali condizioni di polarizzazione si hanno infatti, al variare di V_{GS} , le maggiori modulazioni di canale, responsabili della variazione della corrente di Drain a parità di V_{DS} . Dalla curva della Fig.21 si nota anche che non si individuano zone ove la transconduttanza è stazionaria; essa presenta pertanto una derivata ovunque finita, per cui l'approssimazione lineare per piccoli segnali difficilmente può essere valida per variazioni di V_{GS} non piccole. Quanto ai valori della transconduttanza per $V_{GS} = 0$, essa, a seconda dei Fet, varia tipicamente nell'ambito di $0.1 \div 100 \text{ mA/V}$; r_d invece ha un campo caratteristico di variazioni fra $10 \text{ k}\Omega$ e $1 \text{ M}\Omega$. Generalmente il costruttore non fornisce l'andamento di r_d in funzione del punto di lavoro, bensì dà un certo valore minimo garantito per un certo punto di lavoro, considerato in qualche modo ottimale per quel Fet.

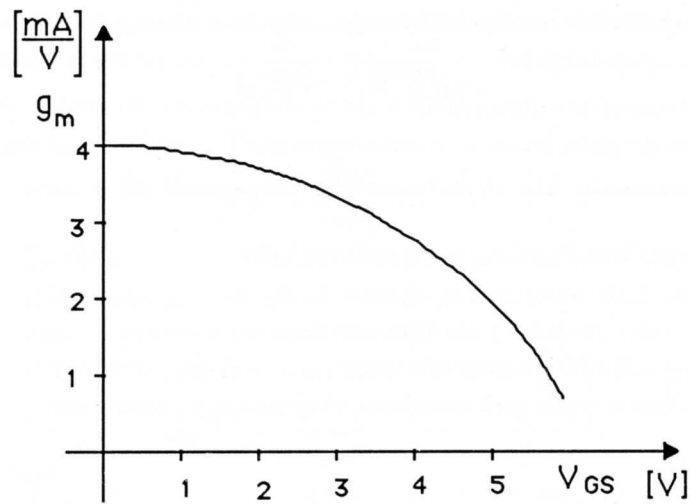


Fig.XVIII.21

Di fatto r_d dipende assai poco dal valore di V_{DS} purché il punto di lavoro sia mantenuto nella zona a “pentodo” (come si fa generalmente quando si adopera il Fet come amplificatore), mentre una moderata dipendenza da V_{GS} esiste nel verso di aumentare all’aumentare di V_{GS} (cioè della contropolarizzazione). Nel caso dell’amplificatore a Source comune ora studiato, la soluzione (43):

$$v_d = V_d - V_D = -g_m v_g \frac{r_d R_L}{r_d + R_L}$$

dice che la dipendenza da r_d è assai meno critica di quella rispetto a g_m , almeno per valori di $R_L < r_d$; infatti se $R_L \ll r_d$, $v_d = g_m R_L v_g$.

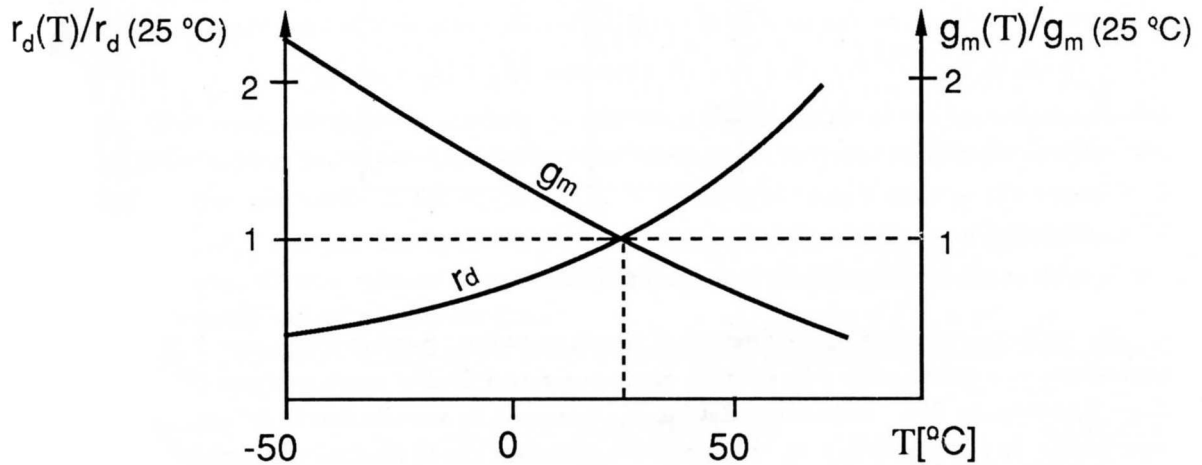


Fig.XVIII.22

In altri termini l’influenza della non perfetta costanza di r_d al variare del segnale è fortemente attenuata dalla presenza della resistenza di carico R_L che, essendo piccola, riduce v_d e conseguentemente l’influenza del termine $\frac{v_d}{r_d}$ nell’espressione di i_d (vedi (39)). Un altro punto assai importante è la dipendenza del guadagno dell’amplificatore dalla temperatura, dipendenza che deve essere più

ridotta possibile. Il guadagno risente della temperatura in quanto g_m e r_d ne dipendono. In Fig.22 sono riportati gli andamenti tipici di $\frac{g_m}{g_m(25^{\circ}C)}$ e $\frac{r_d}{r_d(25^{\circ}C)}$. Entrambe le dipendenze sono dominate dal fenomeno della diminuzione della mobilità con la temperatura: il canale cioè, in quanto costituito di un semiconduttore drogato, ha un comportamento simile a quello di un conduttore. Il guadagno $\frac{v_d}{v_g} = g_m \frac{r_d R_L}{R_L + r_d}$ pertanto ha una dipendenza dalla temperatura più o meno marcata a seconda del rapporto $\frac{R_L}{r_d}$: ad esempio se $R_L \ll r_d$, la dipendenza è dominata da quella di g_m , ovvero il guadagno aumenta al diminuire della temperatura, mentre se $R_L \gg r_d$ si ha la più debole dipendenza di μ da T . Abbiamo già visto (Cap.XV) che l'introduzione della reazione negativa consente di definire amplificazioni in larga misura indipendenti dalle variazioni dei parametri dei transistori impiegati. Un altro esempio di tale metodo sarà esaminato proprio nel paragrafo successivo.

7.— Un altro esempio di applicazione del Fet: il "Source follower"

Il circuito di Fig.23 differisce dal circuito amplificatore a Source comune per l'aggiunta di una resistenza fra Source e massa; inoltre l'uscita è presa sul Source anziché sul Drain.

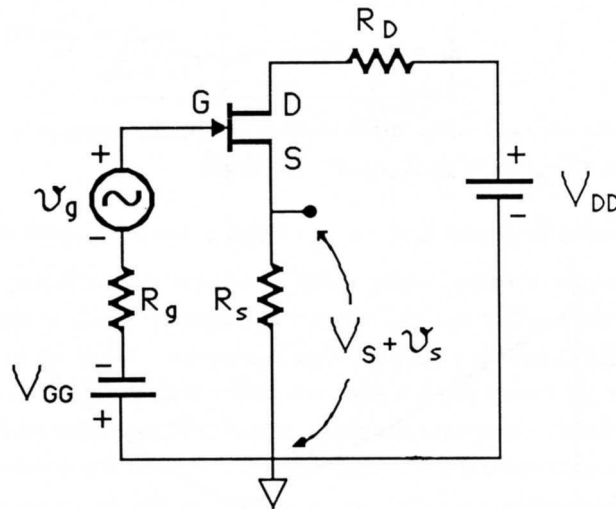


Fig.XVIII.23

Se vogliamo conoscere v_s , nell'ipotesi di piccoli segnali v_g , possiamo sostituire il Fet col circuito equivalente e inserirlo nella rete esterna, con i generatori di ddp cortocircuitati (Fig.24). Si noti che nel generatore di corrente controllato $g_m v_{gs}$ compare, in accordo con la definizione del circuito equivalente, la ddp $v_{gs} = v_g - v_s$. E' opportuno ricordare che le tensioni e le correnti si riferiscono alle variazioni rispetto ai valori stazionari. La seconda legge di Kirchhoff applicata alla maglia di destra, tenendo conto che in r_d circola una corrente pari a $(i_d - g_m v_{gs})$, dà:

$$i_d(R_S + R_D) + [i_d - g_m(v_g - v_s)]r_d = 0 \quad (\text{XVIII.46})$$

che insieme alla relazione

$$v_s = i_d R_S \quad (\text{XVIII.47})$$

permette di ottenere i_d in funzione di grandezze tutte note o misurabili ($\mu = g_m r_d$):

$$i_d = \frac{\mu v_g}{R_S + R_D + r_d + \mu R_S} \quad (\text{XVIII.48})$$

Pertanto

$$v_s = \frac{v_g}{1 + \frac{R_S + R_D + r_d}{\mu R_S}} \approx v_g \quad (\text{XVIII.49})$$

L'ultimo passaggio si basa sul fatto che per valori realistici di μ (≈ 100) e di R_S, R_D, r_d ($2 \text{ k}\Omega, 2 \text{ k}\Omega, 15 \text{ k}\Omega$) il secondo membro a denominatore risulta assai piccolo.

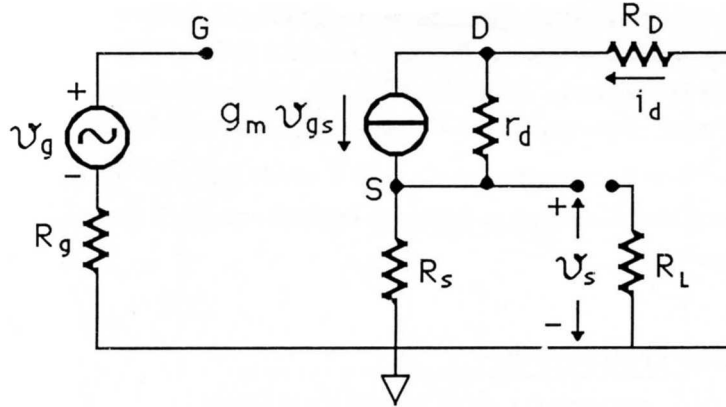


Fig.XVIII.24

Se vogliamo trovare la resistenza di uscita rispetto a un carico R_L da porre in parallelo a R_S possiamo usare la (48) ponendo $R_S = 0$ per ricavare la corrente di cortocircuito i_{cc} e la (49) per ottenere la tensione a circuito aperto $v_{ca} = v_s$; la resistenza di uscita R_o sar  quindi data da:

$$R_o = \frac{v_{ca}}{i_{cc}} = \frac{\mu R_S v_g}{(\mu + 1) R_S + R_D + r_d} \frac{R_D + r_d}{\mu v_g} = R_S \parallel \frac{(R_D + r_d)}{\mu + 1} \quad (\text{XVIII.50})$$

Pertanto il nostro circuito si comporta, con riferimento ai terminali di ingresso, come una resistenza molto elevata (infinita nella attuale schematizzazione); in uscita si comporta come un generatore di tensione $v_s \approx \frac{\mu}{\mu + 1} v_g \approx v_g$ con in serie una resistenza R_o pari a $R_S \parallel \frac{(R_D + r_d)}{\mu + 1} \approx R_S \parallel \frac{1}{g_m}$ (se $R_D \ll r_d$). Il circuito cio  ripete la tensione in ingresso indipendentemente dall'impedenza R_g del segnale. L'impedenza di uscita non   particolarmente bassa come in molti casi sarebbe desiderabile, ma in molte situazioni, quelle in cui $R_g \gg \frac{1}{g_m}$ e $R_L \approx R_g$ il circuito   utile poich  consente di comandare un carico non piccolo rispetto a R_g senza eccessive cadute sulla resistenza interna del generatore. Il nome "Source follower", cio  Source *inseguitore*, si riferisce al fatto che la tensione sul Source segue le variazioni del segnale sul Gate.

Se avessimo considerato la ddp v_d fra Drain e elettrodo di riferimento avremmo trovato (vedi Fig.24)

$$v_d = -i_d R_D = \frac{-\mu R_D v_g}{R_S(\mu + 1) + R_D + r_d} \quad (\text{XVIII.51})$$

Facendo tendere a zero R_S si ritrova il risultato (43), caso nel quale R_D   chiamata R_L . Consideriamo il caso in cui $g_m = 5.7 \text{ mA/V}$, $r_d = 15 \text{ k}\Omega$, $R_S = 500 \Omega$, $R_D = 2 \text{ k}\Omega$: la (51) ci dice che il guadagno $\frac{v_d}{v_g}$ vale:

$$\frac{v_d}{v_g} = -\frac{\mu R_D}{(\mu + 1) R_S + R_D + r_d} = -\frac{R_D}{R_S} \frac{1}{\frac{\mu + 1}{\mu} + \frac{R_D + r_d}{\mu R_S}} \approx -2.8 \quad (\text{XVIII.52})$$

Se viceversa consideriamo il caso in cui $R_S \rightarrow 0$, ovvero il caso dell'amplificatore a Source comune otteniamo:

$$\frac{v_d}{v_g} = -\frac{\mu R_D}{R_D + r_d} = -g_m R_D \frac{1}{1 + \frac{R_D}{r_d}} \approx -10 \quad (\text{XVIII.53})$$

Pertanto l'amplificatore a Source comune presenta un guadagno più elevato dell'amplificatore con una resistenza R_S fra Source e elettrodo di riferimento; la diminuzione del guadagno in questo secondo caso si accompagna tuttavia (vedi (52)) a una molto maggiore indipendenza dai parametri del transistor usato e quindi delle loro variazioni con la temperatura. Ricordando quanto detto nel Cap.XV,§3, sappiamo che questo effetto (riduzione del guadagno, aumento della stabilità) è tipico dell'introduzione di una *reazione negativa*. Il caso in esame è di fatto attribuibile a una tale causa: infatti l'aver introdotto la resistenza finita R_S fa sì che la ddp fra Gate e Source, che controlla l'entità del generatore controllato $g_m v_{gs}$ anziché essere v_g , è a essa inferiore e pari a $v_g - i_d R_S$; d'altronde il secondo termine è proporzionale alla ddp di uscita v_d ($-i_d R_S = v_d \frac{R_S}{R_D}$), cioè una parte della tensione di uscita è stata sottratta a quella di ingresso; questo è proprio, per definizione, un esempio di reazione negativa.

8.— Il Fet in alta frequenza: un esame più accurato dell'amplificatore

La descrizione fino a ora fatta del comportamento per piccoli segnali del transistor a effetto di campo si dimostra essere adeguata fin tanto che la frequenza f del segnale v_g (ammesso essere sinusoidale) è nel campo audio ($\leq 20 \text{ kHz}$). Per frequenze più elevate le schematizzazioni adottate risultano non sufficientemente accurate. Si trova che per riprodurre gli andamenti sperimentali osservati è sufficiente aggiungere allo schema equivalente del Fet delle reattanze pure fra gli elettrodi; conforta poi trovare che queste reattanze nient'altro sono che le capacità fra i terminali di Gate, Source e Drain, la cui esistenza era indipendentemente prevedibile. Infatti abbiamo già fatto vedere (Cap.XVII, §4) che in un diodo contropolarizzato con una certa tensione di barriera V_{TOT} è definibile una capacità fra anodo e catodo il cui valore dipende da $(V_{TOT})^{-\frac{1}{2}}$. A causa di ciò nel Fet avremo una capacità fra Gate e Source e una capacità fra Gate e Drain; inoltre va considerata la capacità puramente geometrica fra i due elettrodi Drain e Source. Poiché poi si trattano piccole variazioni delle tensioni fra gli elettrodi, tali capacità si potranno considerare ragionevolmente costanti. Complessivamente il modello per piccoli segnali del Fet, adeguato per descrivere il funzionamento anche a frequenze elevate è quello in Fig.25.

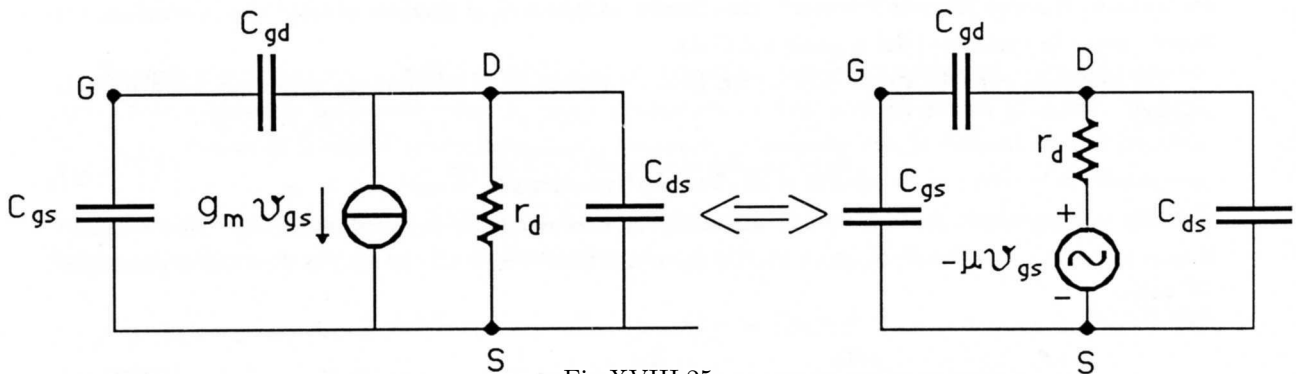


Fig.XVIII.25

Le configurazioni equivalenti (generatore di tensione - generatore di corrente) sono entrambe indicate, principalmente con lo scopo di far notare la corretta topologia dei collegamenti. Quanto agli ordini di grandezza di queste capacità, abbiamo tipicamente:

$$C_{gd} \approx C_{gs} \approx 1 - 10pF \quad C_{ds} \approx 0.1 - 1pF$$

Si vede così che i valori sono assai piccoli; tuttavia, esaminando il caso dell'amplificatore a Source comune, vedremo che esse (principalmente C_{gd}) influenzano notevolmente la tensione di uscita, anche a frequenze non particolarmente elevate.

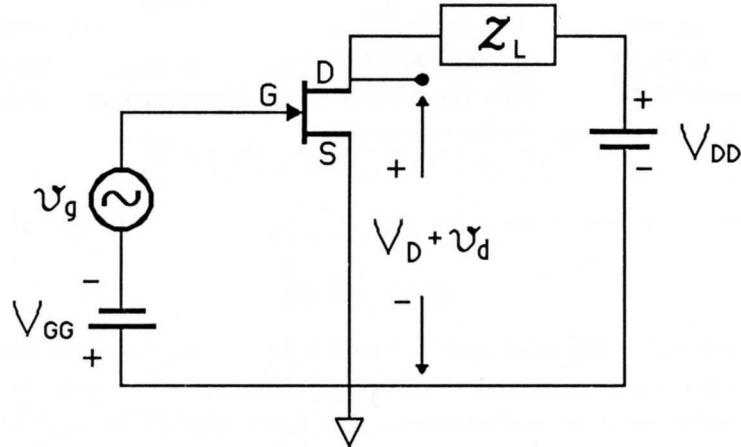


Fig.XVIII.26

Il circuito che vogliamo studiare è disegnato nella Fig.26, dove abbiamo introdotto una impedenza di carico complessa Z_L . Vogliamo innanzitutto calcolare $v_d = v_o$ in funzione di v_g . Poi calcoleremo la impedenza di ingresso (cioè fra Gate e Source) che questa volta a causa di C_{gs} e C_{gd} non sarà più estremamente elevata e infine valuteremo la impedenza di uscita e confronteremo i risultati col modello in bassa frequenza. Il circuito equivalente per piccoli segnali è riportato nella Fig.27.

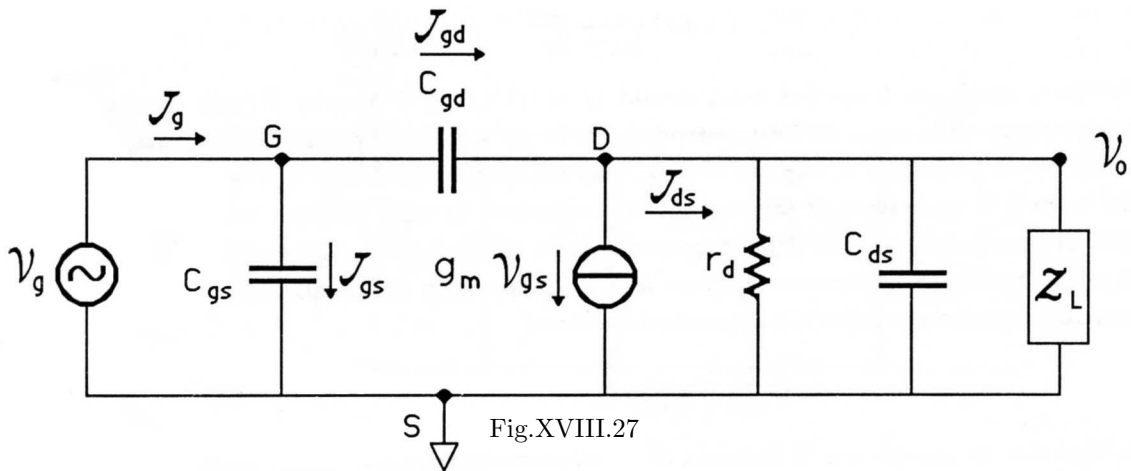


Fig.XVIII.27

Introducendo le ammettenze dei vari rami:

$$Y_{gs} = j\omega C_{gs} \quad Y_{gd} = j\omega C_{gd} \quad Y_d = \frac{1}{r_d} \quad Y_L = \frac{1}{Z_L}$$

possiamo risolvere il nostro problema, vale a dire di esprimere $v_o (= v_d)$ in funzione di $v_g (= v_{gs})$, in base alle seguenti relazioni (anche le tensioni sono ora complesse):

$$J_{ds} = v_o(Y_L + Y_{ds} + Y_d) \tag{XVIII.54}$$

$$\mathcal{J}_{gd} = (\mathcal{V}_g - \mathcal{V}_o)\mathcal{Y}_{gd} \quad (\text{XVIII.55})$$

$$\mathcal{J}_{gs} = \mathcal{V}_g\mathcal{Y}_{gs} \quad (\text{XVIII.56})$$

e alla legge dei nodi applicata in D:

$$0 = \mathcal{J}_{gd} - g_m\mathcal{V}_g - \mathcal{J}_{ds} = (\mathcal{V}_g - \mathcal{V}_o)\mathcal{Y}_{gd} - g_m\mathcal{V}_g - \mathcal{V}_o(\mathcal{Y}_L + \mathcal{Y}_{ds} + \mathcal{Y}_d) \quad (\text{XVIII.57})$$

Da questa si ricava:

$$\mathcal{V}_o = \frac{-\mathcal{V}_g(g_m - \mathcal{Y}_{gd})}{\mathcal{Y}_L + \mathcal{Y}_{ds} + \mathcal{Y}_d + \mathcal{Y}_{gd}} = \mathcal{A}\mathcal{V}_g \quad (\text{XVIII.58})$$

Il guadagno \mathcal{A} è ora un numero complesso e questo rispecchia il fatto di avere esplicitamente tenuto conto delle capacità interelettrodiche. Il guadagno \mathcal{A} si può esprimere come $A_{DC} \cdot \mathcal{F}$ (A_{DC} guadagno in continua, reale) dove \mathcal{F} è un termine complesso:

$$\mathcal{A} = A_{DC} \frac{1 - \frac{\mathcal{Y}_{gd}}{g_m}}{1 + \frac{\mathcal{Y}_{ds} + \mathcal{Y}_{gd}}{\mathcal{Y}_L + \mathcal{Y}_d}} \quad (\text{XVIII.59})$$

ovvero:

$$A_{DC} = \frac{-g_m}{\mathcal{Y}_L + \mathcal{Y}_d} \quad (\text{XVIII.60})$$

$$\mathcal{F} = \frac{1 - \frac{\mathcal{Y}_{gd}}{g_m}}{1 + \frac{\mathcal{Y}_{ds} + \mathcal{Y}_{gd}}{\mathcal{Y}_L + \mathcal{Y}_d}} \quad (\text{XVIII.61})$$

Considerando il caso numerico già esaminato ($g_m = 5.7 \text{ mA/V}$, $r_d = 15 \text{ k}\Omega$, $R_L = 2 \text{ k}\Omega$) e supponendo che $C_{gd} = 2 \text{ pF}$, $C_{ds} = 0.2 \text{ pF}$, si trova che il fattore correttivo \mathcal{F} vale:

$$\mathcal{F} = \frac{1 - \frac{j\omega C_{gd}}{g_m}}{1 + j\omega \frac{(C_{ds} + C_{gd})}{\mathcal{Y}_L + \mathcal{Y}_d}} \approx \frac{1 - j \frac{\omega}{2.9 \cdot 10^9}}{1 + \frac{j\omega}{2.6 \cdot 10^8}}$$

Pertanto, anche per frequenze assai elevate ($f \approx 10^7 \text{ Hz}$), il numero \mathcal{F} resta assai vicino a 1 e la presenza delle capacità interelettrodiche è, in un vastissimo campo di frequenze, inefficace a modificare il guadagno \mathcal{A} rispetto a A_{DC} , che nel caso in questione vale ≈ -10 . Vedremo ora che se però il generatore in ingresso ha una resistenza in serie non trascurabile, la risposta del sistema risente dell'aumento della frequenza a causa dell'impedenza di ingresso finita. L'impedenza di ingresso vista dal generatore \mathcal{V}_g verso massa è infatti data dal parallelo di \mathcal{Z}_{gs} con l'impedenza associata al ramo verso Drain e determinabile come:

$$\frac{\mathcal{V}_g}{\mathcal{J}_{gd}} = \frac{\mathcal{V}_g}{(\mathcal{V}_g - \mathcal{A}\mathcal{V}_g)\mathcal{Y}_{gd}} = \frac{1}{\mathcal{Y}_{gd}} \frac{1}{1 - \mathcal{A}} \quad (\text{XVIII.62})$$

Si vede che, in accordo con il Teorema di Miller studiato nel Cap. I, §8, l'impedenza verso massa risulta ridotta di un fattore circa uguale a \mathcal{A} rispetto a quella verso il nodo di Drain. Ciò comporta che l'impedenza di ingresso verso massa vista dal generatore è quasi tutta determinata dalla capacità C_{gd} moltiplicata per il fattore $1 - \mathcal{A}$, almeno finché $|\mathcal{A}| \gg 1$ (C_{gd} è infatti dello stesso ordine di C_{gs}). Nel caso ora esaminato, di un generatore v_g con resistenza interna nulla, la presenza della impedenza:

$$\mathcal{Z}_i = \frac{1}{j\omega [C_{gs} + (1 - \mathcal{A})C_{gd}]} \quad (\text{XVIII.63})$$

è assolutamente ininfluenza poiché la tensione fra Gate e Source (quella che compare nel generatore controllato $g_m \mathcal{V}_{gs}$) è sempre identica a \mathcal{V}_g . Se però ammettiamo la presenza di una resistenza interna r_g in serie al generatore \mathcal{V}_g , allora

$$\mathcal{V}_{gs} = \mathcal{V}_g \frac{\mathcal{Z}_i}{\mathcal{Z}_i + r_g} \quad (\text{XVIII.64})$$

e si trova pertanto

$$\mathcal{V}_{gs} = \mathcal{V}_g \frac{1}{1 + j\omega r_g [C_{gs} + (1 - \mathcal{A})C_{gd}]} \quad (\text{XVIII.65})$$

Si riconoscerà in questa relazione (vedi Cap.XII,§2) la risposta di un filtro passa basso con $f_L = \frac{1}{2\pi r_g [C_{gs} + (1 - \mathcal{A})C_{gd}]}$ se \mathcal{A} può considerarsi reale. La relazione fra \mathcal{V}_o e \mathcal{V}_g risulta in questo caso così modificata:

$$\mathcal{V}_o = \mathcal{A} \frac{1}{1 + j\omega r_g [C_{gs} + (1 - \mathcal{A})C_{gd}]} \mathcal{V}_g \quad (\text{XVIII.66})$$

Se supponiamo che $r_g = 10 \text{ k}\Omega$ e per tutti gli altri elementi in gioco assumiamo i valori dell'esempio precedente troviamo:

$$f_H \approx 6.6 \cdot 10^5 \text{ Hz}$$

cioè assai inferiore alle frequenze per le quali il fattore \mathcal{F} dato dalla (61) si discosta sensibilmente da 1; questo risultato pertanto giustifica l'aver considerato \mathcal{A} reale e pari a A_{DC} nelle (63), (65) e (66).

Si vede così che la presenza delle capacità interelettrodiche ha come principale conseguenza l'introduzione di un filtro passa basso in ingresso, la cui frequenza di taglio superiore è determinata principalmente dalla resistenza in serie al generatore di segnale e dalla capacità Miller fra Gate e massa ($\approx |\mathcal{A}| * C_{gd}$).

Calcoliamoci ora la impedenza di uscita (cioè l'impedenza di Thévenin rispetto ai terminali di uscita) dell'amplificatore: per far ciò, ricorrendo proprio alla definizione, applichiamo un generatore di ddp \mathcal{E} fra Drain e Source e cortocircuitiamo il generatore di segnale \mathcal{V}_g : il rapporto fra \mathcal{E} e la corrente \mathcal{J} erogata dal generatore dà proprio \mathcal{Z}_o , impedenza di uscita fra Drain e Source. Il circuito da studiare è quello riportato in Fig.28.

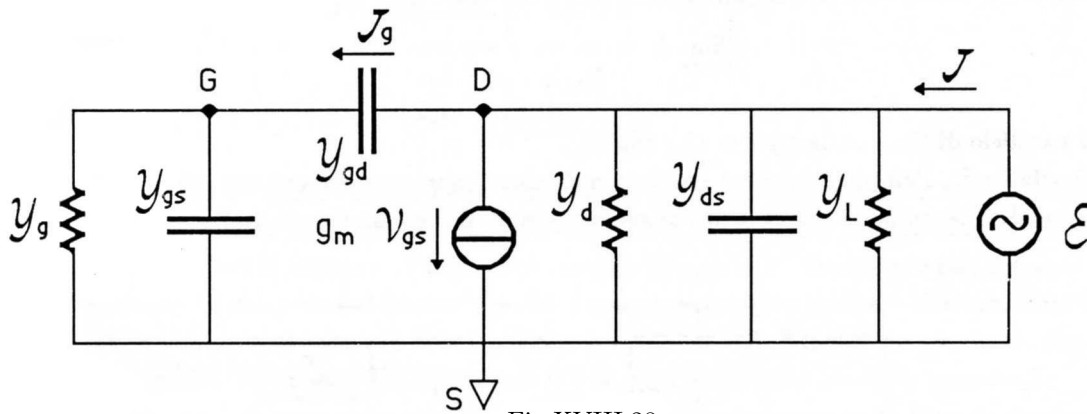


Fig.XVIII.28

Applicando la legge dei nodi in D

$$\mathcal{J} = \mathcal{E}(\mathcal{Y}_L + \mathcal{Y}_{ds} + \mathcal{Y}_d) + g_m \mathcal{V}_{gs} + \mathcal{J}_g \quad (\text{XVIII.67})$$

Tenendo presente che:

$$\mathcal{V}_{gs} = \mathcal{J}_g \frac{1}{\mathcal{Y}_g + \mathcal{Y}_{gs}} \quad (\text{XVIII.68})$$

$$\mathcal{J}_g = \frac{\mathcal{E}}{\frac{1}{\mathcal{Y}_{gd}} + \frac{1}{\mathcal{Y}_g + \mathcal{Y}_{gs}}} \quad (\text{XVIII.69})$$

si ha, sostituendo queste relazioni nella (67):

$$\mathcal{J} = \mathcal{E} \left[\mathcal{Y}_d + \mathcal{Y}_{ds} + \mathcal{Y}_L + \frac{1}{\frac{1}{\mathcal{Y}_{gd}} + \frac{1}{\mathcal{Y}_g + \mathcal{Y}_{gs}}} \left(1 + \frac{g_m}{\mathcal{Y}_g + \mathcal{Y}_{gs}} \right) \right] \quad (\text{XVIII.70})$$

e pertanto:

$$\mathcal{Z}_o = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{J}} = \frac{1}{\mathcal{Y}_d + \mathcal{Y}_{ds} + \mathcal{Y}_L + \frac{1}{\frac{1}{\mathcal{Y}_{gd}} + \frac{1}{\mathcal{Y}_g + \mathcal{Y}_{gs}}} \left(1 + \frac{g_m}{\mathcal{Y}_g + \mathcal{Y}_{gs}} \right)} \quad (\text{XVIII.71})$$

Tale relazione può anche mettersi nella forma:

$$\mathcal{Z}_o = \frac{1}{(\mathcal{Y}_d + \mathcal{Y}_L) \left(1 + \frac{\mathcal{Y}_{ds}}{\mathcal{Y}_d + \mathcal{Y}_L} \right) + \mathcal{Y}_g \frac{1}{\frac{\mathcal{Y}_g}{\mathcal{Y}_{gd}} + \frac{1}{1 + \frac{\mathcal{Y}_{gs}}{\mathcal{Y}_g}}} \left(1 + \frac{g_m}{\mathcal{Y}_g (1 + \frac{\mathcal{Y}_{gs}}{\mathcal{Y}_g})} \right)} \quad (\text{XVIII.72})$$

Tenendo conto che

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{Y}_{ds}}{\mathcal{Y}_d + \mathcal{Y}_L} &= j\omega \frac{C_{ds}}{(\mathcal{Y}_d + \mathcal{Y}_L)} \approx \frac{j\omega}{2.8 \cdot 10^9} \\ \frac{\mathcal{Y}_{gs}}{\mathcal{Y}_g} &= j\omega C_{gs} r_g \approx \frac{j\omega}{5 \cdot 10^7} \\ \frac{\mathcal{Y}_{gd}}{\mathcal{Y}_g} &\approx \frac{j\omega}{5 \cdot 10^7} \end{aligned}$$

si vede che per frequenze $f < 10^7$ Hz:

$$\mathcal{Z}_o \approx \mathcal{Z}_{o,DC} = \frac{1}{\mathcal{Y}_d + \mathcal{Y}_L} \quad (\text{XVIII.73})$$

vale a dire l'impedenza \mathcal{Z}_o è determinata dal parallelo di R_L con r_d (nel nostro caso $\mathcal{Z}_{o,DC} \approx 1.8 \text{ k}\Omega$). All'aumentare della frequenza, \mathcal{Z}_o diminuisce fino a tendere a zero col seguente andamento:

$$\lim_{f \rightarrow \infty} \mathcal{Z}_o = \frac{1}{\mathcal{Y}_{ds} + \frac{1}{\frac{1}{\mathcal{Y}_{gd}} + \frac{1}{\mathcal{Y}_{gs}}}} \quad (\text{XVIII.74})$$

cioè al parallelo di C_{ds} con la serie di C_{gd} con C_{gs} .

Concludendo, l'amplificatore ora studiato può essere rappresentato col suo schema equivalente in termine di Thévenin, con riferimento ai suoi terminali di ingresso G e di uscita D (Fig.29):

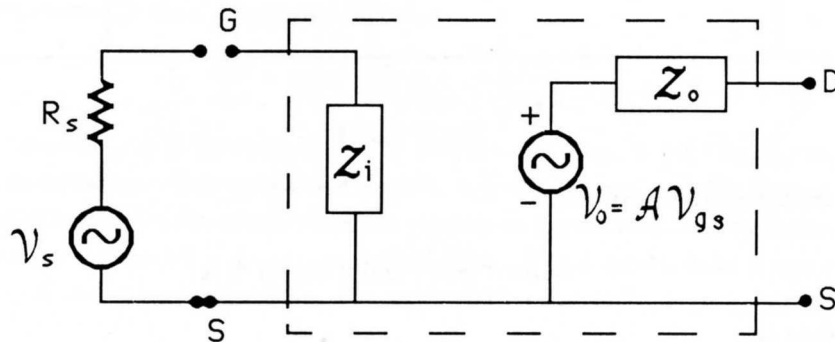


Fig.XVIII.29

dove \mathcal{A} è definito dalla (58), Z_i dalla (63) e Z_o dalla (72). L'equivalenza di questo circuito con l'amplificatore a Fet a Source comune è rigorosa solo se i segnali sono sufficientemente piccoli; si ricordi comunque che questa ultima equivalenza non aggiunge nulla allo schema circuitale equivalente introdotto nel §5 e perfezionato all'inizio di questo paragrafo; infatti si tratta solamente di una schematizzazione in termini di equivalente di Thévenin della rete lineare precedentemente studiata.

9.— Un'altra applicazione del Fet: un generatore di corrente

Ricordiamo che un generatore ideale di corrente è un dispositivo in grado di erogare una corrente costante nel ramo fra i suoi terminali, indipendentemente dal valore e dal tipo di impedenza inserita. In pratica si riescono a realizzare generatori (quasi) ideali di corrente, almeno fintanto che la ddp fra i due terminali si mantiene entro un definito campo di valori. Vediamo un esempio di generatore di corrente (Fig.30).

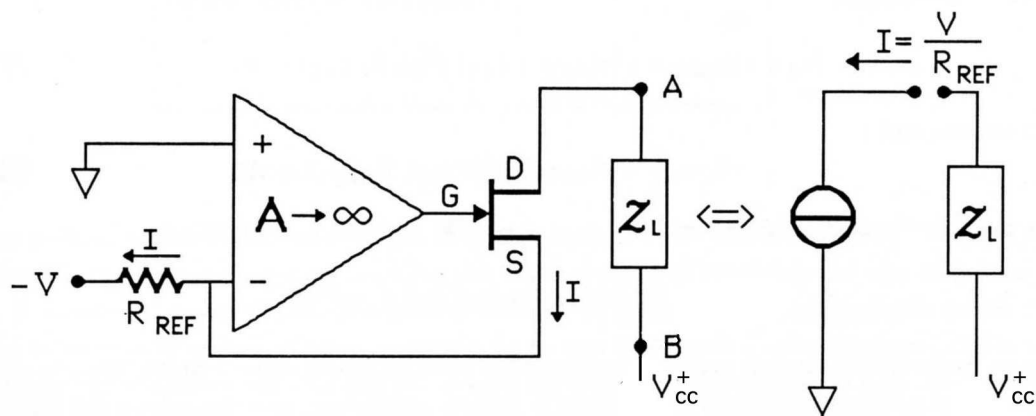


Fig.XVIII.30

Sulla falsariga del solito ragionamento semplificato (Cap. XV, §3), poiché la ddp fra ingresso - e ingresso + deve essere nulla, avremo che sulla resistenza R_{REF} dovrà passare una corrente I tale da mantenere a 0 Volt la tensione all'ingresso -, ovvero $IR_{REF} = V$. D'altronde tale corrente dovrà essere la medesima che esce dal Source del Fet e conseguentemente la stessa che entra nel Drain, a meno della piccolissima corrente di saturazione inversa del Gate. Il sistema pertanto, rispetto a qualunque impedenza collegata fra i terminali A e B, è un generatore ideale di corrente I .

Se vogliamo convincerci ancor più direttamente che il sistema funziona davvero da generatore di corrente dobbiamo verificare che la resistenza di uscita del generatore è infinita; pertanto, sostituito il nostro sistema con la sua rete lineare equivalente e applicato un generatore di ddp fra i due terminali di uscita del generatore (A e B) dopo aver cortocircuitato i generatori indipendenti dalla rete lineare, dovremo ottenere un valore nullo per la corrente erogata dal generatore. Procediamo pertanto come detto sopra: la rete lineare equivalente al nostro circuito è riportata nella Fig.31. Le ddp e le correnti sono funzioni del tempo; ammettiamo però che esse varino abbastanza lentamente così da poter ignorare nella trattazione che segue le parti reattive delle impedenze.

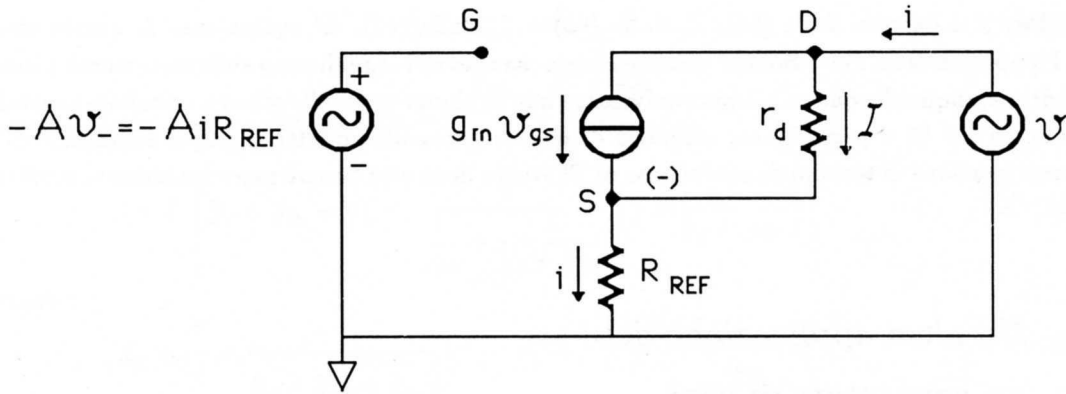


Fig.XVIII.31

Essendo:

$$v_{gs} = v_G - v_S = -A i R_{REF} - i R_{REF} = -i R_{REF} (1 + A) \quad (\text{XVIII.75})$$

la legge dei nodi applicata in D dà:

$$I = i - g_m v_{gs} = i [1 + g_m R_{REF} (1 + A)] \quad (\text{XVIII.76})$$

e conseguentemente

$$v = I r_d + i R_{REF} = i \{ R_{REF} + r_d [1 + g_m R_{REF} (1 + A)] \} \quad (\text{XVIII.77})$$

Otteniamo così :

$$R_o = \frac{v}{i} = R_{REF} + r_d [1 + g_m R_{REF} (1 + A)] \quad (\text{XVIII.78})$$

che per valori realistici ($R_{REF} = 1 \text{ k}\Omega$, $g_m = 5 \text{ mA/V}$, $A = 10^6$, $r_d = 50 \text{ k}\Omega$) dà

$$R_o \approx r_d g_m R_{REF} A \approx 2.5 \cdot 10^{11} \Omega$$

che in molte situazioni può proprio considerarsi a tutti gli effetti come infinita. Quanto alle limitazioni che si possono incontrare nell'utilizzo di questo generatore, esse dipendono dal fatto che se il modulo dell'impedenza su cui è chiuso il generatore è troppo elevato, la ddp fra Drain e Source (cioè massa) diventa così elevata che il Fet può finire in breakdown; viceversa per impedenze Z_L troppo piccole la ddp V_{DS} risulta così limitata che si finisce in una zona delle caratteristiche del transistore a effetto di campo dove tutta l'analisi precedente non è più applicabile, ovvero nella zona dove il Fet più che come un pentodo si comporta come una resistenza variabile.

Infine, sempre nell'ipotesi di mantenere la ddp in uscita entro valori consentiti, si può anche ottenere una regolazione della corrente del generatore, variando R_{REF} . Otteniamo così un generatore di corrente pressoché ideale, con la possibilità di variare anche il valore della corrente erogata.

La stabilità e precisione del valore di I dipendono, supponendo che il guadagno A sia così elevato da poter considerare una ottima schematizzazione quella di ammettere $v_- = 0$, dalla stabilità e precisione di R_{REF} e di V .

Infine, supponendo di variare V , mantenendo R_{REF} costante, abbiamo in uscita una corrente $I(t) = \frac{V(t)}{R_{REF}}$ variabile nel tempo, erogata da un generatore che presenta impedenza di uscita infinita; tutto questo nell'ipotesi che le variazioni di $V(t)$ in funzione del tempo siano abbastanza lente rispetto all'inverso delle frequenze per cui la corretta descrizione del Fet può farsi solo introducendo le capacità interelettrodiche e non secondo il semplice modello adottato nella Fig.31.

10.— Altri tipi di transistori a effetto di campo

Nelle attuali tecnologie costruttive dei circuiti integrati rivestono un ruolo particolarmente importante alcuni tipi di transistori a effetto di campo, i cosiddetti Mosfet (Metal oxide semiconductor Fet). Essi si distinguono in “enhancement” e in “depletion” Mosfet. In entrambi i casi essi sono caratterizzati dal fatto che la conduttività di una porzione di semiconduttore compresa fra gli elettrodi di Source e Drain è controllata, come nel Fet precedentemente descritto, dalla presenza di un campo elettrico. Ciò che li distingue dal Fet è il fatto che Gate e canale non costituiscono più una giunzione contropolarizzata: il Gate è questa volta un elettrodo conduttore separato dal canale da un sottile ($\approx .1\mu m$) spessore di biossido di Silicio (S_iO_2) avente ottime proprietà isolanti.

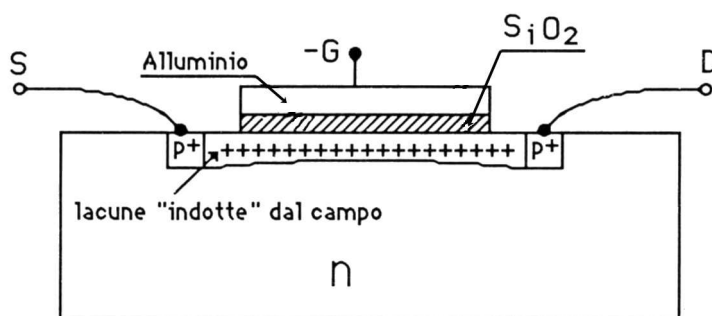


Fig.XVIII.32

Senza entrare minimamente in dettagli, ci limitiamo a dire che in un Mosfet canale-p a enhancement (Fig.32) la polarizzazione negativa del Gate rispetto al materiale del canale induce la presenza di lacune nel tratto di canale prossimo al Gate, in quantità molto maggiori di quello che si avrebbe in assenza di polarizzazione. Il fenomeno è assai complesso e completamente differente al meccanismo caratteristico del JFet che noi abbiamo studiato. In particolare si noti che il canale p si forma *dinamicamente* partendo da un preesistente materiale n e che i portatori che assicurano la conduzione sono dei minoritari provenienti dalle zone p^+ vicine (Source e Drain sono distanti solo pochi μm). Simile a quello del JFet è viceversa il meccanismo che regola il funzionamento del Mosfet a “depletion”; in questo caso un canale è effettivamente presente del tipo “giusto” di drogaggio (n o p) e il campo elettrico applicato al Gate (isolato da uno strato di S_iO_2) svuota più o meno il canale dei portatori. Le caratteristiche e l'utilizzo dei Mosfet sono estremamente simili a quelle dei Fet; la principale differenza è che la resistenza di ingresso fra Gate e Source (e Drain) è ancora più elevata che nel JFet a causa dello strato isolante di biossido di Silicio e può arrivare fino a $10^{14} \div 10^{15}\Omega$. Riportiamo qui sotto i valori tipici dei parametri del circuito equivalente per piccoli segnali (esattamente identico a quello del Fet) per i Mosfet:

$$g_m \approx 0.1 \div 20 \text{ mA/V} \quad r_d \approx 1 \div 50 \text{ k}\Omega$$

$$C_{ds} \approx 0.1 \div 1 \text{ pF} \quad C_{gs}, C_{gd} \approx 1 \div 10 \text{ pF}$$

$$r_{gs} > 10^{10}\Omega \quad r_{gd} > 10^{14}\Omega$$

11.— Misura delle caratteristiche a Source comune

Il circuito di Fig.33 si presta a misurare le caratteristiche a Source comune di un transistor a effetto di campo (nell'esempio canale-n).

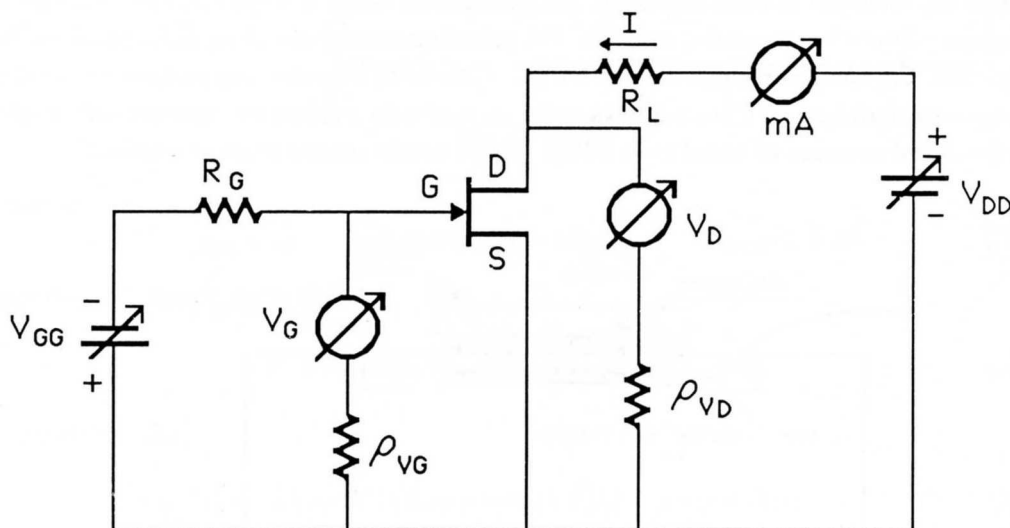


Fig.XVIII.33

Mediante V_{GG} si stabilisce la tensione V_{GS} fra Gate e Source che viene misurata dal voltmetro V_G . La resistenza R_G serve solo a proteggere il diodo Gate-Source qualora si voglia provare ad applicare una tensione leggermente positiva fra Gate e Source e inavvertitamente si superi il valore V_B . Stabilita la ddp V_{GS} , variando V_{DD} si percorre la curva $I_D = I_D(V_{GS}, V_{DS})$; V_{DS} è misurata da un voltmetro che possibilmente abbia una ρ_{VD} la più elevata possibile così che I approssimi al meglio I_D . Si deve aver cura di limitare la dissipazione sul Fet ($= I_D \cdot V_{DS}$) a quanto prescritto dal costruttore; anzi è opportuno mantenersi sufficientemente di sotto di tale valore altrimenti accade che una data curva a $V_{GS} = cost$ non è caratterizzata da una sola temperatura, bensì corrisponde a temperature crescenti all'aumentare di V_{DS} ; in questo modo cambiano anche i parametri r_d e g_m , cioè non sono più univocamente definiti e le curve risultano distorte. Supponendo di aver sufficientemente limitato l'escursione termica del transistor, tenendo bassa la dissipazione su esso, è possibile con il metodo descritto nel §5, estrarre dalle curve g_m e r_d e quindi μ per vari punti di lavoro. Se si vuole misurare la corrente fra Gate e canale (cioè la debole corrente di saturazione inversa, il metodo ora descritto non è adatto e conviene piuttosto usare uno dei circuiti descritti nel caso dei diodi, usando il Fet come un diodo (fra Gate e Source o Gate e Drain).

Il problema sopradetto della non unicità della temperatura fra le varie curve e all'interno di una singola curva, è in pratica evitato usando un caratteristigrafo, uno strumento che spazzola vari valori di V_{GS} e per ognuno di questi invia una tensione fra Drain e Source che cresce linearmente col tempo: lo strumento presenta sull'asse x di uno schermo oscillografico tale ddp e sull'asse y un segnale proporzionale a I_D . Poiché questo spazzolamento delle curve può essere fatto in tempo assai breve rispetto a quelli caratteristici del riscaldamento e raffreddamento del transistor, le curve

presentate sullo schermo corrispondono alla stessa temperatura media e non soffrono di deformazioni.

NOTA BIBLIOGRAFICA

Il Cap.10 di **MI 72** presenta l'argomento in maniera soddisfacente, principalmente per quanto riguarda le caratteristiche del Fet come elemento circuitale. La discussione sulla fisica del dispositivo è abbastanza sintetica. La fisica del Fet è invece trattata estesamente su:

Sze: "Fisica dei dispositivi a semiconduttore"

Tamburini (1973) (Cap.7)

Sevin: "Field Effect Transistor"

Mc Graw-Hill (1965) (Cap.1)

L'articolo originale (e pionieristico) di

Shockley: "A unipolar Field Effect transistor"

P.I.R.E. (1952), **1365**

è assai utile per una comprensione dei fatti fisici fondamentali alla base del funzionamento del Fet, anche se non tutte le conclusioni sono applicabili ai Fet oggi in commercio, poiché essi sono realizzati in geometria profondamente diversa da quella esaminata da Shockley.

XIX

MISURA DI CAMPI MAGNETICI TRAMITE UNA SONDA A EFFETTO HALL

1.- La sonda a effetto Hall

Consideriamo un nastro conduttore omogeneo, non ferromagnetico, di spessore t , larghezza w e pensiamolo per il momento di dimensione infinita lungo la direzione (x) secondo cui scorre la corrente I (Fig.1).

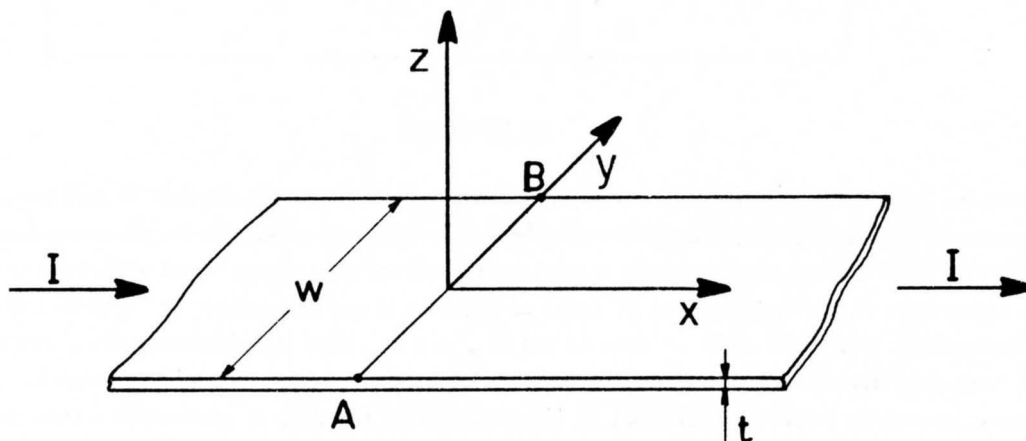


Fig.XIX.1

In assenza di campi magnetici esterni e altri campi elettrici che non siano quelli responsabili della corrente I , l'omogeneità del nastro assicura che sezioni del conduttore parallele al piano zy siano superfici equipotenziali e pertanto punti come A e B sono allo stesso potenziale; la corrente I sarà data dal flusso del vettore $\vec{j} = j$ *vers* \vec{x} attraverso le superfici di area tw , vale a dire $I = jtw$. Se q è la carica del singolo portatore e N il numero dei portatori per unità di volume (non necessariamente si tratterà di elettroni, saranno per esempio lacune se si tratta di un semiconduttore p) e v la loro velocità di deriva avremo :

$$\vec{j} = qN\vec{v} \quad (\text{XIX.1})$$

e pertanto

$$I = qNvtw \quad (\text{XIX.2})$$

Supponiamo ora di applicare un campo di induzione magnetica $\vec{B} = B \text{ vers } \vec{z}$, vale a dire un campo costante e diretto secondo l'asse z e di farlo in maniera brusca, all'istante $t = 0$. I portatori di carica saranno sottoposti alla forza di Lorentz

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \tag{XIX.3}$$

che all'istante iniziale, essendo $\vec{v} = v \text{ vers } \vec{x}$, dà luogo ad una forza diretta secondo l'asse y . Il verso è quello dell'asse y negativo, indipendentemente dal segno della carica dei portatori; infatti se q è positivo, \vec{v} ha il segno di *vers* \vec{x} , mentre se q è negativo \vec{v} ha segno opposto. La presenza di un campo di induzione magnetica $\vec{B} = B \text{ vers } \vec{z}$ ha come conseguenza lo spostamento dei portatori di carica verso la parete destra (volgendo le spalle alla "sorgente" della corrente) del nastro. Il processo continua fino a quando la carica in eccesso addensatasi su questa parete crea all'interno del conduttore un campo elettrico diretto come l'asse y che, sommato al campo della forza di Lorentz, dà risultante nulla lungo l'asse y ; quando si è raggiunta questa condizione di regime (in tempi brevissimi, dell'ordine del riassetto della carica nei conduttori $\approx 10^{-18}s$) le linee di \vec{j} che si sono temporaneamente distorte, tornano a essere identiche a come erano precedentemente all'istaurazione del campo magnetico. Ciò oltre a corrispondere a un fatto sperimentale, è anche soddisfacente dal punto di vista intuitivo: tuttavia la giustificazione rigorosa che questa è la effettiva situazione di regime è qui omessa. Notiamo che, mentre \vec{j} è, nelle due condizioni di regime, identico, la distribuzione del potenziale elettrico nel nastro è cambiata e le superfici equipotenziali non sono più piani paralleli al piano $z y$; il campo elettrico provocato dall'alterazione della distribuzione di carica dovuta alla forza di Lorentz vale (*campo di Hall*):

$$\vec{E}_H = -\vec{v} \wedge \vec{B} = -\frac{1}{qN} \vec{j} \wedge \vec{B} = \frac{IB}{qNtw} \text{vers } \vec{y} \tag{XIX.4}$$

che, avendo assunto $\vec{j} = j \text{ vers } \vec{x}$ anche in presenza di \vec{B} , è un vettore costante diretto come l'asse y . Essendo tale vettore costante, esso dà luogo a una ddp (*ddp di Hall*) fra due punti come A e B in Fig.1 pari a

$$V_H = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}_H \cdot d\vec{y} = \frac{IB}{qNt} \tag{XIX.5}$$

L'insorgere di questa ddp costituisce proprio il cosiddetto *effetto Hall* dal nome del suo scopritore. Le linee equipotenziali formeranno quindi un angolo θ con la direzione dell'asse y . Guardando il nastro dall'alto, avremo la situazione riprodotta in Fig.2

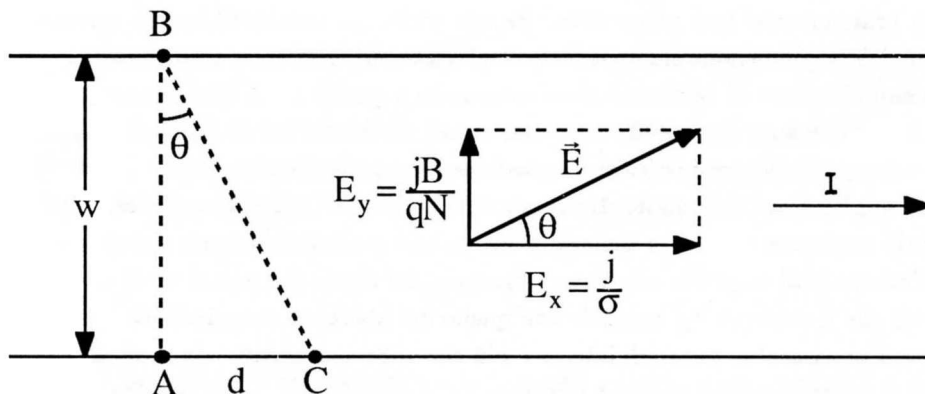


Fig.XIX.2

L'angolo θ si può ricavare direttamente dalla direzione del campo elettrico totale

$$\vec{E} = \rho j \text{ vers } \vec{x} + \frac{jB}{qN} \text{ vers } \vec{y} \quad (\text{XIX.6})$$

Si ottiene allora

$$\tan \theta = \frac{E_y}{E_x} = \frac{B}{qN\rho} \quad (\text{XIX.7})$$

dove ρ è la resistività del conduttore, ovvero $\frac{1}{\sigma}$.

Alternativamente $\tan \theta$ si può calcolare dall'andamento delle superfici equipotenziali, osservando che $\tan \theta = \frac{d}{w}$. Il rapporto $\frac{d}{w}$ si ricava imponendo che il lavoro fatto dal campo elettrico da B a C passando da A pari a $(V_B - V_A) + (V_A - V_C)$, sia nullo. Per far ciò osserviamo che $(V_A - V_C)$ è dovuta alla caduta ohmica della corrente I

$$V_A - V_C = I \frac{\rho d}{tw} \quad (\text{XIX.8})$$

mentre

$$V_B - V_A = -V_H = -\frac{IB}{qNt} \quad (\text{XIX.9})$$

Pertanto

$$-\frac{IB}{qNt} + I \frac{\rho d}{tw} = 0 \quad (\text{XIX.10})$$

da cui segue

$$\frac{d}{w} = \tan \theta = \frac{B}{qN\rho} \quad (\text{XIX.11})$$

Tornando alla ddp che si presenta fra le due facce laterali, ovvero la tensione di Hall data dalla (5), si nota che a parità di \vec{B} , I e t essa è tanto più elevata quanto più piccolo è qN . Il motivo di ciò va ricercato nel fatto che, fissata la geometria e la corrente, la velocità dei portatori è tanto più elevata (e conseguentemente la forza di Lorentz e quindi il campo di Hall) quanto minore è la densità dei portatori, a parità di q . Facciamo un esempio numerico: consideriamo prima una lastrina di rame di spessore 10^{-4} m in cui passi una corrente di 100 mA, in presenza di un campo di induzione magnetica $B = 1$ T; dai dati già introdotti nel Cap. I, §1 abbiamo:

$$(V_H)_{Cu} = 3.7 \cdot 10^{-8} V$$

ovvero una ddp praticamente non misurabile. Se ora viceversa consideriamo un semiconduttore drogato n, in cui cioè la conduzione sia assicurata dagli elettroni, abbiamo, ammettendo drogaggi di $10^{-7} - 10^{-8}$ donatori/atomo di semiconduttore intrinseco, a parità degli altri parametri, delle ddp dell'ordine del Volt e pertanto misurabili anche per valori assai inferiori di \vec{B} . Di fatto i dispositivi a effetto Hall sono quasi sempre costituiti da piastrine di semiconduttore.

Quanto alle applicazioni dell'effetto Hall una delle principali consiste nella misura di campi magnetici, proprio mediante la misura della ddp V_H in una piastrina di semiconduttore (*sonda di Hall*). Inoltre l'effetto Hall si presta alla determinazione del segno dei portatori di carica: infatti dalla (5) si evince che il segno di V_H coincide con quello dei portatori maggioritari.

Veniamo ora a precisare un punto di interesse più che altro speculativo, riguardo alla situazione che si crea nella sbarretta quando si voglia misurare V_H o addirittura, come talvolta si fa, si voglia sfruttare l'effetto per fare un generatore di fem V_H . Rispetto al caso precedentemente descritto in cui non c'era collegamento fra due superfici laterali, ora dobbiamo considerare la presenza fra di esse di una resistenza R dovuta al collegamento esterno (per esempio la resistenza interna del

voltmetro). Di fatto una sonda di Hall reale è costituita (vedi Fig.3) da una lastrina semiconduttrice avente larghezza di qualche *mm*, spessore di almeno un ordine di grandezza inferiore, dotata di due contatti ohmici assai estesi per permettere l'invio e la raccolta della corrente di controllo *I* e di altri due contatti ohmici sulle pareti laterali, assai più limitati come superficie e il più possibile simmetrici.

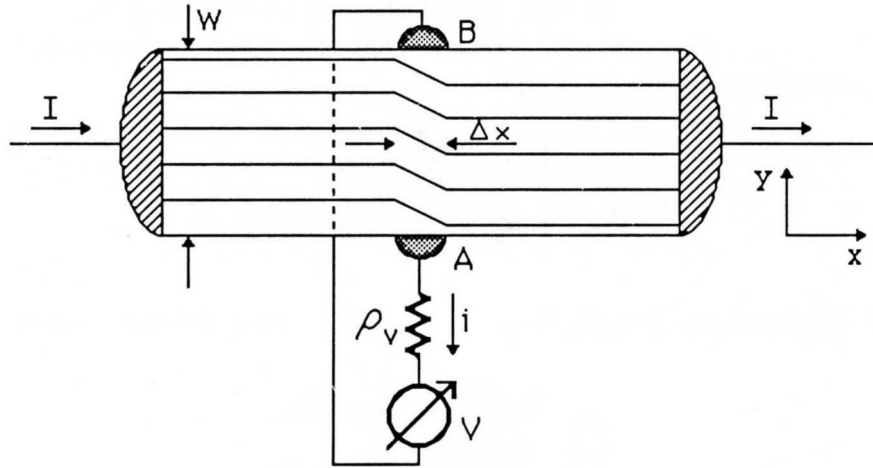


Fig.XIX.3

E' fra questi due contatti A e B che si collega lo strumento di misura per determinare l'entità della tensione di Hall, V_H . In figura sono anche disegnati approssimativamente i tubi di flusso del vettore \vec{j} nell'ipotesi della presenza di un campo di induzione magnetica \vec{B} ortogonale alla sonda (cioè uscente dal piano della pagina). Mentre lontano dai contatti A e B le linee di \vec{j} procedono parallele alla direzione *x* a causa della presenza di una distribuzione di carica sulle pareti laterali che crea il campo elettrico che annulla l'effetto della forza di Lorentz, in corrispondenza dei contatti A e B le linee di \vec{j} risultano distorte poiché i contatti ohmici in A e B consentono il passaggio di portatori di carica nel circuito esterno (il misuratore, che è supposto lontano dall'influenza del campo magnetico \vec{B}) e sulle pareti prossime a A e B si ha un minor accumulo di carica e quindi il campo elettrico possiede una ridotta componente trasversale*. Pertanto supponendo che la situazione all'interno della sonda sia quella riportata in Fig.3, consideriamo uno dei tubi di flusso in figura: all'interno del tratto Δx , come d'altronde in ogni porzione del conduttore, avremo la seguente situazione di forze sul portatore di carica (supposto positivo e con carica *q*) :

$$0 = q\vec{E}_e + q\vec{v} \wedge \vec{B} + q\vec{E}_d \quad (\text{XIX.12})$$

Tale condizione corrisponde all'annullarsi della risultante delle forze agenti sul portatore: \vec{E}_e rappresenta il campo elettrostatico, $q\vec{E}_d$ è la forza dissipativa che i portatori incontrano durante il loro moto e che supponiamo al solito viscosa, in accordo con la legge di Ohm:

$$\vec{E}_d = -\frac{\vec{v}}{\mu} = -\rho\vec{j} \quad (\text{XIX.13})$$

* nella Fig.3 la brusca transizione fra un andamento e l'altro delle linee di \vec{j} e il fatto che esso avvenga per lo stesso valore di *x*, indipendentemente dalla coordinata *y*, sono ovviamente delle approssimazioni, tanto più grossolane quanto più grande è la distanza *w* fra i due contatti A e B rispetto alla dimensione Δx di essi.

dove μ rappresenta la mobilità e ρ la resistività del materiale. Conseguentemente la (12) può anche scriversi :

$$\vec{E}_e + \frac{\vec{j} \wedge \vec{B}}{qN} - \rho \vec{j} = 0 \quad (\text{XIX.14})$$

La soluzione autoconsistente per la corrente non è proprio banale a trovarsi, non fosse altro perché questa volta la forza di Lorentz non è più diretta solamente lungo l'asse y ; infatti v ha anche una componente lungo l'asse y negativo che provoca una forza che si oppone al moto delle cariche nella direzione x . Scritta in componenti, la (14) diventa :

$$\begin{cases} \rho j_x = \frac{j_y B}{qN} + E_{ex} \\ \rho j_y = -\frac{j_x B}{qN} + E_{ey} \end{cases} \quad (\text{XIX.15})$$

Ponendo $\xi = \frac{B}{q\rho N}$ dalle (15) si ricava:

$$\begin{cases} j_x \rho(1 + \xi^2) = \xi E_{ey} + E_{ex} \\ j_y \rho(1 + \xi^2) = -\xi E_{ex} + E_{ey} \end{cases} \quad (\text{XIX.16})$$

che può anche mettersi nella forma :

$$\vec{j} = \hat{\sigma} \vec{E}$$

dove $\hat{\sigma}$ è il tensore :

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{\rho(1 + \xi^2)} \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ -\xi & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{XIX.17})$$

Non entreremo in ulteriori dettagli che porterebbero troppo lontano: sia sufficiente aver fatto vedere che nonostante l'omogeneità del mezzo, la conducibilità è descrivibile come un tensore a causa dell'anisotropia introdotta da \vec{B} .

Osserviamo che nel caso ora esaminato in cui sia inserito uno strumento di misura con resistenza di ingresso finita, supponendo di mantenere costante la corrente (ovvero il flusso di j_x attraverso una superficie sufficientemente lontana dai contatti A e B) il percorso effettivo della corrente è aumentato e conseguentemente è aumentata la resistenza complessiva incontrata da I ; all'aumento di tale resistenza contribuisce oltre l'effetto puramente geometrico della distorsione delle linee di \vec{j} , anche la presenza del termine $(1 + \xi^2)$, riconducibile alla forza controlettromotrice provocata dall'interazione con il campo \vec{B} della componente del vettore densità di corrente lungo y .

Una domanda che è ragionevole porsi è la seguente : è possibile schematizzare i due terminali A e B come un generatore equivalente di Thévenin e se sì, quale è il valore della resistenza interna di tale generatore ?

La risposta alla prima parte della domanda è solo parzialmente affermativa, nel senso che anche sperimentalmente si trova che non è possibile definire una resistenza interna R_{Th} rigorosamente costante, ma che essa piuttosto dipende dalla corrente i erogata sul circuito esterno: tuttavia, almeno finché la resistenza esterna ρ_v è dell'ordine o più grande di R_{Th} si verifica che l'approssimazione di considerare R_{Th} e \mathcal{E}_{Th} costanti è completamente soddisfacente. Possiamo anche dare una valutazione molto grossolana della resistenza R_{Th} ricorrendo alla solita definizione operativa:

$$R_{Th} = \frac{\mathcal{E}_{Th}}{i_{cc}} \quad (\text{XIX.18})$$

dove i_{cc} rappresenta la corrente di cortocircuito, cioè con $\rho_v = 0$. Se ρ_v è uguale a zero, ciò significa che i terminali A e B sono equipotenziali e pertanto nell'ambito della solita approssimazione un po' grossolana corrispondente alla (12), (14), (15) e (16) (e quindi al disegno della sonda riportato nella Fig.3) possiamo dire che $E_{ey} = 0$; conseguentemente dalle (16) si ricava:

$$j_{y_{cc}} = -j_x \xi = -j_x \frac{B}{qN\rho} \quad (\text{XIX.19})$$

Essendo t lo spessore della sonda avremo (vedi Fig.3)

$$i_{cc} = -j_{y_{cc}} t \Delta x = j_x \frac{B}{qN\rho} t \Delta x \approx \frac{I}{w} \Delta x \frac{B}{qN\rho} \quad (\text{XIX.20})$$

dove nell'ultimo passaggio si è ricorso al fatto che $I \approx j_x t w$. Tenendo presente la (5) si ha

$$\mathcal{E}_{Th} = \frac{IB}{qNt} \quad (\text{XIX.21})$$

e quindi

$$R_{Th} \approx \frac{\rho w}{t \Delta x} \quad (\text{XIX.22})$$

ovvero la resistenza della striscia di conduttore lunga w e di sezione $t \cdot \Delta x$. Questo risultato, soddisfacente dal punto di vista intuitivo, corrisponde assai bene a quello che si osserva sperimentalmente. Se la sonda viene adoperata per la misura di campi magnetici e non come generatore, allora è facile ricorrere a strumenti con resistenza di ingresso ρ_v sufficientemente elevata in modo da poter considerare la sonda come un generatore ideale di fem pari a \mathcal{E}_{Th} , senza curarsi dei problemi associati a R_{Th} e soprattutto a una sua non perfetta indipendenza dalla corrente erogata.

2.— Taratura di una sonda di Hall

La tensione di offset

Nella nostra schematizzazione abbiamo supposto che i terminali di misura (A e B) siano disposti simmetricamente, in modo cioè che la ddp presente fra essi sia nulla qualora sia nulla la componente di \vec{B} ortogonale al piano della sonda (in seguito indicata con B_z). In pratica invece, disponendo di una sonda di Hall, la dipendenza della tensione V_u fra i terminali da B_z , è del tipo:

$$V_u = kB_z + V_{off} \quad (\text{XIX.23})$$

dove k , con buona approssimazione, è una costante (a parità di temperatura e di I) e V_{off} , detta *tensione di offset*, misura la ddp presente ai terminali per $B_z = 0$.

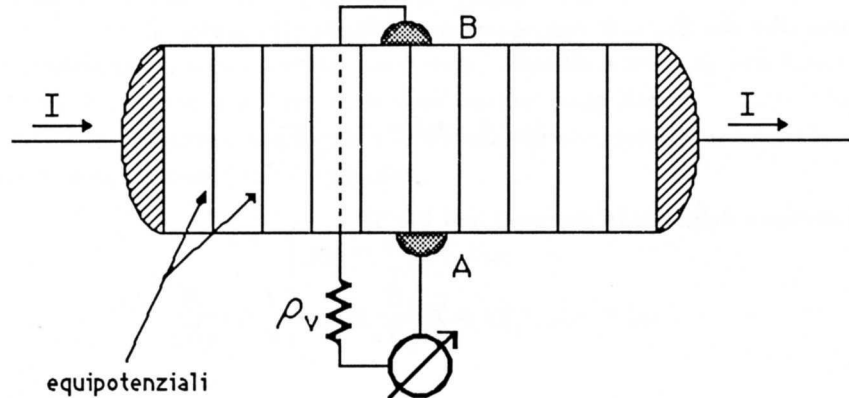


Fig.XIX.4

L'origine di V_{off} va ricercata principalmente nella non perfetta simmetria dei due contatti: infatti se essi non sono perfettamente simmetrici rispetto ai contatti ohmici per la corrente I , risentiranno, in assenza di campo magnetico, della ddp provocata dalla diversa caduta ohmica prodotta da I (vedi Fig.4, dove l'effetto è stato fortemente esaltato):

$$V_{off} = I\Delta R \quad (\text{XIX.24})$$

dove ΔR rappresenta la resistenza del materiale (in genere semiconduttore) compreso fra le due superfici equipotenziali passanti per i terminali A e B.

La taratura di una sonda di Hall consiste pertanto nella determinazione della costante k (eventualmente per vari valori della corrente controllo I) e di V_{off} .

La determinazione di V_{off} è - almeno in linea di principio - più semplice della determinazione di k , poiché richiede di misurare solo V_u con $\vec{B} = 0$ (in realtà basterebbe $B_z = 0$); in pratica il problema è proprio quello di essere sicuri della condizione di annullamento di B_z , ovvero del fatto che B_z sia molto minore del valore che successivamente vogliamo misurare. Pertanto occorre innanzitutto allontanare dalle vicinanze della sonda ogni sorgente di campo magnetico; se vogliamo tarare la sonda allo scopo di effettuare misure di campi di induzione magnetica di intensità molto piccola, anche il campo magnetico terrestre ($\approx 4 \cdot 10^{-5} T$) può essere di ostacolo nella misura di V_{off} e in questo caso occorre o ridurre il campo residuo attorno alla sonda mediante uno schermo magnetico oppure effettuare due misure di V_u una con la sonda in una determinata posizione (V_u^0) e un'altra con la sonda nella posizione che si ottiene ruotandola di π attorno a un asse giacente nel piano della sonda medesima (V_u^π): avremo allora, chiamando B_z^r la componente z del campo di induzione residuo:

$$\begin{cases} V_u^0 = kB_z^r + V_{off} \\ V_u^\pi = -kB_z^r + V_{off} \end{cases} \quad (\text{XIX.25})$$

e pertanto

$$V_{off} = \frac{V_u^0 + V_u^\pi}{2} \quad (\text{XIX.26})$$

Tenendo presente che il meccanismo che consente la rotazione della sonda non sarà perfetto, la (26) incontrerà alcune limitazioni qualora il gradiente del campo \vec{B}^r e le piccole non riproducibilità di

posizionamento nella rotazione $0 - \pi$ siano tali da portare a differenze nella componente di interesse B_z^r . Sarà quindi opportuno verificare che il campo \vec{B}^r (o almeno la sua componente lungo l'asse z) si mantenga sufficientemente costante in un ambito dell'ordine della riproducibilità di posizionamento della sonda. Quanto all'uso dello schermo magnetico, vi torneremo in un paragrafo successivo.

La determinazione di k che secondo la (5) è data da:

$$k = \frac{I}{qNt} \quad (\text{XIX.27})$$

con I corrente di controllo, q e N carica e densità dei portatori, t spessore della sonda, richiede la disponibilità di un campo di induzione di intensità nota; infatti mentre in linea di principio k è calcolabile in base alla (27), note che siano le quantità in essa contenute, in pratica le uniche di esse che possono essere conosciute con precisione sufficiente sono q e I . Per ottenere dei campi di induzione noti, si può procedere o usando il campo prodotto da correnti in geometrie definite e note, per esempio una coppia di bobine di Helmholtz, oppure, disponendo di un campo di induzione comunque generato, misurandolo con una sonda di Felici che, come abbiamo visto nel Cap.VI, §11, dà una misura assoluta del campo \vec{B} . Consideriamo il primo metodo: una coppia di bobine di Helmholtz è costituita da due bobine circolari di ugual raggio R disposte con gli assi coincidenti e a distanza pari a R l'una dall'altra. Le due bobine sono collegate in serie e in modo che la corrente circoli in esse con lo stesso verso; detta i la corrente in esse (oppure ni se ogni bobina è costituita da n spire), il campo lungo l'asse nella zona centrale è stazionario (entro lo 0.5% su dimensioni dell'ordine di $R/2$) e pari a:

$$B_{BH} = \frac{\mu_0 i}{R(5/4)^{3/2}} \quad (\text{XIX.28})$$

In fase di misura il campo magnetico totale sulla sonda è dato dalla somma di \vec{B}_{BH} e di \vec{B}^r dove \vec{B}^r è il campo magnetico residuo (per esempio quello terrestre) non altrettanto ben noto, anche se presumibilmente assai più piccolo di \vec{B}_{BH} . Per evitare che questo contributo comprometta la qualità della taratura si può determinare k da due misure fatte in geometria identica, ma invertendo la corrente di eccitazione delle bobine, e mantenendola costante in valore assoluto, ovvero con \vec{B}_{BH} e $-\vec{B}_{BH}$. In questo modo, essendo

$$\begin{cases} V_u^I = k(\vec{B}_{BH} + \vec{B}^r) + V_{off} \\ V_u^{II} = k(-\vec{B}_{BH} + \vec{B}^r) + V_{off} \end{cases} \quad (\text{XIX.29})$$

otteniamo

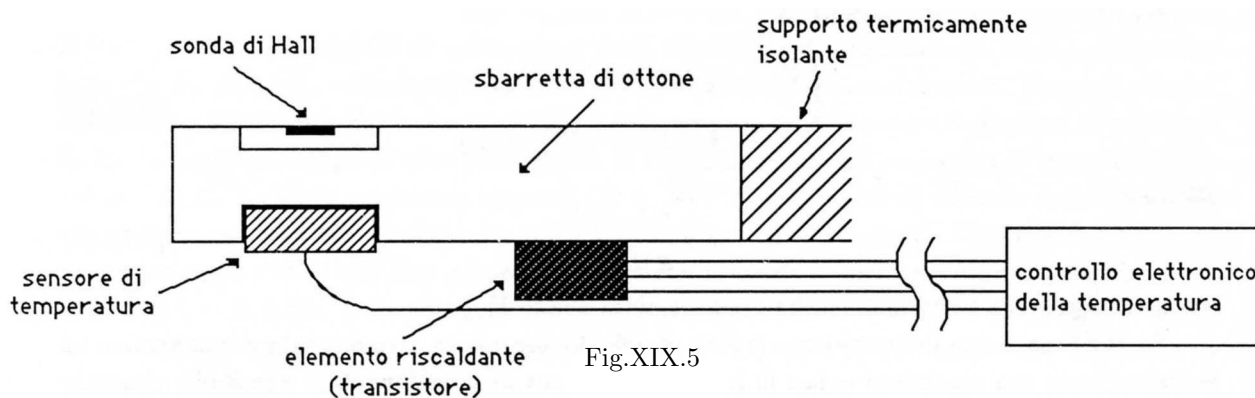
$$k = \frac{V_u^I - V_u^{II}}{2|\vec{B}_{BH}|} \quad (\text{XIX.30})$$

con il vantaggio che è eliminata anche l'indeterminazione su V_{off} .

Se viceversa si usa l'altro sistema (sonda di Felici) adoperando o un magnete permanente o un elettromagnete con espansioni polari in ferro, la procedura di inversione di \vec{B} non è più attuabile. Infatti, nel caso del magnete permanente la difficoltà nasce dal fatto che occorrerebbe invertire tutto il magnete; presumibilmente così si modifica anche il contributo del campo magnetico terrestre che risulta fortemente dipendente dalle masse di materiali ferromagnetici in prossimità della sonda; nel caso dell'elettromagnete non è possibile invertire il campo invertendo semplicemente la corrente perché, come vedremo, il fenomeno dell'isteresi può dar luogo a campi di induzione in valore assoluto diversi. Pertanto in questi casi occorre preventivamente valutare V_{off} e quindi k , misurando con la sonda di Felici il campo \vec{B} cui contribuisce sia il campo del magnete che quello terrestre; la presenza di quest'ultimo non arreca in questo caso alcun disturbo, purché la sonda di Felici e quella di Hall

siano collocate nella medesima posizione. Questo è proprio uno dei punti deboli del metodo; infatti mentre la sonda di Hall può essere un minuto rettangolo (tipicamente *qualche* mm^2) di spessore estremamente limitato ($\ll 1\text{ mm}$), la sonda di Felici difficilmente può essere così miniaturizzata, soprattutto se la si deve adoperare in queste applicazioni dove l'area della superficie deve essere conosciuta con la migliore precisione possibile. Il campo medio nelle due misure sarà lo stesso e quindi la taratura davvero effettuabile, solo se avremo un campo \vec{B} sufficientemente omogeneo su dimensioni dell'ordine della sonda di Felici, ovvero della sonda di maggiore superficie e spessore.

Andando a considerare più da vicino il problema della taratura della sonda si trova che k può considerarsi una costante in funzione di \vec{B} solo in una certa approssimazione (che il costruttore si preoccupa di comunicare), tanto migliore quanto più grande è la resistenza esterna del dispositivo che misura la tensione di Hall; cioè la non linearità va ricercata in effetti simili a quelli già accennati (fine del §1) che non consentono di considerare la sonda come un generatore reale di tensione, caratterizzato solo da una ddp \mathcal{E}_{Th} e una resistenza R_{Th} costanti; tuttavia, se misuriamo V_u con uno strumento avente resistenza interna molto elevata, questo effetto di non linearità è drasticamente ridotto. Quanto alla dipendenza di k e di V_{off} da I e dalla temperatura, la (24) e la (27) ci dicono che sia k che V_{off} dipendono linearmente da I , a parità di T ; almeno per quanto riguarda k conviene crescere il più possibile I ; a causa della resistività finita del materiale semiconduttore, esiste però una corrente massima oltre la quale la potenza dissipata sulla sonda supera i limiti consentiti, tipicamente $I_{max} = 150\text{ mA}$ con una sonda con R totale fra i terminali della corrente controllo I di circa 30Ω . Ovviamente aumentare la corrente, pur mantenendola al di sotto della massima consentita, porta a un innalzamento della temperatura della sonda, se non si provvede indipendentemente a stabilizzarla. Questa procedura di stabilizzazione della temperatura è opportuna; infatti la dipendenza della densità dei portatori dalla temperatura sappiamo che è forte (almeno la parte che è dovuta alle rottura dei legami per effetto termico) e conseguentemente ogni sua variazione va limitata se si vuole mantenere k il più costante possibile; inoltre anche V_{off} presenta una marcata dipendenza dalla temperatura. Pertanto una sonda di Hall che debba fornire misure di buona accuratezza e stabilità deve essere montata su un supporto mantenuto a temperatura il più costante possibile, ovvero un *termostato*.



La stabilizzazione della temperatura di una sonda si fa generalmente a una temperatura superiore a quella massima prevedibile per l'aria dell'ambiente: un elemento riscaldante (per esempio un transistore) è accoppiato termicamente alla sonda e a un sensore di temperatura; quest'ultimo stabilisce se la temperatura misurata è maggiore o minore del valore prestabilito da mantenere costante e regola conseguentemente la potenza da erogare da parte dell'elemento riscaldante. In Fig.5 è mostrato lo schizzo di come è realizzato il supporto termostato della sonda in laboratorio. Le stabilità di temperatura del sistema non sono particolarmente spinte (1-2 decimi di $^{\circ}C$) ma

sufficienti a rendere consistenti fra di loro misure effettuate a temperature ambiente notevolmente diverse. La maggiore incertezza delle misure di campi magnetici piccoli deriva dalla forte dipendenza di V_{off} dalla temperatura e dalle instabilità intrinseche di V_{off} ; queste ultime pongono un limite praticamente invalicabile alla precisione delle misure. Nel paragrafo successivo esamineremo più quantitativamente il valore di questi parametri nel caso reale della sonda presente in laboratorio.

3.— *Circuito per l'utilizzo della sonda di Hall nella misura di campi di induzione magnetica*

Consideriamo una sonda di Hall dalle caratteristiche abbastanza tipiche

$$k \approx 1V/T \quad (\text{con } I \approx 150mA)$$

$$V_{off} \approx 2mV$$

$$R_S \approx R_H \approx 30\Omega$$

$$\frac{\Delta k}{k}(T) \approx -0.1\%/^{\circ}C$$

$$\frac{\Delta R_S}{R_S} \approx \frac{\Delta R_H}{R_H} \approx 0.1\%/^{\circ}C$$

R_S e R_H rappresentano la resistenza della sonda rispetto ai terminali di corrente e di misura rispettivamente.

Il circuito richiesto per utilizzare questa sonda come misuratore di campi di induzione magnetica è estremamente semplice (si esclude la parte di termostatazione) ed è riprodotto in Fig.6.

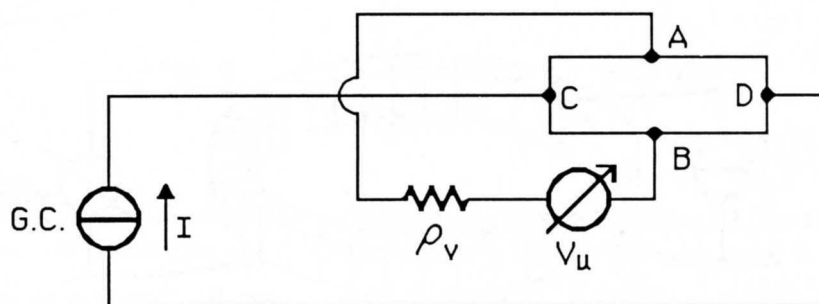


Fig.XIX.6

Il generatore di corrente G.C., che può essere realizzato come visto nel Cap.XVIII,§9, invia nella sonda la corrente di controllo I , di valore il più possibile costante; infatti, secondo la (27), ogni instabilità di I si traduce in una identica instabilità di k . Il misuratore della ddp V_u sarà con resistenza di ingresso la più elevata possibile perché, come abbiamo già visto, ciò migliora la linearità della risposta. Inoltre questo strumento dovrà essere assai sensibile, se si vuole utilizzare la sonda per la misura di campi magnetici di piccola intensità. Ad esempio il campo di induzione magnetica terrestre ha una intensità di circa $4 \cdot 10^{-5}T = 0.4 \text{ Gauss}$ e ciò corrisponde a $V_u \leq 40\mu V$, pertanto uno strumento che possa misurare fino a qualche μV si rende talvolta necessario. La piccolezza di

queste ddp rende inoltre necessarie le precauzioni tipiche di ogni misura di piccole tensioni: assenza di gradienti termici nel circuito di misura e di concatenamenti incontrollati con campi magnetici. Il valore della tensione di offset $V_{off} \approx 2mV$ può disturbare non poco la misura di campi magnetici di piccola intensità, non fosse altro perché costringe a usare sullo strumento che misura V_u un fondo scala molto più alto del necessario; da questo punto di vista sarebbe conveniente disporre di un sistema che provvedesse a sottrarre automaticamente il contributo di V_{off} dalla tensione $(V_A - V_B)$ in modo tale da misurare direttamente $V_u - V_{off} = kB$ e riportare la misura entro fondo scala adeguati. Dispositivi di questo genere possono essere realizzati in vari modi, ma non verranno qui descritti*. Passiamo piuttosto a descrivere alcune delle misure eseguibili con tali sonde.

4.- Misura della curva di magnetizzazione di un elettromagnete

I materiali ferromagnetici sono caratterizzati da un elevato valore ($10^2 \div 10^5$) della permeabilità magnetica relativa:

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = \frac{\vec{B}}{\mu_0 \vec{H}} \quad (\text{XIX.31})$$

Tale valore, anche per un dato materiale, non è però costante e dipende sia dal valore di \vec{B} che dalla storia precedente del campione in uso. Come esemplificazione e allo scopo di richiamare alcuni fatti fondamentali, consideriamo un anello toroidale di ferro dolce sul quale siano avvolte N spire di filo di rame smaltato percorse da una corrente I , nonché altre n spire di un secondo circuito chiuso su un integratore di Miller, funzionante da flussometro, ovvero uno strumento che, preventivamente tarato, dà la misura del flusso di \vec{B} attraverso il campione (Fig.7); il secondo circuito è di fatto una Sonda di Felici.

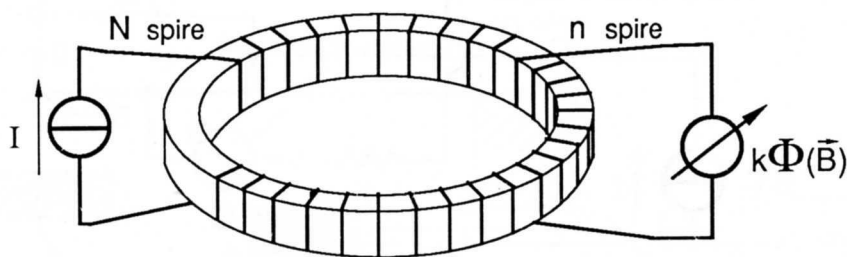


Fig.XIX.7

Se le dimensioni lineari della sezione del toro sono molto minori della lunghezza complessiva del medesimo e se le N spire sono avvolte in maniera uniforme allora il campo \vec{H} (detto anche *forza magnetizzante*) all'interno dell'avvolgimento è perpendicolare al piano delle spire, cioè diretto lungo il toro, e di modulo pari a:

$$H = \frac{NI}{l} \quad (\text{XIX.32})$$

* allo scopo si presterebbero anche alcuni dei metodi già visti nel Cap.XV per la sottrazione della tensione di offset di ingresso degli amplificatori operazionali.

dove l è la lunghezza complessiva (media) del toro. Le unità di \vec{H} sono $A \cdot \text{spira}/m$. Se riportiamo in grafico $B(H)$, con B ottenuto dalla misura del flusso diviso per la sezione trasversale A del toroide e H ottenuto tramite la (32), non otteniamo una retta come dovrebbe essere se fosse $\vec{B} = \mu \vec{H}$; ciò significa che μ non può considerarsi costante, almeno non in tutto il campo considerato dei valori di \vec{H} . Guardiamo allora l'andamento $B(H)$, supponendo che per $I = 0$ il campione sia perfettamente smagnetizzato ($\vec{H} = 0, \vec{B} = 0$). Aumentiamo la corrente e contemporaneamente registriamo B ; sulla curva (Fig.8) riportiamo anche una freccia per indicare il verso di percorrenza della curva medesima, perché, come abbiamo già detto, la relazione fra \vec{B} e \vec{H} dipende anche da valori assunti precedentemente.

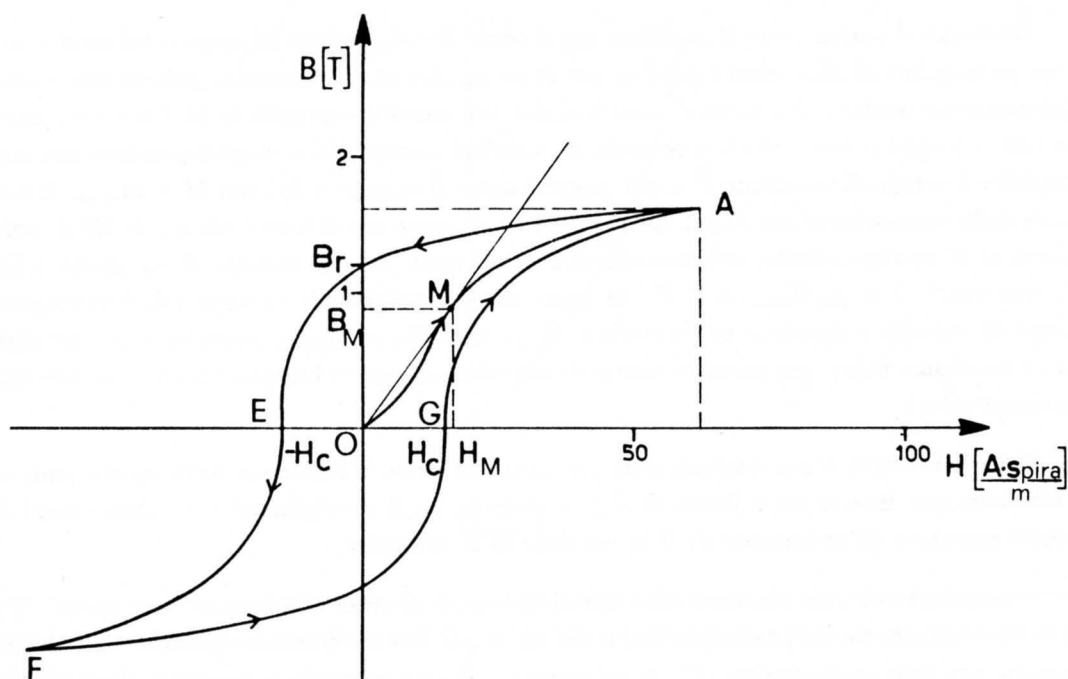


Fig.XIX.8

Ad esempio partendo dal punto O, viene inizialmente percorsa la curva OA, detta *curva di prima magnetizzazione*. Da essa si nota che μ , definito dalla (31), cresce partendo da $H = 0$ fino al punto M dove esso ha un massimo: nel caso riportato in figura $\mu_{max} = \frac{B_M}{H_M} \approx 5 \cdot 10^{-2} T \cdot m/A \cdot \text{spira}$ e pertanto $\mu_{r,max} = \frac{\mu_{max}}{\mu_0} \approx 4 \cdot 10^4$. Tale valore è senz'altro assai elevato e di fatto la curva corrisponde a Ferro puro, un ottimo materiale ferromagnetico. Raggiunto il punto A, diminuiamo la corrente e con essa il campo magnetico \vec{H} ; si osserva che la curva non ripassa per il tratto AO, bensì se ne discosta, a motivo di una sorta di *ritardo* del campo \vec{B} rispetto al campo \vec{H} . E' questo il fenomeno dell'*isteresi* (in greco, appunto, "ritardo"): esso è attribuibile al fatto che i domini magnetici del materiale si sono - per così dire - *fatti posto* nel materiale durante la curva di prima magnetizzazione e per muoversi di nuovo, sotto l'azione di \vec{H} , richiedono una sollecitazione finita. Una prima conseguenza di questo fatto è che anche per $\vec{H} = 0$, il campo di induzione dovuto alla magnetizzazione residua del materiale, mantiene un valore B_r detto *campo residuo*. Solo quando \vec{H} assume il valore $-H_c$ detto *forza coercitiva* (punto E), il campo \vec{B} è tornato a

zero*. Proseguendo la curva E-F-G-A il ciclo (detto *ciclo di isteresi*) si richiude e se proseguito entro gli stessi valori del campo \vec{H} si ripete identico indefinitamente. Il ciclo di isteresi rappresenta un fenomeno tipicamente irreversibile: la irreversibilità è associata al fatto che quando i domini magnetici “incastrati” nel materiale finalmente si ribaltano e assumono una nuova posizione di equilibrio, l’energia potenziale che essi avevano precedentemente al ribaltamento finisce in energia termica e non viene recuperata; corrispondentemente se facciamo percorrere a un certo campione il proprio ciclo di isteresi ripetutamente, esso si scalda; si può dimostrare che l’energia perduta, ovvero trasformata in calore in ogni ciclo, è proporzionale all’area racchiusa dal ciclo di isteresi medesimo. Non sorprende quindi che per la costruzione di trasformatori e motori in alternata è di importanza primaria utilizzare materiali con area del ciclo di isteresi la più piccola possibile, allo scopo di ottimizzare le efficienze dei dispositivi.

Tornando al nostro esempio, notiamo che le curve $B-H$ tendono ad appiattirsi assai al di sopra di un certo valore di \vec{H} , cosicché $\mu \rightarrow \mu_0$ per $H \rightarrow \infty$. Questo fenomeno di *saturazione* è anch’esso intimamente associato alla natura granulare del fenomeno e corrisponde al fatto che, una volta che tutti i domini si sono orientati secondo \vec{H} , ulteriori aumenti della magnetizzazione non sono più possibili e il campo di induzione \vec{B} al più crescerà come $\vec{B} \approx \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$ con $M = M_{max}$. Il massimo valore della magnetizzazione M_{max} che si riesce a ottenere con il ferro è circa $1.6 \cdot 10^6 A \cdot spira/m$; quanto al B corrispondente, supponendo che, come quasi sempre accade, H sia molto minore di M , esso varrà $B \approx \mu_0 M_{max} \approx 2 T$. In presenza di avvolgimenti su materiali ferromagnetici, il campo di induzione massimo nel materiale \vec{B}_{max} uguaglia $\mu_0 \vec{M}_{max}$, soltanto se gli avvolgimenti hanno resistenza finita; per ottenere campi di induzione superiori bisogna ricorrere ad avvolgimenti superconduttori.

Nelle induttanze o nei trasformatori con nuclei in ferro, il fenomeno della saturazione, ovvero la relazione non lineare fra il flusso di \vec{B} e la corrente negli avvolgimenti per valori elevati di I , è proprio associato all’andamento di \vec{B} in funzione di \vec{H} ora visto.

Supponiamo di aver percorso del ciclo di isteresi e di voler raggiungere nuovamente il punto O, ovvero l’origine da un punto qualunque del ciclo; per fare ciò possiamo procedere in almeno due maniere, una delle quali consiste (Fig.9) nel riportare \vec{B} a 0 applicando la forza coercitiva ($-H_c$ o H_c) e successivamente procedere ancora *un poco* lungo la curva per riportarci poi nell’origine per $H = 0$. L’operazione di *procedere leggermente oltre* i punti E o G, dipende dal fatto che altrimenti mandando \vec{H} a zero dopo che ha assunto il valore H_c , \vec{B} non resta a zero; l’operazione di smagnetizzazione procede comunque per tentativi. Un metodo alternativo e sostanzialmente *automatico* è quello di far compiere al campione dei cicli di isteresi di ampiezza via via decrescente, per esempio inviando una corrente di eccitazione $I = I_0(t) \cos \omega t$ con $I_0(t)$ funzione lentamente (rispetto a ω^{-1}) decrescente di t e con $I_0(t \rightarrow \infty) = 0$. Si hanno così i cicli riportati in Fig.10 che alla fine portano alla smagnetizzazione completa del materiale. Se il campione da smagnetizzare è di piccole dimensioni (per esempio la testina di un registratore magnetico) invece di applicare una corrente alternata di ampiezza decrescente a un circuito avvolto attorno al campione, si può inserire il campione in un campo magnetico alternato prodotto da una sorgente che viene lentamente allontanata e produce così una forza magnetizzante \vec{H} alternata e decrescente.

* in un materiale adatto per essere utilizzato come magnete permanente H_c può avere anche valori $> 4 \cdot 10^4 A \cdot spira/m$ ovvero estremamente elevati.

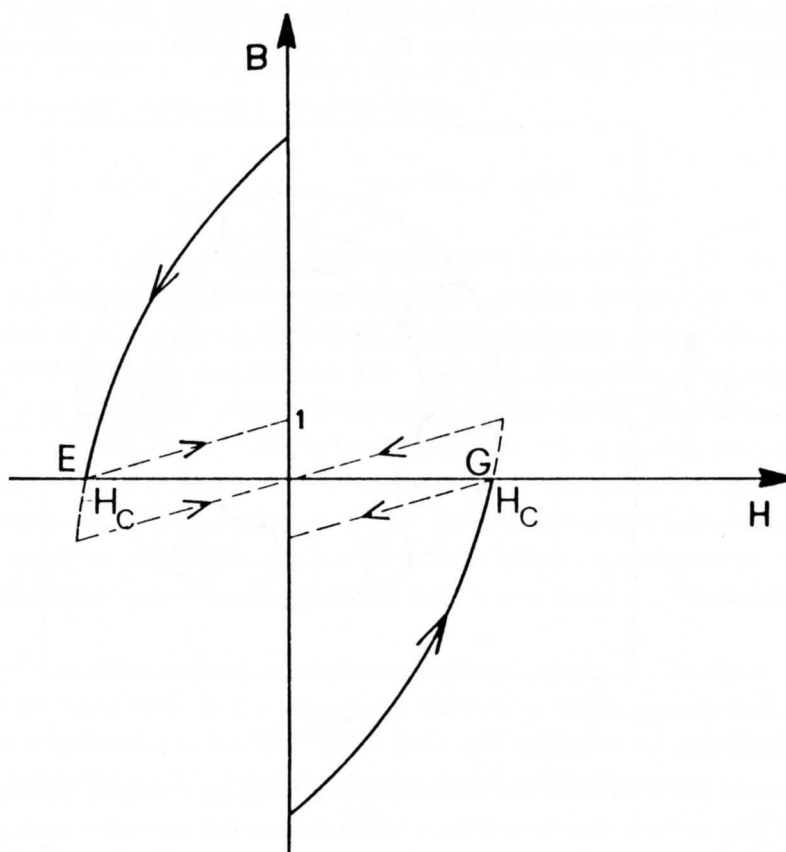


Fig.XIX.9

La sorgente del campo magnetizzante può essere un piccolo solenoide percorso da una corrente alternata (quella di rete va benissimo) avvolto su un nucleo cilindrico di ferro in modo da avere un notevole flusso disperso.

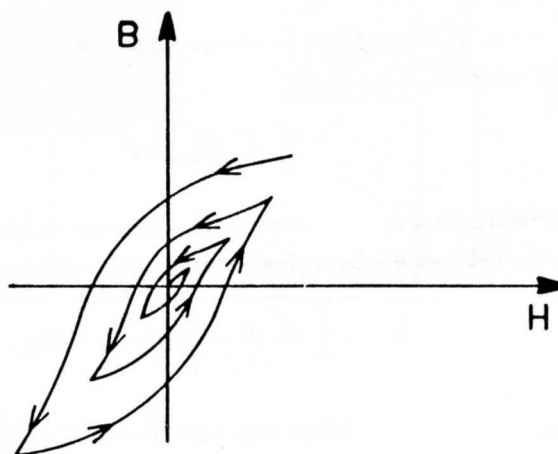


Fig.XIX.10

In quasi tutte le applicazioni, sia nel campo della tecnica che in quello della ricerca, interessa produrre campi magnetici, anche intensi, in aria o nel vuoto, comunque in regioni accessibili; pertanto

circuiti magnetici come quelli toroidali ora descritti non risultano adatti allo scopo. Vanno viceversa meglio configurazioni del tipo riportato in Fig.11, ovvero circuiti magnetici con *traferro*.

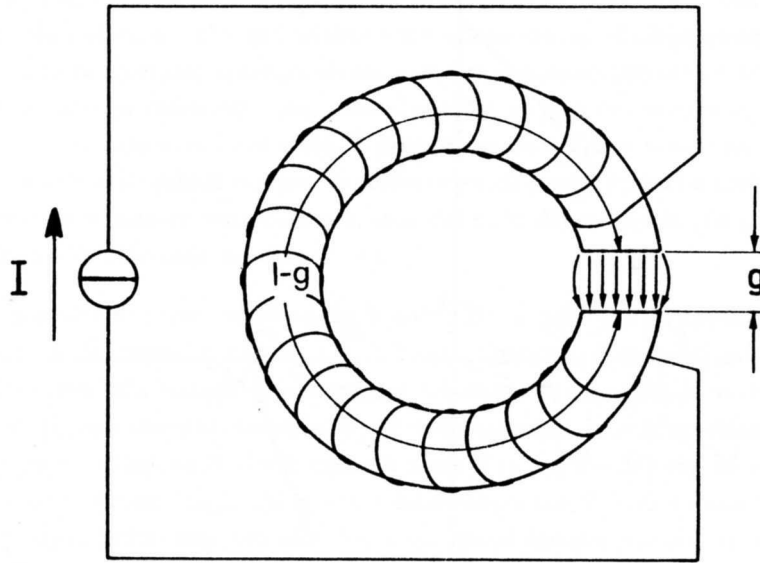


Fig.XIX.11

Supponendo per semplicità che la sezione del toroide sia costante, che l'avvolgimento sia sufficientemente fitto e che le dimensioni lineari della sezione del toro siano molto maggiori dello spessore g del traferro e molto minori della sua lunghezza l , allora \vec{B} , \vec{H}_i e \vec{M} sono paralleli fra di loro all'interno del materiale ferromagnetico e varrà:

$$\vec{B} = \mu \vec{H}_i = \mu_r \mu_0 \vec{H}_i \quad (\text{XIX.33})$$

Nel traferro, trascurando l'effetto di campo disperso ai bordi, \vec{B} è praticamente lo stesso che dentro il ferro ($\text{div } \vec{B} = 0$) e pertanto $\vec{H}_t = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$ sarà molto maggiore di \vec{H}_i , essendo $\mu = \mu_r \mu_0 \gg \mu_0$. D'altronde la circuitazione di \vec{H} lungo un cammino chiuso che percorra tutto il toro una volta sola deve valere, secondo il *teorema di Ampère*:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI \quad (\text{XIX.34})$$

dove N sono le spire avvolte omogeneamente sul toro e percorse da una corrente I (data la geometria, H_i è costante all'interno del toro e i dettagli geometrici del cammino sono inessenziali); avremo così

$$NI = \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_i(l - g) + H_t g \quad (\text{XIX.35})$$

essendo l la lunghezza media del toro. D'altronde sostituendo $\vec{H}_t = \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \mu_r \vec{H}_i$ nella (35), otteniamo

$$NI = H_i[(l - g) + \mu_r g] \quad (\text{XIX.36})$$

La relazione (36), insieme con la conoscenza della curva $B - H$ del ferro usato (Fig.8), ci consente di determinare la corrente e il numero di spire necessarie per avere un certo campo (medio) B (e

$H_t = \frac{B}{\mu_0}$) nel traferro. Ad esempio supponiamo di volere un campo $B = 10^{-1} T$ in un traferro spesso 5 mm , con un toroide di lunghezza 20 cm , sapendo che $\mu_r = 5 \cdot 10^3$ per $B = 0.1 T$ (ricavato cioè dalla curva $B - H$ del materiale adoperato). Avremo allora

$$NI = \frac{B}{\mu_r \mu_0} (l - g) + \frac{B}{\mu_0} g \approx 400 A \cdot \text{spira} \quad (\text{XIX.37})$$

ovvero occorre, ad esempio, un avvolgimento costituito da 1000 spire percorse da una corrente di $0.4 A$. La presenza del traferro fa innalzare notevolmente il valore del prodotto NI necessario per avere un certo valore di B , rispetto al caso di un circuito magnetico senza traferro: in questo caso infatti avremmo avuto solo il primo termine della (37), con l al posto di $l - g$, e avremmo così ottenuto $NI \approx 3.2 A \cdot \text{spira}$, un valore cioè estremamente più piccolo. Nell'esempio trattato la sezione del circuito magnetico non è stata esplicitamente considerata poiché, essendo costante, non influenza il risultato. Tuttavia teniamo presente che se vogliamo ottenere lo stesso campo \vec{B} praticamente omogeneo su una superficie più vasta, ciò richiede di aumentare la sezione del circuito magnetico ovunque e quindi necessariamente la superficie della bobina: conseguentemente aumenta la lunghezza dell'avvolgimento, e con essa la resistenza del filo e la potenza richiesta al generatore di corrente.

Le configurazioni che si realizzano nei casi reali assomigliano a quella ora descritta, ma di fatto esistono alcune differenze sostanziali che, quanto meno, richiedono alcune precisazioni: con riferimento alla Fig.12, che rappresenta un elettromagnete molto più realistico del precedente, notiamo innanzitutto che l'avvolgimento è confinato in una sezione del circuito magnetico;

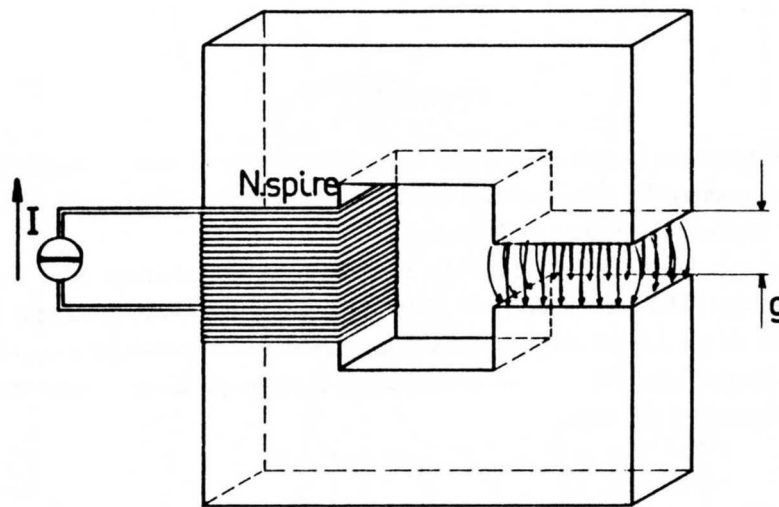


Fig.XIX.12

pertanto mentre la circuitazione $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l}$ resta pari a NI , molto meno evidente è che \vec{H}_i resti costante all'interno del ferro. Di fatto nasce una distribuzione superficiale di cariche di magnetizzazione, dovute al piccolo campo disperso, che oltre a "guidare" le linee di \vec{H}_i dentro il materiale ferromagnetico tende a rendere \vec{H}_i costante in modulo; si trova così che la schematizzazione adottata di un campo \vec{H}_i costante in modulo entro il circuito e diretto sempre lungo di esso è applicabile anche in questo caso. Se lo spessore del traferro è anche questa volta sufficientemente piccolo rispetto alle

dimensioni lineari delle superfici affacciate, il campo disperso può trascurarsi e si possono applicare le considerazioni precedentemente svolte circa la costanza di \vec{B} nel passare dal ferro al traferro. Se lo spessore del traferro g non è piccolo rispetto alle dimensioni lineari delle superfici, la presenza di flusso disperso ai bordi del traferro fa cadere l'ipotesi di costanza di \vec{B} . Una soluzione esatta per l'andamento di \vec{B} (o \vec{H}) nel traferro risulta in genere complicata da ottenere: qualitativamente si trova che il campo \vec{B} nel piano mediano del traferro e sufficientemente lontano dai bordi risulta costante e ortogonale alle superfici del traferro (sempre che esse siano piane e parallele), mentre avvicinandosi ai bordi, ma mantenendosi nel piano mediano del traferro, il campo decresce monotonicamente. Se poi consideriamo il campo \vec{B} su un piano prossimo a una delle *espansioni polari* (così si chiamano le superfici terminali del materiale ferromagnetico), troviamo che all'interno del traferro la componente ortogonale alle espansioni polari B_z è costante e praticamente pari al valore che ha nel piano mediano, ma avvicinandosi ai bordi essa aumenta fino a raggiungere un massimo (in corrispondenza dello spigolo) e poi diminuisce monotonicamente (Fig.13).

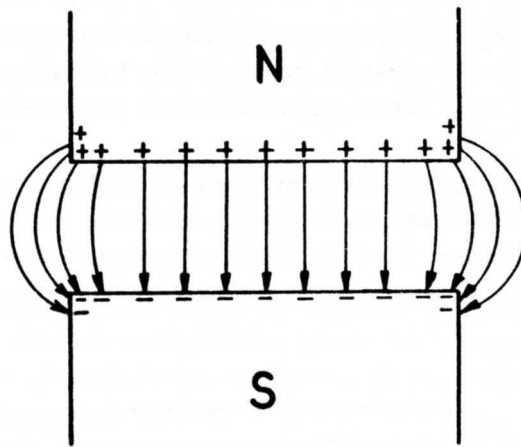


Fig.XIX.13

La presenza del massimo si può spiegare in base all'esistenza di cariche magnetiche non solo sulle facce del traferro ma anche sulle superfici laterali che abbassano il valore di \vec{H}_i all'interno del materiale, ma lo innalzano subito fuori dalle superfici.

Tornando a trascurare questi effetti di bordo, ma continuando a studiare \vec{H} in base alla distribuzione di cariche magnetiche superficiali, nel traferro, lontano dai bordi, il campo \vec{H} può essere descritto come quello di un doppio strato; detta g la dimensione del traferro e σ_m la densità superficiale di cariche magnetiche abbiamo, in analogia con il campo di un condensatore ($\vec{k} = \text{vers } \vec{z}$, coincidente con la normale \vec{n} alle espansioni polari):

$$H_g \vec{k} = \sigma_m \vec{k} = (\vec{M} \cdot \vec{n}) \vec{k} = \vec{M} \quad (\text{XIX.38})$$

e pertanto, nel traferro

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}_g = \mu_0 \vec{M} \quad (\text{XIX.39})$$

che non coincide esattamente con il valore all'interno del materiale $\vec{B} = \mu_0(\vec{H}_i + \vec{M}) = \mu_r \mu_0 \vec{H}_i$ ma ne differisce per il termine $\mu_0 \vec{H}_i \ll \mu_0 \vec{M}$; la differenza dipende dall'aver trascurato le altre sorgenti di H (avvolgimento e eventuali altre masse magnetiche superficiali) che assicurano proprio la presenza di H_i all'interno del circuito.

Una sonda di Hall, date le sue piccole dimensioni, dà una misura assai *puntuale* del campo (la media su dimensioni dell'ordine del mm^2) ed è pertanto estremamente adatta a studiare gli andamenti di \vec{B} (o di \vec{H}) nel traferro di un circuito magnetico quale quello ora descritto. In particolare è

possibile, se la sonda è munita di un sistema di posizionamento $x-y-z$ (con letture della posizione), ricostruire una mappa del campo nella zona e verificare sperimentalmente gli andamenti descritti.

Inoltre, posizionata la sonda fra le espansioni polari, è possibile riportare in grafico B in funzione di I ; avendo avuto cura di smagnetizzare inizialmente l'elettromagnete controllando che la sonda segnali una ddp pari alla tensione di offset, si può, al crescere della corrente, ottenere un grafico corrispondente alla curva di isteresi del materiale impiegato, partendo dalla curva di prima magnetizzazione. In realtà non costruiamo così il ciclo di isteresi poiché per far questo occorrerebbe impiegare un campione di materiale (detto *provino*) toroidale e conoscere il numero di spire dell'avvolgimento, come mostrato all'inizio del paragrafo; tuttavia il grafico $B-I$ è in grado di mostrare ugualmente gli andamenti salienti della curva di magnetizzazione del materiale.

5.— Schermo magnetico

Consideriamo una porzione di spazio ove sia presente un campo di induzione magnetica $\vec{B}_0 = B_0 \vec{k}$ con B_0 costante. Supponiamo che il mezzo sia aria per cui $\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}$.

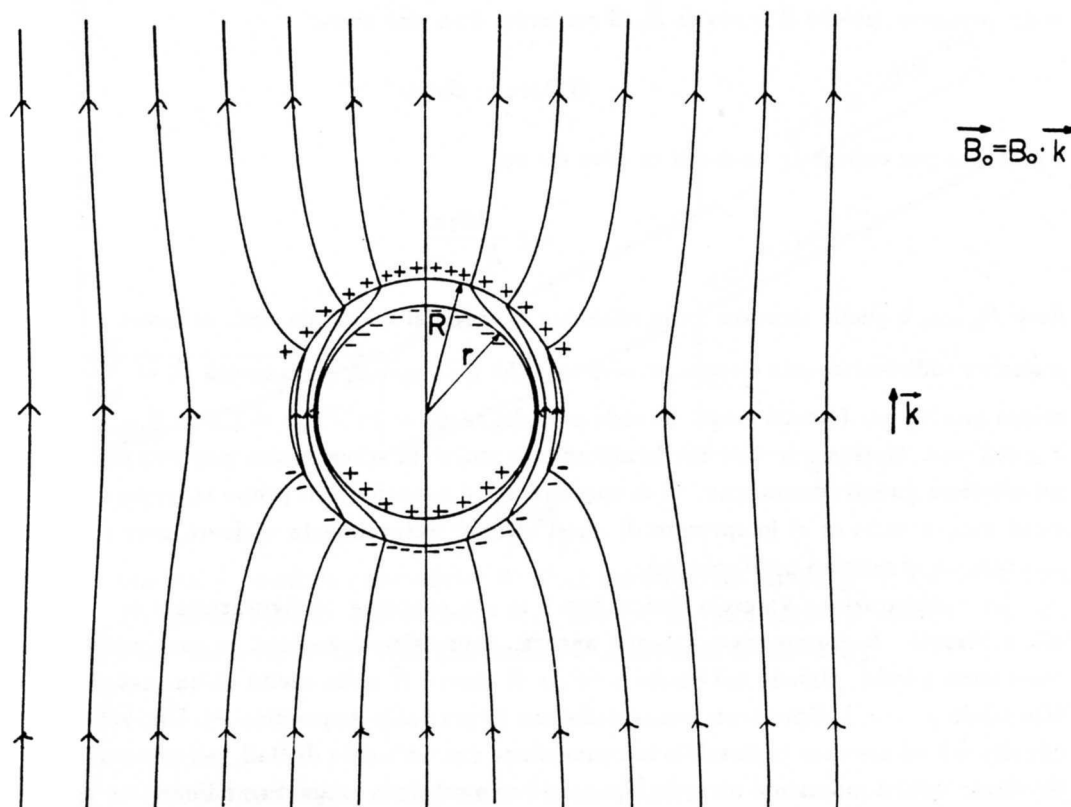


Fig.XIX.14

Se vogliamo liberare una porzione limitata di questo spazio dalle linee di \vec{B}_0 , ovvero ridurre drasticamente il valore del campo all'interno di questa zona, un metodo molto efficace è quello di racchiudere tale zona all'interno di un guscio opportunamente spesso (poi vedremo quanto) di un

materiale ad alta permeabilità magnetica relativa μ_r . Nella Fig.14 è riportato il caso di un guscio sferico di raggi r e R (cioè avente spessore $s = R - r$), visto in sezione. Si noti che le linee di campo esterne al guscio sono *attratte* verso di questo e che esse si addensano all'interno del materiale ferromagnetico: l'attrazione delle linee può essere spiegata notando che l'inserimento del guscio nel campo porta alla sua magnetizzazione e quindi alla presenza di cariche magnetiche superficiali (col segno come in figura); esse creano un campo di induzione magnetica di tipo dipolare che, sommandosi a quello preesistente, porta all'andamento complessivo osservato. In Appendice D è svolto il calcolo esatto per l'andamento del campo e delle cariche di magnetizzazione sulle superfici, sia per il caso di uno schermo sferico che di uno schermo cilindrico. Nello spazio racchiuso dal guscio si ha un campo omogeneo \vec{B}_i avente direzione e verso uguali a \vec{B}_0 , ma $k \mu_r$ volte meno intenso (k dell'ordine del rapporto fra lo spessore del guscio e il suo raggio esterno), almeno per $\mu_r \gg 1$. Pertanto l'efficacia dello schermo è tanto maggiore quanto più alto è il prodotto di μ del materiale impiegato per lo spessore s del guscio. Lo spessore determina anche il limite massimo per il campo di induzione \vec{B}_0 che può essere schermato; infatti se il campo \vec{B}_g entro il guscio raggiunge il valore corrispondente alla saturazione, lo schermo cessa di essere efficace in quanto μ crolla di valore una volta che il materiale è saturato. Per dare una valutazione dello spessore allo scopo di dimensionarlo secondo le nostre esigenze, possiamo ragionare nel modo schematico seguente: lo schermo deforma (vedi Fig.14) il campo omogeneo \vec{B}_0 in modo che - almeno approssimativamente - nel guscio di spessore $s = R - r$ passano tutte le linee di \vec{B} che prima passavano attraverso una superficie circolare avente raggio $\approx 2r$; pertanto, poiché il flusso di \vec{B}_0 si conserva, dovremo avere:

$$B_g 2\pi r s \approx B_0 \pi 4r^2 \quad (\text{XIX.40})$$

e pertanto per evitare la saturazione deve essere:

$$s \geq \frac{2B_0 r}{B_{g,max}} \quad (\text{XIX.41})$$

dove $B_{g,max}$ è quello ricavato dalla relazione $B - H$ del materiale dello schermo e che assicura un μ ancora sufficientemente elevato, ovvero tale che il campo \vec{B}_i nella cavità $\vec{B}_i \approx \frac{\vec{B}_0}{k\mu_r}$ sia sufficientemente piccolo per i nostri scopi. Si vede così che se $B_0 = 10^{-3}T$, $r = 1 \text{ cm}$, $B_{g,max} = 0.1 T$, allora $s \geq 0.2 \text{ mm}$. Notiamo inoltre che la efficacia di una data schermatura migliora di più aggiungendo un ulteriore guscio ferromagnetico di spessore s' all'interno di un primo schermo di spessore s , anziché aumentando di s' lo spessore di quest'ultimo; naturalmente si dovrà aver cura di evitare la saturazione in ognuno degli schermi.

La configurazione a guscio sferico non è la più pratica e configurazioni a mo' di cilindro sono più utilizzate. In questo caso valgono ancora, approssimativamente, le conclusioni di sopra, non fosse altro perché, almeno nel limite $\mu \rightarrow \infty$, il campo \vec{B} nella cavità di un materiale ferromagnetico tende a zero, indipendentemente dalla sua forma (vedi Appendice D). Uno schermo magnetico cilindrico è ad esempio utilizzabile in connessione con un sonda di Hall, per determinare la tensione di offset: infatti montando attorno alla sonda uno schermo magnetico cilindrico è possibile ridurre a valori trascurabili il campo magnetico residuo (per esempio quello terrestre) e così misurare la tensione di offset della sonda. Preventivamente è opportuno procedere alla smagnetizzazione dello schermo: infatti, soprattutto se esso precedentemente è stato usato in presenza di campi magnetici intensi, è possibile che, a causa dell'area finita del ciclo di isteresi del materiale, esso possieda una magnetizzazione residua. Se essa è presente, montato lo schermo attorno alla sonda e ruotandolo lungo il suo asse (Fig.15), l'indicazione della sonda cambia.

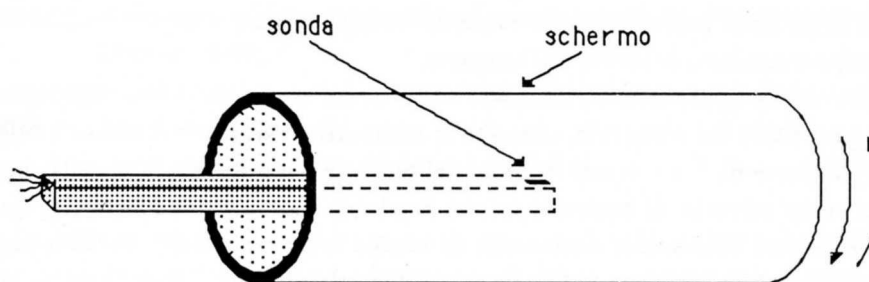


Fig.XIX.15

E' possibile anche, partendo da una condizione di schermo smagnetizzato, misurarne l'efficacia: infatti lo si può prima porre attorno alla sonda, verificare che essa misuri la tensione di offset, e poi inserire il tutto fra le espansioni polari dell'elettromagnete (anch'esso inizialmente smagnetizzato) e quindi registrare il campo sulla sonda all'aumentare dell'eccitazione dell'elettromagnete. Si otterrà una curva del tipo in Fig.16, ovvero campo nullo (entro la sensibilità del metodo) fino a una certa corrente nell'elettromagnete e successivamente - quando lo schermo è saturato - una curva che si discosta da quella ottenuta in assenza di schermo per una quantità fissa ΔB .

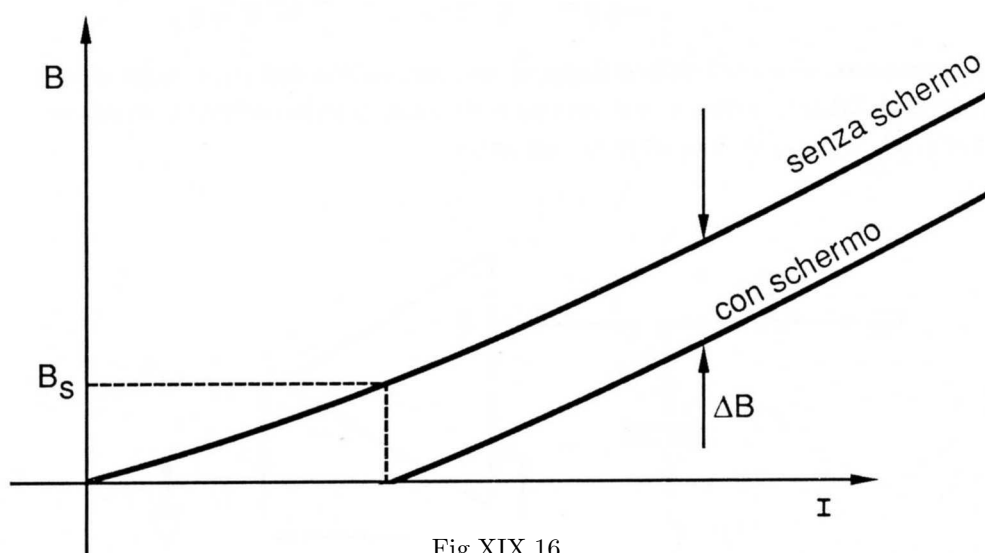


Fig.XIX.16

Se la sonda è tarata, è possibile determinare il valore massimo del campo \vec{B}_s che lo schermo è in grado di eliminare dal suo interno. Per valori $B > B_s$ lo schermo resta *saturo* e pertanto continua a rimuovere dal campo nella cavità soltanto una intensità costante di B pari a B_s .

6.— Un'altra applicazione della sonda di Hall: un wattmetro a stato solido

Oltre all'impiego ora descritto per la misura di campi magnetici, la sonda a effetto Hall può trovare impiego in molte altre applicazioni e fra queste alcune utilizzano la sonda come *rivelatore di prossimità*. Se, ad esempio, su un corpo in movimento è montato un magnete permanente, una

sonda di Hall è in grado di percepire la vicinanza del corpo - senza per questo venirne in contatto - rivelando il campo magnetico prodotto dal magnete.

Descriviamo ora un'applicazione particolare della sonda, quella cioè di *moltiplicatore analogico* che, come detto nel titolo del paragrafo, consente la realizzazione di uno strumento a valore efficace. Supponiamo di disporre di due correnti funzioni del tempo e periodiche $i_1(t)$ e $i_2(t)$: una di queste (i_1) sia inviata come corrente di controllo in una sonda di Hall, mentre l'altra (i_2) percorra una bobina producendo così nello spazio circostante un campo magnetico $\vec{B}_2(t)$, la cui intensità in ogni punto e in ogni istante risulterà proporzionale a $i_2(t)$; in tale campo si trova immersa la sonda. La tensione V_H misurata ai capi della sonda sarà pertanto (vedi (5)):

$$V_H(t) = \alpha i_1(t) i_2(t) \quad (\text{XIX.42})$$

ovvero essa sarà, istante per istante, proporzionale al prodotto delle due correnti; in questo senso il dispositivo si comporta come un moltiplicatore analogico. Di qui alla realizzazione di uno strumento a valore efficace, ad esempio un wattmetro, il passo è breve: per far ciò basta collegare l'uscita della sonda a un circuito $R-C$ passa-basso avente una costante di tempo τ tale che $\tau \gg T$ con T periodo della funzione $f(t) = i_1(t)i_2(t)$. Infatti supponendo di sviluppare $f(t)$ in serie di Fourier:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \left(n \frac{2\pi}{T} t \right) + b_n \sin \left(n \frac{2\pi}{T} t \right) \right] \quad (\text{XIX.43})$$

tutte le componenti sinusoidali dello sviluppo danno una caduta sostanzialmente nulla sul condensatore (vedi Cap.XII,§2), mentre solo il termine costante a_0 (corrispondente al valore medio di $f(t)$, ovvero a $\langle i_1(t) \cdot i_2(t) \rangle$) dà una tensione non nulla.

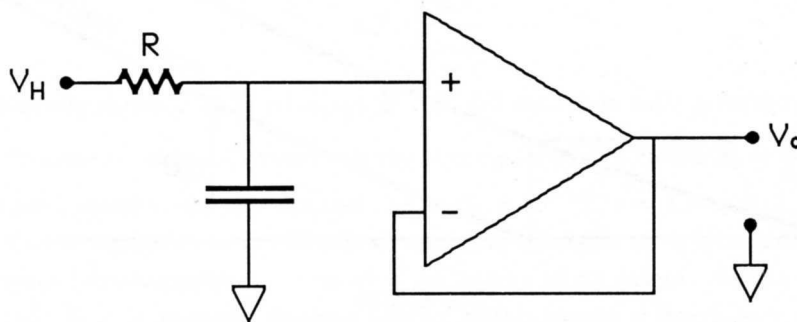


Fig.XIX.17

Con riferimento alla Fig.17, la tensione V_0 sul condensatore riprodotta dal *follower* sarà quindi proporzionale a $\langle i_1(t) \cdot i_2(t) \rangle$. A seconda della configurazione circuitale associata a $i_1(t)$ e $i_2(t)$ sarà quindi possibile realizzare un wattmetro, un amperometro a valore efficace, un voltmetro a valore efficace; per avere un wattmetro basterà infatti che i_1 sia la corrente che passa su un certo carico Z e i_2 sia proporzionale alla ddp sull'elemento Z (vedi Cap.XI,§2); per avere un amperometro o un voltmetro basterà fare in modo che $i_1 = i_2$ (vedi Cap.XI,§3).

NOTA BIBLIOGRAFICA

Su **KI 76** e **Fr 71** è trattato l'effetto Hall "statico". Una presentazione dell'effetto Hall in condizioni "dinamiche" si può trovare su:

Wieder: "Laboratory notes on electrical and Galvanomagnetic measurements"
Elsevier (1979).

Per le proprietà magnetiche dei materiali (almeno per il livello di approfondimento che ci interessa) si vedano **KR 84**, **FR 71** e il Cap.7 di:

Corson,Lorrain: "Electromagnetic Field and waves"
Freeman (1962).

Per il calcolo dell'efficacia di uno schermo magnetico, su **JA 75** si trova impostato e risolto il problema nel caso di un guscio sferico. L'appendice D del testo tratta questo caso e anche quello dello schermo cilindrico indefinito.

LA CONVERSIONE DI ENERGIA ELETTROMAGNETICA E MECCANICA

1.— *Introduzione*

Il problema della conversione di energia dalla forma elettrica o magnetica a quella meccanica costituisce senz'altro un campo di interesse oltre che speculativo, anche tecnico e pratico. In questo capitolo ci limiteremo a illustrare i principi che regolano i meccanismi di conversione dell'energia da una forma all'altra facendo riferimento ad alcuni semplici esempi e ammettendo che i materiali dielettrici o ferromagnetici si comportino *linearmente*. Questo ultimo punto è indubbiamente una schematizzazione che in molti casi può risultare anche grossolana; essa consente però di capire i meccanismi fisici principali alla base dei fenomeni. Vedremo anche qualche esempio di risoluzione di macchine elettriche e magnetiche mediante bilanci energetici; inoltre tratteremo alcuni casi semplificati di motori in continua e a induzione.

2.— *Energia accumulata in un condensatore*

Consideriamo il circuito $R - C$ serie di Fig.1 con $v(t)$ funzione generica del tempo.

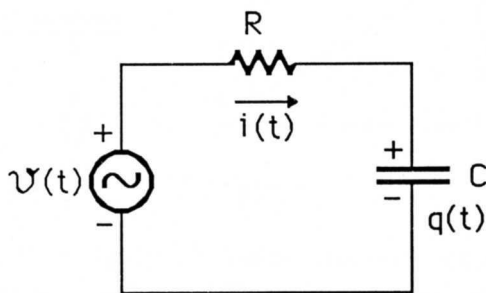


Fig.XX.1

Istante per istante varrà la legge di Kirchhoff (ammettiamo cioè di essere in condizioni quasi-stazionarie):

$$v(t) = i(t)R + \frac{q(t)}{C} \quad (\text{XX.1})$$

Moltiplicando entrambi i membri per $i(t)$ e riordinando i vari termini, otteniamo:

$$v(t)i(t) - i^2(t)R = \frac{q(t)}{C}i(t) \quad (\text{XX.2})$$

Questa espressione può interpretarsi come un *bilancio energetico*: la potenza istantanea fornita dal generatore (vi) meno le perdite per effetto Joule (i^2R) danno l'incremento per unità di tempo dell'energia accumulata sotto forma di campo elettrico fra le armature del condensatore; infatti il membro di destra $\frac{q(t)}{C}i(t)$ può essere interpretato come la derivata temporale della quantità:

$$W_E = \frac{1}{2} \frac{q^2(t)}{C} \quad (\text{XX.3})$$

che, come è noto dall'elettrostatica, misura proprio l'energia associata alle cariche presenti sulle armature del condensatore.

Consideriamo il caso particolare in cui $v(t) = 0$ per $t < 0$, $v(t) = V$ per $t \geq 0$, con $q(0) = 0$, cioè consideriamo il transitorio che si verifica durante la carica del condensatore tramite un generatore reale di tensione (vedi Cap. VI, §2). Sappiamo che per t sufficientemente grande rispetto a $\tau = RC$, su ognuna delle due armature del condensatore è accumulata una carica di valore assoluto pari a $Q_\infty = CV$ e pertanto l'energia accumulata vale $W_E = \frac{1}{2} \frac{Q_\infty^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} Q_\infty V$. Ricordando l'andamento temporale di $i(t)$ nel transitorio $i(t) = \frac{V}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$ è possibile anche, integrando la (2) fra $t = 0$ e $t = \infty$, quantificare le voci che contribuiscono al bilancio energetico del sistema:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{V^2}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) dt - \int_0^\infty \frac{V^2}{R^2} R \exp\left(-2\frac{t}{RC}\right) dt = \\ & = \frac{V^2}{R} \left[RC \int_0^\infty \frac{1}{RC} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) dt - \frac{RC}{2} \int_0^\infty \frac{2}{RC} \exp\left(-\frac{2t}{RC}\right) dt \right] = \frac{1}{2} CV^2 \end{aligned} \quad (\text{XX.4})$$

Si vede così che per accumulare una certa energia nel condensatore il generatore ha dovuto compiere un lavoro esattamente doppio, di cui metà è andato poi disperso come aumento di energia interna del termostato a cui R è accoppiata. Alla fine dell'operazione abbiamo comunque a disposizione dell'energia immagazzinata sotto forma di campo elettrico fra le armature. Stacciamo ora il condensatore dal circuito, facendo in modo che le due armature restino isolate; un modo per ottenere la restituzione dell'energia accumulata è quello di scaricare il condensatore chiudendolo su una resistenza r . Alla fine della scarica, cioè dopo un tempo $t \gg rC$, avremo $Q = 0$ e tutta l'energia sarà stata dissipata per effetto Joule sulla resistenza. Se le armature del condensatore sono mobili, una rispetto all'altra, possono cioè essere avvicinate o allontanate a piacere, allora è possibile ottenere un lavoro meccanico*. Supponiamo allora, mantenendo isolate le armature del condensatore, di lasciarle avvicinare e supponiamo di farlo a velocità costante, magari anche estremamente piccola, così da poter trascurare nel bilancio energetico il contributo dell'energia cinetica associata al moto delle armature stesse. Se le avviciniamo fino a distanza praticamente nulla, abbiamo alla fine una capacità C' molto grande e poiché la carica su ognuna delle due armature non è cambiata (le armature sono isolate) ciò significa che l'energia accumulata sotto forma di campo elettrico fra le armature è passata (Q è costante!) dal valore $W_E = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$ al valore $W'_E = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C'} \approx 0$ ($C' \gg C$). Pertanto l'energia accumulata sotto forma di campo elettrico è cambiata di

$$\Delta W_E = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (\text{XX.5})$$

Che fine ha fatto questa energia? Evidentemente è stato compiuto del lavoro meccanico durante la fase di avvicinamento e infatti per compiere l'avvicinamento a velocità costante abbiamo dovuto

* ovviamente in tutte le argomentazioni precedenti abbiamo supposto $C = \text{cost}$, cioè doveva esistere un vincolo meccanico che teneva fissa la posizione mutua delle armature.

frenare le armature che tendevano ad attrarsi: è stato così ottenuto del lavoro meccanico, ad esempio il sollevamento di un peso come in Fig.2.

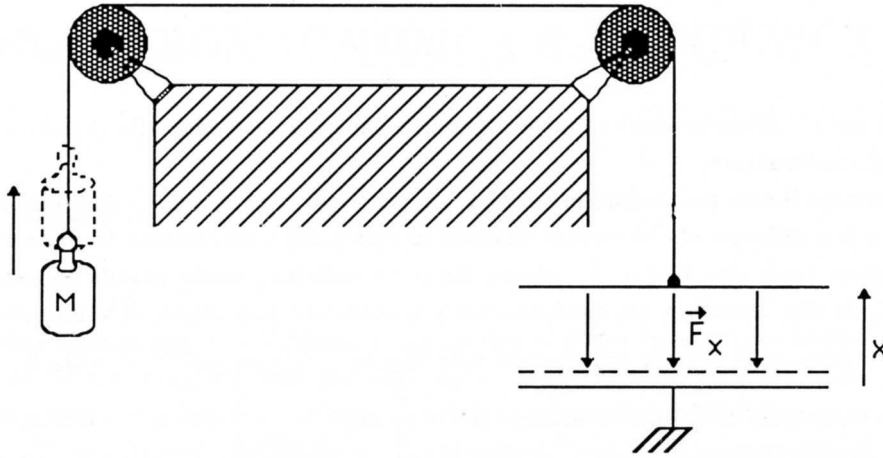


Fig.XX.2

Verifichiamo questo fatto calcolando la forza con cui le armature si attraggono, nell'ipotesi che il condensatore sia a facce piane e parallele (e trascurando la perturbazione del campo ai bordi). Detta S la superficie delle due armature, x la distanza generica fra di esse, abbiamo che il campo elettrico sulla armatura mobile dovuto a quella fissa (vedi Fig.2) vale ($\epsilon_r = 1$):

$$|\vec{E}_x| = \frac{Q}{2\epsilon_0 S} \quad (\text{XX.6})$$

e pertanto la forza che agisce sulla armatura mobile vale:

$$F_x = -\frac{Q^2}{2\epsilon_0 S} \quad (\text{XX.7})$$

Se Q è - come abbiamo supposto - costante, il lavoro che questa forza compie nell'avvicinare le due armature dalla distanza generica d a $x = 0$ è:

$$\int_d^0 F_x dx = -F_x d = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S} d = \frac{Q^2}{2C(d)} \quad (\text{XX.8})$$

dove $C(d)$ è il valore della capacità del condensatore quando le due armature distano d . Si è verificato così che l'entità del lavoro ottenuto coincide con la diminuzione dell'energia accumulata (vedi (5)). Nel caso ora esaminato il bilancio fra energia perduta e lavoro fatto non richiede nessun altro tipo di apporto esterno poiché abbiamo considerato il condensatore isolato e non abbiamo fornito né assorbito energia dall'esterno in alcun altro modo. Generalizzando il caso ora esaminato, se le armature del condensatore posseggono un generico grado di libertà geometrico relativo θ , cioè se $C = C(\theta)$, abbiamo che per ogni variazione infinitesima $\Delta\theta$ si ottiene un lavoro meccanico ΔW_{mecc} pari alla diminuzione dell'energia immagazzinata nel condensatore (a Q costante); possiamo cioè scrivere:

$$\Delta W_{mecc} = -\Delta W_E = -\Delta \left(\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C(\theta)} \right) = \frac{Q^2}{2C^2} \Delta C(\theta) \Big|_{Q=cost} \quad (\text{XX.9})$$

La (9), esprimendo ΔW_{mecc} come $F_\theta \Delta\theta$ e $\Delta C(\theta) = \left. \frac{\partial C}{\partial \theta} \right|_Q \Delta\theta$, con F_θ forza o momento a seconda che θ sia una coordinata lineare o uno spostamento angolare, ci dice che:

$$F_\theta = - \left. \frac{\partial W_E}{\partial \theta} \right|_Q = \frac{Q^2}{2C^2} \frac{\partial C}{\partial \theta} = \frac{1}{2} V^2 \frac{\partial C}{\partial \theta} \quad (\text{XX.10})$$

Vedremo più avanti qualche applicazione della (10); per ora limitiamoci a osservare che essa riproduce l'espressione (7) con $C = \frac{\epsilon_0 S}{x}$; infatti $\frac{\partial C}{\partial x} = -\frac{\epsilon_0 S}{x^2}$ e $F_x = -\frac{Q^2}{2\epsilon_0 S}$.

L'entità delle forze che si possono così ottenere è assai piccola; ad esempio supponendo $S = 10 \text{ cm}^2$, $d = 10^{-4} \text{ m}$, si ha $C \approx 88 \text{ pF}$ e per $V = 100 \text{ V}$, $F \approx 4.4 \cdot 10^{-3} \text{ N}$.

Ripetiamo ora il nostro esperimento di avvicinamento delle armature, ma questa volta collegando in permanenza il condensatore a un generatore di ddp V (vedi Fig.3), ammettendo per ora che la resistenza del circuito sia trascurabile.

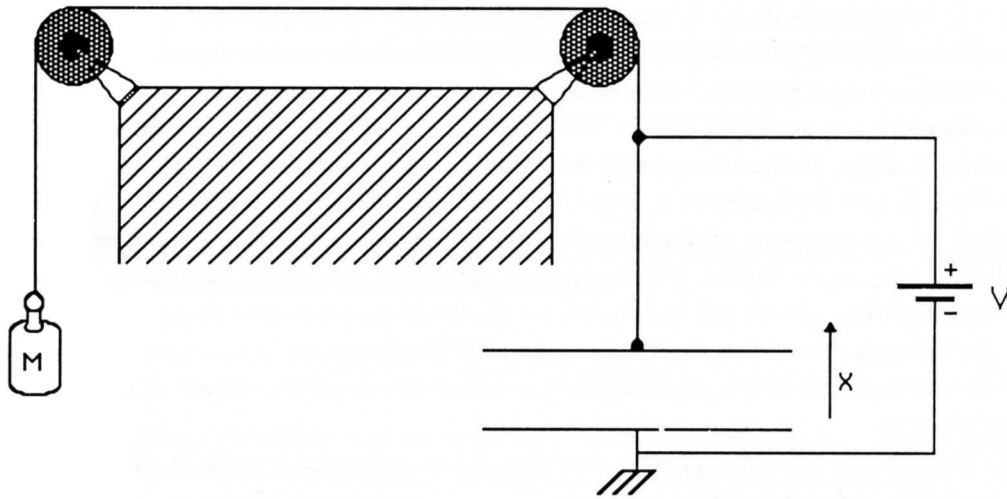


Fig.XX.3

La situazione è assai differente dal caso prima visto; infatti se effettuiamo uno spostamento infinitesimo $-\Delta x$ (cioè lasciamo avvicinare le armature), otteniamo del lavoro, ma ora non a spese dell'energia accumulata nel condensatore (essa aumenta!) bensì a spese del generatore di tensione. In generale, supponiamo che la capacità dipenda da un generico grado di libertà geometrico θ e facciamo compiere uno spostamento infinitesimo $\Delta\theta$ di tale coordinata: avremo un certo lavoro meccanico che esprimeremo nella forma:

$$\Delta W_{mecc} = F_\theta \Delta\theta \quad (\text{XX.11})$$

La capacità del condensatore passa dal valore $C(\theta)$ al valore $C(\theta + \Delta\theta) = C(\theta) + \frac{\partial C}{\partial \theta} \Delta\theta$ e pertanto l'energia immagazzinata cambia di:

$$\Delta W_E = \frac{1}{2} C(\theta + \Delta\theta) V^2 - \frac{1}{2} C(\theta) V^2 = \frac{1}{2} V^2 \frac{\partial C}{\partial \theta} \Delta\theta \quad (\text{XX.12})$$

Quanto al lavoro fatto dal generatore, esso si può calcolare notando che la carica $\Delta Q = V \Delta C$ è stata portata al potenziale V :

$$\Delta W_{gen} = V \Delta Q = V^2 \Delta C = V^2 \frac{\partial C}{\partial \theta} \Delta\theta \quad (\text{XX.13})$$

Imponendo quindi che il lavoro fatto dal generatore uguagli la somma del lavoro meccanico ottenuto e dell'aumento di energia immagazzinata nel condensatore si ottiene:

$$\Delta W_{mecc} = \Delta W_{gen} - \Delta W_E \quad (V = cost) \quad (XX.14)$$

che in virtù delle (11), (12) e (13) può mettersi nella forma:

$$F_\theta \Delta\theta = V^2 \frac{\partial C}{\partial \theta} \Delta\theta - \frac{1}{2} V^2 \frac{\partial C}{\partial \theta} \Delta\theta = \frac{1}{2} V^2 \frac{\partial C}{\partial \theta} \Delta\theta \quad (XX.15)$$

Possiamo sintetizzare il risultato dicendo che per $V = cost$:

$$F_\theta = \left. \frac{\partial W_E}{\partial \theta} \right|_{V=cost} = \frac{1}{2} V^2 \frac{\partial C}{\partial \theta} \quad (XX.16)$$

Rispetto alla (10) in cui veniva affrontato il caso analogo per il condensatore isolato (cioè Q costante e non V), l'espressione di F_θ in funzione di W_E cambia sostanzialmente (questa volta l'energia accumulata aumenta), pur essendo il valore della forza nei due casi lo stesso. Il motivo di questo ultimo risultato è assai semplice: dato un condensatore con una certa carica accumulata su di esso (o alternativamente con una certa ddp fra le armature) la forza dipende solo dal valore della capacità e dallo stato di carica, indipendentemente dal tipo di collegamento esterno delle armature. Tuttavia, fissati C e Q (e quindi V), mentre la forza è la stessa indipendentemente dal circuito esterno, i bilanci energetici nei due casi sono profondamente diversi: nel caso che la carica sia mantenuta costante, cioè il condensatore sia isolato, l'unico apporto di energia può venire dall'energia immagazzinata nel campo elettrico, mentre nel caso in cui sia applicato un generatore di ddp si trova ((14), (15), (16)) che l'energia viene tutta fornita dal generatore e addirittura in una quantità doppia rispetto al lavoro meccanico prodotto, essendo l'altra metà necessaria all'incremento di energia accumulata nel condensatore.

Se avessimo anche contemplato la presenza di una resistenza in serie al circuito, il generatore avrebbe dovuto provvedere anche a rifornire l'energia perduta per effetto Joule durante lo spostamento delle cariche. Il fatto che la (16) e la (10) siano numericamente identiche, non vuol certo dire che partendo da una medesima condizione iniziale, in uno spostamento *finito* il lavoro meccanico ottenibile sia lo stesso: infatti abbiamo visto che dal sistema meccanico corrispondente alla Fig.2, l'avvicinamento delle armature da una distanza $x = d$ a $x = 0$ porta l'ottenimento di un lavoro pari a (vedi (6)):

$$W_{mecc} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C(d)} = \frac{1}{2} C(d) V^2(d)$$

dove $V(d)$ rappresenta la ddp quando le armature sono poste a $x = d$. Abbiamo anche visto che la forza con cui le armature si attraggono è indipendente da x e vale:

$$F_x = -\frac{Q^2}{2\epsilon_0 S}$$

con Q costante. Il caso illustrato in Fig.3 è completamente diverso e il lavoro meccanico che si riesce a ottenere con il medesimo spostamento da $x = d$ a $x = 0$ è calcolabile integrando fra $x = d$ e $x = 0$ la forza F_x , che questa volta dipende da x ; infatti la (16) ci dice:

$$F_x = \frac{1}{2} V^2 \frac{\partial C}{\partial x} = -\frac{1}{2} V^2 \frac{\epsilon_0 S}{x^2} \quad (XX.17)$$

con V costante, cioè una forza che diverge per $x \rightarrow 0$. Fisicamente ciò corrisponde al fatto che il generatore sta rifornendo carica alle armature di un condensatore la cui capacità cresce e pertanto tali cariche si attraggono con una forza crescente. Il lavoro meccanico complessivo vale pertanto:

$$W_{mecc} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_d^\delta F_x dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{V^2 \epsilon_0 S}{2x} \Big|_d^\delta \quad (\text{XX.18})$$

che dà luogo a un lavoro infinito.

Come altra applicazione della (10) (o della (16)) esaminiamo ora il caso di un condensatore in cui possa inserirsi un dielettrico con costante dielettrica $\epsilon_r > 1$ (vedi Fig.4).

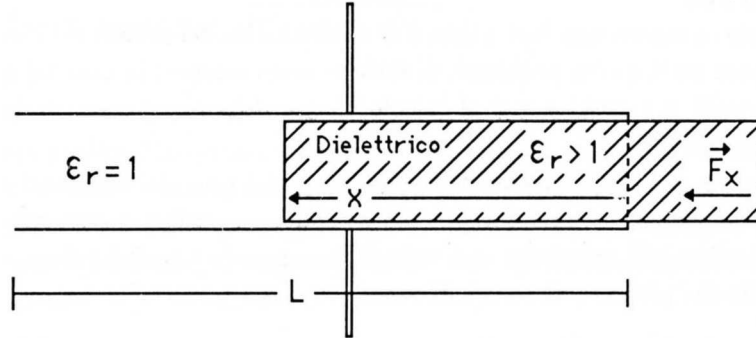


Fig. XX.4

Il valore della capacità in funzione della coordinata x è dato dal parallelo di due condensatori, di cui uno con un dielettrico avente $\epsilon = \epsilon_0$ e l'altro $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$:

$$C(x) = \frac{\epsilon_0 W (L - x)}{d} + \frac{\epsilon_0 \epsilon_r W x}{d} \quad (\text{XX.19})$$

dove W è la dimensione perpendicolare al piano del foglio delle armature del condensatore, supposto rettangolare (trascuriamo gli effetti di bordo). In base alla (10) e (16) abbiamo pertanto per la forza F_x :

$$F_x = \frac{1}{2} V^2 \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{1}{2} V^2 \frac{\epsilon_0 W}{d} (\epsilon_r - 1) \quad (\text{XX.20})$$

vale a dire una forza che attrae il dielettrico dentro le armature. Se compiamo l'avvicinamento (da $x = 0$ fino a $x = L$) a carica costante, vale a dire con il condensatore isolato, otteniamo per il lavoro ($F_x = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} \frac{\partial C}{\partial x}$):

$$\begin{aligned} W_{mecc}(Q = cost) &= \int_0^L F_x dx = \frac{1}{2} Q^2 \int_{C(0)}^{C(L)} \frac{1}{C^2(x)} dC = \\ &= \frac{Q^2 d}{2 \epsilon_0 W L} \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right) = \frac{1}{2} V^2 (x=0) C(x=0) \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \end{aligned} \quad (\text{XX.21})$$

Se viceversa lasciamo compiere l'avvicinamento mantenendo il condensatore collegato a un generatore di ddp pari a V ($= V(x=0)$ della (21)) abbiamo:

$$\begin{aligned} W_{mecc}(V = cost) &= \int_0^L F_x dx = \frac{1}{2} V^2 \frac{\epsilon_0 W}{d} (\epsilon_r - 1) \int_0^L dx = \\ &= \frac{1}{2} V^2 (x=0) C(x=0) (\epsilon_r - 1) \end{aligned} \quad (\text{XX.22})$$

ovvero un lavoro ϵ_r (> 1) volte maggiore che nel caso precedente. Corrispondentemente si trova che l'energia immagazzinata è aumentata di una quantità pari a:

$$W_E(x=L) - W_E(x=0) = \frac{1}{2} [C(L) - C(0)] V^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 W L}{d} (\epsilon_r - 1) V^2 \quad (\text{XX.23})$$

ovvero pari a W_{mecc} ; ciò significa che il generatore - come si può facilmente verificare calcolandolo direttamente - ha fatto un lavoro equivalente al doppio di ognuno di questi due contributi (lavoro meccanico + aumento di energia immagazzinata).

Se volessimo calcolare direttamente la forza che agisce sul dielettrico - così come abbiamo fatto nel caso del condensatore piano con le armature mobili - ci troveremmo di fronte a non poche difficoltà: infatti il calcolo comporterebbe la conoscenza del campo disperso ai bordi delle armature e conseguentemente la conoscenza dettagliata dell'elettrostatica del problema. Il metodo di risoluzione visto prima supera tutti questi problemi; di fatto si cerca sempre, in casi del genere, di ricondursi a calcoli come quelli ora svolti e mai al calcolo diretto delle forze agenti tramite la soluzione del problema elettrostatico.

Un altro esempio di applicazione della (16) si ha nel caso dei voltmetri elettrostatici, di cui descriveremo sommariamente uno dei tipi più semplici: si tratta in sostanza (vedi Fig.5) di un condensatore in aria a più armature; una serie di armature (a lamelle) è fissa, mentre le altre sono sospese a un filo che presenta elasticità di torsione.

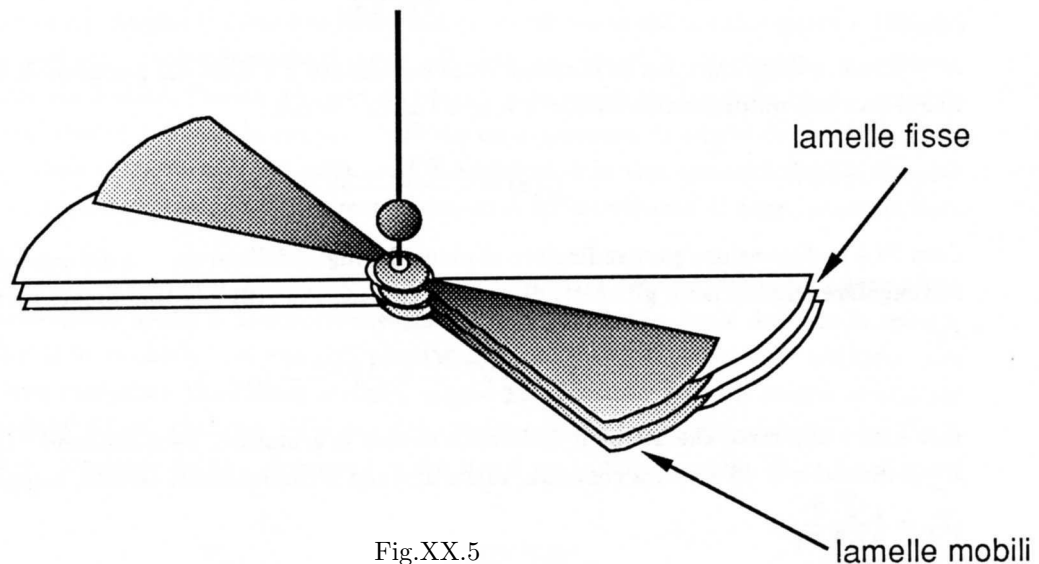


Fig.XX.5

Il valore della capacità del condensatore dipende dal valore dell'angolo θ di cui sono ruotate le armature mobili rispetto a quelle fisse. Detto C_M il valore massimo della capacità, quando cioè le armature sono completamente affacciate le une alle altre ($\theta = \theta_M$) avremo, trascurando gli effetti ai bordi:

$$C(\theta) = C_M \frac{\theta}{\theta_M} \quad (\text{XX.24})$$

$\theta = 0$ denota pertanto l'angolo per cui le armature non presentano più superfici affacciate. Detta E la costante del filo (o la costante della molla di richiamo montata sull'albero di sospensione) l'applicazione di una ddp V ai capi delle due armature provoca una torsione che all'equilibrio vale (vedi la (16)):

$$\theta = \frac{1}{E} \frac{\partial W_E}{\partial \theta} \Big|_{V=cost} = \frac{V^2}{2E} \frac{\partial C}{\partial \theta} = \frac{V^2}{2E} \frac{C_M}{\theta_M} \quad (\text{XX.25})$$

La torsione osservata è pertanto proporzionale al quadrato della ddp applicata alle armature. In *continua* lo strumento presenta una resistenza praticamente infinita e quindi si comporta da *elettrometro*; purtroppo questa ottima prerogativa si accompagna a una sensibilità assai modesta, sia per la piccolezza della coppia (25) sia perché la costante E risulta abbastanza grande a causa della robustezza del filo necessaria per sostenere la massa del condensatore variabile. Il pregio di uno strumento siffatto è la risposta quadratica che consente di adoperarlo per misurare il valore efficace di una tensione alternata, purché, al solito, la frequenza della tensione alternata sia molto maggiore dell'inverso del periodo proprio di oscillazione dell'elettrometro.

3.— *Energia di un sistema di correnti*

Dal punto di vista pratico l'importanza degli effetti meccanici associati alle correnti elettriche e dei relativi concetti di energia immagazzinata è largamente superiore rispetto agli analoghi casi elettrostatici (effetti meccanici delle cariche elettriche), non fosse altro a causa dell'esistenza dei materiali ferromagnetici; con l'impiego di questi, infatti si riescono ad ottenere da sistemi di correnti interagenti lavori meccanici di entità rilevante.

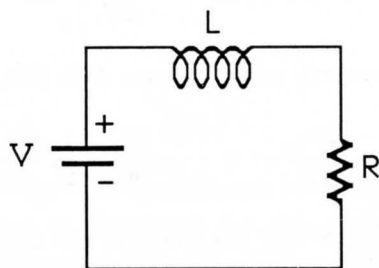


Fig.XX.6

Consideriamo dapprima un circuito costituito da una sola maglia e caratterizzato da una induttanza L e resistenza R (Fig.6); supponendo di applicare al tempo t una ddp $V = cost$ al sistema, sappiamo (Cap.VII, §3) che l'andamento della corrente nel circuito è del tipo:

$$i(t) = \frac{V}{R} \left[1 - \exp\left(-\frac{tR}{L}\right) \right] \quad (\text{XX.26})$$

Per $t \gg \frac{L}{R}$ la corrente è costante e pari a $\frac{V}{R}$. In un istante generico varrà (seconda legge di Kirchhoff):

$$V = L \frac{di}{dt} + iR \quad (\text{XX.27})$$

che, moltiplicando ambo i membri per i , ci dice che istante per istante:

$$Vi - i^2R = Li \frac{di}{dt} \quad (\text{XX.28})$$

Secondo la (28) la potenza fornita dal generatore (meno le perdite per effetto Joule) uguaglia la variazione per unità di tempo della funzione

$$W_M = \frac{1}{2} Li^2 \quad (\text{XX.29})$$

Si sarà riconosciuta in quest'ultima quantità l'energia immagazzinata sotto forma di campo magnetico nell'induttanza. Tale energia, ricordando che per definizione Li rappresenta il flusso Φ del campo \vec{B} concatenato col circuito, può anche mettersi nella forma:

$$W_M = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} \frac{\Phi^2}{L} \quad (\text{XX.30})$$

Confrontando questa espressione con la (3) ci si rende conto che esiste (secondo il solito principio di dualità) una stretta analogia fra le due espressioni; anzi esse sono formalmente identiche a patto che si facciano le seguenti sostituzioni:

$$Q \leftrightarrow \Phi \quad , \quad V \leftrightarrow i \quad , \quad C \leftrightarrow L$$

Pertanto restano valide tutte le conclusioni tratte circa l'energia e il lavoro meccanico ottenibile dalla variazione di assetto geometrico di un condensatore; *mutatis mutandis* si potranno cioè fare le medesime considerazioni su una induttanza L variabile. In particolare, supponendo che il valore di tale induttanza L abbia una dipendenza da un grado di libertà geometrico θ , $L = L(\theta)$, avremo che se la variazione di assetto avviene a flusso Φ costante, il lavoro meccanico ottenibile deve uguagliare la diminuzione di energia immagazzinata nel campo magnetico:

$$\Delta W_{mecc} = F_\theta \Delta\theta = - \left. \frac{\partial W_M}{\partial \theta} \right|_{\Phi} \Delta\theta \quad (\text{XX.31})$$

dove il membro di destra potrà esprimersi, tenendo conto della (30), come

$$F_\theta = - \left. \frac{\partial W_M}{\partial \theta} \right|_{\Phi} = \frac{1}{2} \frac{\Phi^2}{L^2} \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{1}{2} i^2 \frac{\partial L}{\partial \theta} \quad (\text{XX.32})$$

Giustificiamo esplicitamente la (31), ovvero dimostriamo che uno spostamento a flusso costante può farsi senza ulteriori apporti di energia dall'esterno salvo quella necessaria per compensare le perdite per effetto Joule, ipotesi sotto le quali è corretto scrivere la (31). Per far ciò notiamo che in un circuito in cui sia montata una induttanza variabile, la (27) va scritta facendo intervenire esplicitamente Φ :

$$V = \frac{d\Phi}{dt} + iR \quad (\text{XX.33})$$

Il primo termine del membro di destra sarà a sua volta costituito da due termini

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}(Li) = i \frac{dL}{dt} + L \frac{di}{dt} \quad (\text{XX.34})$$

Tuttavia se il flusso Φ non varia, avremo che istante per istante il generatore deve solamente fornire la potenza dissipata per effetto Joule; infatti posto $\frac{d\Phi}{dt} = 0$ nella (33), si ottiene:

$$Vi - i^2 R = 0 \quad (\text{XX.35})$$

Come caso particolare, se assumiamo che il nostro circuito (e in particolare l'induttanza) sia costituito da filo superconduttore, potremo proprio eliminare del tutto il generatore (cioè l'apporto di energia dall'esterno) e il flusso Φ si manterrà costante: la seconda legge di Kirchhoff applicata al circuito di Fig.6 con $V = 0$, $R = 0$ dà infatti:

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0 \quad (\text{XX.36})$$

La (36) può quindi considerarsi *intrinsecamente* collegata a una ipotesi di superconduttività della bobina.

Ritornando quindi al nostro caso, abbiamo visto che porre $\frac{d\Phi}{dt} = 0$ ovvero $\Phi = \text{cost}$, significa che l'apporto esterno di energia da parte del generatore è 0 (se il circuito è superconduttore) e quindi il generatore è assente, o è tale da vincere solo le perdite per effetto Joule e quindi dal punto di vista del lavoro meccanico tale apporto è ancora 0. Si noti che V non potrà in questo caso essere un generatore di tensione costante, ma V dipenderà piuttosto dal tempo in quanto i sarà una funzione del tempo determinata dal modo di variare di $L = L(t)$; infatti $\Phi = \text{cost}$ comporta (vedi (34)):

$$-L \frac{di}{dt} = i \frac{dL}{dt} = i \frac{\partial L}{\partial \theta} \dot{\theta} \quad (\text{XX.37})$$

che determina $i = i(t)$, note che siano $\dot{\theta}$ e $\frac{\partial L}{\partial \theta}$.

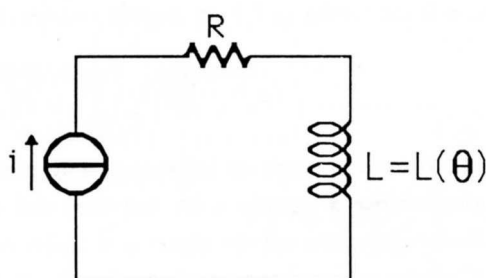


Fig.XX.7

Se supponiamo ora di far avvenire lo spostamento infinitesimo $\Delta\theta$, partendo dalle stesse condizioni di L e Φ e quindi di i , ma con un generatore di corrente inserito in serie nel circuito (Fig.7), che mantiene cioè costante la corrente i e sempre pari al valore iniziale, le considerazioni precedenti non possono più applicarsi; è facile convincersi che questa volta l'apporto di energia non è più nullo e il lavoro meccanico non è più uguale alla diminuzione dell'energia immagazzinata sotto forma di campo magnetico (tant'è vero che per $\frac{\partial L}{\partial \theta} > 0$, l'energia immagazzinata aumenta). Pertanto calcoliamoci esplicitamente i vari contributi di energia. Detta $V = V(t)$ la ddp presente ai capi del generatore di corrente avremo:

$$V = iR + i \frac{dL}{dt} \quad (\text{XX.38})$$

Il termine $L \frac{di}{dt}$ è stato eliminato perché $i = \text{cost}$. Moltiplicando per i entrambi i membri abbiamo:

$$Vi - i^2 R = i^2 \frac{dL}{dt} \quad (\text{XX.39})$$

D'altronde, effettuato uno spostamento infinitesimo $\Delta\theta$, la potenza meccanica istantanea - esprimibile come $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W_{mecc}}{\Delta t} = F_\theta \dot{\theta}$ - sarà uguale alla potenza ceduta dal generatore, meno le perdite per effetto Joule per unità di tempo, meno l'aumento di energia per unità di tempo immagazzinata sotto forma di campo magnetico; in formule:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W_{mecc}}{\Delta t} = F_\theta \dot{\theta} = Vi - i^2 R - \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} i \Phi \right) \quad (\text{XX.40})$$

Sostituendo la (39) nella (40) e sviluppando la derivata (tenendo conto che $i = cost$) otteniamo:

$$F_{\theta} \dot{\theta} = i^2 \frac{dL}{dt} - \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dt} = \frac{1}{2} i^2 \frac{\partial L}{\partial \theta} \dot{\theta} \quad (\text{XX.41})$$

che dà per F_{θ} il risultato (32) ottenuto precedentemente, ovvero:

$$F_{\theta} = \frac{1}{2} i^2 \frac{\partial L}{\partial \theta} \quad (\text{XX.42})$$

Si noti, come nel caso del condensatore in cui la tensione veniva mantenuta costante, che per ottenere un certo lavoro infinitesimo

$$F_{\theta} \Delta \theta = \frac{1}{2} i^2 \frac{\partial L}{\partial \theta} \Delta \theta \quad (\text{XX.43})$$

il generatore di corrente deve compiere un lavoro (vedi (39)) che, tolta la parte necessaria a compensare le perdite per effetto Joule, è uguale al doppio di quello che si ottiene sotto forma meccanica. Conseguentemente la forza, o il momento se θ è un angolo, è questa volta esprimibile come

$$F_{\theta} = \left. \frac{\partial W_M}{\partial \theta} \right|_i \quad (\text{XX.44})$$

in quanto il lavoro meccanico ottenuto è uguale all'aumento di energia immagazzinata sotto forma di campo magnetico. Analogamente a quanto visto nel caso del condensatore, l'espressione (42) (e quindi la (32)) per la forza associata a un sistema a induttanza variabile, non dipende dal particolare circuito in cui l'induttanza si trova montata, è indipendente cioè dai particolari vincoli imposti alle grandezze ($\Phi = cost, i = cost$).

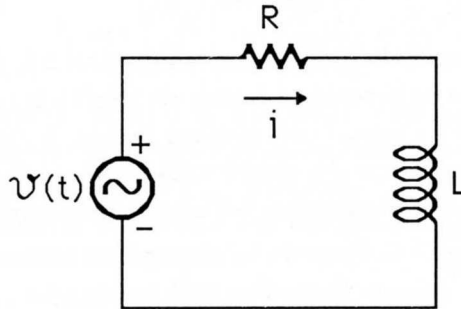


Fig. XX.8

Verifichiamo ciò in generale. In un circuito del tipo di Fig.8 istante per istante varrà:

$$v = iR + \frac{d\Phi}{dt} = iR + L \frac{di}{dt} + i \frac{dL}{dt} \quad (\text{XX.45})$$

mentre il bilancio energetico (40) potrà ancora esprimersi come

$$\begin{aligned} F_{\theta} \dot{\theta} &= vi - i^2 R - \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} i \Phi \right) = \\ &= vi - i^2 R - \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dt} - iL \frac{di}{dt} = vi - i^2 R + \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dt} - iL \frac{di}{dt} - i^2 \frac{dL}{dt} \end{aligned} \quad (\text{XX.46})$$

Moltiplicando entrambi i membri della (45) per i e riordinando i termini dei due membri, si ottiene:

$$vi - i^2 R - iL \frac{di}{dt} = i^2 \frac{dL}{dt} \quad (\text{XX.47})$$

che sostituita nella (46) dà:

$$F_\theta \dot{\theta} = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dt} = \frac{1}{2} i^2 \frac{\partial L}{\partial \theta} \dot{\theta} \quad (\text{XX.48})$$

che coincide con la (42). Questo risultato è generale poiché non abbiamo fatto alcun tipo di ipotesi sulla dipendenza di v e i dal tempo. Ovvero, indipendentemente dalla configurazione del circuito nel quale è montata l'induttanza, sarà possibile - se in essa circola una certa corrente i - ottenere una potenza meccanica istantanea data dalla (48). Tutto ciò ovviamente non significa che in uno spostamento finito in cui θ varia fra due valori θ_i e θ_f e conseguentemente L fra $L(\theta_i) = L_i$ e $L(\theta_f) = L_f$, il lavoro in tutti i casi sarà lo stesso; facciamo a questo proposito un esempio.

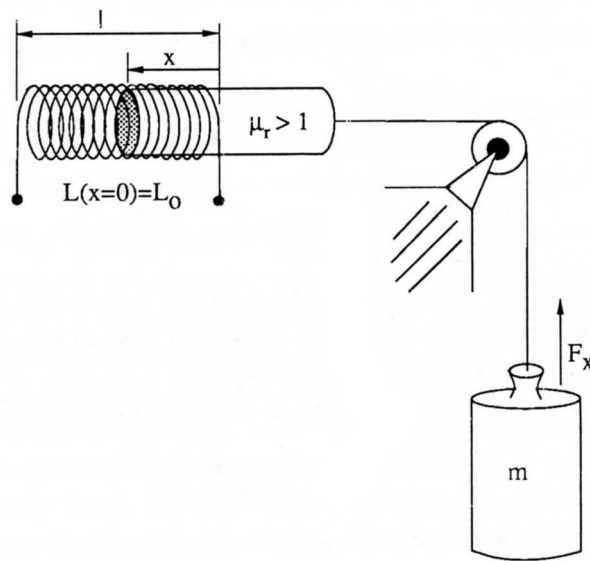


Fig.XX.9

Si tratta (Fig.9) di una induttanza a forma di solenoide, lunga l nella quale può essere inserito un nucleo di materiale ferromagnetico, avente permeabilità relativa $\mu_r > 1$. Per una generica posizione x del nucleo, l'induttanza varrà (si suppone il solenoide così lungo rispetto al diametro, da poter trascurare l'effetto delle masse magnetiche agli estremi del pezzetto di ferro):

$$L(x) = L_0 \left(\frac{l-x}{l} \right) + L_0 \mu_r \frac{x}{l} = L_0 \frac{l-x + \mu_r x}{l} = L_0 \frac{l + (\mu_r - 1)x}{l} \quad (\text{XX.49})$$

dove L_0 è l'induttanza del solenoide in aria (cioè senza alcuna porzione del nucleo inserita). Facciamo allora l'ipotesi di cambiare la posizione x dal valore $x = 0$ al valore $x = l$ e di farlo dapprima lasciando chiusa la bobina su un cortocircuito (supponendo la bobina superconduttrice). In questo caso sappiamo che il flusso di Φ si mantiene costante. Per un generico valore di i l'espressione della forza F_x sarà data dalla (42):

$$F_x = \frac{1}{2} i^2 \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{1}{2} i^2 L_0 \frac{(\mu_r - 1)}{l} \quad (\text{XX.50})$$

palesemente positiva ($\mu_r > 1$). Il lavoro meccanico che si ottiene lasciando penetrare completamente il nucleo sarà:

$$W_{mecc} = \int_0^l F_x dx = \frac{1}{2} \int_0^l i^2 \frac{\partial L}{\partial x} dx = \frac{1}{2} \int_{L_0}^{\mu_r L_0} \frac{\Phi^2}{L^2} dL = \frac{1}{2} \frac{\Phi^2(0)}{L_0} \left(\frac{\mu_r - 1}{\mu_r} \right) \quad (\text{XX.51})$$

dove con $\Phi = \Phi(0)$ si è indicato il flusso all'inizio della procedura di avvicinamento e che si mantiene costante durante tutto il moto. Il lavoro fatto dalla induttanza che *risucchia* il ferro dipende solo dal posto; l'andamento di x nel tempo, ovvero la conoscenza dettagliata della dinamica, dipenderà poi dal tipo di sistema meccanico effettivamente impiegato; ad esempio se il sistema è quello di Fig.9 dovremo anche scrivere l'equazione che regola la dinamica e supponendo per semplicità che la massa m del peso sia molto maggiore delle altre inerzie in gioco, avremo:

$$F_x - mg = m\ddot{x} \quad (\text{XX.52})$$

oppure, sfruttando il fatto che il lavoro di F_x dipende solo dalla posizione:

$$\int_0^x F_x dx = \frac{1}{2} \frac{\Phi(0)^2}{L_0} \left(\frac{-l}{l + (\mu_r - 1)x} + 1 \right) = \frac{1}{2} \frac{\Phi(0)^2}{L_0} \frac{(\mu_r - 1)x}{l + (\mu_r - 1)x} \quad (\text{XX.53})$$

possiamo scrivere:

$$\frac{1}{2} \frac{\Phi^2(0)}{L_0} \frac{(\mu_r - 1)x}{l + (\mu_r - 1)x} - mgx = \frac{1}{2} m [\dot{x}^2 - \dot{x}^2(0)] \quad (\text{XX.54})$$

Le condizioni iniziali nonché il valore di m determinano le modalità secondo cui il lavoro fatto dal solenoide si distribuirà fra energia potenziale della forza peso ed energia cinetica della massa. Dalla (54), per separazione delle variabili, si potrà ottenere $x = x(t)$. A questo punto il problema è completamente determinato anche dal punto di vista elettrico: infatti la seconda legge di Kirchhoff ci dice che:

$$i \frac{dL}{dt} + L \frac{di}{dt} = 0 \quad (\text{XX.55})$$

Avendo integrato la (54), è nota la dipendenza $L = L(x(t))$ e quindi anche la (55) può essere integrata e ci darà $i = i(t)$. Il problema è determinato anche nel caso in cui la costanza di Φ , per una bobina *non* superconduttrice, è ottenuta tramite un opportuno generatore di tensione $V(t)$; infatti avremo che:

$$V(t) = i(t)R \quad (\text{XX.56})$$

ovvero banalmente, $V(t)$ dovrà avere la stessa dipendenza dal tempo di $i(t)$, quella determinata dalla (55).

Se ora colleghiamo l'induttanza a un generatore di corrente costante $i = \frac{\Phi(0)}{L_0}$ e lasciamo, come prima, penetrare completamente il nucleo otteniamo:

$$W_{mecc} = \int_0^l F_x dx = \frac{1}{2} \int_0^l i^2 \frac{\partial L}{\partial x} dx = \frac{1}{2} i^2 \int_{L_0}^{\mu_r L_0} dL = \frac{1}{2} \frac{\Phi^2(0)}{L_0} (\mu_r - 1) \quad (\text{XX.57})$$

ovvero un lavoro μ_r volte più grande che nel caso precedente (51); evidentemente il generatore di corrente ha fornito questa energia, oltre a quella associata all'incremento di energia magnetica. Se anche questa volta vogliamo conoscere in dettaglio il moto, dobbiamo scrivere l'equazione che regola la dinamica del sistema (supponiamo che esso sia lo stesso di Fig.9), valutando il lavoro fatto dalla forza F_x :

$$\int_0^x F_x dx = \frac{1}{2} i^2 [L(x) - L_0] = \frac{1}{2} \frac{\Phi^2(0)}{L_0} (\mu_r - 1) \frac{x}{l} \quad (\text{XX.58})$$

Avremo pertanto:

$$\left(\frac{1}{2} \frac{\Phi^2(0)}{L_0 l} (\mu_r - 1) - mg\right) x = \frac{1}{2} [\dot{x}^2 - \dot{x}^2(0)] \quad (\text{XX.59})$$

Rispetto al caso precedente, essendo $F_x = cost$, si individua una soluzione particolarmente semplice: se cioè $\dot{x}(0) \neq 0$ e se $\frac{1}{2} \frac{\Phi^2(0)}{L_0 l} (\mu_r - 1) = mg$, ovvero se $F_x = mg$, allora il moto avviene con velocità costante $\dot{x}(0)$; se invece $F_x > mg$ si tratterà di un moto uniformemente accelerato.

Come nel caso precedente la conoscenza di \dot{x} permette di risolvere il problema anche dal punto di vista elettrico, poiché permette di risolvere l'equazione differenziale ottenuta dalla seconda legge di Kirchhoff (consideriamo il caso in cui $R \neq 0$):

$$V(t) = iR + i \frac{dL}{dt} = i \left(R + \frac{dL}{dt} \right) \quad (\text{XX.60})$$

ovvero di trovare la dipendenza di $V(t)$ dal tempo, cioè dalla ddp che si sviluppa ai capi del generatore di corrente costante i . Si noti che se siamo nel caso speciale sopra riportato di $\dot{x} = cost$, allora otteniamo $V = cost$.

Se ora consideriamo il caso in cui una induttanza è collegata a un generatore di tensione costante con in serie una resistenza R , non riusciamo più a risolvere banalmente il problema del calcolo del lavoro meccanico, poiché questa volta né Φ , né i si mantengono costanti e non è più possibile ricondurre l'integrale del lavoro $\frac{1}{2} \int_0^l i^2 \frac{\partial L}{\partial x} dx$ a una forma particolarmente semplice. Infatti i dipenderà da x e quindi da t e solo se la sua dipendenza da x o t è nota, è possibile il calcolo di W_{mecc} . La soluzione potrà venire solo dalla risoluzione del sistema che si ottiene scrivendo la seconda legge di Kirchhoff per il circuito e applicando il secondo principio della dinamica al sistema meccanico; le due equazioni non saranno cioè disaccoppiate come nei casi visti prima.

Passiamo a considerare il caso di due circuiti accoppiati induttivamente e per non perdere in generalità supponiamo che in ognuno di essi sia presente un generatore di tensione dipendente dal tempo con in serie una resistenza finita. Per l'insieme dei due circuiti possiamo scrivere:

$$\begin{cases} V_1 = i_1 R_1 + \frac{d\Phi_1}{dt} \\ V_2 = i_2 R_2 + \frac{d\Phi_2}{dt} \end{cases} \quad (\text{XX.61})$$

con

$$\begin{cases} \Phi_1 = i_1 L_1 + i_2 M \\ \Phi_2 = i_2 L_2 + i_1 M \end{cases} \quad (\text{XX.62})$$

Moltiplicando ambo i membri della prima delle (61) per i_1 e entrambi i membri della seconda delle (61) per i_2 e sommando quindi membro a membro le due equazioni così ottenute, abbiamo:

$$V_1 i_1 + V_2 i_2 = i_1^2 R_1 + i_2^2 R_2 + i_1 \frac{d\Phi_1}{dt} + i_2 \frac{d\Phi_2}{dt} \quad (\text{XX.63})$$

Sostituendo le (62) nella (63) e ammettendo in generale che L_1, L_2 e M dipendano dal tempo, si ottiene:

$$V_1 i_1 + V_2 i_2 - i_1^2 R_1 - i_2^2 R_2 = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} i_1^2 L_1 + \frac{1}{2} i_2^2 L_2 + i_1 i_2 M \right) + \frac{1}{2} i_1^2 \frac{dL_1}{dt} + \frac{1}{2} i_2^2 \frac{dL_2}{dt} + i_1 i_2 \frac{dM}{dt} \quad (\text{XX.64})$$

La (64), anche alla luce delle conclusioni dedotte nel caso di un solo circuito, può essere interpretata nel modo seguente: quello che avanza dalla potenza istantanea fornita dai generatori dopo aver

sottratto le perdite per effetto Joule (primo membro) finisce in aumento dell'energia immagazzinata sotto forma di campo magnetico ($W_M = \frac{1}{2}i_1^2L_1 + \frac{1}{2}i_2^2L_2 + i_1i_2M$) più eventualmente potenza meccanica $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W_{mecc}}{\Delta t} = \frac{1}{2}i_1^2 \frac{dL_1}{dt} + \frac{1}{2}i_2^2 \frac{dL_2}{dt} + i_1i_2 \frac{dM}{dt}$. Si noti che W_M può anche mettersi nella forma più generale

$$W_M = \frac{1}{2}i_1\Phi_1 + \frac{1}{2}i_2\Phi_2 \quad (\text{XX.65})$$

Per quanto riguarda l'energia meccanica, perdendo un po' in generalità, ma avvicinandoci ai casi di effettivo interesse pratico, supponiamo che L_1, L_2 siano costanti, ovvero che i due circuiti siano ognuno per conto proprio indeformabili, ma che sia $M = M(\theta)$, ovvero che la posizione mutua dei due circuiti possa cambiare e che dipenda da una coordinata generica θ . In questo caso allora la potenza meccanica ottenibile dal nostro sistema potrà mettersi sempre nella forma:

$$\text{Potenza Meccanica} = F_\theta \dot{\theta} = i_1i_2 \frac{\partial M}{\partial \theta} \dot{\theta} \quad (\text{XX.66})$$

Nell'ultimo passaggio si è sfruttata la (64) (nel caso di L_1, L_2 costanti). La (66) ci dice pertanto che la forza (o il momento) F_θ ottenibile da un sistema come quello ora descritto vale:

$$F_\theta = i_1i_2 \frac{\partial M}{\partial \theta} \quad (\text{XX.67})$$

La (67), per come è stata dedotta, è di validità assolutamente generale; infatti nessun tipo di ipotesi è stata invocata per i generatori V_1 e V_2 , né tantomeno per le resistenze R_1 e R_2 . Similmente a quanto visto nel caso di un solo circuito, mentre la (67) ha validità generale, l'espressione della forza generalizzata F_θ assume forme diverse (ad esempio in funzione dell'energia immagazzinata W_M) a seconda dei vincoli imposti sui generatori. Ad esempio se facciamo avvenire lo spostamento infinitesimo $\Delta\theta$ a flussi Φ_1, Φ_2 costanti avremo:

$$F_\theta = - \left. \frac{\partial W_M}{\partial \theta} \right|_\Phi \quad (\text{XX.68})$$

Se invece pensiamo di tenere le correnti i_1 e i_2 costanti, troviamo, come nel caso di un solo circuito, che il lavoro fornito dai generatori contribuisce in parti uguali al lavoro meccanico e all'aumento di energia immagazzinata magnetica, talché la forza F_θ risulta esprimibile come:

$$F_\theta = + \left. \frac{\partial W_M}{\partial \theta} \right|_i \quad (\text{XX.69})$$

Il risultato sintetizzato nella (67) può mettersi in una forma che meglio si presta a essere utilizzata in molti casi concreti, alcuni dei quali saranno incontrati più avanti; per ottenere questa espressione, osserviamo che la derivata parziale $\frac{\partial M}{\partial \theta}$ implicitamente assume che il tempo rimanga costante e pertanto, non dipendendo né i_1 né i_2 esplicitamente da θ , possiamo scrivere:

$$F_\theta = i_1i_2 \left. \frac{\partial M}{\partial \theta} \right|_t = i_1 \left. \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \right|_t = i_2 \left. \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} \right|_t \quad (\text{XX.70})$$

Abbiamo esplicitamente ricordato con il simbolo $\left|_t$ che il tempo deve essere preso costante nell'operazione di derivazione parziale; ricordiamo ancora che la (70) vale in generale, come la (67), purché L_1 e L_2 siano costanti. L'utilità dell'espressione (70) si coglierà poco più avanti quando vedremo che la formula consente di ottenere una espressione della forza (o del momento) anche nel

caso in cui non sia nota l'origine del campo di induzione magnetica \vec{B} , ma si conosca soltanto il valore del flusso di \vec{B} concatenato con il circuito.

Consideriamo ora degli spostamenti finiti della posizione mutua dei due circuiti e supponiamo che la coordinata si riferisca a una posizione angolare θ del circuito 1 rispetto a una direzione nello spazio (ammettiamo cioè che il circuito 2 sia fisso rispetto alla direzione di riferimento dell'angolo θ). Guardiamo quindi quali sono le espressioni che si ottengono per il lavoro meccanico e - in genere - per il bilancio energetico. Supponiamo anzitutto che le correnti *siano mantenute costanti* e facciamo compiere una rotazione al circuito 1 da $\theta = \theta_i$ a $\theta = \theta_f$. Se ci chiediamo quale è il lavoro meccanico ottenibile da questo spostamento dobbiamo calcolare ($\tau_\theta = F_\theta$):

$$W_{mecc} = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau_\theta d\theta = i_1 i_2 [M(\theta_f) - M(\theta_i)] \quad (\text{XX.71})$$

Si noti che in virtù della (69), la (71) poteva anche calcolarsi direttamente come

$$W_{mecc} = W_M(\theta_f) - W_M(\theta_i) = i_1 i_2 [M(\theta_f) - M(\theta_i)] \quad (\text{XX.72})$$

Se corrispondentemente vogliamo conoscere il lavoro fatto dai generatori (meno le perdite per effetto Joule), abbiamo dalla (61), con i_1, i_2 costanti:

$$\begin{cases} W_{gen1} = V_1 i_1 - i_1^2 R_1 = i_1 i_2 \int_0^t \frac{dM}{dt} dt = i_1 i_2 [M(\theta_f) - M(\theta_i)] \\ W_{gen2} = V_2 i_2 - i_2^2 R_2 = i_1 i_2 \int_0^t \frac{dM}{dt} dt = i_1 i_2 [M(\theta_f) - M(\theta_i)] \end{cases} \quad (\text{XX.73})$$

Si ritrova così che i generatori mantenendo le correnti costanti, fanno *complessivamente* un lavoro pari al doppio del lavoro meccanico ottenibile (l'altra metà è andata a finire come aumento di energia immagazzinata). Come nell'esempio del solenoide che risucchia una sbarretta di ferro, la soluzione al particolare problema elettromeccanico dipende dal sistema meccanico in cui il circuito si trova a interagire.

Consideriamo ora il caso in cui non sia compiuto lavoro elettrico (salvo che per compensare le perdite Joule) nel circuito 2, mentre manteniamo come prima costante la corrente i_1 nella bobina mobile. Ciò significa, come abbiamo già visto, che è costante il flusso Φ_2 di \vec{B} nel circuito 2; infatti se $\frac{d\Phi_2}{dt} = 0$ abbiamo:

$$V_2 i_2 - i_2^2 R_2 = \frac{d\Phi_2}{dt} \cdot i_2 = 0 \quad (\text{XX.74})$$

Questo esempio ha da una parte lo scopo di chiarire una volta di più il meccanismo di trasformazione dell'energia da una forma all'altra e il ruolo che i generatori svolgono, dall'altra di chiarire un aspetto particolarmente importante nello studio dei motori che verrà svolto successivamente. Tenendo presente quindi che i_1 e Φ_2 sono costanti possiamo calcolare il lavoro meccanico per uno spostamento finito $\theta_i \rightarrow \theta_f$, ricordando che l'espressione (67) è comunque valida:

$$W_{mecc} = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau_\theta d\theta = i_1 \int_{\theta_i}^{\theta_f} i_2(t) dM \quad (\text{XX.75})$$

Abbiamo portato fuori dal segno di integrazione i_1 in quanto costante. Per quanto riguarda $i_2(t)$ essa si può esprimere in funzione di Φ_2 ed M , ricordando che, per definizione:

$$\Phi_2 = i_2(t)L_2 + i_1 M \quad (\text{XX.76})$$

Pertanto

$$i_2(t) = \frac{\Phi_2}{L_2} - i_1 \frac{M}{L_2} \quad (\text{XX.77})$$

che, inserita nella (75), dà, essendo Φ_2 e i_1 costanti:

$$W_{mecc} = i_1 \frac{\Phi_2}{L_2} [M(\theta_f) - M(\theta_i)] - i_1^2 \frac{[M^2(\theta_f) - M^2(\theta_i)]}{2L_2} \quad (\text{XX.78})$$

Calcolando la (76) per $t = t_i$ e sostituendola nella (78), otteniamo:

$$W_{mecc} = i_1 i_2(t_i) [M(\theta_f) - M(\theta_i)] \left[1 - \frac{i_1 [M(\theta_f) - M(\theta_i)]}{2i_2(t_i)L_2} \right] \quad (\text{XX.79})$$

Quanto alla variazione di energia magnetica fra lo stato iniziale e quello finale abbiamo:

$$W_M(\theta_f) - W_M(\theta_i) = \frac{1}{2} i_1^2 L_1 + \frac{1}{2} i_2^2(t_f) L_2 + i_1 i_2(t_f) M(\theta_f) - \frac{1}{2} i_1^2 L_1 - \frac{1}{2} i_2^2(t_i) L_2 - i_1 i_2(t_i) M(\theta_i) \quad (\text{XX.80})$$

Esprimendo $i_2(t_f)$ in funzione di $i_2(t_i)$, in base alla relazione (76) che ci dice

$$\Phi_2 = i_2(t_i) L_2 + i_1 M(\theta_i) = i_2(t_f) L_2 + i_1 M(\theta_f) \quad (\text{XX.81})$$

otteniamo:

$$W_M(\theta_f) - W_M(\theta_i) = -i_1^2 \frac{[M^2(\theta_f) - M^2(\theta_i)]}{2L_2} \quad (\text{XX.82})$$

Quanto ai generatori, l'unico che, oltre a vincere le perdite, fa lavoro è quello del circuito 1; infatti dalla prima delle (61), tenendo presente che $i_1 = cost$, abbiamo:

$$W_{gen} = \int_{t_i}^{t_f} (V_1 i_1 - i_1^2 R_1) dt = i_1 \int_{t_i}^{t_f} \frac{d}{dt} (i_2(t) M) dt \quad (\text{XX.83})$$

Otteniamo così

$$W_{gen} = i_1 [i_2(t_f) M(\theta_f) - i_2(t_i) M(\theta_i)] \quad (\text{XX.84})$$

che, sfruttando la (81), può mettersi nella forma:

$$W_{gen} = i_1 i_2(t_i) [M(\theta_f) - M(\theta_i)] \left(1 - \frac{i_1 M(\theta_f)}{i_2(t_i) L_2} \right) \quad (\text{XX.85})$$

Possiamo verificare la correttezza dei calcoli controllando che il lavoro dei generatori (cioè del solo generatore 1) corrisponde alla somma dell'aumento di energia magnetica e del lavoro meccanico fatto:

$$W_{gen}(\theta_i \rightarrow \theta_f) = W_M(\theta_f) - W_M(\theta_i) + W_{mecc}(\theta_i \rightarrow \theta_f) \quad (\text{XX.86})$$

E' facile verificare che è effettivamente così, usando le (79), (82) e (85).

Anche in questo ultimo caso esaminato il lavoro meccanico associato a uno spostamento finito della posizione della bobina dipende solo dalla geometria; tuttavia il valore è diverso rispetto al caso in cui entrambe le correnti erano state mantenute costanti. Ciò si può fare confrontando la (79) con la (72), supponendo che per t_i , le condizioni geometriche ed elettromagnetiche siano identiche, in particolare che $i_2(t_i)$ sia uguale al valore costante i_2 del caso a cui la (72) si riferisce. La (79) ci mostra anche che la differenza fra i due casi è tanto più piccola quanto più grande è il contributo a Φ_2 derivante dal termine di autoinduzione ($i_2 L_2$) rispetto a quello di mutua induzione ($i_1 M$), cosa d'altronde assai ovvia in quanto nel caso in cui $i_1 M \ll i_2 L_2$ (per ogni t e θ) la costanza di Φ_2 si

riduce in una sostanziale costanza di i_2 e inoltre il lavoro meccanico compiuto dal sistema è una piccola variazione dell'energia magnetica del circuito 2. Si noti che nel caso attuale non è più vero che il lavoro fatto dai generatori si equipartisce fra le due forme meccanica e magnetica come nel caso in cui i_1 e i_2 venivano mantenute costanti.

Applichiamo ora queste conclusioni su qualche esempio concreto, tenendo inoltre presente che le tecniche sviluppate in questo paragrafo si possono adoperare per lo studio dettagliato degli strumenti elettrodinamici (per esempio il wattmetro studiato nel Cap.XI), per i quali l'espressione della coppia è molto più facilmente calcolabile mediante la (70) che non tramite il calcolo diretto, partendo dalle leggi di Laplace.

4.- Un esempio di conversione di energia elettromagnetica - meccanica

Supponiamo di avere un elettromagnete come in Fig.10, e nel traferro di questo poniamo un circuito costituito da una o più spire piane che possano ruotare attorno a un asse giacente su un piano parallelo alle espansioni polari dell'elettromagnete.

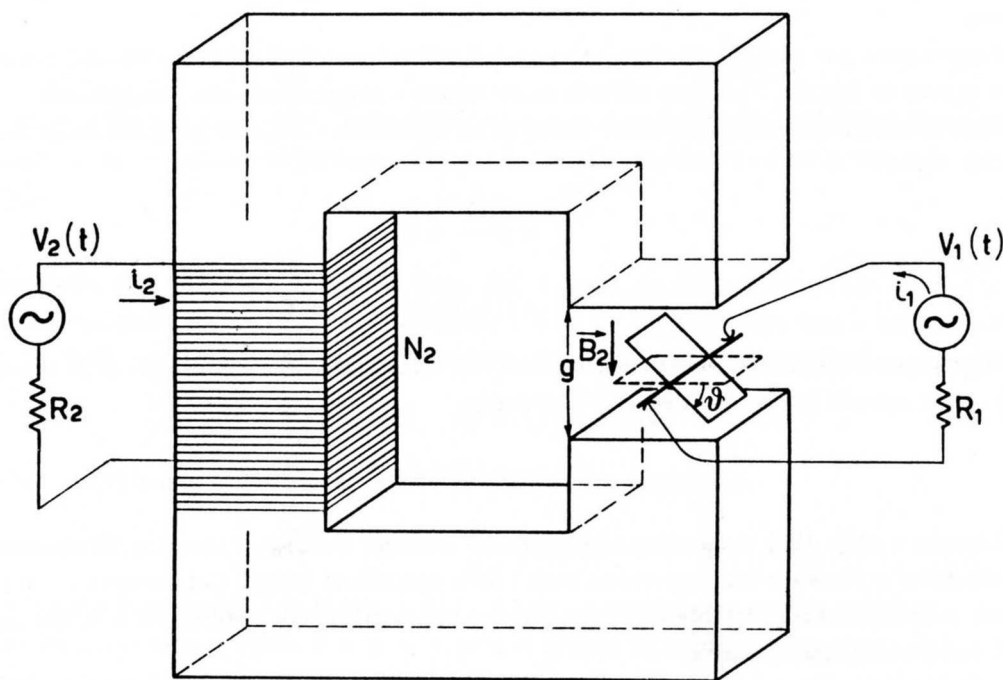


Fig.XX.10

Detta μ_r la permeabilità del ferro (supposto lineare), N_2 il numero di spire dell'avvolgimento dell'elettromagnete, l la lunghezza del circuito magnetico, σ_2 la sua sezione, g la dimensione del traferro, il teorema di Ampère (trascurando gli effetti ai bordi) assicura che:

$$N_2 i_2 = \frac{B_2 l}{\mu_r \mu_0} + \frac{B_2 g}{\mu_0} \quad (\text{XX.87})$$

ovvero:

$$B_2 = \frac{\mu_r \mu_0 N_2 i_2}{l + \mu_r g} \quad (\text{XX.88})$$

Il coefficiente di autoinduzione L_2 del circuito 2 vale quindi:

$$L_2 = \frac{B_2 N_2 \sigma_2}{i_2} = \frac{\mu_r \mu_0 N_2^2 \sigma_2}{l + \mu_r g} \quad (\text{XX.89})$$

Per calcolare il coefficiente di mutua induzione fra i due circuiti possiamo calcolare il flusso di \vec{B}_2 attraverso il circuito 1, supposto piano, di sezione σ_1 e immerso in una zona in cui \vec{B}_2 possa ritenersi costante; detto N_1 il numero delle spire, avremo (θ è l'angolo di cui è ruotata la bobina rispetto alla direzione parallela alle facce delle espansioni polari):

$$M = \frac{B_2 N_1 \sigma_1 \cos \theta}{i_2} = \frac{\mu_r \mu_0 N_1 N_2 \sigma_1}{l + \mu_r g} \cos \theta = M_0 \cos \theta \quad (\text{XX.90})$$

Pertanto il momento τ_θ che viene esercitato sul circuito 1, vale istante per istante (vedi (67)):

$$\tau_\theta = i_1 i_2 \frac{\partial M}{\partial \theta} = -i_1 i_2 M_0 \sin \theta \quad (\text{XX.91})$$

Siamo ora in grado di risolvere alcuni problemi di carattere *elettromeccanico* associati al nostro sistema.

Supponiamo per semplicità che i_1 e i_2 siano costanti, che la bobina mobile del circuito 1 abbia momento di inerzia \mathcal{I} attorno all'asse di rotazione e supponiamo che nessuna altra coppia sia applicata al nostro sistema meccanico. La seconda equazione cardinale della dinamica consente di scrivere:

$$\mathcal{I} \ddot{\theta} = -i_1 i_2 M_0 \sin \theta \quad (\text{XX.92})$$

Ovvero, integrando:

$$\frac{1}{2} \mathcal{I} (\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}_i^2) = i_1 i_2 M_0 (\cos \theta - \cos \theta_i) \quad (\text{XX.93})$$

La (93), che poteva ottenersi direttamente dalla (72), nient'altro è che *il principio della conservazione dell'energia*, avendo introdotto l'energia potenziale:

$$U = -i_1 i_2 M_0 \cos \theta \quad (\text{XX.94})$$

L'indice i nella (93) si riferisce alla posizione iniziale. La (93) è identica all'equazione di un pendolo fisico e pertanto con opportuna scelta delle condizioni iniziali (ad esempio $\theta_i \ll 1$, $\dot{\theta}_i = 0$) avremo un moto sostanzialmente armonico attorno alla posizione di equilibrio $\theta = 0$, con un periodo per le piccole oscillazioni pari a:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\mathcal{I}}{i_1 i_2 M_0}} \quad (\text{XX.95})$$

Se consideriamo ora una rotazione completa della spira diciamo da $-\pi$ a π , la (93) ci assicura che il lavoro complessivo compiuto dalla spira sarà nullo e ciò corrisponde al fatto che nel primo mezzo giro avremo un lavoro positivo ($2i_1 i_2 M_0$) e un pari aumento dell'energia cinetica della spira; avremo viceversa un lavoro negativo nel secondo mezzo giro e la spira ritornerà nella posizione iniziale con l'energia cinetica che aveva all'inizio del moto; nel frattempo l'energia magnetica sarà passata da un minimo alla fine del primo mezzo giro e sarà necessariamente tornata al valore iniziale alla fine del moto, come deve accadere essendo $i_1 i_2$ costanti e la geometria finale identica a quella iniziale.

Come altro esempio di sistema meccanico interagente con la spira supponiamo di montare sull'asse della spira una carrucola di raggio r , mediante la quale possiamo sollevare un peso m (vedi Fig.11).

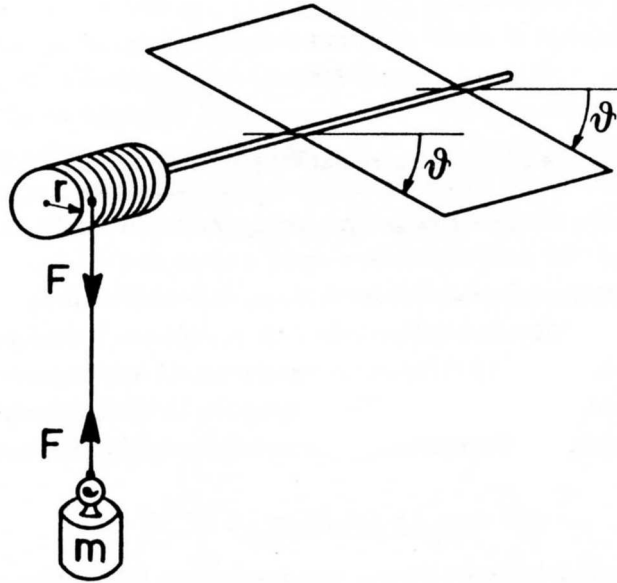


Fig.XX.11

Supponiamo di trascurare questa volta il momento di inerzia della spira, nonché della carrucola. Considerando il peso m , abbiamo pertanto, detta y la coordinata diretta come la verticale (positiva ascendente):

$$m\ddot{y} = -mg + \frac{\tau_\theta}{r} \quad (\text{XX.96})$$

con τ_θ dato dalla (91). La (96) deriva dal fatto che, avendo supposto trascurabile il momento di inerzia del meccanismo rotante la somma dei momenti a esso applicati deve essere nullo e pertanto $F \cdot r = \tau_\theta$. La (96) è equivalente a scrivere la conservazione dell'energia meccanica:

$$\frac{1}{2}mr^2(\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}_i^2) + mgr(\theta - \theta_i) - i_1 i_2 M_0 (\cos \theta - \cos \theta_i) = 0 \quad (\text{XX.97})$$

Partendo per esempio con le condizioni iniziali $\theta_i = -\frac{\pi}{2}$, $\dot{\theta}_i = 0$ abbiamo:

$$\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + mgr(\theta + \frac{\pi}{2}) - i_1 i_2 M_0 \cos \theta = 0 \quad (\text{XX.98})$$

che determina l'andamento di $\dot{\theta}$ in funzione di θ . Anche in questo caso se non prendiamo qualche provvedimento opportuno, passato $\theta = 0$, la coppia si inverte di segno e si innescano delle oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio (sempre che $\dot{\theta}_i = 0$, altrimenti è possibile avere un moto aperiodico).

Riconsideriamo i due casi ora descritti, facendo un esempio numerico e ammettendo che la corrente i_2 nell'elettromagnete sia la stessa della corrente i_1 sulla bobina; questa condizione è molto semplice da ottenersi collegando i due circuiti in serie. Sia la sezione σ_2 dell'elettromagnete pari a 100 cm^2 e ammettiamo che la permeabilità magnetica relativa del ferro dell'elettromagnete sia $\mu_r = 5 \cdot 10^2$. Se $l = 30 \text{ cm}$, $g = 5 \text{ cm}$ e vogliamo avere un campo \vec{B}_2 dell'ordine di 0.1 T abbiamo (vedi (87)):

$$N_2 i_2 = \frac{l + \mu_r g}{\mu_r \mu_0} 0.1 \text{ T} \approx 4 \cdot 10^3 \text{ A} \cdot \text{spira}$$

Supponendo di disporre di un generatore di corrente costante di 1 A, ciò significherà $N_2 = 4 \cdot 10^3$ (può non essere banale dissipare la potenza prodotta per effetto Joule sull'avvolgimento). Supponiamo ora che la bobina mobile sia costituita da 100 spire quadrate di lato 4 cm. Abbiamo allora (vedi (89) e (90)):

$$L_2 = \frac{\mu_r \mu_0 N_2^2 \sigma_2}{l + \mu_r g} \approx 4 \text{ H}$$

$$M_0 = \frac{\mu_r \mu_0 N_1 N_2 \sigma_1}{l + \mu_r g} \approx 16 \text{ mH}$$

Calcoliamoci ora la coppia che si può ottenere dal sistema; essa, secondo la (91), è data da:

$$\tau = -i_1 i_2 M_0 \sin \theta$$

che, al massimo, in valore assoluto vale $1.6 \cdot 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m}$. Riferendoci al primo dei due esempi fatti, possiamo dalla (94) valutare il valore del periodo delle piccole oscillazioni purché si conosca \mathcal{I} . Se per \mathcal{I} ammettiamo un valore di $4 \cdot 10^{-4} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$, magari ottenuto aggiungendo alla bobina un piccolo volano, troviamo per T un valore attorno al secondo e pertanto facilmente misurabile.

Quanto al secondo esempio si trova che per $\theta_i = -\frac{\pi}{2}$ la coppia vale, come d'altronde abbiamo già visto:

$$\tau(\theta = -\frac{\pi}{2}) = i_1 i_2 M_0 = 1.6 \cdot 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m}$$

Pertanto, affinché sia possibile sollevare il peso, esso dovrà essere tale da opporre una coppia inferiore a τ . Per esempio un peso da 20 g posto su una carrucola di raggio $r = 5 \text{ cm}$ dà

$$mgr \approx 9.8 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}$$

e pertanto viene sollevato. Il sistema si presta anche a misurare la coppia τ_θ : infatti appesa alla carrucola una massa m , la spira si posizionerà a un angolo θ (supponiamo che le oscillazioni si siano smorzate) tale per cui si avrà l'equilibrio fra la coppia della forza peso e quella elettromeccanica; avremo allora:

$$mgr = \tau_\theta = -i_1 i_2 M_0 \sin \theta \quad (\text{XX.99})$$

La misura del periodo T (nel primo esempio) e di θ (nel secondo) consentono quindi - noti che siano o \mathcal{I} o mr rispettivamente - di risalire al valore di M_0 , sempre che $i_1 = i_2$ siano misurate.

Se al posto dell'elettromagnete si usa ora un magnete permanente che produca un campo omogeneo \vec{B} (diretto perpendicolarmente alle facce delle espansioni polari, supposte parallele), non potremo più sfruttare la schematizzazione adottata nel caso dell'elettromagnete, definendo un coefficiente di mutua induzione $M(\theta)$. Potremo però, coerentemente con quanto fatto vedere nel paragrafo precedente (vedi(70)) fare comparire esplicitamente nell'espressione della coppia la derivata parziale del flusso Φ_1 :

$$\tau_\theta = i_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \quad (\text{XX.100})$$

calcolando Φ_1 come (usando le solite notazioni):

$$\Phi_1 = i_1 L_1 + B N_1 \sigma_1 \cos \theta \quad (\text{XX.101})$$

Si osserva che l'unico contributo alla derivata parziale proviene dal secondo termine della (101) e che esso vale: $-B N_1 \sigma_1 \sin \theta$; pertanto:

$$\tau_\theta = -i_1 B N_1 \sigma_1 \sin \theta \quad (\text{XX.102})$$

Tutte le conclusioni svolte precedentemente, sia a proposito del periodo T che della coppia τ , continuano a valere purché si sostituisca a $i_2 M_0$, $BN_1 \sigma_1$. Abbiamo così la possibilità di misurare il campo di induzione magnetica \vec{B} tramite misure di tempo e di angoli. Si noti che le misure sono *assolute*.

Nel caso del magnete permanente continuano a valere le espressioni di T e τ ricavate nell'ipotesi di presenza di generatori in entrambi i circuiti, poiché si tratta in sostanza di misure *statiche*, in cui interviene il valore di τ_θ calcolato per un certo θ e non entro un campo finito di valori di θ ; per la seconda misura (peso attaccato alla carrucola) ciò è ovvio perché effettivamente si tratta di una misura statica; per quanto riguarda la misura di T ciò è meno palese, ma se si ricorda che si tratta di piccole oscillazioni attorno a una posizione in cui M è massimo, il fatto è nuovamente del tutto comprensibile. Tutte le considerazioni svolte nel paragrafo precedente sulla distinzione fra il caso a correnti costanti o a corrente e flusso costanti servono nel caso in cui gli spostamenti siano finiti. Se ad esempio le oscillazioni non sono più piccole e se si vuole studiare l'andamento della velocità angolare della spira o lineare del pesino per variazioni finite di θ , allora le formule (93) e (98) rispettivamente sono corrette solo se le correnti sono mantenute costanti; altrimenti esse andrebbero modificate, poiché in genere non sarà più possibile definire una energia potenziale (cioè funzione solo del punto) associata alla coppia elettromeccanica, ma il lavoro di τ_θ dovrà esplicitamente essere calcolato come:

$$- \int_{\theta_i}^{\theta_f} i_1(t) i_2(t) M_0 \sin \theta d\theta$$

Infine una considerazione sul magnete permanente: può essere assai complicato schematizzare correttamente il comportamento di un magnete permanente quando interagisce con un circuito mobile come negli esempi sopra descritti. Infatti a cosa equivale un magnete permanente? A un solenoide percorso da corrente costante, a un solenoide che lavora a flusso costante o a nessuna di questi due schematizzazioni? L'ultima risposta è ovviamente la più corretta e per descrivere correttamente il sistema dovremmo innanzitutto conoscere la dinamica, andare a calcolare i campi magnetici prodotti dal movimento del circuito e, tenendo anche conto delle cariche *smagnetizzanti* presenti sulle facce delle espansioni polari, andare a valutare \vec{B} nel posto occupato dal circuito 1. Questa procedura che, si badi bene, dovrebbe teoricamente applicarsi tutte le volte che in un sistema magnetico è presente del ferro, è estremamente laboriosa e complicata. In molti casi, in particolare quelli in cui l'energia immagazzinata nel magnete permanente sotto forma di campo magnetico è molto grande rispetto all'energia meccanica sviluppata nel moto (ovvero quando si verificano condizioni del tipo visto precedentemente nel caso di flusso Φ_2 costante, formule (79), (82), (85)), una buona approssimazione consiste nell'assimilare il magnete permanente ad un solenoide percorso da corrente costante, ovvero un sistema che mantiene \vec{B} costante. Vedremo nel seguito che questa è ad esempio l'approssimazione che viene comunemente fatta nel caso del moto del galvanometro.

5.— Un generatore di tensione alternata

Consideriamo il primo esempio di sistema elettromeccanico del paragrafo precedente e supponiamo che la bobina sia collegata mediante due contatti striscianti a un circuito esterno (circuito 1) che per semplicità supponiamo puramente resistivo. Nessun generatore esterno è collegato in serie a questo circuito. Supponendo che il campo \vec{B}_2 esterno sia mantenuto costante (o mediante un magnete permanente o mediante un circuito, come in Fig.10, dotato di eccitazione con corrente costante),

mettiamo in rotazione per mezzo di un motore la bobina e facciamo in modo di mantenere costante la velocità angolare $\dot{\theta}$.

Cerchiamo di determinare l'andamento in funzione del tempo di $i_1(t)$. Applichiamo la seconda legge di Kirchoff al circuito 1:

$$-\frac{d\Phi_1}{dt} = i_1 R_1 \quad (\text{XX.103})$$

con

$$\Phi_1 = L_1 i_1 + B_2 N_1 \sigma_1 \cos \theta \quad (\text{XX.104})$$

(vedi (90)). Se ammettiamo che $\dot{\theta} = \omega = \text{cost}$ allora dalle (103) e (104) abbiamo:

$$B_2 N_1 \sigma_1 \omega \sin(\omega t) = L_1 \frac{di_1}{dt} + i_1 R_1 \quad (\text{XX.105})$$

ovvero nel nostro circuito si trova ad agire una forza elettromotrice $B_2 N_1 \sigma_1 \omega \sin \omega t$ sinusoidale con pulsazione ω . Sappiamo allora che la soluzione per i_1 sarà del tipo:

$$i_1 = i_{10} \sin(\omega t + \alpha) \quad (\text{XX.106})$$

cioè sinusoidale, con pulsazione ω . Dalla teoria delle reti lineari in regime sinusoidale, sappiamo anche che α è compreso tra $\pm \frac{\pi}{2}$, a seconda del tipo di carico del circuito 1; noi abbiamo ammesso che il carico esterno sia puramente resistivo per cui $\alpha = \text{atan} -\frac{\omega L_1}{R_1}$. Abbiamo così realizzato un generatore di ddp sinusoidale - estremamente semplificato per la verità - in grado di erogare nel circuito di utilizzo (R_1 , la serie della resistenza interna della bobina con la resistenza di carico vera e propria) una certa potenza. Se ci chiediamo chi fornisce questa potenza, la risposta è ovvia: è il motore che fa girare la spira. E' tuttavia interessante verificare ciò direttamente, mediante un bilancio energetico, anche per comprendere meglio il ruolo che gioca il campo B_2 . Per fare il bilancio energetico è utile considerare un periodo completo $T = \frac{2\pi}{\omega}$ in modo da avere la bobina nella stessa posizione sia all'inizio che alla fine dell'intervallo, nonché lo stesso valore della corrente i_1 ; è comodo considerare il lavoro in un periodo T anche perché sarà semplice confrontarlo poi con la potenza media dissipata nel circuito. Quanto al lavoro meccanico abbiamo (vedi (70)):

$$\Delta W_{mecc}^T = \int_0^T \tau_\theta \dot{\theta} dt = \int_0^T i_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \omega dt \quad (\text{XX.107})$$

Ricavando $\frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta}$ dalla (104) e sostituendola nella (107), otteniamo:

$$\Delta W_{mecc}^T = -B_2 N_1 \sigma_1 \omega \int_0^T i_{10} \sin(\omega t + \alpha) \sin(\omega t) dt \quad (\text{XX.108})$$

che in genere avrà un valore (negativo poiché $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$) non nullo. Il fatto che tale lavoro risulti negativo sta a significare che esso è *ricevuto* dalla bobina. Consideriamo ora la potenza dissipata nel circuito 1. Ricordiamo che la (105) può scriversi nella forma:

$$-\frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \omega = L_1 \frac{di_1}{dt} + i_1 R_1 \quad (\text{XX.109})$$

e pertanto la potenza dissipata sul carico complessivo R_1 si può ottenere come:

$$i_1^2 R_1 = -i_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \omega - L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} \quad (\text{XX.110})$$

Per ottenere l'energia complessiva dissipata in un periodo dobbiamo integrare la (110):

$$\int_0^T i_1^2 R_1 dt = - \int_0^T i_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \omega dt - \int_0^T L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} dt \quad (\text{XX.111})$$

Il secondo integrale a secondo membro è manifestamente nullo in quanto $i_1^2(T) = i_1^2(0)$ poiché i_1 è periodica con periodo T . Abbiamo così (vedi (107)):

$$\int_0^T i_1^2 R_1 dt = - \int_0^T i_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \omega dt \quad (\text{XX.112})$$

Essa ci dice che l'energia dissipata in un ciclo, pari al lavoro fatto dal generatore di fem $-\frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \omega$, coincide col lavoro meccanico ricevuto dalla spira ($-\Delta W_{mecc}^T$) in un periodo, ovvero col lavoro fatto dal motore per mantenere la spira a velocità ω costante; delle quattro voci che abbiamo finora considerato per valutare il bilancio energetico (1): la potenza dissipata sulla resistenza R_1 , 2): il lavoro elettrico fatto dal generatore di fem $-\frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \omega$, 3): il lavoro meccanico fatto dalla spira e 4): quello del motore), i contributi 2) e 3) si compensano esattamente, cioè la spira fa da puro tramite per il trasferimento di energia dal motore al carico. Poiché il bilancio è soddisfatto, le altre voci devono dare contributo nullo. Infatti, l'energia accumulata sotto forma di campo magnetico non cambia fra $t = 0$ e $t = T$ poiché ad essa contribuiscono termini che sono o costanti (\vec{B}_2) o prodotto di termini periodici (con periodo T):

$$W_M = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + i_1 B_2 N_1 \sigma_1 \cos \omega t + W_{B_2} \quad (\text{XX.113})$$

dove W_{B_2} indica il termine di energia immagazzinata nel campo \vec{B}_2 (se si tratta di un solenoide avvolto su ferro dolce, questo termine è esprimibile come $\frac{1}{2} Li_2^2$, mentre se si tratta di un magnete permanente l'espressione dell'energia immagazzinata avrà una forma diversa, ma comunque costante). Se il campo \vec{B}_2 è prodotto da un magnete permanente non vi sono altre possibili forme di energia da considerare. Se viceversa \vec{B}_2 è prodotto da un generatore di corrente costante i_2 , dovremo considerare anche il lavoro fatto da questo generatore per mantenere costante entro tutto il periodo i_2 : per il circuito 2 possiamo scrivere la seconda legge di Kirchhoff, indicando con $V_2(t)$ la ddp ai capi del generatore di corrente:

$$V_2(t) = i_2 R_2 + \frac{d\Phi_2}{dt} = i_2 R_2 + \frac{d(M i_1)}{dt} \quad (\text{XX.114})$$

Il lavoro che il generatore deve quindi compiere in un periodo T vale:

$$\int_0^T V_2(t) i_2 dt = \int_0^T i_2^2 R_2 dt + \int_0^T i_2 \frac{d(M i_1)}{dt} dt \quad (\text{XX.115})$$

Il secondo integrale del membro di destra è nullo a motivo del fatto che sia i_1 che M sono periodici con periodo T e i_2 è costante. Abbiamo così che il generatore si deve solo preoccupare di vincere le perdite Joule nel suo circuito e quindi non interagisce di fatto col resto del sistema.

Concludendo, il nostro generatore *trasforma* l'energia meccanica fornita dal motore che mantiene costante la velocità angolare della bobina, in energia elettrica. Il campo di induzione magnetica \vec{B}_2 *consente* questa *trasformazione* di energia, ma in media *non assorbe né cede lavoro*.

Infine si osservi che, usando il metodo simbolico, la spira si comporta come un generatore di fem pari a $B_2 N_1 \sigma_1 \omega \exp j(\omega t - \frac{\pi}{2})$ con una impedenza interna pari a $\mathcal{Z}_i = R_i + j\omega L_1$, con R_i resistenza

dell'avvolgimento (in genere si cerca di fare in modo che il modulo di Z_i sia piccolo rispetto al modulo dell'impedenza del carico).

6.— Galvanometro e bilancio energetico

Modificando leggermente il sistema elettromeccanico di Fig.10, otteniamo la configurazione caratteristica di un galvanometro (Fig.12).

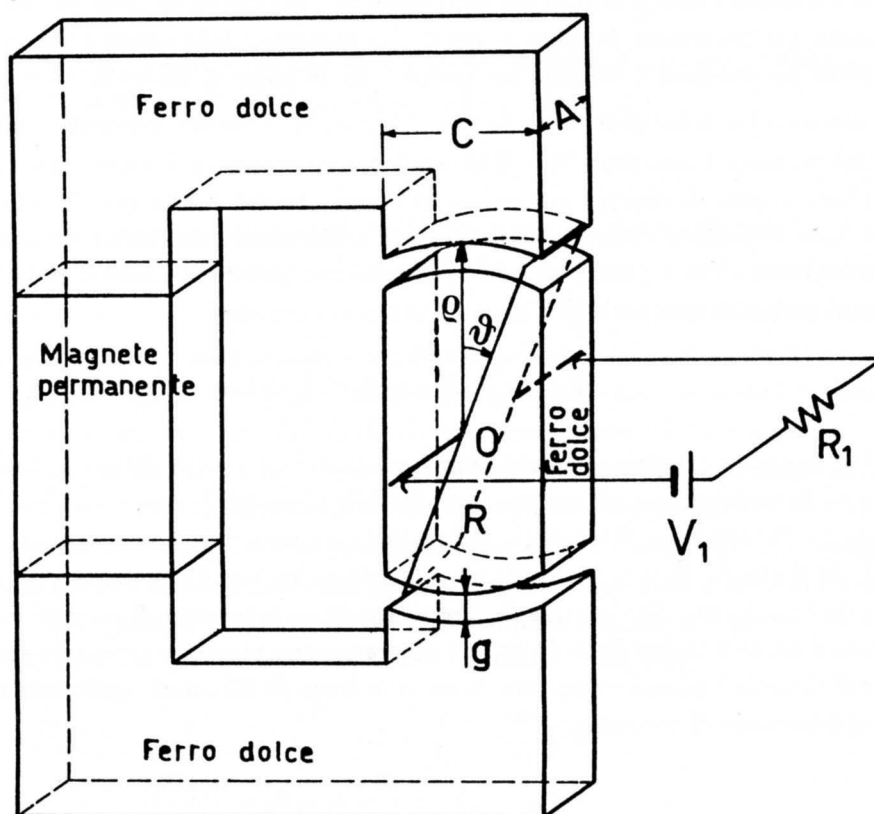


Fig.XX.12

Il circuito magnetico è costituito in modo tale da avere due traferri molto sottili (g) e sagomati in modo che le facce polari siano superfici cilindriche aventi l'asse coincidente con l'asse di rotazione della spira rettangolare libera di muoversi nello spazio delle due espansioni polari. Il pezzo di ferro dolce fra le due espansioni polari è tenuto in posizione da un supporto amagnetico non mostrato in figura. Le dimensioni della bobina (N spire) siano $2R$ e a , con a lunghezza dei lati che si muovono fra le espansioni polari. Se il raggio R è molto maggiore dello spessore del traferro g , allora il campo \vec{B}_r nel traferro, tutto diretto verso l'asse, è, con approssimazione molto buona, costante in modulo. Il flusso di \vec{B}_r concatenato con la spira mobile varrà (vedi Cap. II, §4):

$$\Phi(\vec{B}_r) = B_r \cdot N2R\theta A = B_r NS'\theta \quad (\text{XX.116})$$

dove si è indicata esplicitamente la superficie S' efficace a raccogliere le linee di flusso di \vec{B}_r ; θ denota l'angolo indicato in figura e vale 0 per la direzione secondo il lato lungo del circuito magnetico. Si noti che la differenza fra S e S' deriva dal fatto che solo la lunghezza pari a A del tratto a è interessata al flusso.

Dettagli della geometria delle espansioni polari possono alterare la dipendenza di $\Phi(\vec{B}_r)$; se però l'unico grado di libertà è θ , ovvero la rotazione della spira attorno a un asse fisso, allora, indipendentemente dalla struttura (da cui dipenderà però G), avremo comunque:

$$\Phi(\vec{B}_r) = G\theta \quad (\text{XX.117})$$

cioè Φ proporzionale a θ . A questo punto, partendo da certe condizioni iniziali, siamo in grado di risolvere la dinamica del moto della nostra bobina, supposta avere momento di inerzia \mathcal{I} attorno all'asse fisso di rotazione e ammettendo che esista una coppia elastica di richiamo che tende a riportare θ a 0 ($\tau_e = -E\theta$) e un attrito di tipo viscoso ($\tau_v = -C\dot{\theta}$). La seconda equazione della dinamica ci dice:

$$\mathcal{I}\ddot{\theta} = -E\theta - C\dot{\theta} + i_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \quad (\text{XX.118})$$

L'ultimo termine rappresenta la coppia τ_θ cui è sottoposta la bobina a causa della corrente i_1 che vi circola (70). D'altronde abbiamo:

$$\Phi_1 = L_1 i_1 + \Phi(\vec{B}_r) = L_1 i_1 + G\theta \quad (\text{XX.119})$$

con L_1 coefficiente di autoinduzione della bobina e quindi

$$\tau_\theta = i_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} = G i_1 \quad (\text{XX.120})$$

Ritroviamo così il risultato che è stato ricavato nel Cap.II, calcolando esplicitamente la coppia τ_θ , facendo ricorso alla seconda legge di Laplace. La (118) allora si può scrivere:

$$\mathcal{I}\ddot{\theta} + C\dot{\theta} + E\theta = G i_1 \quad (\text{XX.121})$$

Resta ora da esprimere i_1 in funzione dei parametri del circuito e definire le condizioni iniziali. Supponiamo che per $t = 0$ venga chiuso un tasto in serie al nostro circuito e ammettiamo che il sistema per $t = 0$ sia a riposo: $\theta(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = 0$. Se supponiamo che nel circuito sia presente un generatore di tensione V_1 (non necessariamente costante), la seconda legge di Kirchhoff ci assicura che per $t > 0$:

$$V_1 = i_1 R_1 + \frac{d\Phi_1}{dt} \quad (\text{XX.122})$$

che a causa della (119) può anche porsi nella forma:

$$V_1 = i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + G\dot{\theta} \quad (\text{XX.123})$$

Si osservi che nella derivata di Φ_1 rispetto al tempo si è ammesso che B_r (e quindi G) rimanga costante. Ciò in pratica corrisponde ad ammettere che le variazioni di \vec{H} prodotte dalla corrente i_1 e dal moto della bobina, non alterino il valore del campo \vec{B}_r all'interno del magnete permanente; questo, se $H \ll H_c$ forza coercitiva (vedi Cap.XIX,§4), è senz'altro una ottima approssimazione. Abbiamo quindi un sistema di due equazioni differenziali:

$$\begin{cases} V_1 = i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + G\dot{\theta} \\ \mathcal{I}\ddot{\theta} + C\dot{\theta} + E\theta = G i_1 \end{cases} \quad (\text{XX.124})$$

Se ricaviamo i_1 dalla seconda in funzione di θ e delle sue derivate e sostituiamo queste espressioni nella prima, otteniamo:

$$\mathcal{I}\ddot{\theta} + \left(C + \frac{G^2}{R_1}\right)\dot{\theta} + E\theta + \frac{L_1}{R_1} \frac{d}{dt}(\mathcal{I}\ddot{\theta} + C\dot{\theta} + E\theta) = \frac{GV_1}{R_1} \quad (\text{XX.125})$$

Rispetto al Cap.II, §4, l'equazione differenziale che regola il moto è differente a causa del termine $\frac{L_1}{R_1} \frac{di_1}{dt}$; esso a sua volta deriva dall'aver *correttamente* considerato, nello scrivere la seconda legge di Kirchhoff, anche il termine di autoinduzione che viceversa era stato trascurato nel Cap.II. Nei casi pratici, per V_1 costante, tale termine è effettivamente trascurabile; per rendersene conto proviamo a fare un ragionamento di autoconsistenza. Ammettiamo cioè che tale termine sia trascurabile; la soluzione è allora quella a suo tempo trovata (Cap.II, formule (15), (16) e (17)) e si tratterà di un moto oscillatorio o no a seconda del valore di R_1 , maggiore o minore della resistenza critica R_c , comunque con asintoto pari a $\theta_f = \frac{GV_1}{R_1 E}$. In ogni caso è possibile calcolare $\ddot{\theta}$, $\dot{\theta}$ nonché ovviamente θ . Sostituendo i valori così trovati nella (125), si può valutare l'influsso del termine trascurato $\frac{L_1}{R_1} \frac{d}{dt}(\mathcal{I}\ddot{\theta} + C\dot{\theta} + E\theta)$. Si trova allora che l'approssimazione fatta è tanto migliore quanto più

$$\frac{L_1}{R_1} \Omega \ll 1 \quad , \quad \Omega = \sqrt{\frac{E}{\mathcal{I}}} \quad (\text{XX.126})$$

Cerchiamo di interpretare questa limitazione: la fem che istante per istante è applicata al nostro circuito consiste, secondo la (123) e trascurando il termine di autoinduzione, di due termini, di cui uno (V_1) costante e l'altro ($G\dot{\theta}$) approssimativamente sinusoidale (nel caso di moto oscillatorio) con periodo $\omega \approx \Omega = \sqrt{\frac{E}{\mathcal{I}}}$. La (126) ci dice quindi che se ωL_1 (l'impedenza associata alla induttanza L_1 alla frequenza ω) è molto minore di R_1 , allora potremo calcolarci i_1 dimenticandoci del contributo all'impedenza derivante da L_1 . Nei casi reali - ammettendo che R_1 sia comunque dell'ordine di qualche Ohm - e $\omega \approx 1 \text{ s}^{-1}$, per valori di L_1 anche dell'ordine del mH (ma spesso l'induttanza L_1 sarà minore) l'approssimazione che si fa considerando nullo il valore di L_1 risulta più che buona (correzione dell'ordine dello 0.1%).

Finora non è molto chiaro quale sia stato il vantaggio, sempre che esista, nell'aver usato l'approccio attuale anziché quello svolto a suo tempo; oltretutto la soddisfazione di aver trovato un termine che ci era sfuggito nell'analisi del Cap.II è molto mitigata dal fatto che si tratta di un termine quasi sempre trascurabile, di cui oltretutto ci saremmo potuti accorgere anche con l'altra procedura, scrivendo correttamente la seconda legge di Kirchhoff. Il vantaggio del metodo svolto in questo capitolo è quello di consentire una valutazione abbastanza immediata del bilancio energetico del nostro sistema elettromeccanico. Per far ciò consideriamo quindi il galvanometro nella condizione iniziale e finale ($\theta_i = 0$, $\theta_f = \frac{GV_1}{R_1 E}$, $i_1(0) = 0$ e $i_1(\infty) = \frac{V_1}{R_1}$) e valutiamo le varie voci che contribuiscono al bilancio.

Lavoro effettuato dal generatore meno le perdite Joule (vedi (123)):

$$\begin{aligned} W_{gen_1} &= \int_0^\infty (V_1 i_1 - i_1^2 R_1) dt = \int_0^\infty L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} dt + \int_0^\infty i_1 G \dot{\theta} dt = \\ &= \frac{1}{2} L_1 [i_1^2(\infty) - i_1^2(0)] + G [i_1(\infty) \theta_f - i_1(0) \theta_i] - G \int_0^\infty \theta \frac{di_1}{dt} dt = \\ &= \frac{1}{2} L_1 \frac{V_1^2}{R_1^2} + \frac{G^2 V_1^2}{R_1^2 E} - G \int_0^\infty \theta \frac{di_1}{dt} dt \end{aligned} \quad (\text{XX.127})$$

Variazione dell'energia immagazzinata sotto forma di campo magnetico:

$$\Delta W_M = \frac{1}{2} L_1 [i_1^2(\infty) - i_1^2(0)] + G [i_1(\infty)\theta_f - i_1(0)\theta_i] = \frac{1}{2} L_1 \frac{V_1^2}{R_1^2} + \frac{G^2 V_1^2}{R_1^2 E} \quad (\text{XX.128})$$

Per ricavare la (128) abbiamo usato la (65) e la (119), tenendo conto che un termine pari a $\frac{1}{2} G i_1 \theta$ proviene dall'interazione del campo \vec{B}_r con il campo prodotto dalla corrente i_1 , mentre il termine di interazione di \vec{B}_r con se stesso resta costante.

Lavoro fatto dalla bobina (70):

$$\begin{aligned} W_{mecc} &= \int_0^\infty \tau \dot{\theta} dt = \int_0^\infty G i_1 \dot{\theta} dt = G [i_1(\infty)\theta_f - i_1(0)\theta_i] - G \int_0^\infty \theta \frac{di_1}{dt} dt = \\ &= \frac{G^2 V_1^2}{R_1^2 E} - G \int_0^\infty \theta \frac{di_1}{dt} dt \end{aligned} \quad (\text{XX.129})$$

Sembrirebbe che avessimo considerato tutte le voci che possono contribuire al bilancio energetico del nostro sistema, ma non è così tant'è vero che se proviamo a comporre questo bilancio:

$$W_{gen_1} = \Delta W_M + W_{mecc} \quad (\text{XX.130})$$

troviamo che manca, fra le voci attive, cioè nel membro di sinistra, un termine pari a $\frac{G^2 V_1^2}{R_1^2 E}$. Questo contributo effettivamente manca e deriva da una voce "subdolamente" sfuggita, cioè dal magnete permanente, o meglio dal quel *modello* di magnete permanente che ci siamo creati. Infatti abbiamo supposto che il modulo del campo \vec{B}_r si mantenesse costante durante tutto il moto, e se ciò avviene, questo *richiede* un lavoro. Di fatto, se avessimo ottenuto lo stesso risultato (B_r costante) mediante un solenoide avvolto sul giogo di ferro al posto del magnete permanente, avremmo dovuto mantenere la corrente (i_2) su questo avvolgimento costante e il generatore ivi montato avrebbe dovuto compiere un lavoro (meno le perdite Joule) pari a:

$$W_{gen_2} = \int_0^\infty (V_2 i_2 - i_2^2 R_2) dt = i_2 \int_0^\infty \frac{d}{dt} (M i_1) dt = i_1 i_2 M \quad (\text{XX.131})$$

ottenibile dalla seconda legge di Kirchhoff applicata al circuito 2: $V_2 = i_2 R_2 + \frac{d}{dt} (M i_1)$. D'altronde il coefficiente di mutua induzione M si può calcolare in base alla (119) e ricordando che per definizione: $\Phi(\vec{B}_r) = i_2 M = G \theta$. Sostituendo $M = \frac{G \theta}{i_2}$ nella (131) otteniamo:

$$W_{gen_2} = G i_1(\infty) \theta_f = \frac{G^2 V_1^2}{R_1^2 E} \quad (\text{XX.132})$$

proprio il termine mancante al bilancio (130) che correttamente (e già lo sapevamo, per la verità) andava scritto:

$$W_{gen_1} + W_{gen_2} = \Delta W_M + W_{mecc} \quad (\text{XX.133})$$

Ora secondo il nostro modello di magnete permanente (B_r costante) tale lavoro deve essere fatto da qualche agente; non si tratterà di un generatore - che non esiste all'interno del magnete - ma comunque dell'energia verrà sottratta a quella congerie di domini magnetici che costituisce il magnete permanente. Ci consoli il fatto che, in genere, questa richiesta di energia è modesta, rispetto a quella immagazzinata sotto forma di campo di induzione magnetica \vec{B}_r corrispondente al termine $\frac{1}{2} L_2 i_2^2$ se \vec{B}_r fosse prodotto da una corrente e che noi non abbiamo mai fatto intervenire nel bilancio proprio

perché costante. Ci consoli anche di più il fatto che, togliendo l'eccitazione alla bobina mobile e lasciando tornare il sistema alle condizioni iniziali, restituiamo al magnete quella energia sottratta nella fase di eccitazione come ci si può facilmente rendere conto scrivendo il bilancio energetico per la fase in cui si cortocircuita il generatore di tensione e si lascia tornare la bobina nella condizione iniziale.

Queste ultime considerazioni saranno utili quando considereremo - nel paragrafo successivo - praticamente lo stesso sistema elettromeccanico ora studiato (galvanometro di Deprez - d'Arsonval), ma con alcune piccole, ma sostanziali, modifiche che ne fanno un *motore in corrente continua*.

7.- Un motore in continua

Ridisegniamo nella Fig.13 il particolare della bobina mobile del sistema di Fig.12. La bobina è riportata in due posizioni ($-\theta_M, \theta_M$) che supponiamo essere quelle *limite* per le quali il campo \vec{B}_r è ancora costante in modulo e tutto radiale.

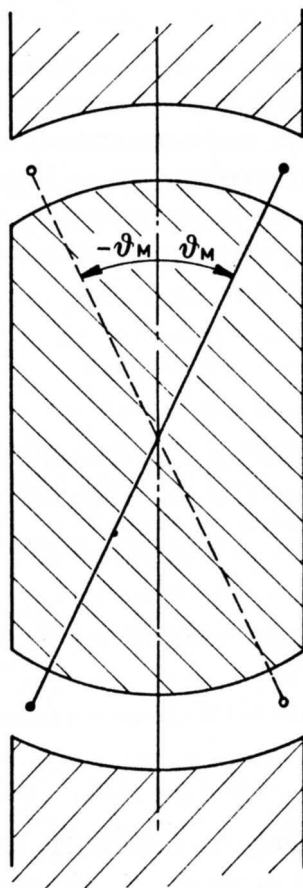


Fig.XX.13

In base alle conclusioni tratte nel paragrafo precedente sappiamo che, detto \mathcal{I} il momento di inerzia dell'equipaggio rotante e detta $-K$ la coppia resistente (con K positivo) associata al lavoro

meccanico che vogliamo produrre (nel caso del galvanometro $-K = -E\theta - C\dot{\theta}$) avremo:

$$\mathcal{I}\ddot{\theta} = -K + \tau \quad (\text{XX.134})$$

con τ dato dalla (120) ovvero $\tau = Gi_1$. La potenza meccanica istantanea prodotta dal nostro sistema vale allora:

$$P_{mecc} = \frac{d}{dt}(W_{mecc}) = \tau \cdot \dot{\theta} = \mathcal{I}\dot{\theta}\ddot{\theta} + K\dot{\theta} \quad (\text{XX.135})$$

In quasi tutte le applicazioni pratiche un sistema come quello descritto è poco adatto a produrre lavoro meccanico: in genere è infatti richiesto un movimento rotatorio continuo di un albero al quale, tramite cinghie o ingranaggi, sia possibile accoppiare i sistemi da porre in movimento. Una semplice modifica al nostro sistema consente di ottenere un moto rotatorio (sempre nello stesso verso) dell'albero: su di questo non sia montata una sola bobina ma una *stella* di n bobine tutte uguali fra loro, ma sfasate ognuna rispetto all'altra di un angolo $\varphi_B \leq 2\theta_M$ e tali che $n\varphi_B = \pi$. Nella Fig.14 è mostrata la sezione dell'insieme delle bobine (detto *rotore*) in un piano perpendicolare all'asse.

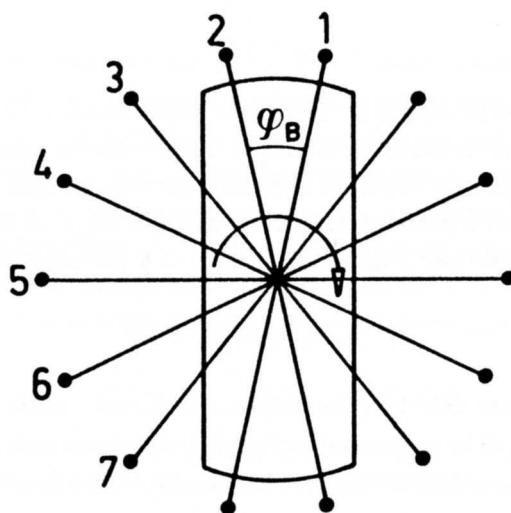


Fig.XX.14

Inoltre sull'albero esiste un sistema di contatti (detto *collettore*), posti in serie a ognuna delle n bobine che provvede a inserire, mediante collegamenti striscianti (*spazzole*), una sola per volta le bobine in serie ai terminali del generatore; precisamente il sistema è tale che collega al generatore sempre e soltanto quella bobina che si trova a passare fra le espansioni polari; non appena che essa tende - ruotando solidalmente con l'albero - a uscire dalle espansioni polari, ovvero prima ancora di superare l'angolo critico θ_M ($\varphi_B < 2\theta_M$), la spira successiva è già entrata all'altro estremo dell'espansione e il collettore provvede automaticamente a aprire il collegamento con la bobina uscente e a collegare quella entrante (nella Fig.14 si tratterebbe delle spire 1 e 2). Un sistema per realizzare il collettore è riportato nella Fig.15 nel caso semplificato di solo 2 spire (caso che richiederebbe delle espansioni polari con apertura $\theta_M > 90^\circ$).

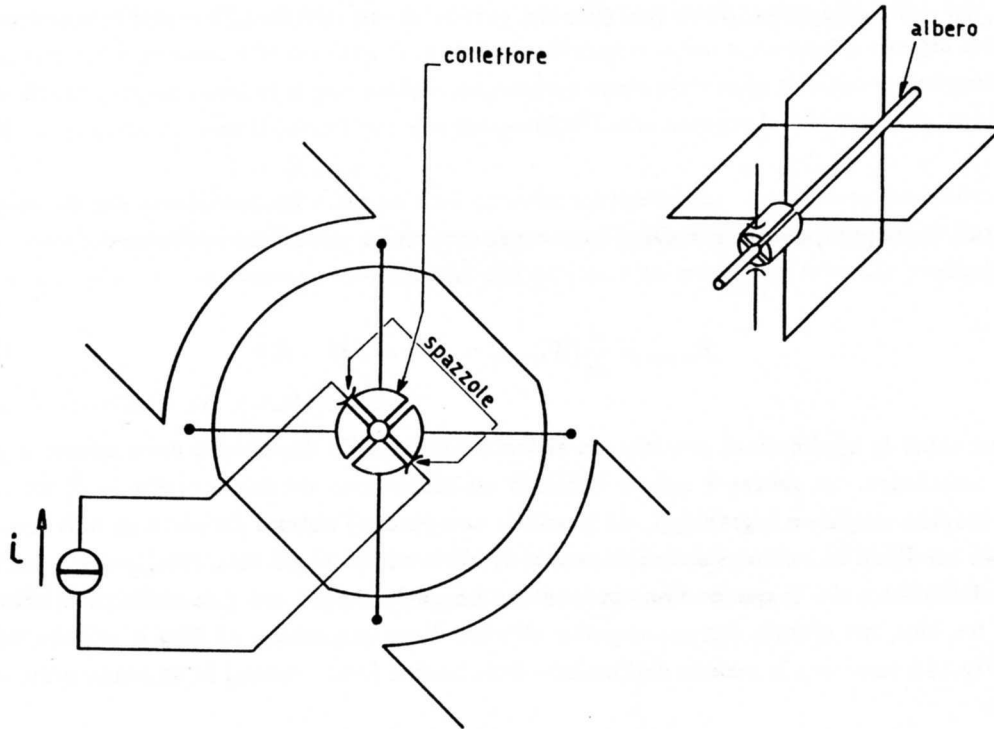


Fig.XX.15

Con questo accorgimento la coppia ha sempre lo stesso segno e pertanto abbiamo a che fare con un vero e proprio motore. A parte gli istanti in cui avviene la commutazione fra una bobina e l'altra (che studieremo meglio nel seguito), il generatore vede sempre lo stesso circuito (tutte le bobine sono identiche fra loro) e potremo scrivere la seconda legge di Kirchhoff per una posizione generica del circuito (escludendo per il momento i valori di θ per cui avviene la commutazione):

$$V_1 - i_1 R_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + G\dot{\theta} \quad (\text{XX.136})$$

La validità della (136) discende dal fatto che abbiamo ammesso - come nel paragrafo precedente - che il modulo di \vec{B}_r (il campo di induzione nel traferro) rimanga costante e che per ogni bobina (la s -esima) in quell'istante collegata al generatore, la derivata totale del flusso di \vec{B} con essa concatenato valga:

$$\frac{d}{dt} \Phi_s = L_1 \frac{di_1}{dt} + G\dot{\theta} \quad (\text{XX.137})$$

dove con θ abbiamo al solito indicato l'angolo che una direzione solidale al rotore forma con una direzione fissa nello spazio. Similmente la coppia τ applicata al rotore vale per ogni valore di θ :

$$\tau = i_1 \frac{\partial \Phi_s}{\partial \theta} = G i_1 \quad (\text{XX.138})$$

dove i_1 è la corrente che sta circolando nella bobina inserita.

Consideriamo ora il motore alimentato a corrente costante i_1 : se la corrente è mantenuta costante dal generatore V_1 , anche la coppia $\tau = G i_1$ sarà costante. La conoscenza della coppia resistente $-K$ consentirà di determinare la velocità di regime $\dot{\theta}_R$ che il sistema raggiunge (che si raggiunga una velocità di regime è cosa ovvia, non fosse altro perché un contributo alla coppia $-K$ certamente deriva dagli attriti). Una volta raggiunta tale velocità limite possiamo studiare in

dettaglio il bilancio di energia del nostro sistema, anche tenendo conto delle fasi di commutazione. Ammettendo che la costanza di B_r sia assicurata da un generatore di corrente i_2 sull'avvolgimento del circuito magnetico, consideriamo il lasso di tempo durante il quale la bobina s -esima percorre il tratto fra le espansioni polari ed è quindi collegata al generatore V_1 ; la variazione angolare da considerare è quindi $-\frac{\varphi_B}{2} \div \frac{\varphi_B}{2}$. Il lavoro fatto dal generatore 1 (meno le perdite Joule) ammonta a:

$$W_{gen1}\left(\frac{-\varphi_B}{2} \rightarrow \frac{\varphi_B}{2}\right) = \int_{t_i}^{t_f} (V_1 i_1 - i_1^2 R_1) dt = i_1 \int_{t_i}^{t_f} G \dot{\theta} dt = i_1 G \varphi_B \quad (\text{XX.139})$$

dove si è sfruttata la (136), tenendo conto che $\frac{di_1}{dt} = 0$.

Quanto al generatore 2 (vedi (131) e (132)), tenendo conto che i_1 e i_2 sono costanti:

$$W_{gen2}\left(\frac{-\varphi_B}{2} \rightarrow \frac{\varphi_B}{2}\right) = \int_{t_i}^{t_f} (V_2 i_2 - i_1^2 R_2) dt = i_1 i_2 \int_{t_i}^{t_f} \frac{dM}{dt} dt = i_1 \int_{t_i}^{t_f} G \dot{\theta} dt = i_1 G \varphi_B \quad (\text{XX.140})$$

Quanto alla variazione di energia immagazzinata sotto forma di campo magnetico, essendo i_1 e i_2 costanti avremo:

$$\Delta W_M\left(\frac{-\varphi_B}{2} \rightarrow \frac{\varphi_B}{2}\right) = i_1 G \varphi_B \quad (\text{XX.141})$$

Quanto al lavoro fatto verso l'esterno, esso vale:

$$W_{mecc}\left(\frac{-\varphi_B}{2} \rightarrow \frac{\varphi_B}{2}\right) = \int_{t_i}^{t_f} \tau \dot{\theta} dt = i_1 G \varphi_B \quad (\text{XX.142})$$

A questo punto interviene la commutazione del circuito 1 dalla bobina s -esima alla bobina $s+1$ -esima che supponiamo avvenga in un tempo infinitamente breve: in questa commutazione possono intervenire cambiamenti di energia nelle varie voci e tali cambiamenti, se esistono, sono repentini quanto la commutazione; tuttavia l'energia complessiva non può cambiare perché i generatori sono chiusi su resistenze finite e conseguentemente possono erogare quantità finite di energia solo in un tempo finito e non in uno infinitesimo. Durante la commutazione l'energia accumulata sotto forma di campo magnetico cambierà in quanto la commutazione dalla bobina s -esima alla $(s+1)$ -esima in pratica riporta una spira identica alla s -esima nella condizione iniziale a $-\frac{\varphi_B}{2}$ e ciò modifica il termine $i_1 i_2 M$ di

$$\Delta W_M(t_f^- \rightarrow t_f^+) = i_1 i_2 \left[M(t_f^+) - M(t_f^-) \right] = -i_1 G \varphi_B \quad (\text{XX.143})$$

ovvero riporta W_M al valore che aveva quando la spira s -esima occupava la posizione attualmente occupata dalla spira $(s+1)$ -esima (t_f^- rappresenta l'istante immediatamente precedente la commutazione e t_f^+ quello immediatamente successivo). Contemporaneamente il generatore 2 riceve dal sistema un lavoro proprio pari a $\Delta W_M(t_f^- \rightarrow t_f^+)$, ovvero quella parte di energia che era stata immagazzinata sotto forma di campo magnetico viene restituita al generatore: infatti, considerando il circuito 2, ovvero quello di eccitazione del magnete permanente accoppiato induttivamente con le due spire s e $(s+1)$ sulle quali scorrono le correnti i_s e i_{s+1} rispettivamente ($i_s + i_{s+1} = i_1 = cost$):

$$W_{gen2}(t_f^- \rightarrow t_f^+) = i_2 \int_{t_f^-}^{t_f^+} \frac{d}{dt} (M_s i_s + M_{s+1} i_{s+1}) dt = i_2 (M_s i_s + M_{s+1} i_{s+1}) \Big|_{t_f^-}^{t_f^+} = -i_1 G \varphi_B \quad (\text{XX.144})$$

Nell'ultimo passaggio si è sfruttato il fatto che $i_s(t_f^+) = i_{s+1}(t_f^-) = 0$ e $i_s(t_f^-) = i_{s+1}(t_f^+) = i_1$ e $M_{s+1}(t_f) = M_s(t_i) = -M_s(t_f) = -\frac{G \varphi_B}{i_2 2}$.

Quanto alle altre due voci del bilancio (compensandosi fra loro le (143) e (144)), esse dovranno essere o entrambe nulle o di segno opposto poiché - come abbiamo detto - l'energia totale del sistema

non può cambiare in un tempo che almeno virtualmente può essere estremamente piccolo (a meno di effetti di cui diremo fra poco). Si trova che il lavoro fatto dal generatore 1 e il lavoro meccanico sono anch'essi infinitesimi durante il tempo infinitesimo della commutazione. Cominciamo a considerare dapprima il lavoro meccanico: basterà mostrare che la coppia τ non diverge nell'intorno dell'istante t_f per affermare che il lavoro $\tau\Delta\theta$ è infinitesimo ($\Delta\theta$ rappresenta l'incremento infinitesimo dell'angolo θ durante la commutazione); considerando entrambe le spire s e $(s+1)$ che si trovano a essere percorse dalla corrente durante la commutazione, abbiamo:

$$\tau(t_f^- < t < t_f^+) = i_s \frac{\partial M_s}{\partial \theta} + i_{s+1} \frac{\partial M_{s+1}}{\partial \theta} = (i_s + i_{s+1})G = i_1 G \quad (\text{XX.145})$$

ovvero non solo τ rimane finito, ma è sempre pari al valore stazionario. Nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato il fatto che la somma delle due correnti nelle spire s e $(s+1)$ resta costante e uguale a i_1 . Pertanto, durante la commutazione fra le due spire, il lavoro meccanico è nullo (o meglio infinitesimo con $\Delta\theta$). A questo punto di necessità anche il lavoro fatto dal generatore 1 deve essere nullo e potremo fare a meno di calcolarlo. Tuttavia una valutazione esplicita può rassicurare sul risultato e forse anche chiarire il meccanismo fisico del bilancio energetico. Durante la fase di commutazione entrambe le bobine - come abbiamo d'altronde già ammesso nella (145) - si trovano a essere percorse da corrente e il lavoro elettrico associato alle due correnti i_s e i_{s+1} è dato da (oltre a quello necessario a fornire l'energia persa per effetto Joule):

$$\begin{cases} W_{gen_1}(s) = L_1 \int_{t_f^-}^{t_f^+} i_s \frac{d}{dt} i_s dt + \int_{t_f^-}^{t_f^+} i_s i_2 \frac{d}{dt} M_s dt + \int_{t_f^-}^{t_f^+} i_s M_{s,s+1} \frac{d}{dt} i_{s+1} dt \\ W_{gen_1}(s+1) = L_1 \int_{t_f^-}^{t_f^+} i_{s+1} \frac{d}{dt} i_{s+1} dt + \int_{t_f^-}^{t_f^+} i_{s+1} i_2 \frac{d}{dt} M_{s+1} dt + \int_{t_f^-}^{t_f^+} i_{s+1} M_{s,s+1} \frac{d}{dt} i_s dt \end{cases} \quad (\text{XX.146})$$

dove $M_{s,s+1}$ rappresenta il coefficiente di mutua induzione (costante) fra le due spire. Il lavoro totale fatto dal generatore 1 nella fase di commutazione, essendo dato dalla somma dei due contributi vale

$$\left(\frac{dM_s}{dt} = \frac{dM_{s+1}}{dt} = \frac{G\dot{\theta}}{i_2} \right)$$

$$\begin{aligned} W_{gen_1}(t_f^- \rightarrow t_f^+) &= \\ &= \frac{L_1}{2} \left(i_s^2 \Big|_{t_f^-}^{t_f^+} + i_{s+1}^2 \Big|_{t_f^-}^{t_f^+} \right) + G \int_{t_f^-}^{t_f^+} \dot{\theta} (i_s + i_{s+1}) dt + M_{s,s+1} \cdot \int_{t_f^-}^{t_f^+} \frac{d}{dt} (i_s \cdot i_{s+1}) dt = 0 \end{aligned} \quad (\text{XX.147})$$

Il lavoro è stato posto uguale a zero perché: il primo termine è nullo in quanto $i_s^2(t_f^+) = i_{s+1}^2(t_f^-) = 0$ e $i_s^2(t_f^-) = i_{s+1}^2(t_f^+) = i_1^2$; il secondo termine è nullo poiché $(i_s + i_{s+1}) = i_1$ e può essere portato fuori dal segno di integrazione e quindi l'integrale vale $i_1 G \Delta\theta$ con $\Delta\theta$ variazione infinitesima di θ durante la commutazione; infine l'ultimo termine è zero poiché l'integrale vale $M_{s,s+1} i_s \cdot i_{s+1} \Big|_{t_f^-}^{t_f^+}$ che si annulla ai due estremi t_f^- e t_f^+ . Abbiamo così verificato che il generatore 1 compie un lavoro totale nullo durante la commutazione.

Pertanto durante il moto *in media* il generatore 2 e l'energia immagazzinata sotto forma di campo magnetico rimangono costanti e il lavoro meccanico è tutto a carico del generatore 1. Questo fatto ci assicura anche su un altro aspetto: che se al posto del solenoide di eccitazione vi è un magnete permanente, le cose continuano - almeno in media - a funzionare lo stesso, perché non è richiesta energia né al campo magnetico né alle sue sorgenti.

Ovviamente tutto ciò rappresenta una schematizzazione: in particolare non è detto che il funzionamento del collettore sia così *regolare* da consentire lo scambio da una bobina all'altra senza perdite: se ad esempio durante la fase di commutazione il generatore risulta momentaneamente sconnesso da entrambe le spire, allora il generatore di corrente - proprio per mantenere la corrente costante - aumenta a dismisura la tensione e il suo funzionamento non è più regolare; in ogni caso, durante le commutazioni, si hanno repentine variazioni di tensione e se i contatti del commutatore non sono particolarmente curati e la continuità non è assicurata, possono scoccare scintille (dovute alle forti fem controelettromotrici $L_1 \frac{di_s}{dt}$ e $L_1 \frac{di_{s+1}}{dt}$) che ovviamente mandano all'aria tutto il nostro bilancio e aumentano le perdite che si vanno a sommare a quelle Joule. Inoltre è opportuno fare osservare che un lavoro negativo del generatore rappresenta sì un lavoro ricevuto, ma questo non significa un effettivo vantaggio energetico. Perché lo sia, occorre che il generatore sia del tipo reversibile, per esempio un accumulatore ricaricabile come un pila al Pb o al NiCd: in queste una corrente in senso contrario a quella normale di erogazione, cioè un lavoro negativo, provoca effettivamente una *ricarica* del generatore e quindi l'energia è, almeno temporaneamente, immagazzinata. Se però si utilizza un generatore qualsiasi ciò non è più vero e un lavoro negativo in pratica non serve di fatto a recuperare alcunché. Si noti oltretutto che nel nostro esempio stiamo utilizzando dei generatori di corrente e pertanto si tratterebbe di fare generatori di tensione (e non di tensione come sono le batterie) reversibili e il discorso sarebbe ancora un po' più complicato.

La coppia che il motore in continua può applicare si può aumentare, facendo il più numerose possibili le spire che contemporaneamente si trovano a passare fra le espansioni polari; esse pertanto sono generalmente assai estese, magari a scapito della costanza della coppia (che interessa nel caso di un galvanometro, ma non allo stesso livello per un motore). Generalmente, a meno che non si voglia un motore con momento di inerzia ridotto al minimo, il nucleo interno di ferro è solidale al rotore; ciò oltretutto assicura una maggiore robustezza meccanica al rotore medesimo, necessaria per trasferire la coppia τ dalle spire all'albero (vedi Fig.16).

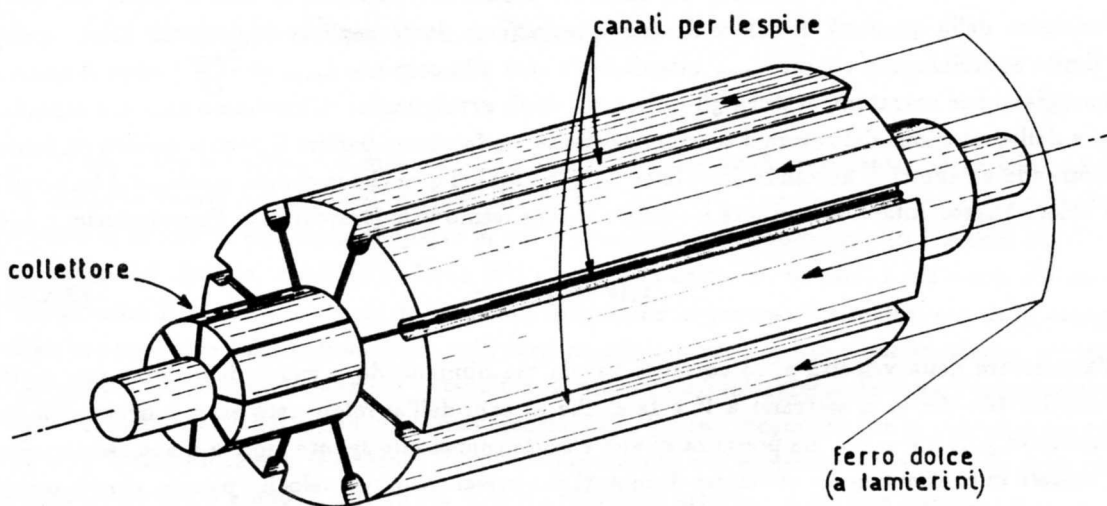


Fig.XX.16

Molto spesso i motori in continua vengono eccitati non come abbiamo visto ora con correnti costanti, bensì, almeno sul rotore, con un generatore di tensione costante V , il cui valore può essere variato dell'esterno: nel caso di corrente costante abbiamo visto che la coppia sviluppata $\tau = i_1 G$ è

costante; dovendo essa essere necessariamente superiore a quella resistente $-K$, la velocità di regime crescerà fino a quando gli attriti produrranno l'ulteriore coppia necessaria per ottenere $\sum_k \tau_k = 0$. Ciò significa che la velocità di regime del motore può anche essere estremamente elevata e così la potenza erogata dal generatore. Con un generatore di tensione V , a parità di coppia resistente, viene raggiunta una velocità limite quasi indipendente dagli attriti; infatti, riprendendo la (136), abbiamo (trattando qui il caso di una sola bobina, ma l'estensione a un rotore a n bobine è banale):

$$V = i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + G\dot{\theta} \quad (\text{XX.148})$$

che comporta una velocità di regime $\dot{\theta}_R$ tale che ($\frac{di_1}{dt} = 0$ a regime):

$$V - G\dot{\theta}_R = i_1 R_1 \quad (\text{XX.149})$$

Ovvero a seconda della coppia resistente $-K$ da vincere (a regime $\ddot{\theta} = 0$), avremo diverse velocità; infatti la (149) può porsi nella forma ($\tau - K = 0$ allora $i_1 = \frac{K}{G}$):

$$V - G\dot{\theta}_R = \frac{KR_1}{G} \quad (\text{XX.150})$$

che ci dice che fissata una certa coppia resistente $-K$ la velocità di regime è tale che la differenza fra la fem costante applicata (V) e la forza controelettromotrice (proporzionale alla velocità: $G\dot{\theta}_R$) risulta proporzionale alla coppia resistente. Pertanto lo stesso motore eccitato con tensione V costante andrà tanto più veloce quanto più piccola sarà la coppia resistente; oppure, visto diversamente, se vogliamo mantenere costante la velocità del nostro motore all'aumentare della coppia resistente (col che aumenta la potenza meccanica richiesta), dobbiamo aumentare la tensione V fino a portarla a quel valore tale per cui continua a valere la (150). Ovviamente a tutto ciò vi è un limite: infatti così facendo si aumenta la corrente nel rotore e poiché la resistenza di esso è finita, ciò porta all'aumento della quantità di calore dissipato per effetto Joule negli avvolgimenti. Esiste quindi un limite superiore alla coppia τ_{max} ottenibile (e cioè alla corrente $i_{max} = \frac{\tau_{max}}{G}$) oltre il quale si danneggiano per sovratemperatura gli isolamenti degli avvolgimenti. Guardiamo un altro aspetto a favore dell'eccitazione del rotore a tensione costante: se facciamo partire il nostro motore da fermo, trascurando gli effetti di autoinduzione (cioè L_1), la (148) ci dice che la coppia massima si ha proprio per velocità zero. Infatti la corrente a motore ancora fermo vale (trascurando l'autoinduzione L_1)

$$i_1(\dot{\theta} = 0) = \frac{V}{R_1} \quad (\text{XX.151})$$

All'aumentare della velocità $\dot{\theta}$, la corrente va via via diminuendo a causa della forza controelettromotrice $G\dot{\theta}$ che va a sottrarsi a V e fa sì che ai capi dell'avvolgimento sia applicata una fem complessiva pari a $V - G\dot{\theta}$. La presenza di una *elevata coppia allo spunto* motiva il non raro impiego del motore in continua quale avviatore di motori che presentano, per velocità piccole, coppie o nulle o molto minori rispetto a quelle necessarie per raggiungere, senza danneggiarsi per sovracorrente, la velocità nell'intorno della quale sviluppano la loro coppia massima; è questo il caso dei grossi motori sincroni, descritti nel paragrafo successivo.

Ci potremmo a questo punto chiedere cosa accade delle considerazioni fatte prima sul bilancio energetico e sulla *ripartizione* del lavoro quando l'eccitazione è fatta a tensione costante e non a corrente costante. Ebbene si trova che, nel caso di corrente i_2 costante, anche questa volta tutto il lavoro meccanico risulta a carico del generatore della bobina mobile e il generatore di corrente sullo

statore (l'avvolgimento fisso) in media non fa lavoro. Si tenga poi presente che spesso nei motori in continua lo stesso generatore (generalmente di tensione) serve ad alimentare sia lo statore che il rotore in configurazioni che a seconda dei casi sono costituite dalla serie o dal parallelo dei due avvolgimenti. In questi casi è oltremodo evidente che essendo il generatore unico e ritornando a ogni giro il motore nelle stesse condizioni dal punto di vista dell'energia magnetica immagazzinata, tutto il lavoro meccanico prodotto è a carico del generatore a comune fra i due avvolgimenti e ha poco, se non alcuno, interesse sapere come esso venga ripartito fra i due avvolgimenti.

Occorre ora richiamare l'attenzione su un punto di notevole interesse pratico: tutte le volte che abbiamo calcolato il lavoro dei generatori, lo abbiamo fatto al netto delle perdite Joule. Ciò non significa che in un motore le perdite Joule non abbiano importanza, anzi: al contrario quello che è di interesse dominante in un sistema come un motore, è il suo *rendimento* definito come rapporto fra il lavoro medio meccanico ottenuto diviso il lavoro totale fatto dal generatore, ivi compresa quella parte che finisce nel riscaldamento, alla quale contribuiscono le perdite Joule e le perdite nel ferro (per isteresi e correnti parassite). Le resistenze degli avvolgimenti le più basse possibili, l'utilizzo di ferro con piccola area del ciclo di isteresi e la struttura magnetica a lamierini per interrompere le correnti parassite indotte, consentono nei motori in continua buoni rendimenti, attorno al 90% nei casi migliori.

Per concludere il paragrafo notiamo che un motore in continua in cui statore e rotore siano eccitati in serie, funziona altrettanto bene se il generatore di fem (o corrente) è in continua o in alternata. Infatti ciò che provoca il moto è l'interazione fra le correnti delle spire e il campo e, almeno per quanto riguarda il segno, tale interazione resta la stessa se la corrente e il campo vengono entrambi invertiti; quello che cambia è la struttura temporale "fine" della coppia entro il periodo di eccitazione alternata, ma il suo valor medio sarà in entrambi i casi uguale, purché il valore efficace della corrente alternata uguagli il valore della corrente continua.

8.— *Un esempio di motore a induzione*

Si spera che il lettore, nei meandri delle formule dei paragrafi precedenti, sia riuscito a intuire una semplice interpretazione dell'origine della coppia che si sviluppa quando un circuito percorso da corrente si muove in una zona di spazio in cui è presente un campo magnetico: ovvero che il moto spontaneo del circuito, e quindi la forza o la coppia che agisce su di esso, è nel verso che tende a massimizzare il flusso del campo di induzione magnetica attraverso il circuito, ovvero il campo di induzione prodotto dalla bobina tende a disporsi parallelamente rispetto a quello esterno, e pertanto nella condizione di minima energia potenziale. Il moto è cioè interpretabile come l'orientazione del dipolo (o dell'insieme dei dipoli magnetici associati alla *lamina magnetica* che si appoggia sul nostro circuito) secondo il campo \vec{B} esterno. Tutto ciò è contenuto nell'espressione matematica della coppia (supponiamo che il grado di libertà sia la solita rotazione attorno a un asse fisso):

$$\tau = i_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \quad (\text{XX.152})$$

con i_1 corrente nel circuito mobile e Φ_1 flusso totale di induzione magnetica concatenato con il circuito 1; in particolare dalla (152) risulta evidente che per valori di Φ_1 massimi la coppia è nulla.

Supponiamo ora di disporre di una bobina che per semplicità supponiamo piana e montata su un asse fisso, nella quale circoli una corrente i_1 . Se, con qualche dispositivo opportuno, riusciamo

a ottenere un campo di induzione \vec{B} omogeneo in un sistema di riferimento che ruoti con velocità angolare costante ω_0 attorno all'asse della bobina, il flusso Φ_1 di \vec{B} attraverso la bobina varierà in funzione del tempo e provocherà una rotazione della bobina stessa; su di essa infatti agirà una coppia del tipo (152) che porterà la bobina a inseguire il campo rotante (vedi Fig.17).

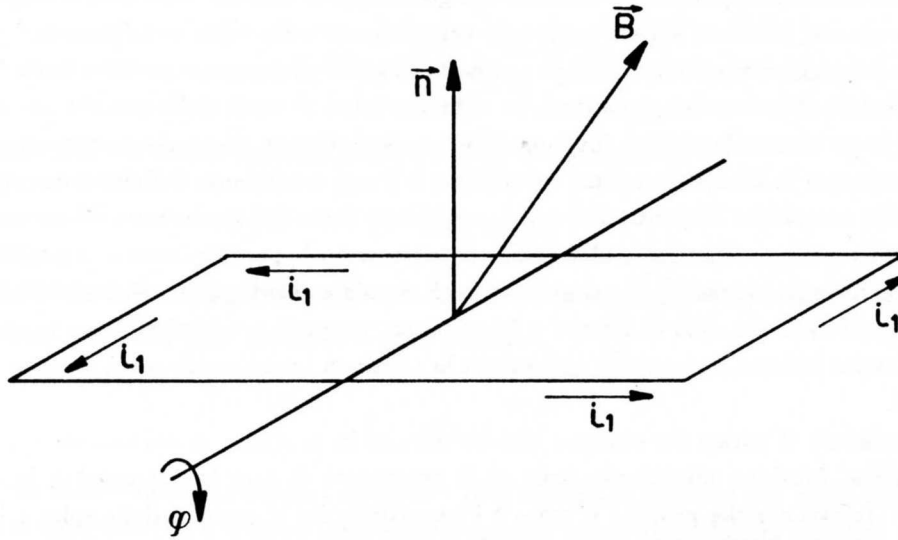


Fig.XX.17

Se la corrente i_1 è costante, la dinamica del moto dipenderà, sempre che si mantenga costante la velocità angolare ω_0 di \vec{B} , dalla inerzia della bobina e dall'eventuale coppia resistente applicata all'albero. Se ammettiamo che la coppia resistente $-K$ sia costante, allora una soluzione di regime è molto facilmente trovata: detta S la superficie della singola spira e n il numero di spire, il flusso totale Φ_1 concatenato col circuito 1 vale:

$$\Phi_1 = L_1 i_1 + nSB \cos \theta \quad (\text{XX.153})$$

dove θ rappresenta l'angolo fra la normale al circuito secondo la regola della mano destra (rispetto alla corrente i_1) e la direzione istantanea di \vec{B} . Pertanto la coppia τ applicata alla bobina vale:

$$\tau = i_1 nSB \sin \theta \quad (\text{XX.154})$$

Il segno della (154) in apparente contraddizione con la (152) deriva dal fatto che nell'esempio in esame la bobina è fissa e \vec{B} ruota: la (152) dà la coppia che verrebbe esercitata sul circuito mobile che crea \vec{B} , e pertanto la coppia che agisce sul circuito 1 è uguale e di segno opposto, secondo il principio di azione e reazione. Supponendo che esista una soluzione di regime per la bobina con $\dot{\varphi}_R = \omega_0$ dobbiamo avere:

$$0 = \mathcal{I} \ddot{\varphi} = \tau - K \quad (\text{XX.155})$$

ovvero

$$\sin \theta = \frac{K}{i_1 nSB} \quad (\text{XX.156})$$

La spira ruota quindi con velocità angolare uguale a ω_0 e la sua normale forma con la direzione istantanea di \vec{B} un angolo θ dato dalla (156), cioè essa è sfasata rispetto al campo rotante di un

angolo fisso. La (156) ci dice anche che se la coppia resistente è nulla lo sfasamento è nullo e viceversa se $K = K_{max} = i_1 nSB$ allora la bobina è sfasata di $-\frac{\pi}{2}$ rispetto al campo rotante. Se $K > K_{max} = i_1 nSB$ allora non si riesce più a soddisfare la (156) e la bobina “si sgancia” cioè la soluzione a regime $\dot{\varphi} = \omega_0 = cost$ non è più ottenibile.

Se ci chiediamo chi fa il lavoro, nel caso di $K < K_{max}$, la risposta dipende da come è realizzato il campo rotante: se lo otteniamo facendo ruotare un magnete permanente la potenza sarà quella - meccanica - necessaria a mantenere in rotazione costante \vec{B} : sul magnete agirà infatti una coppia $-\tau = -i_1 nSB \sin \theta$ e ruotando il magnete con velocità angolare ω_0 la potenza da fornire sarà proprio $\tau \cdot \omega_0$ uguale a quella necessaria per vincere la coppia resistente K (vedi (155)). Se il campo rotante \vec{B} è ottenuto con qualche altro procedimento (che vedremo fra poco) allora anche il metodo di rifornire la potenza cambierà.

L'esempio ora fatto descrive il principio di funzionamento di un motore elettrico detto *sincrono*; l'origine di questo nome discende dal fatto che la velocità angolare del rotore è uguale a quella del campo rotante, la stessa qualunque sia la coppia resistente (purché inferiore a K_{max}). Poiché questo tipo di motori è in grado di vincere una coppia resistente solo se la loro velocità è quella sincrona, occorre, mediante un dispositivo ausiliario, portarli in rotazione affinché *si aggancino* al campo rotante.

Supponiamo ora di sopprimere il generatore che forniva corrente alla bobina e sostituiamolo con un cortocircuito. Se facciamo come prima ruotare il campo \vec{B} a velocità costante ω_0 troviamo che la bobina si mette ugualmente in moto. Ciò significa che una coppia agisce ancora su di essa; ciò d'altronde non deve sorprendere in quanto nella spira circola comunque una corrente $i_1(t)$ indotta dalla variazione del flusso Φ_1 concatenato con essa. Infatti, supponiamo che la bobina sia mantenuta fissa: allora il flusso Φ_1 sarà sempre determinato dalla (153) con $i_1 = i_1(t)$ e per il circuito della bobina potremo scrivere la seconda legge di Kirchhoff che sarà (r resistenza totale della bobina, l autoinduttanza)

$$i_1 \cdot r = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -l \frac{di_1}{dt} + nSB\omega_0 \sin \omega_0 t \quad (\text{XX.157})$$

dove è stato posto $\theta = \omega_0 t$. La soluzione di regime per i_1 che soddisfa la (157) è del tipo sinusoidale:

$$i_1 = i_0 \sin(\omega_0 t + \psi) \quad (\text{XX.158})$$

con

$$i_0 = \frac{nSB\omega_0}{\sqrt{r^2 + \omega_0^2 l^2}} \quad \psi = -\text{atan} \frac{\omega_0 l}{r} \quad (\text{XX.159})$$

Il nostro sistema si comporta come un generatore di fem sinusoidale esattamente come il sistema descritto nel §5; e difatti in quel caso \vec{B} era fisso e si ruotava la spira con velocità costante, mentre in questo esempio si tiene ferma la spira e si ruota il campo \vec{B} ; la corrente nella spira dipende solo dal moto relativo e quindi i due risultati necessariamente coincidono. Tornando alla coppia che agisce sulla bobina abbiamo:

$$\tau = -i_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} = i_1 nSB \sin \theta = i_0 nSB \sin(\omega_0 t + \psi) \sin(\omega_0 t) \quad (\text{XX.160})$$

Tale coppia è una funzione sinusoidale del tempo con una pulsazione pari a $2\omega_0$, più un termine costante. Possiamo ottenere una coppia costante aggiungendo una seconda bobina, anch'essa solidale con l'albero, montata a 90° rispetto alla precedente (Fig.18).

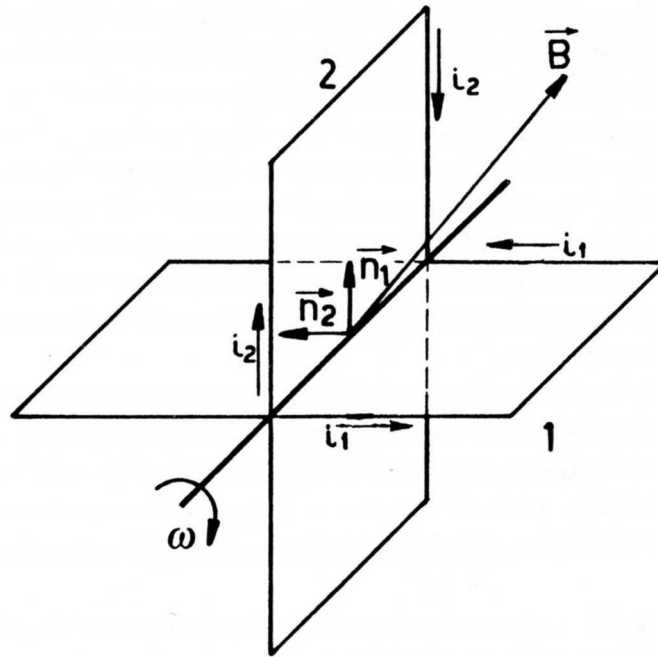


Fig.XX.18

Se cerchiamo la soluzione per la corrente in questa seconda bobina, dovremo ancora usare la (157), salvo tener conto dello sfasamento di $\frac{\pi}{2}$ rispetto alla bobina 1; avremo così ($\Phi_2 = li_2 + nSB \cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{2})$):

$$i_2 r = -l \frac{di_2}{dt} + nSB \omega_0 \sin(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}) = -l \frac{di_2}{dt} + nSB \omega_0 \cos(\omega_0 t) \quad (\text{XX.161})$$

che dà per i_2 :

$$i_2 = i_0 \cos(\omega_0 t + \psi) \quad (\text{XX.162})$$

Le due correnti non interagiscono induttivamente l'una con l'altra perché il loro coefficiente di mutua induzione è nullo essendo le bobine fra loro ortogonali. La coppia totale che agisce sull'albero dovuta all'interazione delle correnti i_1 e i_2 con il campo rotante \vec{B} vale, tenendo conto del segno:

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = -i_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} - i_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial (\theta + \frac{\pi}{2})} = i_0 nSB [\sin \omega_0 t \sin(\omega_0 t + \psi) + \cos \omega_0 t \cos(\omega_0 t + \psi)] \quad (\text{XX.163})$$

La somma a secondo membro si riduce a $\cos \psi$ e pertanto (vedi (159)):

$$\tau = \frac{n^2 S^2 B^2 \omega_0}{\sqrt{r^2 + \omega_0^2 l^2}} \cos \psi = \frac{n^2 S^2 B^2 \omega_0}{r^2 + \omega^2 l^2} \cdot r \quad (\text{XX.164})$$

Il risultato ora ottenuto vale nel caso in cui B sia mantenuto costante e sia mantenuta costante anche la sua velocità di rotazione. Ripensando al procedimento seguito, è ovvio che se avessimo supposto la bobina rotante con velocità costante $\omega < \omega_0$, il risultato (164) continuerebbe a valere, sostituendo al posto di ω_0 , $(\omega_0 - \omega)$. In queste ipotesi abbiamo così:

$$\tau = \frac{n^2 S^2 B^2 (\omega_0 - \omega)}{r^2 + (\omega_0 - \omega)^2 l^2} \cdot r = \frac{n^2 S^2 B^2 r}{\frac{r^2}{(\omega_0 - \omega)} + l^2 (\omega_0 - \omega)} \quad (\text{XX.165})$$

La (165) ci dice che se disponiamo di un campo magnetico rotante con velocità angolare ω_0 e se al nostro motore è applicata una coppia resistente costante $-K$, allora la bobina (detta *rotore*) a regime possiede una velocità angolare ω concorde con ω_0 tale per cui vale la (165), con K al posto di τ . Se $K = 0$ allora si trova che $\omega = \omega_0$ e la velocità angolare della bobina coincide con quella del campo rotante. Si noti la differenza rispetto al caso in cui nella bobina scorreva una corrente continua i_1 : in quel caso la condizione a regime corrispondeva ad avere una velocità del rotore *comunque* uguale a quella del campo \vec{B} e uno sfasamento fra 0 e $\frac{\pi}{2}$ che aumentava all'aumentare della coppia. Nel caso in cui nella bobina circola la sola corrente indotta, vi è piuttosto una *differenza nelle velocità angolari* del campo e del rotore, collegata alla coppia e non uno sfasamento angolare. Si introduce la grandezza *scorrimento o slittamento* $s = \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0}$, misurata generalmente in percento, per denotare il punto di lavoro di un motore del tipo ora descritto (*motore a induzione*).

Prima di vedere come in pratica si può realizzare un campo rotante, osserviamo che la coppia τ data dalla (165) ha un andamento in funzione della velocità angolare del tipo riportato in Fig.19.

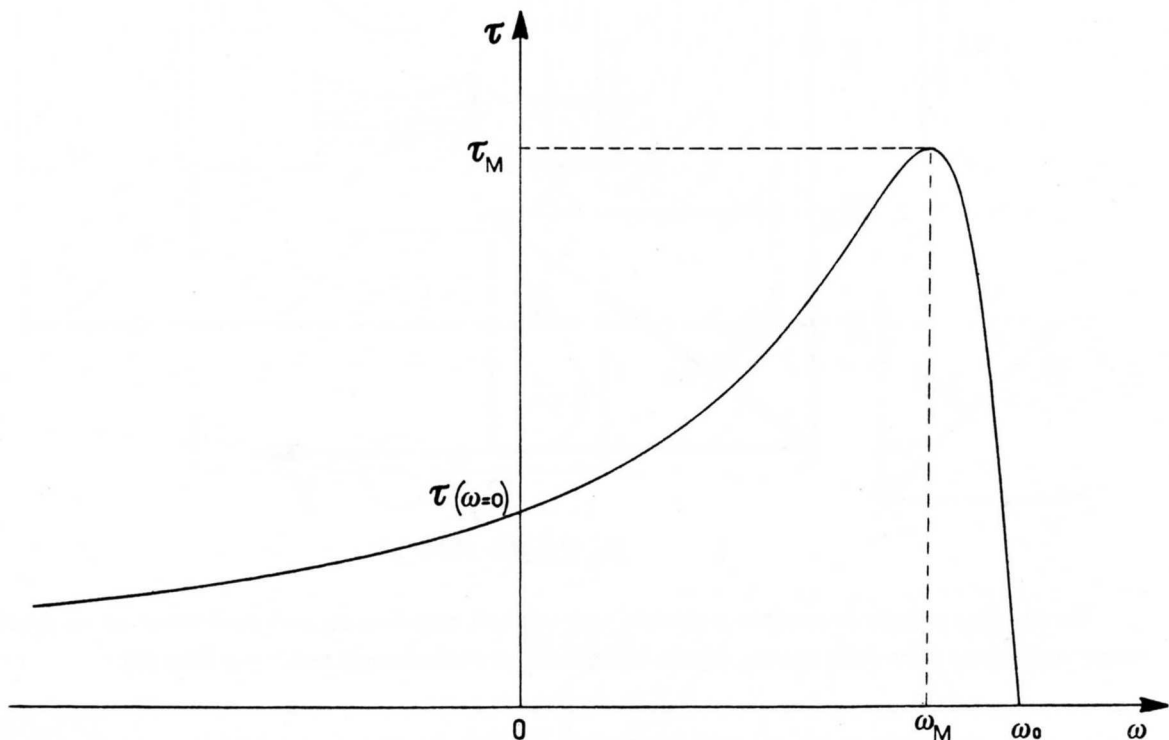


Fig.XX.19

E' importante osservare la presenza di un massimo τ_M in corrispondenza di un valore di ω_M , ricavabile dalla (165), pari a:

$$\omega_M = \omega_0 \left(1 - \frac{r}{\omega_0 l}\right) \quad (\text{XX.166})$$

con

$$\tau_M = \frac{n^2 S^2 B^2}{2l} \quad (\text{XX.167})$$

Viceversa per $\omega = 0$ cioè con il rotore fermo la coppia vale:

$$\tau(\omega = 0) = \frac{n^2 S^2 B^2 r \omega_0}{r^2 + \omega_0^2 l^2} = \tau_M \frac{2r}{\omega_0 l} \frac{1}{1 + \frac{r^2}{\omega_0^2 l^2}} \quad (\text{XX.168})$$

Poiché nei casi pratici si cerca di ridurre al massimo le perdite facendo r piccola rispetto a $\omega_0 l$, ciò significa che ω_M è in genere assai vicino a ω_0 e che $\tau(\omega = 0)$ è assai più piccolo di τ_M . In un motore di questo genere, la bassa coppia da fermo talvolta richiede l'avviamento tramite un motore ausiliario con alta coppia allo spunto, quale un motore in continua eccitato in tensione (vedi paragrafo precedente).

Con riferimento alla Fig.19 immaginiamo di partire da una condizione di regime in cui la coppia resistente sia molto piccola e dovuta unicamente agli attriti dei cuscinetti dell'albero del rotore e alla viscosità dell'aria: allora la velocità ω_R del rotore sarà assai prossima a ω_0 . Se ora aumentiamo il valore assoluto della coppia resistente $-K$ il motore andrà via via rallentando (ma assai poco dato l'andamento della curva in Fig.19) e corrispondentemente la coppia andrà adeguandosi al valore necessario per equilibrare $-K$. Quando però K supera il valore τ_M , la bobina si *sgancia* (in gergo: "stacca") e cessa di funzionare.

Guardiamo ora come si può realizzare un campo \vec{B} rotante con velocità angolare $\omega_0 = \text{cost}$.

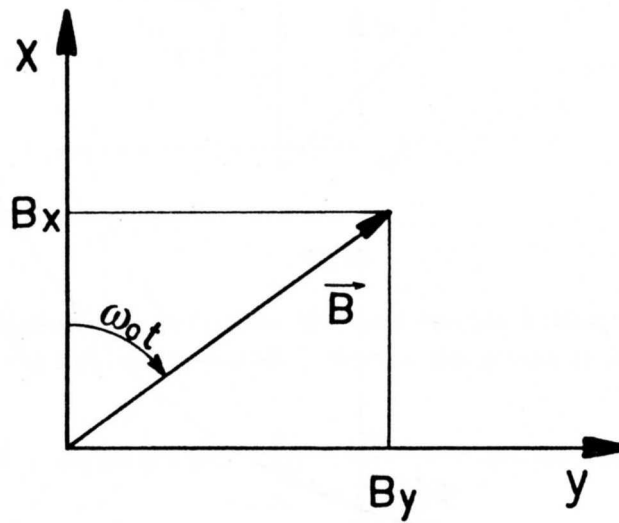


Fig.XX.20

Un campo costante in modulo e rotante con velocità angolare ω_0 può proiettarsi su un riferimento cartesiano fisso nello spazio, dando le seguenti proiezioni sugli assi x e y (Fig.20)

$$\begin{cases} B_x = B \cos \omega_0 t \\ B_y = B \sin \omega_0 t \end{cases} \quad (\text{XX.169})$$

Tale risultato può reinterpretarsi nel seguente modo: se facciamo in modo che in una regione dello spazio siano presenti due campi di induzione magnetica ortogonali fra loro, aventi ampiezza uguale, oscillanti con pulsazione ω_0 e sfasati l'uno rispetto all'altro di $\frac{\pi}{2}$, allora ciò equivale ad avere nella medesima regione di spazio un campo costante in modulo e rotante con velocità angolare ω_0 . Il sistema riportato nella Fig.21 crea quindi nella zona dei traferri un campo rotante. Si tratta di un circuito magnetico costituito da due avvolgimenti identici in cui circolano correnti sfasate di $\frac{\pi}{2}$ l'una rispetto all'altra e che creano due campi omogenei diretti come i due assi x e y . Non sfugga la presenza del nucleo centrale anch'esso di ferro dolce che serve a ridurre la *riluttanza magnetica** del circuito e soprattutto a omogenizzare il campo nei traferri.

* la riluttanza di un circuito magnetico è l'equivalente della resistenza di un circuito elettrico, una volta che si stabilisca una corrispondenza fra il flusso del campo di induzione magnetica e la corrente elettrica e fra la forza magnetomotrice $N \cdot i$ e la forza elettromotrice \mathcal{E} .

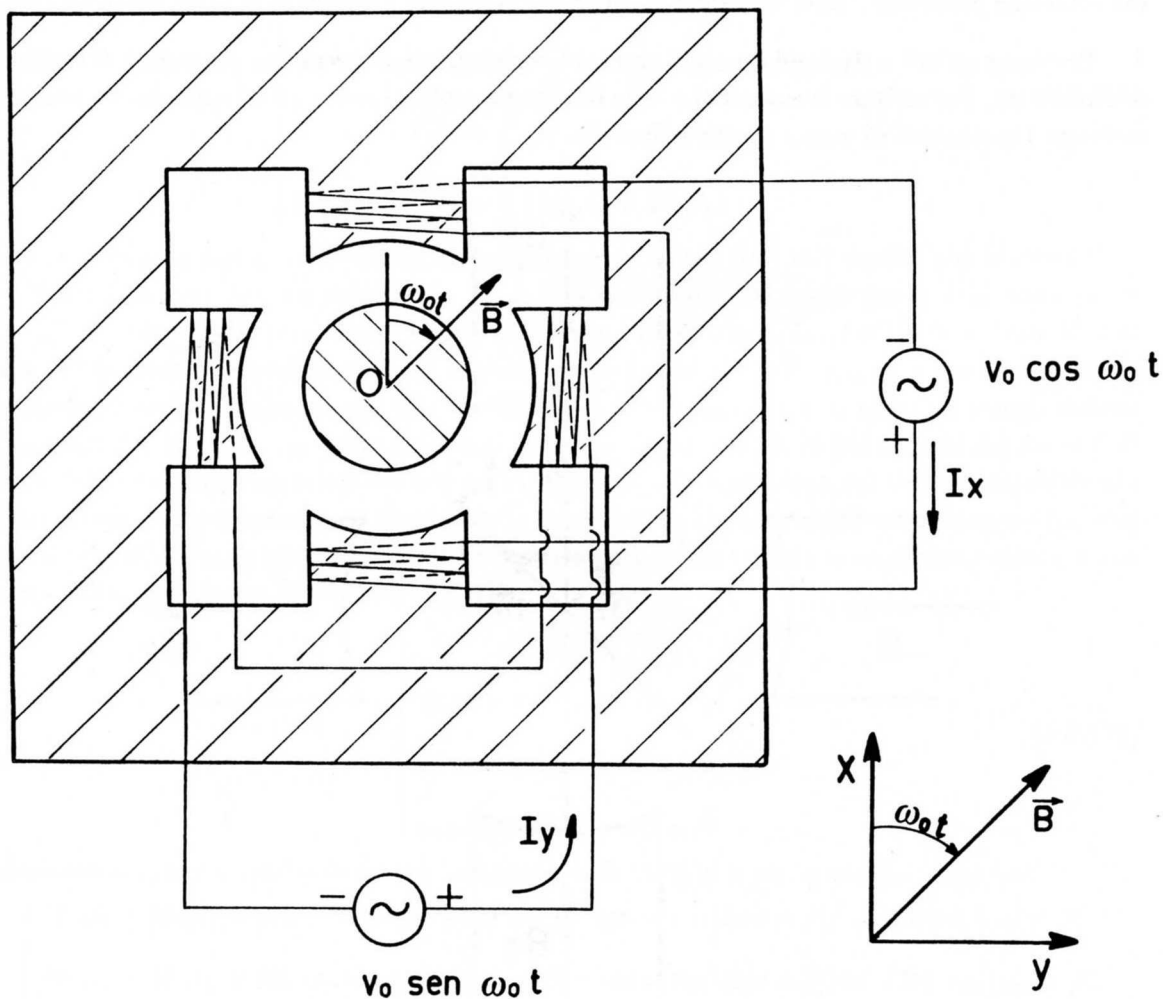


Fig.XX.21

Se montiamo su un asse perpendicolare al foglio e passante per il punto O le due bobine a $\frac{\pi}{2}$ descritte prima, abbiamo realizzato un esempio molto realistico (anche se certamente non ottimizzato da molti punti di vista) di motore a induzione. Il motore in questione si chiama propriamente *asincrono bifase*. *Asincrono* poiché la velocità di rotazione del motore, come abbiamo visto, non è sincrona con quella di \vec{B} , *bifase* poiché il campo magnetico rotante è ottenuto mediante due tensioni sfasate di $\frac{\pi}{2}$ l'una rispetto all'altra e tale sistema di tensioni è detto appunto di *tensione bifase*. Le bobine sono costituite da poche (spesso 1) spire di rame in cortocircuito di sezione estremamente elevata, caratterizzate quindi da un piccolo rapporto $\frac{r}{\omega_0 l}$. Poiché in genere la eccitazione dell'elettromagnete è ottenuta dalla energia elettrica della rete, ω_0 vale $314 \text{ rad/s} = 3000 \text{ giri/minuto}$. Nella pratica il campo rotante non si realizza quasi mai con due tensioni sfasate di 90° (eccitazione bifase), ma con tre tensioni sfasate fra loro di 120° (eccitazione trifase) il che ovviamente comporta strutture diverse da quella di Fig.21. Tornando al nostro esempio, per produrre un campo \vec{B} rotante e di modulo costante occorre che i generatori inviino correnti di ampiezza costante negli avvolgimenti del cosiddetto induttore: solo in queste ipotesi la parte del campo \vec{B} prodotta

dall'induttore ha modulo costante. Se viceversa l'eccitazione avviene con generatori di tensione le ampiezze delle correnti verranno a dipendere dalla velocità del rotore (il cosiddetto *indotto*): infatti la sua rotazione provocherà delle variazioni di flusso nell'induttore e quindi delle forze elettromotrici.

Proviamo quindi a risolvere il nostro problema ammettendo di avere due generatori di tensione sull'induttore. Per scrivere le equazioni è bene introdurre esplicitamente gli accoppiamenti induttivi mediante i coefficienti di auto e mutua induzione.

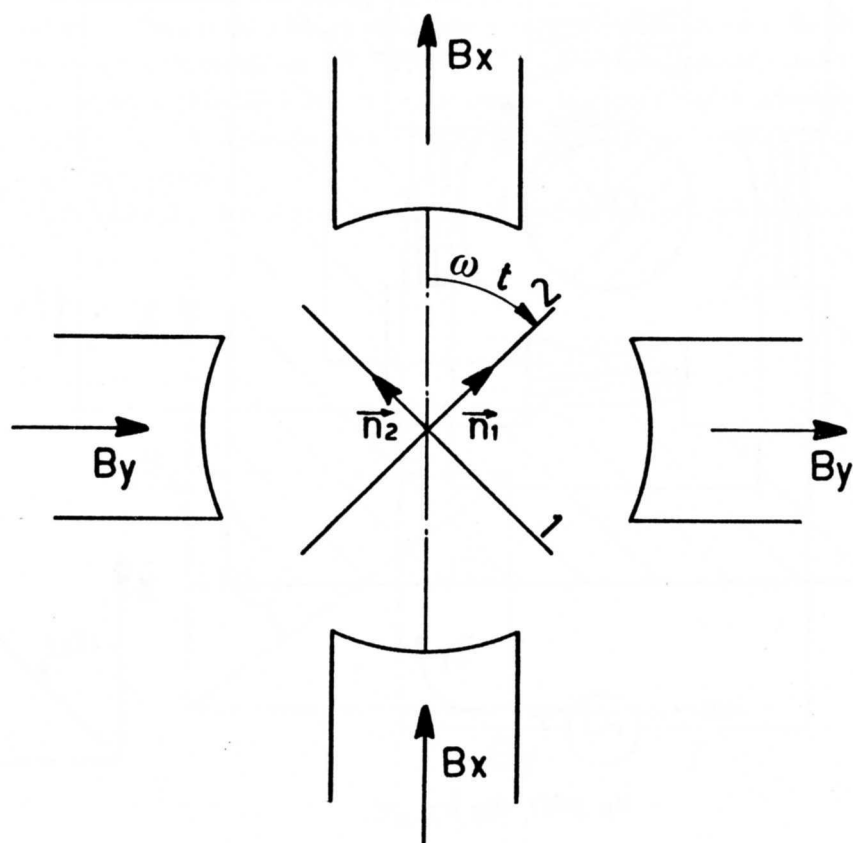


Fig.XX.22

Con riferimento alla Fig.22 abbiamo (M_{1x} rappresenta l'accoppiamento fra la spira 1 e lo avvolgimento che produce il campo B_x e così via):

$$\begin{cases} M_{1x} = \mathcal{M} \cos \omega t \\ M_{1y} = \mathcal{M} \sin \omega t \\ M_{2x} = \mathcal{M} \sin \omega t \\ M_{2y} = -\mathcal{M} \cos \omega t \end{cases} \quad (\text{XX.170})$$

con $\mathcal{M} = \sqrt{Ll}$, essendo L il coefficiente di autoinduzione degli avvolgimenti del circuito magnetico; ammettiamo cioè di lavorare nel limite di accoppiamento stretto, a causa della presenza del nucleo

di ferro, non riportato nella Fig.22. Applichiamo la seconda legge di Kirchhoff ai quattro circuiti:

$$\begin{cases} V_0 \cos \omega_0 t = I_x R + \frac{dI_x}{dt} L + \frac{d}{dt} (M_{1x} i_1 + M_{2x} i_2) \\ V_0 \sin \omega_0 t = I_y R + \frac{dI_y}{dt} L + \frac{d}{dt} (M_{1y} i_1 + M_{2y} i_2) \\ 0 = i_1 r + \frac{di_1}{dt} l + \frac{d}{dt} (M_{1x} I_x + M_{1y} I_y) \\ 0 = i_2 r + \frac{di_2}{dt} l + \frac{d}{dt} (M_{2x} I_x + M_{2y} I_y) \end{cases} \quad (\text{XX.171})$$

Data la geometria scelta, altri termini di accoppiamento mutuo fra i vari circuiti non esistono.

Il problema consiste nel ricavare I_x , I_y , i_1 e i_2 in funzione del tempo per ω e ω_0 costanti. Si tratta cioè di trovare le soluzioni di regime del sistema (171) con R, L, r, l costanti e i vari M dati dalla (170). Prima di avvilupparci nei calcoli occorre notare che nelle pagine precedenti abbiamo già risolto il problema almeno per i_1 e i_2 , ammettendo semplicemente di avere un campo rotante \vec{B} con velocità angolare ω_0 ; quel risultato ci consente di dire che gli ultimi termini dei membri di destra delle due ultime equazioni del sistema (171) hanno una dipendenza dal tempo sinusoidale con pulsazione $(\omega_0 - \omega)$; precisamente sappiamo che le correnti i_1 e i_2 sinusoidali con pulsazione $(\omega_0 - \omega)$ sono sfasate di $\frac{\pi}{2}$ l'una rispetto all'altra. La soluzione del nostro sistema la cercheremo allora, anche questa volta, nella forma (vedi (158) e (162)):

$$\begin{cases} I_x = I_0 \cos (\omega_0 t + \alpha) \\ I_y = I_0 \sin (\omega_0 t + \alpha) \\ i_1 = i_0 \sin [(\omega_0 - \omega)t + \beta] \\ i_2 = i_0 \cos [(\omega_0 - \omega)t + \beta] \end{cases} \quad (\text{XX.172})$$

Calcoliamoci prima i termini di mutua induzione; dalle (172) si trova, posto $\Delta\omega = \omega_0 - \omega$:

$$\begin{cases} M_{1x} i_1 + M_{2x} i_2 = M i_0 \{ \cos \omega t \sin [\Delta\omega t + \beta] + \sin \omega t \cos [\Delta\omega t + \beta] \} = M i_0 \sin (\omega_0 t + \beta) \\ M_{1y} i_1 + M_{2y} i_2 = M i_0 \{ \sin \omega t \sin [\Delta\omega t + \beta] - \cos \omega t \cos [\Delta\omega t + \beta] \} = -M i_0 \cos (\omega_0 t + \beta) \\ M_{1x} I_x + M_{1y} I_y = M I_0 \{ \cos \omega t \cos [\omega_0 t + \alpha] + \sin \omega t \sin [\omega_0 t + \alpha] \} = M I_0 \cos [\Delta\omega t + \alpha] \\ M_{2x} I_x + M_{2y} I_y = M I_0 \{ \sin \omega t \cos [\omega_0 t + \alpha] - \cos \omega t \sin [\omega_0 t + \alpha] \} = -M I_0 \sin [\Delta\omega t + \alpha] \end{cases} \quad (\text{XX.173})$$

Sostituendo nelle (171) abbiamo quindi:

$$\begin{cases} V_0 \cos \omega_0 t = I_0 R \cos (\omega_0 t + \alpha) - \omega_0 I_0 L \sin (\omega_0 t + \alpha) + M i_0 \omega_0 \cos (\omega_0 t + \beta) \\ V_0 \sin \omega_0 t = I_0 R \sin (\omega_0 t + \alpha) + \omega_0 I_0 L \cos (\omega_0 t + \alpha) + M i_0 \omega_0 \sin (\omega_0 t + \beta) \\ 0 = i_0 r \sin [\Delta\omega t + \beta] + \Delta\omega i_0 l \cos [\Delta\omega t + \beta] - M I_0 \Delta\omega \sin [\Delta\omega t + \alpha] \\ 0 = i_0 r \cos [\Delta\omega t + \beta] - \Delta\omega i_0 l \sin [\Delta\omega t + \beta] - M I_0 \Delta\omega \cos [\Delta\omega t + \alpha] \end{cases} \quad (\text{XX.174})$$

Usando i numeri complessi i calcoli si semplificano. Moltiplichiamo ad esempio entrambi i membri della seconda delle (174) per l'unità immaginaria j e sommiamo membro a membro con la prima delle (174); facciamo lo stesso con la terza e la quarta delle (174). Abbiamo allora:

$$\begin{cases} V_0 = (R + j\omega_0 L) I_0 \exp j\alpha + M i_0 \omega_0 \exp j\beta \\ 0 = [r + j(\omega_0 - \omega)l] i_0 \exp j\beta - M I_0 (\omega_0 - \omega) \exp j\alpha \end{cases} \quad (\text{XX.175})$$

dove abbiamo eliminato nella prima il fattore a comune $\exp j\omega_0 t$ e nella seconda $\exp j(\omega_0 - \omega)t$. Dalla seconda delle (175) si ricava:

$$i_0 = \frac{\mathcal{M}I_0(\omega_0 - \omega)}{\sqrt{r^2 + (\omega_0 - \omega)^2 l^2}} \quad (\text{XX.176})$$

e

$$\text{Im} \left[\exp j(\beta - \alpha) \left(1 + j(\omega_0 - \omega) \frac{l}{r} \right) \right] = 0 \quad (\text{XX.177})$$

La (177) ci consente di scrivere:

$$\alpha - \beta = \text{atan} \frac{(\omega_0 - \omega)l}{r} \quad (\text{XX.178})$$

Ponendo $\alpha - \beta = \gamma$ e $\frac{l}{r} = \lambda$ possiamo scrivere:

$$\gamma = \text{atan} \frac{(\omega_0 - \omega)l}{r} = \text{atan} (\omega_0 - \omega)\lambda \quad (\text{XX.179})$$

Dalla (175), sfruttando i risultati (176) e (179) e tenendo conto che stiamo considerando il caso di accoppiamento stretto, otteniamo ($\Lambda = \frac{L}{R}$):

$$\begin{aligned} V_0 &= I_0 \exp j\beta \left[\frac{\mathcal{M}^2 \omega_0 (\omega_0 - \omega)}{\sqrt{r^2 + (\omega_0 - \omega)^2 l^2}} + (R + j\omega_0 L) \exp j\gamma \right] = \\ &= \frac{I_0 \exp j\beta}{\sqrt{1 + (\omega_0 - \omega)^2 \lambda^2}} R [1 + j(\omega_0 \Lambda + (\omega_0 - \omega)\lambda)] = \\ &= \frac{I_0}{\sqrt{1 + (\omega_0 - \omega)^2 \lambda^2}} R \sqrt{1 + [\omega_0 \Lambda + (\omega_0 - \omega)\lambda]^2} \exp j \{ \beta + \text{atan} [\omega_0 \Lambda + (\omega_0 - \omega)\lambda] \} \end{aligned} \quad (\text{XX.180})$$

Dalla (180) otteniamo finalmente:

$$I_0 = \frac{V_0}{R} \sqrt{\frac{1 + (\omega_0 - \omega)^2 \lambda^2}{1 + [\omega_0 \Lambda + (\omega_0 - \omega)\lambda]^2}} \quad (\text{XX.181})$$

$$\beta = - \text{atan} [\omega_0 \Lambda + (\omega_0 - \omega)\lambda] \quad (\text{XX.182})$$

e quindi, inserendo la (181) nella (176):

$$i_0 = \frac{\mathcal{M}(\omega_0 - \omega)V_0}{Rr \sqrt{1 + [\omega_0 \Lambda + (\omega_0 - \omega)\lambda]^2}} \quad (\text{XX.183})$$

Possiamo ora calcolarci la coppia totale che agisce sul nostro rotore come:

$$\tau = i_1 \left[I_x \frac{\partial M_{1x}}{\partial(\omega t)} + I_y \frac{\partial M_{1y}}{\partial(\omega t)} \right] + i_2 \left[I_x \frac{\partial M_{2x}}{\partial(\omega t)} + I_y \frac{\partial M_{2y}}{\partial(\omega t)} \right] \quad (\text{XX.184})$$

La (184) sfruttando le (170) e (172) dà:

$$\begin{aligned} \tau &= i_0 I_0 \mathcal{M} \{ \text{sen} [(\omega_0 - \omega)t + \beta] [-\cos(\omega_0 t + \alpha) \text{sen} \omega t + \text{sen}(\omega_0 t + \alpha) \cos \omega t] + \\ &\quad + \cos [(\omega_0 - \omega)t + \beta] [\cos(\omega_0 t + \alpha) \cos \omega t + \text{sen}(\omega_0 t + \alpha) \text{sen} \omega t] \} = \\ &= i_0 I_0 \mathcal{M} \{ \text{sen} [(\omega_0 - \omega)t + \beta] \text{sen} [(\omega_0 - \omega)t + \alpha] + \cos [(\omega_0 - \omega)t + \beta] \cos [(\omega_0 - \omega)t + \alpha] \} = \end{aligned}$$

$$= i_0 I_0 \mathcal{M} \cos(\alpha - \beta) = i_0 I_0 \mathcal{M} \cos \gamma \quad (\text{XX.185})$$

Nella (185) possiamo sostituire i risultati (179), (181) e (183) per ottenere finalmente:

$$\tau = \frac{V_0^2 \mathcal{M}^2 (\omega_0 - \omega)}{R^2 r} \frac{1}{1 + [\omega_0 \Lambda + (\omega_0 - \omega) \lambda]^2} = \frac{V_0^2}{R} \frac{\lambda \Lambda (\omega_0 - \omega)}{1 + [\omega_0 \Lambda + (\omega_0 - \omega) \lambda]^2} \quad (\text{XX.186})$$

E' comodo far comparire direttamente lo slittamento $s = \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0}$ e abbiamo così:

$$\tau = \frac{V_0^2}{R} \frac{\Lambda \lambda \omega_0 s}{1 + \omega_0^2 (\Lambda + s \lambda)^2} \quad (\text{XX.187})$$

La (187) corrisponde alla (165), solo che adesso è calcolata in funzione dei parametri elettrici dei circuiti utilizzati nell'induttore e nell'indotto. Se vogliamo ora calcolare la potenza istantanea sviluppata dal motore dobbiamo solo moltiplicare la coppia τ per ω , velocità angolare del rotore:

$$P_{mecc} = \tau \cdot \omega = \frac{V_0^2}{R} \frac{\omega_0 \omega \lambda \Lambda s}{1 + \omega_0^2 (\Lambda + s \lambda)^2} = \frac{V_0^2}{R} \frac{\omega_0^2 s (1 - s) \Lambda \lambda}{1 + \omega_0^2 (\Lambda + s \lambda)^2} \quad (\text{XX.188})$$

Tale potenza deve corrispondere alla potenza media erogata dal generatore meno la potenza media perduta per effetto Joule sui due avvolgimenti, con le medie fatte su un periodo di tempo pari a un multiplo intero sia del periodo $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ che del periodo $T = \frac{2\pi}{\omega_0 - \omega}$ (il che equivale a un tempo $t \gg T$): calcolando così le medie, il contributo di energia magnetica scompare poiché ciclicamente essa torna ad assumere gli stessi valori e pertanto non dà contributo.

La potenza elettrica media si può calcolare come (i generatori sono due):

$$P_{elett} = (V_{eff} I_{eff} \cos \alpha) \cdot 2 = V_0 I_0 \cos \alpha \quad (\text{XX.189})$$

Quanto a $\cos \alpha$ esso vale (vedi (178), (179), (182)):

$$\begin{aligned} \cos \alpha = \cos(\gamma + \beta) &= \cos \gamma \cos \beta - \sin \gamma \sin \beta = \frac{1 + (\omega_0 - \omega) \lambda [\omega_0 \Lambda + (\omega_0 - \omega) \lambda]}{\sqrt{1 + (\omega_0 - \omega)^2 \lambda^2} \sqrt{1 + [\omega_0 \Lambda + (\omega_0 - \omega) \lambda]^2}} \\ &= \frac{1 + s \lambda \cdot \omega_0^2 [\Lambda + s \lambda]}{\sqrt{1 + (\omega_0 - \omega)^2 \lambda^2} \sqrt{1 + [\omega_0 \Lambda + (\omega_0 - \omega) \lambda]^2}} \end{aligned} \quad (\text{XX.190})$$

Abbiamo così (vedi (181)):

$$P_{elett} = \frac{V_0^2}{R} \frac{1 + \omega_0^2 s \lambda [\Lambda + s \lambda]}{1 + \omega_0^2 [\Lambda + s \lambda]^2} \quad (\text{XX.191})$$

Quanto alle potenze dissipate per effetto Joule abbiamo:

$$P_{Joule} = 2 \cdot (I_{eff}^2 R + i_{eff}^2 r) = \frac{V_0^2}{R} \frac{1 + \omega_0^2 s^2 \lambda^2}{1 + \omega_0^2 [\Lambda + s \lambda]^2} + \frac{V_0^2}{R} \frac{\omega_0^2 s^2 \Lambda \lambda}{1 + \omega_0^2 [\Lambda + s \lambda]^2} \quad (\text{XX.192})$$

Se ora sommiamo la (192) e la (188) otteniamo:

$$\begin{aligned} P_{mecc} + P_{Joule} &= \frac{V_0^2}{R} \frac{[1 + \omega_0^2 s^2 \lambda^2 + \omega_0^2 s^2 \Lambda \lambda + \omega_0^2 s (1 - s) \Lambda \lambda]}{1 + \omega_0^2 [\Lambda + s \lambda]^2} = \\ &= \frac{V_0^2}{R} \frac{1 + \omega_0^2 s \lambda [\Lambda + s \lambda]}{1 + \omega_0^2 [\Lambda + s \lambda]^2} = P_{elett} \end{aligned} \quad (\text{XX.193})$$

Abbiamo così verificato il risultato prima anticipato e se vogliamo calcolare il rendimento di questo motore trascurando (in pratica ciò non sarà affatto lecito) le perdite nel ferro, avremo:

$$\eta = \frac{P_{mecc}}{P_{elett}} = \frac{\omega_0^2 s(1-s)\Lambda\lambda}{1 + \omega_0^2 s\lambda[\Lambda + s\lambda]} \quad (\text{XX.194})$$

Rendimenti elevati corrispondono a basse perdite per effetto Joule, ovvero resistenze degli avvolgimenti piccole rispetto alle relative reattanze: $\frac{\omega_0 L}{R} = \omega_0 \Lambda \gg 1$ e $(\omega_0 - \omega) \frac{l}{r} = \omega_0 s\lambda \gg 1$; avere lo stesso parametro di qualità alle frequenze di lavoro nei due circuiti significa avere per l'indotto un parametro di qualità Q ($\omega_0 = \omega$) = $\omega_0 \lambda$ maggiore che nell'induttore per un fattore circa $\frac{1}{s}$, ovvero il rotore avrà pochissime - anche solo 1 - spire di rame con sezione molto più grossa del filo dell'induttore. Con queste condizioni possiamo trascurare la unità a denominatore della (194):

$$\eta \approx \frac{(1-s)}{1 + s\frac{\lambda}{\Lambda}} \quad (\text{XX.195})$$

che dà una indicazione sulle caratteristiche dell'indotto e dell'induttore:

$$1 + s\frac{\lambda}{\Lambda} \approx \frac{(1-s)}{\eta} \rightarrow \frac{\lambda}{\Lambda} \approx \frac{1-s-\eta}{s\eta} \quad (\text{XX.196})$$

L'analisi fin qui svolta, pur illustrando correttamente il principio di funzionamento di questi motori, presenta alcune schematizzazioni che impediscono un confronto quantitativo con motori reali; fra queste val la pena di citare sia il fatto di avere ammesso accoppiamento stretto fra induttore e indotto, sia l'aver trascurato le perdite nel ferro che, come quelle per effetto Joule, riducono il rendimento. Inoltre i motori reali presentano accorgimenti costruttivi che - fondamentali per l'ottimizzazione della robustezza e del rendimento - complicano notevolmente un'analisi quantitativa.

Quanto alle applicazioni, i motori *asincroni polifase* (in genere trifase) a induzione sono senza dubbio i più usati negli impieghi di media potenza e le principali qualità che li rendono di così larga diffusione sono la robustezza, l'assenza di spazzole e collettore (quindi la piccolezza degli attriti) e l'alto rendimento. A titolo di esempio diciamo che un motore con potenza erogata dell'ordine di 10 kW, può avere un rendimento dell'85% con uno scorrimento a pieno carico s_{max} del 4%. Ciò significa che la velocità angolare del motore alla potenza massima vale (la frequenza di rete è di 50 *periodi/s*) 2880 *giri/minuto*. Questi dati inseriti nella (196) consentono di avere una stima del rapporto $\frac{\lambda}{\Lambda}$; si trova $\frac{\lambda}{\Lambda}$ dell'ordine di 3. Un punto importante che abbiamo considerato, ma sul quale non abbiamo insistito, è che la produzione di lavoro meccanico corrisponde sempre, sul circuito che effettivamente produce lavoro, a una potenza elettrica media positiva; in un circuito in alternata come nell'esempio attuale, sappiamo che ciò equivale ad avere una caduta di potenziale reale sul circuito alla quale non corrisponde un resistore reale, anzi si cerca di fare piccole le resistenze degli avvolgimenti. Allora da dove proviene questo termine reale alla ddp? Se ripercorriamo i calcoli fatti troviamo che tale termine proviene dalla derivata temporale dei termini del tipo $(M \cdot i)$; essa contiene contributi in fase con la corrente nel circuito, proprio i termini di forza controelettrica associati alla variazione di assetto del circuito; nel caso del motore in continua avevamo già incontrato questo fatto, quando abbiamo visto (vedi (150)) che alla presenza di una coppia resistente $-K$ corrisponde una fem $G\dot{\theta}_R$ sul rotore, associata alla derivata del coefficiente di mutua induzione.

Torniamo ora sull'interpretazione fisica della coppia che insorge in un motore a induzione, riprendendo l'esempio estremamente semplificato che ci aveva portato al risultato (165). Avevamo allora trovato che in presenza di un campo rotante con velocità angolare ω_0 , tenendo fisse le bobine, in

esse - per induzione - si ottenevano correnti sinusoidali con pulsazione ω_0 , sfasate di 90° l'una rispetto all'altra (vedi (158) e (162)); alla luce di quanto visto nel seguito, queste due bobine a loro volta producono un campo di induzione magnetica rotante anch'esso con velocità angolare ω_0 , ovvero quel campo che sarebbe prodotto da una unica bobina percorsa da una corrente costante i_0 che ruotasse con la *stessa* velocità angolare del campo rotante \vec{B} . Questo risultato, valido ovviamente anche nel caso in cui le bobine ruotino con velocità ω e che in esse siano indotte correnti con pulsazione pari alla differenza ($\omega_0 - \omega$), ci mostra che nonostante notevoli differenze fra i motori asincroni e quelli sincroni, in entrambi i casi la coppia è riconducibile alla presenza di due campi di induzione magnetica uno prodotto dalle correnti dell'indotto, l'altro dalle correnti dell'induttore, rotanti con *uguale* velocità angolare, semplicemente sfasati l'uno rispetto all'altro.

NOTA BIBLIOGRAFICA

I principi della conversione dell' energia elettromagnetica si possono trovare ad esempio in

Seeley: "Electromechanical energy conversion"

International Student Edition (1962),

e nel Cap.7 di **FA 60**, nei Capp.8 e 17 del Vol.II di **FE 63**.

Esempi di macchine e motori elettrici si trovano su Seeley (op.cit.); motori e generatori sono trattati in dettaglio in

Fitzgerald,Kinsley,Umans: "Electric Machinery"

International Student Edition (1983)

Si tratta comunque di una impostazione principalmente dedicata alle applicazioni e non tanto ai fatti fisici fondamentali.

APPENDICE A

L'approssimazione balistica

Innanzitutto riportiamo qui alcune relazioni utili nel seguito (i simboli sono quelli usati nel Capp.II e VI):

$$\sigma_1 = \frac{\left[\mathcal{C} + \frac{G^2}{R} \right]}{2\mathcal{J}} \quad \sigma_2 = \frac{\sqrt{4E\mathcal{J} - \left(\mathcal{C} + \frac{G^2}{R} \right)^2}}{2\mathcal{J}}$$

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 = \frac{E}{\mathcal{J}} \quad T = \frac{2\pi}{\sigma_2}$$

Per studiare il moto del galvanometro eccitato da un impulso di corrente $I(t)$ occorre risolvere l'equazione differenziale

$$\mathcal{J}\ddot{\varphi} + \left(\mathcal{C} + \frac{G^2}{R} \right) \dot{\varphi} + E\varphi = GI(t) \quad (\text{A.1})$$

con le condizioni iniziali $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$. I simboli sono quelli del testo.

$I(t)$ rappresenta il termine forzante che nel caso generale è una funzione del tempo non identicamente nulla. Nei casi in cui $I(t) = 0$ per $t > t_o$ si può, integrando la (1), trovare $\dot{\varphi}(t_o)$ e $\varphi(t_o)$ e quindi risolvere l'equazione differenziale omogenea rappresentante il moto libero:

$$\mathcal{J}\ddot{\varphi} + \left(\mathcal{C} + \frac{G^2}{R} \right) \dot{\varphi} + E\varphi = 0 \quad t > t_o \quad (\text{A.2})$$

con $\varphi(t_o)$, $\dot{\varphi}(t_o)$ ricavate dalla soluzione della (1).

La (2) costituisce il punto di partenza per la soluzione del moto del Galvanometro Balistico quando cioè l'impulso di corrente è pensato durare un tempo $t_o \rightarrow 0$, ammettendo al contempo che la carica Q passata nel Galvanometro sia finita (il che ovviamente corrisponde a una ampiezza dell'impulso di corrente $\rightarrow \infty$; impulso a "δ di Dirac"); abbiamo visto nel Cap.VI che la soluzione *balistica* si ottiene integrando la (2) con le seguenti condizioni iniziali:

$$\begin{cases} \varphi(0) = 0 \\ \dot{\varphi}(0) = \frac{GQ}{\mathcal{J}} \end{cases}$$

La soluzione assume allora la forma (nel seguito tutte le grandezze che si riferiranno a questa soluzione saranno indicate con l'indice "B"):

$$\varphi_B(t) = \frac{GQ}{\mathcal{J}\sigma_2} \exp(-\sigma_1 t) \text{sen } \sigma_2 t \quad (\text{caso sovracritico}) \quad (\text{A.3})$$

Per il valore dell'ampiezza del primo massimo e del tempo a cui tale massimo si verifica:

$$\begin{cases} \varphi_{MB} = \frac{GQ}{\mathcal{J}\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \exp\left(-\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \cdot \text{atan } \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) \\ t_{MB} = \frac{1}{\sigma_2} \text{atan } \frac{\sigma_2}{\sigma_1} . \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

Consideriamo ora le risposte del Galvanometro nei casi reali in cui l'impulso di corrente dura un tempo finito t_o e confrontiamo i valori dell'ampiezza del primo massimo così ottenuti con le corrispondenti grandezze nel caso balistico, allo scopo di comprendere meglio il tipo di approssimazione fatta.

Facciamo per primo il caso in cui l'impulso di corrente abbia la seguente struttura (Fig.1):

$$I(t) = \bar{I} \quad t \leq t_o \quad , \quad I(t) = 0 \quad t > t_o$$

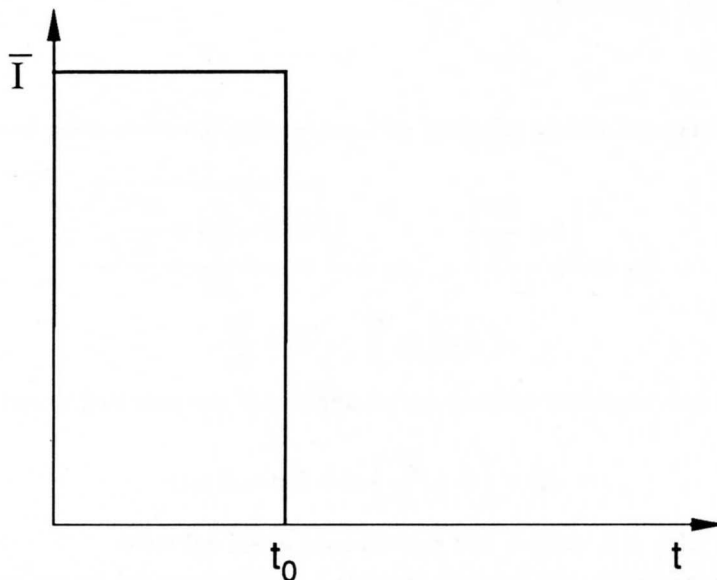


Fig. A.1

Per $t \leq t_o$ la soluzione per φ sarà (nel caso sovracritico):

$$\varphi(t) = \frac{G\bar{I}}{E} - \frac{G\bar{I}}{E} \exp(-\sigma_1 t) \left(\cos \sigma_2 t + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \operatorname{sen} \sigma_2 t \right) \quad t \leq t_o \quad (\text{A.5})$$

come abbiamo imparato nel caso della risposta del galvanometro a una corrente costante (vedi Cap.II).

Dalla (5) si ricava:

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{G\bar{I}}{E} \exp(-\sigma_1 t) \left(\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_2} \right) \operatorname{sen} \sigma_2 t \quad t \leq t_o \quad (\text{A.6})$$

Dalla (5) e (6) si possono ricavare i valori di $\varphi(t_o)$ e $\dot{\varphi}(t_o)$ da assumere poi come condizioni iniziali per la soluzione $t > t_o$ che può essere messa sotto la forma

$$\varphi(t) = \exp[-\sigma_1(t - t_o)] [A \cos \sigma_2(t - t_o) + B \operatorname{sen} \sigma_2(t - t_o)] \quad t > t_o$$

Imponendo le condizioni iniziali $\varphi(t_o)$ e $\dot{\varphi}(t_o)$ si trovano i valori per le costanti A e B:

$$\begin{cases} A = \varphi(t_o) \\ B = \frac{\dot{\varphi}(t_o) + \sigma_1 \varphi(t_o)}{\sigma_2} \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

ottenendo così per $\varphi(t)$ e $\dot{\varphi}(t)$ per $t > t_o$:

$$\begin{cases} \varphi(t) = \exp[-\sigma_1(t - t_o)] \left\{ \varphi(t_o) \cos \sigma_2(t - t_o) + \left[\varphi(t_o) \frac{\sigma_1}{\sigma_2} + \frac{\dot{\varphi}(t_o)}{\sigma_2} \right] \operatorname{sen} \sigma_2(t - t_o) \right\} \\ \dot{\varphi}(t) = \exp[-\sigma_1(t - t_o)] \left\{ \dot{\varphi}(t_o) \cos \sigma_2(t - t_o) - \left[\varphi(t_o) \left(\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_2} \right) + \dot{\varphi}(t_o) \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right] \operatorname{sen} \sigma_2(t - t_o) \right\} \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

Richiedendo l'annullamento della seconda della (8) si trova la condizione di stazionarietà dell'ampiezza φ :

$$-\sin \sigma_2(t_M - t_o) \cdot \left[\varphi(t_o) \left(\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_2} \right) + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \dot{\varphi}(t_o) \right] + \cos \sigma_2(t_M - t_o) \cdot \dot{\varphi}(t_o) = 0$$

Si trova così :

$$\cot \sigma_2(t_M - t_o) = \frac{\varphi(t_o)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + \sigma_1 \dot{\varphi}(t_o)}{\sigma_2 \dot{\varphi}(t_o)} = x \quad (\text{A.9})$$

Prendendo il valore principale dell'arcocotangente, si ha il primo massimo:

$$t_{M1} - t_o = \frac{1}{\sigma_2} \operatorname{acot} \left[\frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)\varphi(t_o) + \sigma_1 \dot{\varphi}(t_o)}{\sigma_2 \dot{\varphi}(t_o)} \right] \quad (\text{A.10})$$

Il valore dell'ampiezza del primo massimo si ottiene ovviamente calcolando la prima delle (8) con il valore $t_{M1} - t_o$.

Ricordando che se $y = \operatorname{acot} x$ allora $\sin y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $\cos y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ si ottiene

$$\begin{aligned} \varphi(t_{M1}) = \exp \left\{ -\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \operatorname{acot} \left[\frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)\varphi(t_o) + \sigma_1 \dot{\varphi}(t_o)}{\sigma_2 \dot{\varphi}(t_o)} \right] \right\} \cdot \\ \left\{ \varphi(t_o) \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \left[\varphi(t_o) \frac{\sigma_1}{\sigma_2} + \frac{\dot{\varphi}(t_o)}{\sigma_2} \right] \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

dove

$$x = \frac{\varphi(t_o)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + \sigma_1 \dot{\varphi}(t_o)}{\sigma_2 \dot{\varphi}(t_o)} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \left[1 + \frac{\varphi(t_o)}{\dot{\varphi}(t_o)} \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{\sigma_1} \right]$$

Ponendo $\mathcal{E} = \frac{\varphi(t_o)}{\dot{\varphi}(t_o)}$, esprimiamo la (11) in termini di \mathcal{E} :

$$\begin{aligned} \varphi(t_{M1}) &= \exp \left(-\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \operatorname{acot} x \right) \cdot \frac{\dot{\varphi}(t_o)}{\sqrt{1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \left(1 + \mathcal{E} \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{\sigma_1} \right)^2}} \cdot \\ &\cdot \left\{ \mathcal{E} \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \left[1 + \mathcal{E} \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{\sigma_1} \right] + \mathcal{E} \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma_2} + \frac{1}{\sigma_2} \right\} = \\ &= \exp \left(-\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \operatorname{acot} x \right) \cdot \frac{\dot{\varphi}(t_o)}{\sqrt{1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \left(1 + \frac{\mathcal{E}^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^2}{\sigma_1^2} + 2\mathcal{E} \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{\sigma_1} \right)}} \cdot \\ &\cdot \left\{ \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \mathcal{E} + \frac{\mathcal{E}^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{\sigma_2} + \mathcal{E} \frac{\sigma_1}{\sigma_2} + \frac{1}{\sigma_2} \right\} = \\ &= \frac{\exp \left(-\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \operatorname{acot} x \right) \frac{1}{\sigma_2} \cdot \dot{\varphi}(t_o) [2\mathcal{E}\sigma_1 + \mathcal{E}^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + 1]}{\frac{1}{\sigma_2} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \mathcal{E}^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^2 + 2\mathcal{E}\sigma_1(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} = \\ &= \frac{\exp \left(-\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \operatorname{acot} x \right) \cdot \dot{\varphi}(t_o) [1 + 2\mathcal{E}\sigma_1 + \mathcal{E}^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)]}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \sqrt{1 + 2\mathcal{E}\sigma_1 + \mathcal{E}^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} = \\ &= \frac{\exp \left(-\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \operatorname{acot} x \right)}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \cdot \dot{\varphi}(t_o) \sqrt{1 + 2\mathcal{E}\sigma_1 + \mathcal{E}^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} \end{aligned}$$

e pertanto si ha:

$$\varphi(t_{M1}) = \frac{\exp \left\{ -\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \operatorname{acot} \left[\frac{\sigma_1}{\sigma_2} + \frac{\varphi(t_o) (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{\dot{\varphi}(t_o) \sigma_2} \right] \right\}}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \cdot \dot{\varphi}(t_o) \sqrt{1 + 2 \frac{\varphi(t_o)}{\dot{\varphi}(t_o)} \sigma_1 + \left(\frac{\varphi(t_o)}{\dot{\varphi}(t_o)} \right)^2 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} \quad (\text{A.12})$$

La (12) contiene tutta l'informazione che ci interessa per confrontare il valore del massimo con il valore balistico, a parità di carica passata nel galvanometro. Ciò si può fare facilmente per i vari valori di t_o , numericamente. E' però molto più istruttivo svolgere i calcoli facendo l'ipotesi che il tempo t_o sia piccolo rispetto a $\frac{1}{\sigma_1}$ e $\frac{1}{\sigma_2}$ e sviluppando le espressioni di interesse in serie di potenze di grandezze $\ll 1$ ($t_o \cdot \sigma_1$, $t_o \cdot \sigma_2$); in particolar modo le condizioni iniziali $\varphi(t_o)$ e $\dot{\varphi}(t_o)$ espresse dalle (5) e (6) diventano, arrestandosi al secondo ordine e ricordando che

$$\begin{aligned} Q &= \bar{I} \cdot t_o \\ \exp x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots \\ \operatorname{sen} x &= x - \frac{x^3}{6} + \dots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \dots \\ \frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \varphi(t_o) \simeq \frac{G\bar{I}}{E} - \frac{G\bar{I}}{E} \left(1 - \sigma_1 t_o + \frac{\sigma_1^2 t_o^2}{2} - \frac{\sigma_1^3 t_o^3}{6} \right) \left(1 - \frac{\sigma_2^2 t_o^2}{2} + \sigma_1 t_o - \frac{\sigma_1 \sigma_2^2 t_o^3}{6} \right) \\ \dot{\varphi}(t_o) \simeq \frac{G\bar{I}}{E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \left(1 - \sigma_1 t_o + \frac{\sigma_1^2 t_o^2}{2} \right) \left(t_o - \frac{\sigma_2^2 t_o^3}{6} \right) \\ \varphi(t_o) \simeq \frac{G\bar{I}}{E} - \frac{G\bar{I}}{E} \left(1 - \sigma_1^2 t_o^2 + \frac{\sigma_1^2 t_o^2}{2} - \frac{\sigma_2^2 t_o^2}{2} + \frac{\sigma_1 \sigma_2^2 t_o^3}{2} + \frac{\sigma_1^3 t_o^3}{2} - \frac{\sigma_1^3 t_o^3}{6} - \frac{\sigma_1 \sigma_2^2 t_o^3}{6} \right) \\ \dot{\varphi}(t_o) \simeq \frac{G\bar{I}}{E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) t_o \left(1 - \sigma_1 t_o - \frac{\sigma_2^2 t_o^2}{6} + \frac{\sigma_1^2 t_o^2}{2} \right) \\ \varphi(t_o) \simeq \frac{GQ}{E} \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{2} t_o \left[1 - \frac{2}{3} \sigma_1 t_o \right] \\ \dot{\varphi}(t_o) \simeq \frac{GQ}{E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \left[1 - \sigma_1 t_o - \frac{\sigma_2^2 t_o^2}{6} + \frac{\sigma_1^2 t_o^2}{2} \right] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(t_o)}{\dot{\varphi}(t_o)} &\simeq \frac{t_o \left[1 - \frac{2}{3} \sigma_1 t_o \right]}{2 \left[1 - \sigma_1 t_o - \frac{\sigma_2^2 t_o^2}{6} + \frac{\sigma_1^2 t_o^2}{2} \right]} \simeq \frac{t_o}{2} \left[1 - \frac{2}{3} \sigma_1 t_o \right] \left[1 + \sigma_1 t_o + \frac{\sigma_2^2 t_o^2}{6} - \frac{\sigma_1^2 t_o^2}{2} + \sigma_1^2 t_o^2 \right] \simeq \\ &\simeq \frac{t_o}{2} \left[1 + \frac{\sigma_1 t_o}{3} - \frac{2}{3} \sigma_1^2 t_o^2 + \frac{\sigma_2^2 t_o^2}{6} + \frac{\sigma_1^2 t_o^2}{2} \right] = \frac{t_o}{2} \left[1 + \frac{\sigma_1 t_o}{3} - \frac{\sigma_1^2 t_o^2}{6} + \frac{\sigma_2^2 t_o^2}{6} \right] \end{aligned}$$

Pertanto arrestandosi al secondo ordine:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(t_o)}{\dot{\varphi}(t_o)} &= \frac{t_o}{2} \left[1 + \frac{\sigma_1 t_o}{3} \right] \quad (\text{A.13}) \\ \dot{\varphi}(t_o) &= \frac{GQ}{E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \left[1 - \sigma_1 t_o - \frac{\sigma_2^2 t_o^2}{6} + \frac{\sigma_1^2 t_o^2}{2} \right] \end{aligned}$$

Ricordando poi che $\frac{E}{\mathcal{J}} = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$ si ha

$$\dot{\varphi}(t_o) = \frac{GQ}{\mathcal{J}} \left[1 - \sigma_1 t_o - \frac{\sigma_2^2 t_o^2}{6} + \frac{\sigma_1^2 t_o^2}{2} \right] \quad (\text{A.14})$$

Possiamo ora riprendere le espressioni (10) e (12) e valutarle in funzione di $\sigma_1 t_o$ e $\sigma_2 t_o$:

$$t_{M1} - t_o = \frac{1}{\sigma_2} \operatorname{acot} \left[\frac{\sigma_1}{\sigma_2} + \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \varphi(t_o)}{\sigma_2 \dot{\varphi}(t_o)} \right]$$

e, ricordando che:

$$\operatorname{acot}(x + \delta) \simeq \operatorname{acot} x - \frac{1}{1+x^2} \delta + \frac{x}{(1+x^2)^2} \delta^2$$

si ha

$$t_{M1} - t_o \simeq \frac{1}{\sigma_2} \left[\operatorname{acot} \frac{\sigma_1}{\sigma_2} - \sigma_2 \frac{\varphi(t_o)}{\dot{\varphi}(t_o)} + \sigma_1 \sigma_2 \left(\frac{\varphi(t_o)}{\dot{\varphi}(t_o)} \right)^2 \right]$$

Usando la (13) si ottiene:

$$t_{M1} - t_o \simeq \frac{1}{\sigma_2} \operatorname{atan} \frac{\sigma_2}{\sigma_1} - \frac{t_o}{2} \left[1 + \frac{\sigma_1 t_o}{3} \right] + \frac{\sigma_1 t_o^2}{4} = \frac{1}{\sigma_2} \operatorname{atan} \frac{\sigma_2}{\sigma_1} - \frac{t_o}{2} + \frac{\sigma_1 t_o^2}{12} \quad (\text{A.15})$$

Ricordando che $t_{MB} = \frac{1}{\sigma_2} \operatorname{atan} \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$:

$$t_{M1} = t_{MB} + \frac{t_o}{2} + \frac{\sigma_1 t_o^2}{12} \quad (\text{A.16})$$

cioè lo spostamento del massimo è dello stesso ordine di t_o .

La (12) usando la (14) e la (15) diviene:

$$\begin{aligned} \varphi(t_{M1}) &= \frac{\exp[-\sigma_1(t_{M1} - t_o)]}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \dot{\varphi}(t_o) \cdot \sqrt{1 + \frac{2\varphi(t_o)}{\dot{\varphi}(t_o)} \sigma_1 + \frac{\varphi^2(t_o)}{\dot{\varphi}^2(t_o)} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} \simeq \\ &\simeq \frac{\exp \left[-\sigma_1 \left(\frac{1}{\sigma_2} \operatorname{atan} \frac{\sigma_2}{\sigma_1} - \frac{t_o}{2} + \frac{\sigma_1 t_o^2}{12} \right) \right]}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \frac{GQ}{\mathcal{J}} \left[1 - \sigma_1 t_o - \frac{\sigma_2^2 t_o^2}{6} + \frac{\sigma_1^2 t_o^2}{2} \right] \cdot \\ &\cdot \sqrt{1 + \frac{2\sigma_1 t_o}{2} \left[1 + \frac{\sigma_1 t_o}{3} \right] + \frac{t_o^2}{4} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} \simeq \\ &\simeq \frac{\exp \left(-\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \operatorname{atan} \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right)}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \cdot \frac{GQ}{\mathcal{J}} \left(1 + \frac{\sigma_1 t_o}{2} - \frac{\sigma_1^2 t_o^2}{12} + \frac{\sigma_1^2 t_o^2}{8} \right) \left(1 - \sigma_1 t_o - \frac{\sigma_2^2 t_o^2}{6} + \frac{\sigma_1^2 t_o^2}{2} \right) \cdot \\ &\cdot \sqrt{1 + \sigma_1 t_o + \frac{\sigma_2^2 t_o^2}{4} + 7 \frac{\sigma_1^2 t_o^2}{12}} \end{aligned}$$

Ricordando che $(1 + \epsilon)^{1/2} = 1 + \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon^2}{8} + \dots$

$$\begin{aligned} \varphi(t_{M1}) &\simeq \varphi_{MB} \left(1 + \frac{\sigma_1 t_o}{2} + \frac{\sigma_1^2 t_o^2}{24} \right) \left(1 - \sigma_1 t_o - \frac{\sigma_2^2 t_o^2}{6} + \frac{\sigma_1^2 t_o^2}{2} \right) \cdot \\ &\cdot \left(1 + \frac{\sigma_1 t_o}{2} + \frac{\sigma_2^2 t_o^2}{8} + \frac{7}{24} \sigma_1^2 t_o^2 - \frac{\sigma_1^2 t_o^2}{8} \right) \simeq \\ &\simeq \varphi_{MB} \left[1 - \left(\frac{\sigma_1^2 t_o^2 + \sigma_2^2 t_o^2}{24} \right) \right] \end{aligned}$$

Pertanto:

$$\varphi_M = \varphi_{MB} \left(1 - \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{24} t_o^2 \right) \quad (\text{A.17})$$

La (17) ci dice che l'ampiezza del primo massimo nel caso di un *impulso rettangolare di corrente* cambia, rispetto al caso balistico, solo al secondo ordine in $\sigma_1 t_o$ e $\sigma_2 t_o$. Si noti anche il fattore $\frac{1}{24}$ che deprime ulteriormente la differenza fra i due casi.

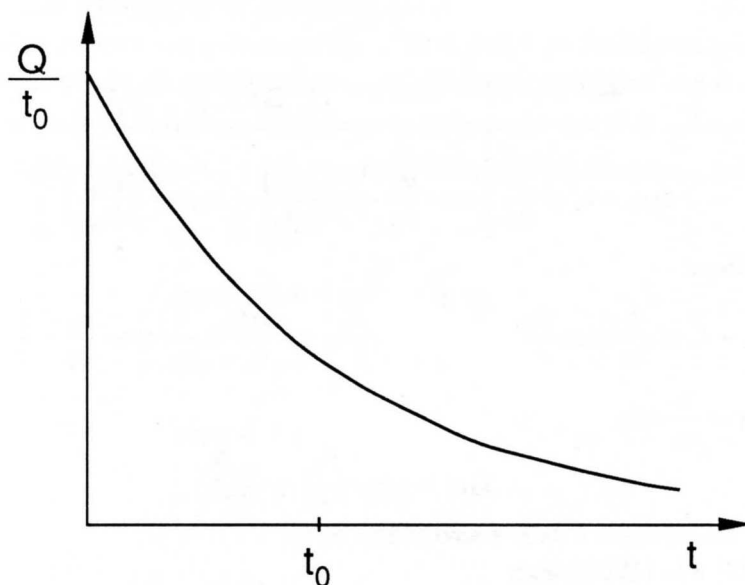


Fig. A.2

Consideriamo ora il caso in cui $I(t)$ abbia la forma di un esponenziale decrescente con costante di tempo t_o (Fig.2):

$$I(t) = \frac{Q}{t_o} \exp -t/t_o \quad Q = \int_0^\infty I(t) dt$$

L'equazione differenziale da risolvere è pertanto:

$$\ddot{\varphi} + \frac{(C + G^2/R)}{\mathcal{J}} \dot{\varphi} + \frac{E}{\mathcal{J}} \varphi = \frac{GQ}{\mathcal{J}t_o} \exp(-t/t_o) \quad (\text{A.18})$$

con $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$.

La soluzione dell'equazione omogenea associata può al solito ricercarsi nella forma:

$$\varphi_o = \exp(-\sigma_1 t) (\mathcal{A} \cos \sigma_2 t + \mathcal{B} \sin \sigma_2 t)$$

Una soluzione particolare della (18) è:

$$\varphi_p = \frac{GQ}{\mathcal{J}[1 - 2\sigma_1 t_o + t_o^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)]} t_o \exp(-t/t_o)$$

La soluzione generale avrà perciò la forma

$$\begin{cases} \varphi(t) = \varphi_p + \varphi_o = \frac{GQ}{\mathcal{J}[1 - 2\sigma_1 t_o + t_o^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)]} t_o \exp(-t/t_o) + \exp(-\sigma_1 t) (\mathcal{A} \cos \sigma_2 t + \mathcal{B} \sin \sigma_2 t) \\ \varphi(0) = 0 \\ \dot{\varphi}(0) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

Si trova quindi :

$$\varphi(t) = \frac{GQ}{\mathcal{J}[1 - 2\sigma_1 t_o + t_o^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)]} \left\{ t_o \exp(-t/t_o) - \exp(-\sigma_1 t) \left[t_o \cos \sigma_2 t - \left(\frac{1 - \sigma_1 t_o}{\sigma_2} \right) \text{sen } \sigma_2 t \right] \right\} \quad (\text{A.20})$$

Annuliamo la derivata per ottenere la condizione di stazionarietà:

$$0 = -\exp(-t_M/t_o) + \exp(-\sigma_1 t_M) \left[\cos \sigma_2 t_M + \frac{t_o \sigma_2^2 + \sigma_1^2 t_o - \sigma_1}{\sigma_2} \text{sen } \sigma_2 t_M \right]$$

Quindi la condizione di massimo è:

$$\exp(-t_M/t_o) = \exp(-\sigma_1 t_M) \left[\frac{t_o(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - \sigma_1}{\sigma_2} \text{sen } \sigma_2 t_M + \cos \sigma_2 t_M \right]$$

Inserendo questa condizione nella (20):

$$\begin{aligned} \varphi(t_M) &= \frac{GQ \exp(-\sigma_1 t_M)}{\mathcal{J}[1 - 2\sigma_1 t_o + (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)t_o^2]} \cdot \\ &\quad \cdot \left\{ \frac{t_o^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - t_o \sigma_1}{\sigma_2} \text{sen } \sigma_2 t_M + t_o \cos \sigma_2 t_M - t_o \cos \sigma_2 t_M + \frac{(1 - \sigma_1 t_o)}{\sigma_2} \text{sen } \sigma_2 t_M \right\} = \\ &= \frac{GQ \exp(-\sigma_1 t_M)}{\mathcal{J}[1 - 2\sigma_1 t_o + t_o^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)]} \left\{ \frac{t_o^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + 1 - 2\sigma_1 t_o}{\sigma_2} \text{sen } \sigma_2 t_M \right\} \end{aligned}$$

e pertanto

$$\varphi(t_M) = \frac{GQ}{\mathcal{J}\sigma_2} \exp(-\sigma_1 t_M) \cdot \text{sen } \sigma_2 t_M \quad (\text{A.21})$$

Si vede così che i massimi giacciono tutti sulla curva della risposta balistica (vedi (3)).

Cerchiamo ora di valutare t_M nel caso in cui t_o sia piccolo rispetto a $1/\sigma_1$ e $1/\sigma_2$ e quindi a t_M . Si tratta di esprimere t_M in serie di potenze di $\sigma_1 t_o$ e $\sigma_2 t_o$ partendo da:

$$\exp(-t_M/t_o) = \exp(-\sigma_1 t_M) \left[\frac{t_o(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - \sigma_1}{\sigma_2} \text{sen } \sigma_2 t_M + \cos \sigma_2 t_M \right]$$

Se $t_o \rightarrow 0$, $\exp(-t_M/t_o) \rightarrow 0$ più rapidamente di t_o^n per qualunque n ; pertanto, volendoci arrestare al secondo ordine, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \frac{t_o(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - \sigma_1}{\sigma_2} \text{sen } \sigma_2 t_M + \cos \sigma_2 t_M &\simeq 0 \\ \cot \sigma_2 t_M &= \frac{\sigma_1}{\sigma_2} - t_o \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{\sigma_2} \\ t_M &\simeq \frac{1}{\sigma_2} \text{acot} \left[\frac{\sigma_1}{\sigma_2} - \frac{t_o(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{\sigma_2} \right] \end{aligned}$$

Ricordando lo sviluppo dell' arcotangente, si ha:

$$t_M \simeq \frac{1}{\sigma_2} \left[\text{atan } \frac{\sigma_2}{\sigma_1} + t_o \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_2 t_o^2 \right]$$

Pertanto si ottiene:

$$t_M = t_{MB} + t_o + \sigma_1 t_o^2 \quad (\text{A.22})$$

Si vede così che nel caso di un impulso di corrente esponenzialmente decrescente con costante di tempo $t_o \ll \frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}$ lo spostamento del massimo è proprio uguale (al primo ordine) a t_o .

Ricordando che:

$$\exp[-(x + \epsilon)] \simeq \exp(-x) - \epsilon \cdot \exp(-x) + \frac{\epsilon^2}{2} \cdot \exp(-x) = \exp(-x) \left[1 - \epsilon + \frac{\epsilon^2}{2} \right]$$

$$\sin(x + \epsilon) \simeq \sin x + \cos x \cdot \epsilon - \sin x \cdot \frac{\epsilon^2}{2} = \sin x \left[1 + \cot x \cdot \epsilon - \frac{\epsilon^2}{2} \right]$$

e sostituendo la (22) nella (21) si ottiene il valore del massimo:

$$\begin{aligned} \varphi_M &= \frac{GQ}{\mathcal{J}\sigma_2} \exp[-(\sigma_1 t_{MB} + \sigma_1 t_o + \sigma_1^2 t_o^2)] \sin(\sigma_2 t_{MB} + \sigma_2 t_o + \sigma_1 \sigma_2 t_o^2) \simeq \\ &\simeq \frac{GQ}{\mathcal{J}\sigma_2} \exp(-\sigma_1 t_{MB}) \left[1 - \sigma_1 t_o - \sigma_1^2 t_o^2 + \frac{\sigma_1^2 t_o^2}{2} \right] \cdot \\ &\quad \cdot \sin \sigma_2 t_{MB} \left[1 + \cot \sigma_2 t_{MB} (\sigma_2 t_o + \sigma_1 \sigma_2 t_o^2) - \frac{\sigma_2^2 t_o^2}{2} \right] \end{aligned}$$

Ricordando che $\cot \sigma_2 t_{MB} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$, otteniamo:

$$\begin{aligned} \varphi_M &= \frac{GQ}{\mathcal{J}\sigma_2} \exp(-\sigma_1 t_{MB}) \cdot \sin \sigma_2 t_{MB} \left[1 - \sigma_1 t_o - \frac{\sigma_1^2 t_o^2}{2} \right] \left[1 + \sigma_1 t_o + \sigma_1^2 t_o^2 - \frac{\sigma_2^2 t_o^2}{2} \right] \simeq \\ &\simeq \varphi_{MB} \left[1 - \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2} t_o^2 \right]. \end{aligned}$$

Da cui si vede che nel caso di un impulso di corrente esponenziale decrescente con costante di tempo $t_o \ll \frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}$, l'ampiezza del primo massimo dipende ancora solo al secondo ordine dai termini $\sigma_1 t_o$ e $\sigma_2 t_o$; tuttavia il coefficiente numerico $\left(\frac{1}{2}\right)$ è 12 volte più grande del caso in cui l'impulso, avente la stessa carica, sia distribuito uniformemente in un tempo t_o (vedi (17)).

APPENDICE B

Il regime transitorio in due circuiti accoppiati induttivamente

Consideriamo il circuito in Fig.1 e studiamo l'andamento delle correnti $i_1(t)$ e $i_2(t)$ a partire dall'istante in cui viene chiuso il tasto T , ovvero supponiamo che sia applicato un gradino di tensione al circuito 1.

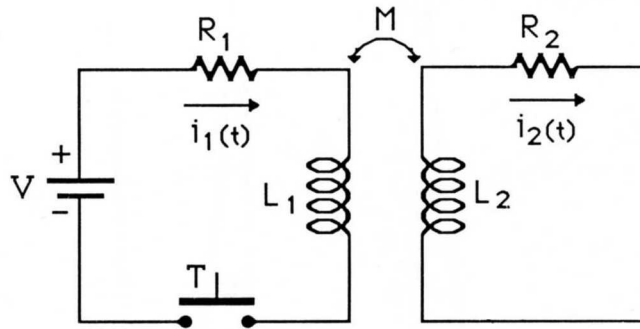


Fig. B.1

Il sistema di equazioni differenziali da risolvere è:

$$\begin{cases} i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = V & \text{a)} \\ i_2 R_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = 0 & \text{b)} \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Ricavando $\frac{di_2}{dt}$ dalla (1a) e sostituendola nella (1b) si può quindi, derivando la relazione ottenuta, ricavare $\frac{di_2}{dt}$ in funzione della sola $i_1(t)$; sostituendo questa espressione di $\frac{di_2}{dt}$ nella (1a) si ottiene una relazione fra $i_1(t)$ e le sue derivate. Procedendo similmente con $\frac{di_1}{dt}$ ricavata dalla (1b) si ottengono finalmente due equazioni differenziali separate in $i_1(t)$ e $i_2(t)$:

$$\begin{cases} i_1 + \frac{di_1}{dt} \left(\frac{L_1}{R_1} + \frac{L_2}{R_2} \right) + \frac{d^2 i_1}{dt^2} \left(\frac{L_1 L_2}{R_1 R_2} - \frac{M^2}{R_1 R_2} \right) = \frac{V}{R_1} & \text{a)} \\ i_2 + \frac{di_2}{dt} \left(\frac{L_1}{R_1} + \frac{L_2}{R_2} \right) + \frac{d^2 i_2}{dt^2} \left(\frac{L_1 L_2}{R_1 R_2} - \frac{M^2}{R_1 R_2} \right) = 0 & \text{b)} \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

Detti $\tau_1 = \frac{L_1}{R_1}$, $\tau_2 = \frac{L_2}{R_2}$ e $\theta^2 = \frac{M^2}{R_1 R_2}$ le (2) possono anche scriversi come:

$$\begin{cases} i_1 + i_1'(\tau_1 + \tau_2) + i_1''(\tau_1 \tau_2 - \theta^2) = \frac{V}{R_1} \\ i_2 + i_2'(\tau_1 + \tau_2) + i_2''(\tau_1 \tau_2 - \theta^2) = 0 \end{cases}$$

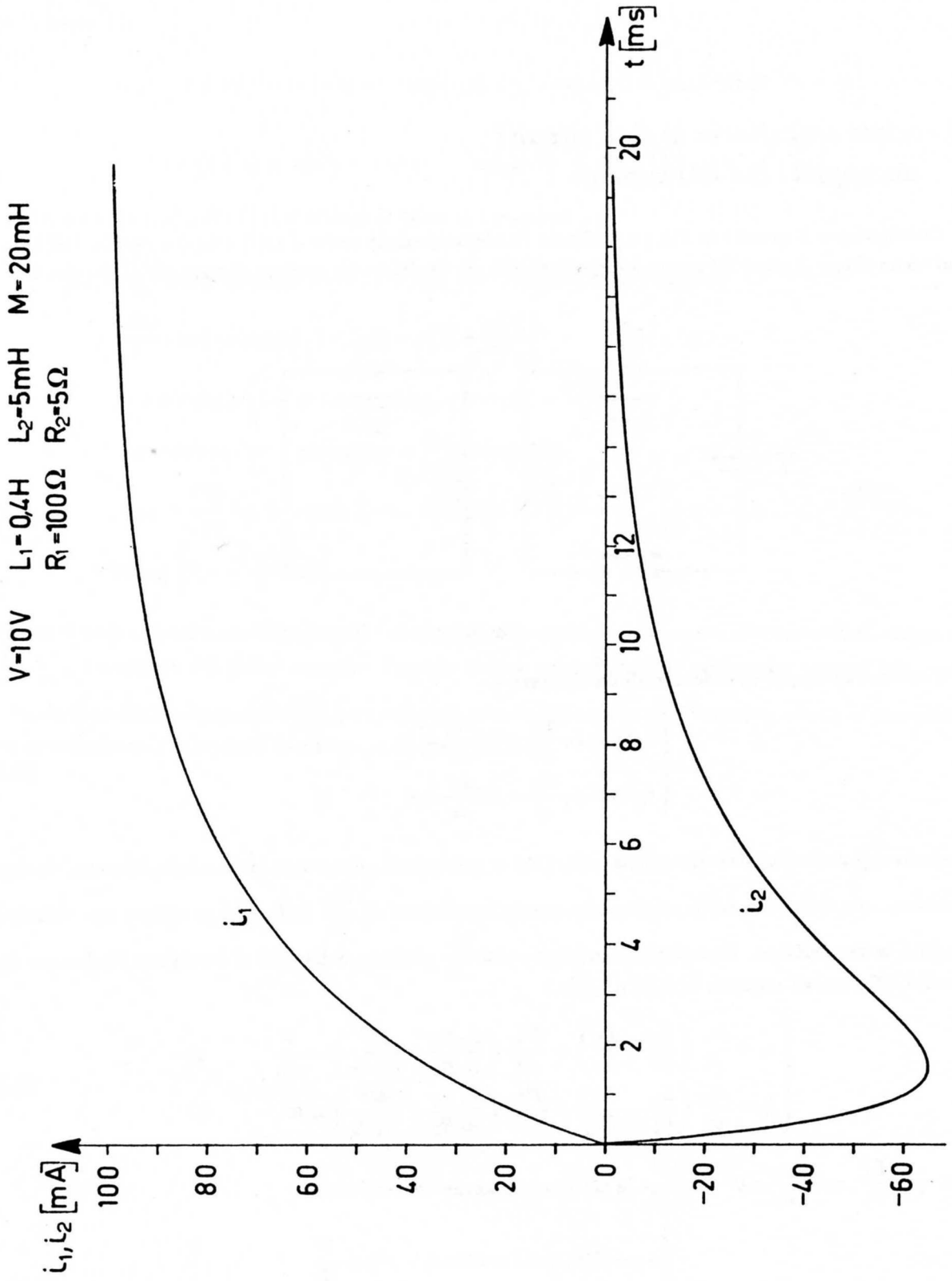


Fig. B.2a

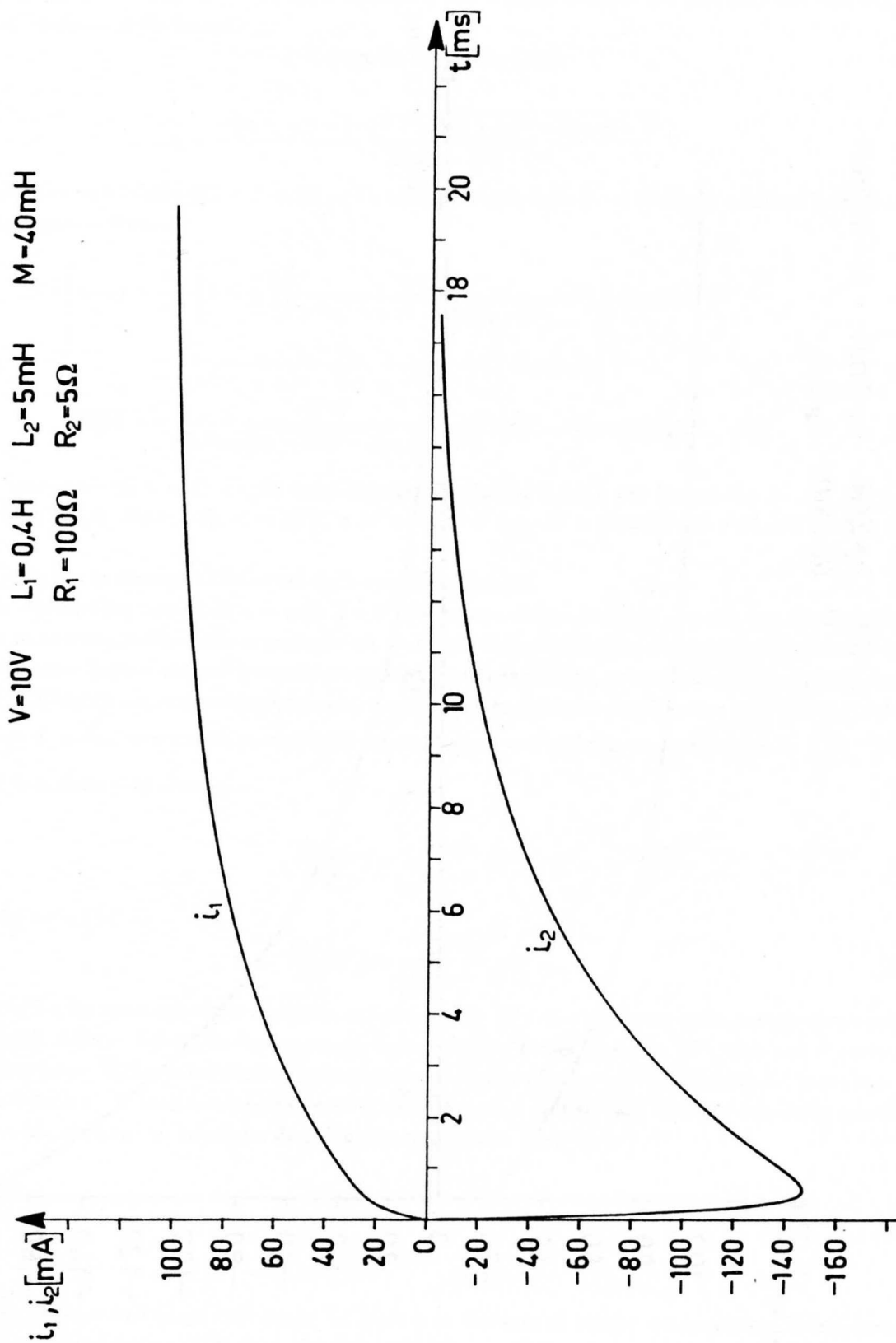


Fig. B.2b

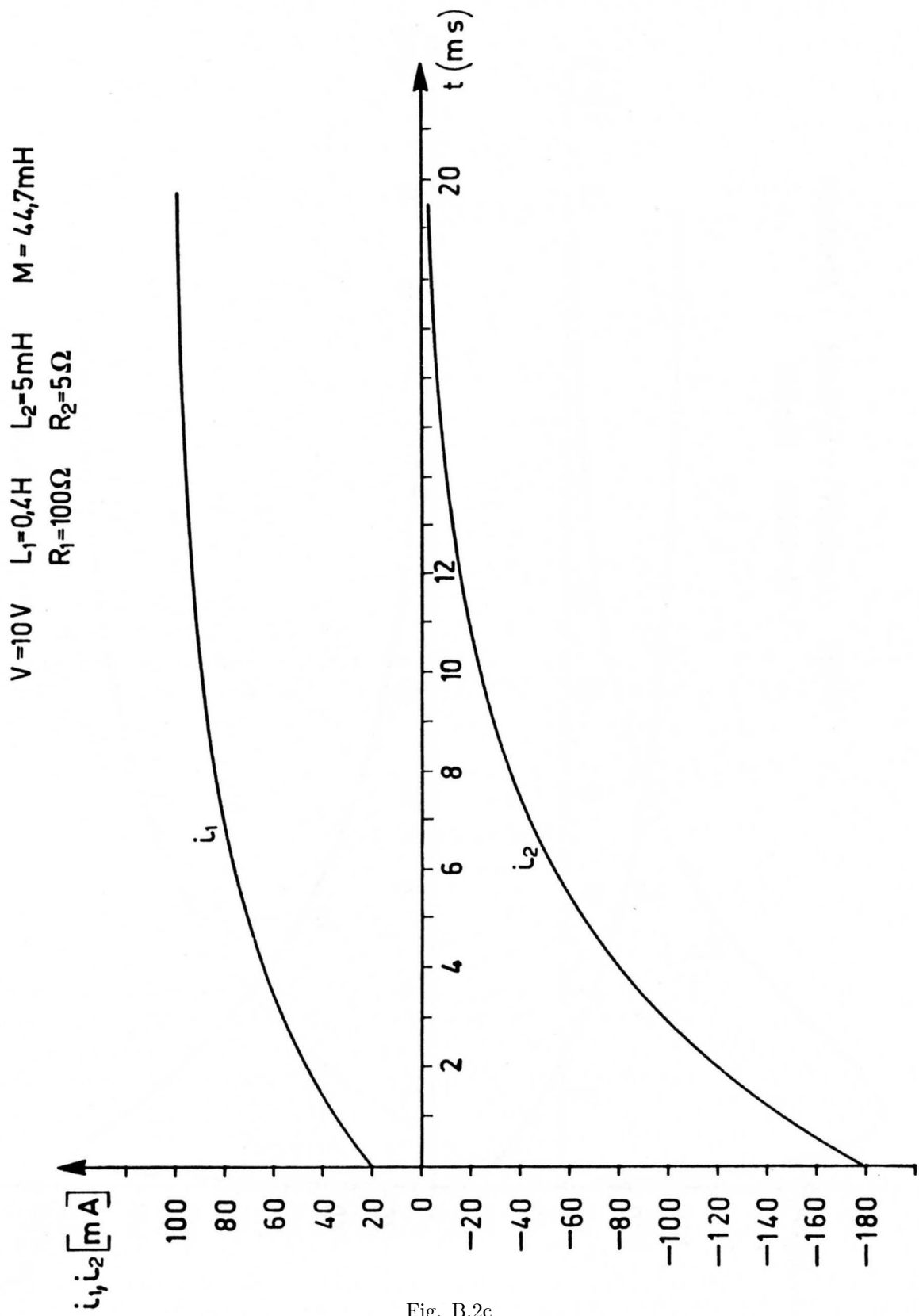


Fig. B.2c

Sia i_1 che i_2 obbediscono alla medesima equazione differenziale omogenea e pertanto tale soluzione per entrambe va ricercata nella forma

$$i = A \exp(\rho_1 t) + B \exp(\rho_2 t) \quad (\text{B.3})$$

con

$$\rho_i = \frac{-(\tau_1 + \tau_2) + (-1)^{i+1} \sqrt{(\tau_1 + \tau_2)^2 - 4(\tau_1 \tau_2 - \theta^2)}}{2(\tau_1 \tau_2 - \theta^2)} \quad (\text{B.4})$$

Fissate le condizioni iniziali $i_1(0) = 0$, $i_2(0) = 0$ e tenendo conto delle (1) si hanno le soluzioni complete per i_1 e i_2 nella seguente forma:

$$\begin{cases} i_1(t) = \frac{V}{R_1} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\tau_1 - \tau_2}{\sqrt{(\tau_1 + \tau_2)^2 - 4(\tau_1 \tau_2 - \theta^2)}} + 1 \right) \exp(\rho_1 t) + \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{\tau_1 - \tau_2}{\sqrt{(\tau_1 + \tau_2)^2 - 4(\tau_1 \tau_2 - \theta^2)}} - 1 \right) \exp(\rho_2 t) \right] \right\} & \text{a)} \\ i_2(t) = -\frac{VM}{R_1 R_2 \sqrt{(\tau_1 + \tau_2)^2 - 4(\tau_1 \tau_2 - \theta^2)}} (\exp(\rho_1 t) - \exp(\rho_2 t)) & \text{b)} \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

Le curve corrispondenti a $i_1(t)$ e $i_2(t)$ sono riportate nella Fig.2 a,b,c per il caso $L_1 = 0.4 H$, $L_2 = 0.005 H$, $R_1 = 100 \Omega$, $R_2 = 5 \Omega$, $V = 10 V$, e $M = 0.020 H$ (a), $M = 0.040 H$ (b) e $M = 0.044721 H = \sqrt{L_1 L_2}$ (c).

Riconsideriamo ora in dettaglio l'influenza delle condizioni iniziali.

Prima della chiusura del tasto $i_1(0^-) = i_2(0^-) = 0$; la presenza di una corrente finita in uno dei due circuiti significa un campo magnetico finito e pertanto un accumulo finito di energia; siccome il generatore V ha in serie una resistenza finita e non può pertanto erogare una potenza infinita, ovvero una energia finita in tempo zero, anche nell'istante immediatamente successivo alla chiusura del tasto dovrà essere $i_1(0^+) = i_2(0^+) = 0$. L'inserimento di queste due condizioni nelle (1) calcolate per $t = 0$ porta a una condizione su $\frac{di_1}{dt}(0^+)$ e su $\frac{di_2}{dt}(0^+)$. Infatti dalla (1b) si ottiene:

$$\frac{di_2}{dt}(0^+) = -\frac{M}{L_2} \frac{di_1}{dt}(0^+) \quad (\text{B.6})$$

che sostituita nella (1a) dà:

$$\frac{di_1}{dt}(0^+) = \frac{VL_2}{(L_1 L_2 - M^2)} \quad (\text{B.7})$$

La (6) e la (7) (che sono già state sfruttate nel dedurre le (5)) ci confortano nella nostra osservazione sulla continuità delle i : infatti le derivate sono finite, almeno finché $L_1 L_2 > M^2$, cioè per il cosiddetto *accoppiamento lasco*. Tuttavia nel limite di accoppiamento stretto ($L_1 L_2 = M^2$), tali derivate divergono. La ragione "matematica" di questo comportamento è molto semplice da ritrovare direttamente dalla soluzione (5) e corrisponde al fatto che nel limite di accoppiamento stretto (vedi 4):

$$\begin{aligned} \lim_{(\tau_1 \tau_2 - \theta^2) \rightarrow 0} \rho_1 &= -\frac{1}{\tau_1 + \tau_2} \\ \lim_{(\tau_1 \tau_2 - \theta^2) \rightarrow 0} \rho_2 &= -\frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 \tau_2 - \theta^2} \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

e uno dei due esponenziali ($\exp(\rho_2 t)$) tende ad avere una costante di tempo estremamente breve, mentre l'altra assume il valore $\tau_1 + \tau_2$. E' facile verificare che la (6) e la (7) divergono proprio a causa della derivata di $\exp(\rho_2 t)$, cioè della derivata della componente a costante di tempo breve. Nella Fig.2b e 2c sono riportate

le curve $i_1(t)$ e $i_2(t)$ per $V = 10 \text{ V}$, $L_1 = 0.4 \text{ H}$, $L_2 = 0.005 \text{ H}$, $R_1 = 100 \text{ } \Omega$, $R_2 = 5 \text{ } \Omega$, $M = 0.040 \text{ H}$ (b) e $M = 0.044721 \text{ H} = \sqrt{L_1 L_2}$ (c). Si noti che, approssimandosi alla condizione di accoppiamento stretto, le curve tendono a spostarsi verso l'origine proprio a causa del fatto che una delle due componenti (quella veloce: $\exp(\rho_2 t)$) si addensa sempre di più ai tempi brevi. Questo *ritrarsi* delle curve verso l'origine corrisponde proprio alla divergenza delle derivate per $t = 0$. Nel limite $L_1 L_2 - M^2 = 0$, pertanto la presenza di derivate infinite per $t = 0^+$ porta a valori finiti di $i_1(\Delta t)$ e $i_2(\Delta t)$ con Δt molto piccolo. Tali valori si possono ottenere semplicemente come limite per $\rho_2 \rightarrow \infty$ dalle (5a) e (5b), e calcolandole poi per un Δt tendente a zero. Si ottiene così :

$$\begin{aligned} i_1(t) &= \frac{V}{R_1} \left(1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 + \tau_2} \exp[-t/(\tau_1 + \tau_2)] \right) \\ i_2(t) &= -\frac{VM}{R_1 R_2 (\tau_1 + \tau_2)} \exp[-t/(\tau_1 + \tau_2)] \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

e per i limiti:

$$\begin{aligned} \lim_{(\tau_1 \tau_2 - \theta^2) \rightarrow 0} i_1(\Delta t) &= \frac{V}{R_1} \frac{\tau_2}{\tau_1 + \tau_2} = \frac{V}{R_1 + \frac{L_1}{L_2} R_2} \\ \lim_{(\tau_1 \tau_2 - \theta^2) \rightarrow 0} i_2(\Delta t) &= -\frac{V}{R_1} \frac{M}{R_2} \frac{1}{\tau_1 + \tau_2} = -\frac{V \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}}{R_2 + \frac{L_2}{L_1} R_1} \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

L'apparente contraddizione consistente nel prendere la soluzione ottenuta con condizioni iniziali $i_1(0^+) = i_2(0^+) = 0$ per fare un limite che dà $i_1(\Delta t) \neq 0$ e $i_2(\Delta t) \neq 0$, si rimuove pensando che queste seconde condizioni si riferiscono a un tempo Δt infinitesimo sì, ma molto maggiore rispetto a $(\tau_1 \tau_2 - \theta^2)/(\tau_1 + \tau_2) = -\frac{1}{\rho_2}$.

Matematicamente tutto sembra a posto, ma come la mettiamo col fatto di trovarsi in un tempo infinitesimo con due correnti finite nei due circuiti partendo da correnti nulle? Avevamo infatti premesso che non era possibile accumulare nel campo magnetico una energia finita in un tempo zero, disponendo di una erogazione finita di potenza (generatore con resistenza non nulla in serie) e ciò sembra essere in netta contraddizione con quanto visto nel caso di accoppiamento stretto. Anche in questo caso la contraddizione è solo apparente: calcoliamo il flusso di \vec{B} concatenato col circuito 1 e concatenato col circuito 2 per valori qualunque di $i_1(t)$ e $i_2(t)$:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= i_1 L_1 + i_2 M \\ \Phi_2 &= i_2 L_2 + i_1 M \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

e applichiamo le (11) al nostro caso, cioè all'istante immediatamente dopo la chiusura del tasto, usando per i_1 e i_2 i valori dati dalle (10). Troviamo allora:

$$\begin{aligned} \Phi_1(\Delta t) &= \frac{V}{R_1} \frac{L_1 L_2}{R_2} \frac{1}{\tau_1 + \tau_2} - \frac{V}{R_1} \frac{M^2}{R_2} \frac{1}{\tau_1 + \tau_2} \\ \Phi_2(\Delta t) &= -\frac{V}{R_1} \frac{L_2 M}{R_2} \frac{1}{\tau_1 + \tau_2} + \frac{V}{R_1} \frac{L_2 M}{R_2} \frac{1}{\tau_1 + \tau_2} \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

che nel limite di accoppiamento stretto ($L_1 L_2 = M^2$), danno entrambe valore nullo, ovvero campo magnetico nullo poichè le superfici dei due circuiti sono ammesse essere finite. Essendo il campo magnetico nullo, anche l'energia a esso associata è nulla. Ciò poteva essere derivato direttamente ricordando che, dati due circuiti

accoppiati induttivamente, l'energia immagazzinata sotto forma di campo magnetico può porsi nella forma (Cap.XX,§3,(65)):

$$W_M = \frac{1}{2}L_1i_1^2 + \frac{1}{2}L_2i_2^2 + Mi_1i_2 \quad (\text{B.13})$$

Ritornando al caso in cui $\tau_1\tau_2 > \theta^2$ (accoppiamento lasco), consideriamo quello che si verifica quando è rimossa l'eccitazione del circuito 1 dopo che si è stabilita una situazione stazionaria: $i_1(0^-) = \frac{V}{R_1}$, $i_2(0^-) = 0$ (con $t = 0^-$ si indica l'istante di tempo immediatamente precedente alla nostra origine).

Supponiamo dapprima che per $t = 0$, V venga sostituito un cortocircuito, ovvero che la tensione applicata dal generatore vada bruscamente a zero. Il sistema di equazioni differenziali da risolvere è il seguente:

$$\begin{cases} i_1R_1 + L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} = 0 \\ i_2R_2 + L_2\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt} = 0 \end{cases} \quad (\text{B.14})$$

con le condizioni iniziali $i_1(0) = \frac{V}{R_1}$, $i_2(0) = 0$. La soluzione è:

$$\begin{cases} i_1(t) = \frac{V}{2R_1} \left[\left(\frac{\tau_1 - \tau_2}{\sqrt{(\tau_1 + \tau_2)^2 - 4(\tau_1\tau_2 - \theta^2)}} + 1 \right) \exp(\rho_1 t) + \right. \\ \quad \left. - \left(\frac{\tau_1 - \tau_2}{\sqrt{(\tau_1 + \tau_2)^2 - 4(\tau_1\tau_2 - \theta^2)}} - 1 \right) \exp(\rho_2 t) \right] \\ i_2(t) = \frac{VM}{R_1R_2\sqrt{(\tau_1 + \tau_2)^2 - 4(\tau_1\tau_2 - \theta^2)}} (\exp(\rho_1 t) - \exp(\rho_2 t)) \end{cases} \quad (\text{B.15})$$

dove i simboli sono quelli introdotti precedentemente. Confrontando le (15) con le (5) è immediato verificare che $i_2(t)$ ha esattamente lo stesso andamento (salvo il segno) che aveva quando V passava da 0 a V e che $i_1(t)$ ritorna a zero esattamente con lo stesso andamento col quale aveva raggiunto l'asintoto $\frac{V}{R_1}$. Anche qui, in base alle considerazioni di continuità sull'energia accumulata abbiamo supposto che $i_1(0) = i_1(0^-)$ e $i_2(0) = i_2(0^-)$. Tuttavia anche in questo caso se andassimo a considerare il limite per accoppiamento stretto ($\tau_1\tau_2 \rightarrow \theta^2$) troveremmo che nell'istante in cui V passa bruscamente a 0, il regime delle correnti ha una brusca *ridistribuzione* e per Δt infinitesimo $i_1(\Delta t)$ passa dal valore $\frac{V}{R_1}$ al valore $\frac{V}{R_1} \frac{\tau_1}{\tau_1 + \tau_2}$ e $i_2(\Delta t)$ dal valore zero al valore $\frac{VM}{R_1R_2(\tau_1 + \tau_2)}$ come è possibile verificare facendo il limite per $\tau_1\tau_2 \rightarrow \theta^2$ e poi calcolando i valori per Δt infinitesimo, ma comunque molto maggiore di $-1/\rho_2$.

In pratica, per realizzare circuiti che approssimino al meglio questi andamenti, si può procedere nel modo di Fig.3.

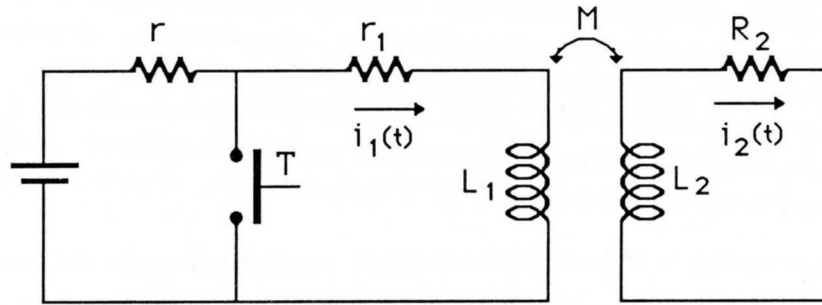


Fig. B.3

Quando T è chiuso la ddp applicata all'induttore del circuito 1 è nulla, mentre tale ddp passa al valore V quando il tasto viene aperto: si ha cioè la transizione brusca della tensione applicata. Gli andamenti delle correnti saranno quelli descritti dalle (5) con $R_1 = r + r_1$, $R_2 = R_2$.

Quando T viene chiuso la ddp va a zero e questa volta gli andamenti sono quelli descritti dalle (15) con $R_1 = r_1$, $R_2 = R_2$. Pertanto le costanti di tempo degli esponenziali non saranno le stesse in apertura e in chiusura di T , essendo effettivamente diversi i due circuiti.

Una maniera assai più diretta per interrompere l'eccitazione nel primario (circuito 1), è quella di adottare lo schema di Fig.1 e di aprire il tasto T (dopo che si è raggiunta la situazione stazionaria); ciò corrisponde a mandare a zero bruscamente la corrente nel circuito 1. Se andassimo a fare una analisi dettagliata di quello che succede all'apertura del tasto troveremmo non poche complicazioni associate alle schematizzazioni che ci troveremmo costretti ad adottare per descrivere il tasto dal punto di vista elettrico. Possiamo però *simulare* il comportamento del circuito in queste condizioni supponendo di avere nel circuito 1 una resistenza complessiva in serie R_1 molto elevata e un generatore di tensione V anch'esso di valore sufficientemente elevato in modo che il rapporto $\frac{V}{R_1} = I_o$ si mantenga comunque finito. Con un circuito di questo tipo abbiamo realizzato un generatore di corrente I_o (con approssimazione tanto migliore quanto più R_1 è grande) e quando spengiamo (cioè cortocircuitiamo) il generatore di tensione, mandiamo a zero tale corrente con una costante di tempo molto piccola. E' questa brusca transizione che simula l'azione del nostro tasto in apertura. Per vedere analiticamente di descrivere il fenomeno dobbiamo fare il limite delle (15) per $R_1 \rightarrow \infty$, con $\frac{V}{R_1} = I_o$ costante. Se calcoliamo questi limiti troviamo:

$$\begin{aligned} \lim_{R_1 \rightarrow \infty} i_1(t) &= I_o \cdot \exp \left[-t / \left(\tau_1 - \frac{M^2}{R_1 L_2} \right) \right] \\ \lim_{R_1 \rightarrow \infty} i_2(t) &= I_o \cdot \frac{M}{L_2} \left\{ \exp(-t/\tau_2) - \exp \left[-t / \left(\tau_1 - \frac{M^2}{R_1 L_2} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

che ci fanno vedere come effettivamente la corrente i_1 va a zero tanto più rapidamente quanto più R_1 è grande e la corrente i_2 raggiunge il massimo in tempi assai brevi (gli stessi per cui i_1 è decaduta) e decade poi con costante di tempo τ_2 .

Supponendo che l'accoppiamento sia lasco, per cui $\left(\tau_1 - \frac{M^2}{R_1 L_2} \right) > 0$ indipendentemente da R_1 , abbiamo

che per R_1 sufficientemente grande è possibile avere tempi θ che soddisfano alla condizione $\left(\tau_1 - \frac{M^2}{R_1 L_2} \right) \ll \theta \ll \tau_2$ e per i quali:

$$\begin{aligned} i_1(\theta) &\simeq 0 \\ i_2(\theta) &\simeq I_o \frac{M}{L_2} \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Osserviamo allora che l'energia immagazzinata prima dello spengimento di V valeva $W_M(0^-) = \frac{1}{2}L_1I_o^2$, mentre per $t = \theta$ vale $W_M(\theta) = \frac{1}{2}I_o^2\frac{M^2}{L_2}$. Manca cioè dell'energia $\Delta W = \frac{1}{2}I_o^2\left(L_1 - \frac{M^2}{L_2}\right)$. Se ci chiediamo dove è finita questa energia, la risposta non può che essere una (almeno nella nostra schematizzazione): sarà finita in quantità di calore prodotto per effetto Joule sulle resistenze dei circuiti dalle correnti $i_1(t)$ e $i_2(t)$. Infatti, tenendo conto delle condizioni su θ , dalle (16) abbiamo:

$$\begin{aligned} W_{Joule} &= \int_0^\theta i_1^2(t)R_1 dt + \int_0^\theta i_2^2(t) dt = \\ &\approx I_o^2R_1 \int_0^\theta \exp[-2t/(\tau_1 - M^2/R_1L_2)] dt - I_o^2\frac{M^2}{L_2}R_2 \int_0^\theta dt \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Nell'ultimo passaggio, per il secondo integrale, abbiamo sfruttato la condizione $\left(\tau_1 - \frac{M^2}{R_1L_2}\right) \ll \theta \ll \tau_2$ che consente di porre $\exp(-t/\tau_2) \simeq 1$ e trascurare il contributo dell'integrazione dell'altro esponenziale; per quanto riguarda il primo integrale, essendo $\theta \gg (\tau_1 - M^2/R_1L_2)$ possiamo calcolarlo come se $\theta = \infty$, ottenendo così:

$$W_{Joule} = \frac{I_o^2R_1}{2} \left(\frac{L_1}{R_1} - \frac{M^2}{R_1L_2} \right) - I_o^2\frac{M^2}{L_2} \cdot \frac{\theta}{\tau_2} \quad (\text{B.19})$$

Nel nostro caso ($R_1 \rightarrow \infty$ e $\theta \ll \tau_2$) solo il primo dei due termini a secondo membro dà un contributo finito pari a $W_{Joule} = \frac{1}{2}I_o^2\left(L_1 - \frac{M^2}{L_2}\right)$ proprio uguale alla quantità di energia mancante.

Le cose tornano così bene perchè noi abbiamo "addolcito" il problema eliminando la discontinuità sulla corrente ovvero il tasto in apertura e lo abbiamo sostituito con lo spegnimento di un generatore di ddp molto elevata con in serie una grossissima resistenza. La soluzione ottenuta ci dice che a tale variazione, l'induttanza reagisce con una ddp anch'essa estremamente elevata, poiché sulla resistenza R_1 (molto grossa) continua a scorrere una corrente finita $i_1(t)$ che decade poi rapidamente. Usando un tasto in apertura tutta la ddp prodotta dall'induttanza comparirebbe ai capi del tasto dove è concentrata tutta la resistenza serie (grandissima se il tasto è buono) del circuito e non si avrebbe unicamente dissipazione per effetto Joule, ma molto più probabilmente scoccherebbe una scintilla (portandosi via parte dell'energia mancante).

Guardando ancor più nel dettaglio la faccenda, ci rendiamo anche conto che se l'accoppiamento è stretto, molti dei problemi scompaiono: infatti in questa ipotesi $L_1 - \frac{M^2}{L_2} = 0$ e conseguentemente la transizione di $i_1(t)$ da I_o a 0 avviene in tempo zero; inoltre, e questo è il fatto da rimarcare, ciò avviene senza "energia mancante", ovvero *prima* della transizione e *dopo* la transizione l'energia associata al campo magnetico è la stessa. Tutto questo ha come conseguenza che in un sistema in accoppiamento stretto, anche l'interruzione brusca della corrente non provoca (purché il secondario sia chiuso su una resistenza finita) alcuna divergenza nella ddp del primario contrariamente al caso di accoppiamento lasco (non si hanno cioè scintille fra i contatti dell'interruttore); infatti non vi è da *smaltire* alcun eccesso di energia immagazzinata sotto forma di campo magnetico che non possa essere sostenuta da una corrente nel secondario.

APPENDICE C

L'equazione di moto di uno strumento elettrodinamico, nel caso di eccitazione periodica.

Abbiamo visto nel Cap.XI,§2 che l'equazione di moto di uno strumento elettrodinamico è regolata da un'equazione differenziale del tipo

$$\mathcal{J}\ddot{\alpha} + D\dot{\alpha} + E\alpha = C(\alpha) \cdot g(t) \quad (\text{C.1})$$

dove \mathcal{J} , D ed E sono costanti mentre $C(\alpha)$ è una funzione limitata di α , con derivata rispetto ad α limitata e $g(t)$ una funzione periodica del tempo $g(t+T) = g(t)$, a media in genere non nulla. Vogliamo dimostrare che se il periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$ della funzione $g(t)$ è sufficientemente piccolo, allora la soluzione di regime $\alpha(t)$ della (1) è approssimata da $\alpha_m(t)$, con $\alpha_m(t)$ soluzione di regime dell'equazione differenziale:

$$\mathcal{J}\ddot{\alpha}_m + D\dot{\alpha}_m + E\alpha_m = C(\alpha_m) \langle g(t) \rangle \quad (\text{C.2})$$

essendo $\langle g(t) \rangle$ il valor medio di $g(t)$.

Prima di passare alla dimostrazione notiamo che la procedura delineata all'inizio del Cap.XI,§2 non può essere seguita poiché l'equazione non è lineare e pertanto non vale più il principio della sovrapposizione delle soluzioni. Occorre quindi una procedura differente per dimostrare l'assunto.

Dato un integrale del tipo:

$$I(t) = \int_0^t f(\theta) \text{sen}(\omega\theta + \varphi) d\theta \quad (\text{C.3})$$

con $f(\theta)$ continua, si ha (*Lemma di Riemann-Lebesgue*):

$$I(t) \approx 0 \quad \text{per } \omega \text{ sufficientemente grande} \quad (\text{C.4})$$

Diamo una dimostrazione della (4) supponendo f dotata di una certa regolarità. Preciseremo così il significato della locuzione "per ω sufficientemente grande", facendo intervenire direttamente il confronto fra il periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$ della funzione *seno* e i tempi caratteristici in cui $f(t)$ varia; ovvero dimostreremo che $I(t)$ è tanto più vicina a zero quanto più $|f'(t)| \cdot T = |f'(t)| \cdot \frac{2\pi}{\omega} \ll f(t)$.

L'integrale (3) può sempre scomporsi come la somma di $N + 1$ integrali, con N dato dalla parte intera di $\frac{t}{T}$:

$$\begin{aligned} \int_0^t f(\theta) \text{sen}(\omega\theta + \varphi) d\theta &= \sum_{n=0}^{N-1} \int_{nT}^{(n+1)T} f(\theta) \text{sen}(\omega\theta + \varphi) d\theta + \\ &+ \int_{NT}^t f(\theta) \text{sen}(\omega\theta + \varphi) d\theta \end{aligned}$$

Usando per $f(\theta)$ la formula di Taylor applicata all'estremo inferiore di integrazione di ognuno degli $N + 1$ integrali, avremo:

$$\int_{nT}^{(n+1)T} f(\theta) \operatorname{sen}(\omega\theta + \varphi) d\theta \simeq \int_{nT}^{(n+1)T} [f(nT) + f'(nT) \cdot \theta + f''(nT) \cdot \frac{\theta^2}{2} + \dots] \operatorname{sen}(\omega\theta + \varphi) d\theta$$

Il primo dei termini fra parentesi quadra è costante e pertanto l'integrale a esso corrispondente dà zero. Quanto agli altri, se T è sufficientemente piccolo (ovvero ω sufficientemente grande) per cui $\forall \theta, f'(\theta) \cdot T \ll f(t)$, allora potremo arrestare lo sviluppo al primo ordine, ottenendo:

$$\int_{nT}^{(n+1)T} f(\theta) \operatorname{sen}(\omega\theta + \varphi) d\theta \simeq \frac{f'(nT)}{\omega^2} \int_{nT}^{(n+1)T} \omega^2 \theta \cdot \operatorname{sen}(\omega\theta + \varphi) d(\theta)$$

Maggioriamo $|f'(nT)|$ con $|f'_{max}|$, il massimo dei valori che $|f'|$ assume nell'intervallo $[0 - t]$; abbiamo allora:

$$\left| \int_0^t f(\theta) \operatorname{sen}(\omega\theta + \varphi) d\theta \right| \leq \frac{|f'_{max}|}{\omega^2} \cdot \left| \int_0^{\omega t} \omega \theta \operatorname{sen}(\omega\theta + \varphi) d(\omega\theta) \right| \leq \frac{|f'_{max}|}{\omega} \left(t + \frac{1}{\omega} \right) \approx \frac{|f'_{max}|}{\omega} t$$

Nell'ultimo passaggio si è utilizzato il risultato $|\int_0^x y \operatorname{sen}(y + \varphi) dy| \leq x + |\operatorname{sen} \varphi| \leq x + 1$ e il fatto che stiamo considerando valori grandi di ω rispetto a $1/t$.

L'ultimo risultato può mettersi nella forma:

$$\left| \int_0^t f(\theta) \operatorname{sen}(\omega\theta + \varphi) d\theta \right| \leq \int_0^t f(\theta) d\theta \cdot \frac{|f'_{max}|}{\langle f \rangle \omega} \tag{C.5}$$

dove $\langle f \rangle = \frac{1}{t} \int_0^t f(\theta) d\theta$. Questa forma si presta direttamente a far vedere che, data una funzione periodica $g(t)$ con periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$:

$$g(t) = g_o + \sum_{n=1}^{\infty} g_n \operatorname{sen}(n\omega t + \varphi_n) \quad \text{con } g_o = \langle g \rangle,$$

se ω è sufficientemente grande, si ha:

$$\int_0^t f(\theta) g(\theta) d\theta \approx g_o \int_0^t f(\theta) d\theta$$

Infatti, poiché:

$$\int_0^t f(\theta) g(\theta) d\theta = g_o \int_0^t f(\theta) d\theta \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n \int_0^t f(\theta) \operatorname{sen}(n\omega\theta + \varphi_n) d\theta}{\int_0^t f(\theta) d\theta} \right]$$

abbiamo che per $\omega \gg \frac{|f'_{max}|}{\langle f \rangle}$ il termine n -esimo della sommatoria risulta, in virtù della (5), in valore assoluto minore di:

$$\left| \frac{g_n}{g_o} \right| \frac{|f'_{max}|}{\langle f \rangle n\omega}$$

quindi tanto più trascurabile quanto più ω è maggiore di $\frac{|f'_{max}|}{|\langle f \rangle|}$. Se $|f'|$ è limitata, è sempre possibile trovare un $\omega \gg \frac{|f'_{max}|}{|\langle f \rangle|}$ tale che:

$$\int_0^t f(\theta)g(\theta)d\theta = \langle g \rangle \int_0^t f(\theta)d\theta \quad (C.6)$$

Ricordiamo ora che, secondo Lagrange, la soluzione di regime della (1) soddisfa alla seguente equazione:

$$\alpha(t) = -\alpha_{10}(t) \int_0^t \frac{\alpha_{20}(\theta)C(\alpha)g(\theta)}{W(\theta)}d\theta + \alpha_{20}(t) \int_0^t \frac{\alpha_{10}(\theta)C(\alpha)g(\theta)}{W(\theta)}d\theta \quad (C.7)$$

dove $\alpha_{10}(\theta)$ e $\alpha_{20}(\theta)$ sono due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea associata alla (1): $\alpha_{10}(\theta) = \exp(\rho_1\theta)$, $\alpha_{20}(\theta) = \exp(\rho_2\theta)$ (con ρ_1 e ρ_2 soluzioni di $\mathcal{J}\rho^2 + D\rho + E = 0$); $W(\theta)$ rappresenta il Wronskiano delle due soluzioni:

$$W(\theta) = \alpha_{10}(\theta) \cdot \alpha'_{20}(\theta) - \alpha_{20}(\theta) \cdot \alpha'_{10}(\theta) = \exp(\rho_1 + \rho_2) \cdot \theta \cdot (\rho_2 - \rho_1) \quad (C.8)$$

Per verificare la validità della (7) basta sostituire nella (1) $\alpha(t)$ e le sue derivate ricavate dalla (7).

Calcoliamo ora $\alpha(t)$ tramite la (7): notiamo che, essendo \mathcal{J} , D ed E tutti positivi e $C(\alpha)$ limitata, la funzione integranda $f(\theta) = \frac{\alpha_{1(2)0}(\theta)C(\alpha(\theta))}{W(\theta)}$ risponde ai requisiti richiesti per la validità della (4). Inoltre anche $|f'(\theta)|$ risulta limitata, essendo $\frac{dC(\alpha)}{d\alpha}$ limitata e $\alpha'(\theta)$ limitata, come si può direttamente verificare dalla (7). Pertanto il risultato (6) consente di porre la soluzione $\alpha(t)$, per ω sufficientemente grande (ovvero per $\omega \gg \frac{|f'_{max}|}{|\langle f \rangle|}$), nella forma:

$$\alpha(t) = -\alpha_{10}(t) \int_0^t \frac{\alpha_{20}(\theta)C(\alpha)}{W(\theta)}g_o d\theta + \alpha_{20}(t) \int_0^t \frac{\alpha_{10}(\theta)C(\alpha)}{W(\theta)}g_o d\theta$$

Essendo $g_o = \langle g(t) \rangle$, tale soluzione per $\alpha(t)$ corrisponde proprio alla relazione (7) scritta per la soluzione dell'equazione differenziale (2), ovvero:

$$\alpha(t) = \alpha_m(t)$$

APPENDICE D

Calcolo dell'efficacia di uno schermo magnetico

Supponiamo che in una regione di spazio (caratterizzata da $\mu_r = 1$) sia presente un campo di induzione magnetica omogeneo $\vec{B}_o = B_o \vec{k}$, con \vec{k} versore dell'asse z di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale. Se ora introduciamo in tale regione di spazio un guscio sferico di materiale ferromagnetico ($\mu_r \gg 1$) di spessore $s = R - r$ (Fig.1), con centro nell'origine degli assi, il campo risulterà distorto sia all'esterno del guscio che all'interno del materiale e nella cavità. Vogliamo trovare i campi in queste regioni, con particolare interesse per quello all'interno del guscio.

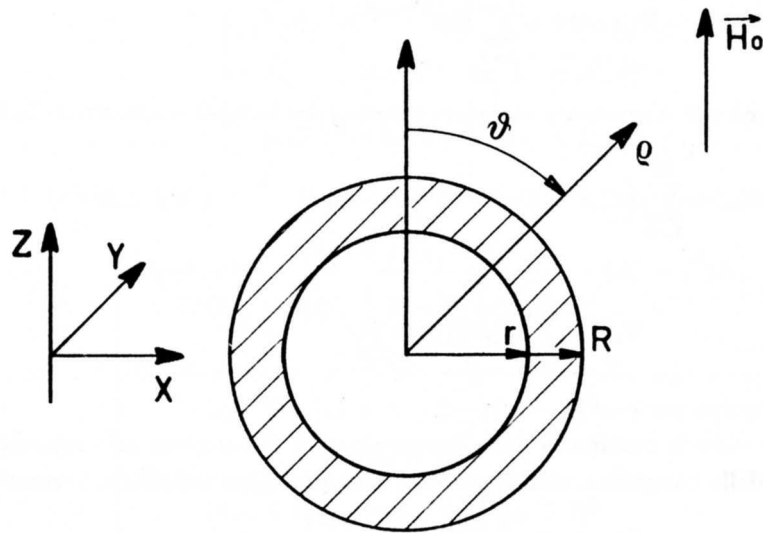


Fig. D.1

Data la simmetria del problema un sistema di coordinate sferiche (ρ, θ, φ) con origine nel centro della sfera è senz'altro il più opportuno (nella Fig.1 è disegnata la sezione massima del guscio che giace sul piano $\varphi = 0$). Inoltre, notando che sono assenti correnti macroscopiche, il campo magnetico statico \vec{H} in qualunque punto dello spazio sarà derivabile da un potenziale scalare $\Psi_M(\rho, \theta, \varphi)$ che soddisfa all'equazione di Laplace

$$\nabla^2 \Psi_M = 0 \quad (\text{D.1})$$

in ogni punto dello spazio, eccetto le superfici di separazione fra i mezzi. Infatti in tutto lo spazio la densità di carica magnetica è nulla, salvo eventualmente le superfici di separazione fra i mezzi, là dove le condizioni al contorno consentiranno di trovare il raccordo fra le soluzioni per il campo nelle varie regioni.

Intanto notiamo che ogni dipendenza da φ è da escludersi data la completa simmetria attorno all'asse z . La soluzione generale, indipendente da φ , che soddisfa l'equazione (1) è del tipo

$$\Psi_M = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l \rho^l + B_l \rho^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta) \quad (\text{D.2})$$

dove A_l e B_l sono delle costanti da determinare in base alle condizioni al contorno e $P_l(\cos \theta)$ è il polinomio di Legendre di ordine l .

Nelle varie regioni dello spazio alcune delle soluzioni contenute nella (2) possono escludersi. Intanto notiamo che un campo costante $\vec{H} = \frac{\vec{B}_o}{\mu_o}$ diretto come in figura, nello spazio privo di cariche di magnetizzazione può farsi discendere da un potenziale $\Psi_{M_o} = -H_o \rho \cos \theta$; infatti, detto \vec{u} il versore diretto come ρ e \vec{v} quello associato a θ , abbiamo

$$\vec{H}_o = -\vec{\nabla} \Psi_{M_o} = -\frac{\partial \Psi_{M_o}}{\partial \rho} \cdot \vec{u} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi_{M_o}}{\partial \theta} \cdot \vec{v} \quad (\text{D.3})$$

che dà appunto $\vec{H}_o = H_o \cos \theta \vec{u} - H_o \sin \theta \vec{v}$.

Pertanto, tenendo conto delle (2) e del fatto che per $\rho \rightarrow \infty$ la soluzione deve coincidere con Ψ_{M_o} , per $\rho > R$ abbiamo necessariamente:

$$\Psi_M = -H_o \rho \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} B_l \rho^{-(l+1)} P_l(\cos \theta) \quad \rho > R \quad (\text{D.4})$$

Per $r < \rho < R$ non possiamo per il momento escludere nessuno dei termini contenuti nella (2) e continuiamo a scrivere:

$$\Psi_M = \sum_{l=0}^{\infty} (C_l \rho^l + D_l \rho^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta) \quad r < \rho < R \quad (\text{D.5})$$

mentre per $\rho < r$ avremo

$$\Psi_M = \sum_{l=0}^{\infty} E_l \rho^l P_l(\cos \theta) \quad \rho < r \quad (\text{D.6})$$

altrimenti avremmo divergenze per $\rho \rightarrow 0$.

Le condizioni al contorno sono la continuità della componente di \vec{H} tangente alla superficie di separazione dei mezzi e la continuità della componente di \vec{B} normale alla medesima superficie. Avremo quindi :

$$\left\{ \begin{array}{ll} H_\theta(R^+) = H_\theta(R^-) & \text{a)} \\ H_\theta(r^+) = H_\theta(r^-) & \text{b)} \\ \mu_o H_\rho(R^+) = \mu_r \mu_o H_\rho(R^-) & \text{c)} \\ \mu_r \mu_o H_\rho(r^+) = \mu_o H_\rho(r^-) & \text{d)} \end{array} \right. \quad (\text{D.7})$$

dove gli indici θ e ρ indicano le componenti di \vec{H} dirette tangenzialmente e normalmente alle superfici e +, - si riferiscono all'esterno e all'interno delle superfici di separazione rispettivamente. Ricordando che:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_\theta = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi_M}{\partial \theta} \\ H_\rho = -\frac{\partial \Psi_M}{\partial \rho} \end{array} \right.$$

otteniamo

$$-H_o \operatorname{sen} \theta - \sum_{l=0}^{\infty} B_l R^{-(l+2)} \frac{\partial P_l(\cos \theta)}{\partial \theta} = - \sum_{l=0}^{\infty} [C_l R^{l-1} + D_l R^{-(l+2)}] \frac{\partial P_l(\cos \theta)}{\partial \theta} \quad (\text{D.8a})$$

$$- \sum_{l=0}^{\infty} [C_l r^{l-1} + D_l r^{-(l+2)}] \frac{\partial P_l(\cos \theta)}{\partial \theta} = - \sum_{l=0}^{\infty} E_l r^{l-1} \frac{\partial P_l(\cos \theta)}{\partial \theta} \quad (\text{D.8b})$$

$$\begin{aligned} H_o \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} B_l (l+1) R^{-(l+2)} P_l(\cos \theta) = \\ = \mu_r \left\{ - \sum_{l=0}^{\infty} [C_l l R^{l-1} - D_l (l+1) R^{-(l+2)}] P_l(\cos \theta) \right\} \end{aligned} \quad (\text{D.8c})$$

$$\mu_r \left\{ - \sum_{l=0}^{\infty} [C_l l r^{l-1} - D_l (l+1) r^{-(l+2)}] P_l(\cos \theta) \right\} = - \sum_{l=0}^{\infty} E_l l r^{l-1} P_l(\cos \theta) \quad (\text{D.8d})$$

Applicando le relazioni di ortonormalità dei $P_l(\cos \theta)$ si trova che tutti i coefficienti con $l \neq 1$ devono essere nulli; ricordando poi che $P_1(\cos \theta) = \cos \theta$, otteniamo le seguenti 4 equazioni in B_1 , C_1 , D_1 , e E_1 :

$$\begin{cases} B_1 - C_1 R^3 - D_1 = H_o R^3 \\ -C_1 r^3 - D_1 + E_1 r^3 = 0 \\ -2B_1 - \mu_r C_1 R^3 + 2\mu_r D_1 = H_o R^3 \\ -\mu_r C_1 r^3 + 2\mu_r D_1 + E_1 r^3 = 0 \end{cases} \quad (\text{D.9})$$

che hanno come soluzioni:

$$\begin{cases} B_1 = \frac{(2\mu_r + 1)(\mu_r - 1)}{(2\mu_r + 1)(\mu_r + 2) - 2\frac{r^3}{R^3}(\mu_r - 1)^2} (R^3 - r^3) H_o \\ C_1 = \frac{-3(2\mu_r + 1)}{(2\mu_r + 1)(\mu_r + 2) - 2\frac{r^3}{R^3}(\mu_r - 1)^2} H_o \\ D_1 = \frac{-3(\mu_r - 1)r^3}{(2\mu_r + 1)(\mu_r + 2) - 2\frac{r^3}{R^3}(\mu_r - 1)^2} H_o \\ E_1 = \frac{-9\mu_r}{(2\mu_r + 1)(\mu_r + 2) - 2\frac{r^3}{R^3}(\mu_r - 1)^2} H_o \end{cases} \quad (\text{D.10})$$

Consideriamo ora il potenziale all'interno della cavità:

$$\Psi_M = \frac{-9\mu_r}{(2\mu_r + 1)(\mu_r + 2) - 2\frac{r^3}{R^3}(\mu_r - 1)^2} H_o \rho \cos \theta \quad \rho < r \quad (\text{D.11})$$

che dà per il campo magnetico nella cavità:

$$\vec{H}_{cav} = \frac{9\mu_r}{(2\mu_r + 1)(\mu_r + 2) - 2\frac{r^3}{R^3}(\mu_r - 1)^2} H_o (\cos \theta \vec{u} - \operatorname{sen} \theta \vec{v}) \quad (\text{D.12})$$

ovvero un campo omogeneo diretto come \vec{H}_o . L'intensità del campo per $\mu_r \rightarrow \infty$ decresce come $\{9/[2\mu_r(1 - r^3/R^3) + 5 + 4(r^3/R^3)]\}H_o \approx \{3/[3 + 2s(\mu_r - 2)/R]\}H_o$ (s è lo spessore del guscio, ammesso molto minore di r) e quindi tende a zero purché il prodotto $\mu_r \cdot s$ si mantenga molto maggiore di R ; in questo senso il guscio funge da *schermo magnetico*.

Calcoliamoci le componenti del campo \vec{H} nelle varie zone:

$$\rho > R \quad \begin{cases} H_{\rho_{ext}} = \left(H_o + 2\frac{B_1}{\rho^3}\right) \cos \theta \\ H_{\theta_{ext}} = \left(-H_o + \frac{B_1}{\rho^3}\right) \sin \theta \end{cases} \quad (\text{D.13a})$$

$$r < \rho < R \quad \begin{cases} H_{\rho_{int}} = \left(-C_1 + 2\frac{D_1}{\rho^3}\right) \cos \theta \\ H_{\theta_{int}} = \left(C_1 + \frac{D_1}{\rho^3}\right) \sin \theta \end{cases} \quad (\text{D.13b})$$

$$\rho < r \quad \begin{cases} H_{\rho_{cav}} = -E_1 \cos \theta \\ H_{\theta_{cav}} = E_1 \sin \theta \end{cases} \quad (\text{D.13c})$$

Se vogliamo cercare l'origine "fisica" (ma qualcuno potrebbe obiettare assai su questo punto e forse non a torto) di questi campi, possiamo calcolarci le densità di cariche di magnetizzazione sulle superfici di discontinuità; infatti la variazione della componente di \vec{H} normale alla superficie uguaglia la densità di carica sulla superficie medesima:

$$\begin{cases} H_{\rho_{ext}}(R) - H_{\rho_{int}}(R) = \left[H_o + C_1 + \frac{2}{R^3}(B_1 - D_1)\right] \cos \theta = \sigma_M(R) & \text{a)} \\ H_{\rho_{int}}(r) - H_{\rho_{cav}}(r) = \left[E_1 - C_1 + 2\frac{D_1}{r^3}\right] \cos \theta = \sigma_M(r) & \text{b)} \end{cases} \quad (\text{D.14})$$

Utilizzando le (10) si ottengono le espressioni di $\sigma_M(R)$ e $\sigma_M(r)$ in funzione di quantità note:

$$\begin{aligned} \sigma_M(R) &= \frac{3H_o(\mu_r - 1) \left[2\mu_r + 1 - 2\frac{r^3}{R^3}(\mu_r - 1)\right] \cos \theta}{(2\mu_r + 1)(\mu_r + 2) - 2\frac{r^3}{R^3}(\mu_r - 1)^2} \\ \sigma_M(r) &= -\frac{9H_o(\mu_r - 1) \cos \theta}{(2\mu_r + 1)(\mu_r + 2) - 2\frac{r^3}{R^3}(\mu_r - 1)^2} \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

Si vede così che mentre per $\mu_r \rightarrow \infty$ la densità di carica esterna tende a un valore finito

$$\sigma_M(R) \xrightarrow{\mu_r \rightarrow \infty} 3H_o \cos \theta$$

quella sulla superficie interna tende a 0; ciò non deve sorprendere affatto poiché corrispondentemente è facile verificare che, anche all'interno del materiale, \vec{H} va a zero e quindi anche la discontinuità della componente normale tende a diventare nulla.

Un punto interessante da studiare è il valore del flusso di \vec{B} attraverso il guscio sferico, per esempio nella sezione massima, ovvero per $\theta = \pi/2$. Esso vale:

$$\begin{aligned} \Phi_{int}(B) &= -2\pi\mu_r\mu_o \int_r^R H_{\theta_{int}} \left(\theta = \frac{\pi}{2}\right) \cdot \rho \, d\rho = \\ &= -2\pi\mu_r\mu_o \int_r^R \left(C_1\rho + \frac{D_1}{\rho^2}\right) \, d\rho = \\ &= -2\pi\mu_r\mu_o \left[\frac{C_1}{2}(R^2 - r^2) + D_1 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)\right] \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

Per $\mu_r \rightarrow \infty$ si ottiene

$$\Phi_{int}(B) \underset{\mu_r \rightarrow \infty}{H_0} \rightarrow 3\pi R^2 \mu_o H_o$$

che giustifica l'affermazione fatta nel testo (Cap.XIX,§5) di supporre che tutte le linee di campo comprese in una superficie dell'ordine di $\pi(2R)^2$ fossero "catturate" dal guscio (era quindi una valutazione per eccesso, ma dato lo scopo per cui era fatta, tanto meglio). Nella Fig.XIX.13 è riportato l'andamento delle linee di campo nella sezione maggiore della sfera cava.

Se consideriamo il caso di uno schermo magnetico costituito da un cilindro cavo (raggi r e R) di lunghezza molto maggiore del diametro esterno, costituito di materiale con permeabilità μ inserito in un campo costante diretto ortogonalmente all'asse, conviene scegliere un sistema di coordinate cilindriche che abbiano l'asse z diretto come l'asse del cilindro: in questo caso, avendo supposto la lunghezza del cilindro sostanzialmente infinita, il problema diventa quello di risolvere l'equazione di Laplace per una sezione retta del cilindro, ovvero in un sistema di riferimento di coordinate cilindriche (Fig. 2).

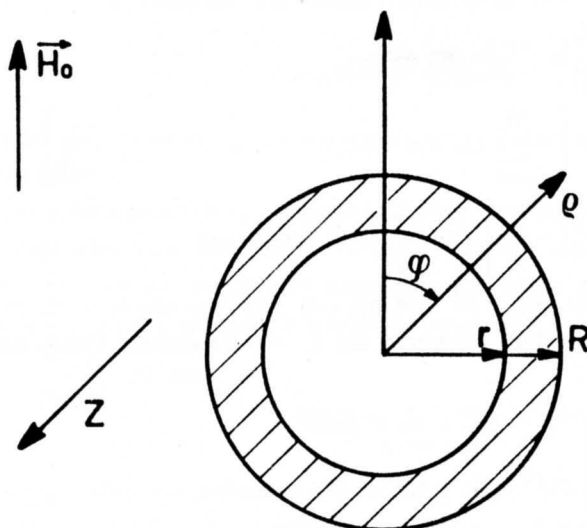


Fig. D.2

La soluzione generale dell'equazione di Laplace in coordinate cilindriche è del tipo

$$\Psi_M = b_o \ln \rho + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \rho^n \cos(n\varphi + \alpha_n) + b_n \rho^{-n} \cos(n\varphi + \beta_n)] \quad (D.17)$$

L'espressione effettiva di questo campo nelle tre zone ($\rho > R$, $R > \rho > r$, $\rho < r$) dipende oltre che dalle condizioni al contorno sulle superfici, anche dagli andamenti asintotici; ad esempio poiché la soluzione per $\rho > R$ all'infinito deve dare il potenziale $-H_o \rho \cos \varphi$ associato al campo $\vec{H}_o = H_o \cos \varphi \vec{u} - H_o \sin \varphi \vec{v}$ (vedi (3)) avremo:

$$\Psi_M = -H_o \rho \cos \varphi + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \rho^{-n} \cos(\varphi + \beta_n) \quad \rho > R$$

La fase β_n deve essere 0 per ogni n poiché la soluzione deve essere simmetrica attorno alla direzione individuata dalla direzione di \vec{H}_o . Per $R > \rho > r$, avremo in genere una espressione come la (17), cioè completa,

ma con le fasi anche qui poste uguali a zero.

Per $\rho < r$ la soluzione potrà contenere solo le potenze con esponente positivo di ρ poiché non vi possono essere divergenze nell'origine (e le fasi dovranno ancora essere nulle).

Pertanto avremo

$$\rho > R \quad \Psi_M(\rho, \varphi) = -H_o \rho \cos \varphi + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \rho^{-n} \cos n\varphi \quad (\text{D.18a})$$

$$r < \rho < R \quad \Psi_M(\rho, \varphi) = f_o \ln \rho + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \rho^n + d_n \rho^{-n}) \cos n\varphi \quad (\text{D.18b})$$

$$\rho < r \quad \Psi_M(\rho, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n \rho^n \cos n\varphi \quad (\text{D.18c})$$

Imponendo la continuità della componente tangenziale di \vec{H} lungo le superfici e della componente normale di \vec{B} otteniamo:

$$\begin{aligned} -H_o \sin \varphi + \sum_{n=1}^{\infty} b_n R^{-n-1} n \sin n\varphi &= \sum_{n=1}^{\infty} n (c_n R^{n-1} + d_n R^{-n-1}) \sin n\varphi \\ \sum_{n=1}^{\infty} n (c_n r^{n-1} + d_n r^{-n-1}) \sin n\varphi &= \sum_{n=1}^{\infty} e_n r^{n-1} n \sin n\varphi \\ H_o \cos \varphi + \sum_{n=1}^{\infty} b_n n R^{-n-1} \cos n\varphi &= \mu_r \left[-\sum_{n=1}^{\infty} \cos n\varphi \cdot n (c_n R^{n-1} - d_n R^{-n-1}) - \frac{f_o}{R} \right] \\ \mu_r \left[-\sum_{n=1}^{\infty} \cos n\varphi \cdot n (c_n r^{n-1} - d_n r^{-n-1}) - \frac{f_o}{r} \right] &= -\sum_{n=1}^{\infty} e_n r^{n-1} n \cos n\varphi \end{aligned} \quad (\text{D.19})$$

Data l'ortogonalità di $\sin n\varphi$ con $\sin m\varphi$ e di $\cos n\varphi$ con $\cos m\varphi$ con $n \neq m$, le (19) devono valere *indipendentemente* per ogni n . In particolare ciò porta che $f_o = 0$ ed esclude l'andamento logaritmico del potenziale. Per $n = 1$ le (19) diventano

$$\begin{cases} b_1 - c_1 R^2 - d_1 = H_o R^2 \\ c_1 r^2 + d_1 - e_1 r^2 = 0 \\ -b_1 - \mu_r c_1 R^2 + \mu_r d_1 = H_o R^2 \\ -\mu_r c_1 r^2 + \mu_r d_1 + e_1 r^2 = 0 \end{cases} \quad (\text{D.20})$$

mentre per $n \neq 1$ si ottiene un sistema che, per essere soddisfatto, richiede l'annullamento di tutte le costanti b_n, c_n, d_n, e_n . Pertanto risolvere il sistema (20) significa risolvere il problema complessivo. Le (20) danno:

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{H_o(\mu_r - 1)(\mu_r + 1) \cdot (R^2 - r^2)}{\left[(\mu_r + 1)^2 - \frac{r^2}{R^2} (\mu_r - 1)^2 \right]} \\ c_1 &= \frac{-2H_o(\mu_r + 1)}{\left[(\mu_r + 1)^2 - \frac{r^2}{R^2} (\mu_r - 1)^2 \right]} \\ d_1 &= \frac{-2H_o(\mu_r - 1)r^2}{\left[(\mu_r + 1)^2 - \frac{r^2}{R^2} (\mu_r - 1)^2 \right]} \\ e_1 &= \frac{-4H_o\mu_r}{\left[(\mu_r + 1)^2 - \frac{r^2}{R^2} (\mu_r - 1)^2 \right]} \end{aligned} \quad (\text{D.21})$$

Si noti la somiglianza delle (21) con le (10). In particolare il campo nella cavità risulta essere un campo diretto come \vec{H}_o , avente però intensità che per $\mu_r \rightarrow \infty$ tende a zero come $4H_o/[\mu_r(1 - r^2/R^2)]$. Potremmo calcolarci anche in questo caso le densità di carica di magnetizzazione e otterremmo risultati assai simili alle (15). E' forse più istruttivo calcolare il valore che il flusso di \vec{B} assume attraverso lo schermo, per avere una idea di quanto questo distorce il campo all'esterno e per controllare, anche in questo caso, la bontà dell'approccio seguito per calcolare lo spessore dello schermo (vedi Cap.XIX,§5).

Calcoliamoci quindi il flusso di \vec{B} attraverso lo schermo per $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (per unità di lunghezza lungo z):

$$\begin{aligned}\Phi_{int}(B) &= -2\mu_r\mu_o \int_r^R H_{\theta int}(\rho, \frac{\pi}{2}) \cdot d\rho = \\ &= -2\mu_r\mu_o \int_r^R \left(c_1 + \frac{d_1}{\rho^2} \right) d\rho = \\ &= -2\mu_r\mu_o \left[c_1(R-r) + d_1 \frac{(R-r)}{rR} \right]\end{aligned}\quad (D.22)$$

Facendo il limite per $\mu_r \rightarrow \infty$, tenendo conto delle (21) si trova

$$\Phi_{int}(\vec{B}) = 4R\mu_o H_o \quad (D.23)$$

che ci dice che il flusso attraverso lo schermo è esattamente quello attraverso una sezione pari a 2 volte il diametro esterno del cilindro.

Dimostriamo ora la proprietà generale di un materiale ferromagnetico con una cavità, ovvero che all'interno di questa il campo magnetico va a zero per $\mu_r \rightarrow \infty$. Per far ciò supponiamo innanzitutto che il materiale si mantenga lineare e non saturi (condizione necessaria per avere un μ elevato), ovvero che il campo \vec{B} all'interno del materiale si mantenga finito e continui a sussistere la relazione di proporzionalità fra \vec{H} e \vec{B} ; essendo allora $\vec{H}_{int} = \frac{\vec{B}_{int}}{\mu_r\mu_o}$, abbiamo:

$$\vec{H}_{int} \xrightarrow{\mu_r \rightarrow \infty} 0$$

Conseguentemente il potenziale magnetostatico di tutto il corpo sarà costante: si tratta allora di dimostrare che anche nella cavità il potenziale ha il valore che possiede nel corpo; se è così, anche nella cavità \vec{H} è nullo. Per dimostrare ciò notiamo che attraverso la superficie che delimita la cavità, il potenziale resta continuo, in particolare vale $\Psi_{M int}$, ovvero il valore, costante, che possiede entro il corpo: abbiamo allora che il volume della cavità è racchiuso in una superficie sulla quale il potenziale è costante; inoltre nel volume deve valere l'equazione di Laplace $\nabla^2\Psi_M = 0$, poiché la cavità è priva di cariche magnetiche. Ciò comporta che il potenziale non può avere né un massimo né un minimo all'interno del volume (infatti per un massimo $\nabla^2\Psi_M < 0$, per un minimo $\nabla^2\Psi_M > 0$), pertanto è costante e quindi nella cavità $\vec{H} = 0$; conseguentemente la densità di carica magnetica sulla superficie di demarcazione fra materiale e cavità deve essere identicamente nulla (per $\mu_r \rightarrow \infty$) (il teorema di Gauss applicato a una superficie tutta contenuta nel corpo ci dice solo che la carica complessiva è nulla, ma lascia aperta la possibilità di avere una distribuzione non identicamente nulla di cariche). Per dimostrare l'identico annullarsi della densità basta notare che, essendo $\vec{H} = 0$ sia nel materiale che nella cavità, esiste continuità anche nella componente normale alla superficie che comporta appunto $\sigma_M = 0$ ($[\vec{H}_{int} - \vec{H}_{cav}] \cdot \vec{n} = \sigma_M$).

Il risultato ora ottenuto ($\vec{H}_{cav} \rightarrow 0$) sarà tanto più vicino al caso reale quanto più accuratamente sarà soddisfatta l'ipotesi di partenza della linearità del materiale e dell'elevato valore di μ_r : ciò in pratica significa, anche per i materiali più adatti allo scopo (per esempio le leghe tipo "Permendur"), confinare il campo di valori di B entro limiti precisi. La presenza poi di un ciclo di isteresi con area finita non altera sostanzialmente

l'efficacia dello schermo nel rimuovere le linee del campo dalla cavità, sempre che ci si collochi in un punto favorevole della curva $B-H$; tuttavia un campo residuo nella cavità, indipendente da quello esterno che si vuole schermare e dovuto piuttosto all'utilizzo precedente del dispositivo, può essere presente e una procedura di smagnetizzazione dello schermo si può rendere necessaria.

INDICE ANALITICO

- Accettori, 357
AC-input, 187
Accoppiamento lasco, 157, 511-4
Accoppiamento stretto, 157, 511-4
Alimentatore stabilizzato, 382-6
Alternate –correnti e tensioni, 194-215
ALternate: vedi Oscillografo
Ammetenza, 204, 275, 419-22
Ampère– Teorema di, 442, 467
Amperometro in continua, 62-8
Amperometro in alternata, 252-5
Amplificatore:
 a *Source* comune, 407-16
 differenziale, 308, 343
 ideale di tensione, 307-11
 in continua, 264
 integrato, 311-2
 operazionale: vedi Operazionale
 reale di tensione, 308, 413
 verticale, 186-9
Approssimazioni successive: vedi Convertitore
Armoniche, 195, 205, 235, 283
Asincrono –motore, 487-97
Attenuatore di ingresso, 187, 297
Autoinduzione –coefficiente di, 155-9
Autozero, 349
Ayrton –shunt di (o universale), 64-6, 140
Avvolgimento –ottimizzazione dello, 53-9
- Balistica–ipotesi, 140-1, 499-506
Banda passante, 170, 256-70, 308
Barriera –potenziale di, 359-63
Barriera di giunzione, 359
Base –elettrodo, 386
Base dei tempi, 189-90
Beam finder, 192
B-H curva, 438-45, 525
Bias–corrente, 329-35
Bifase –sistema di tensioni, 491
Bilancio energetico, 451, 474-8, 480-3
Bistabile, 343-5
Blanking, 190
Bobina mobile –strumenti a, 60-78
Bobine di *Helmholtz*, 435
Breakdown –tensione di, 363, 369-70, 398, 404
Burden voltage, 298, 306
Buffer vedi Inseguitore
- Caduta di tensione, 7, 203
Campionamento, 193
Campione –Pila, 104-5
Campioni:
 di capacità, 219-21
 di impedenza, 216-8
 di induttanza, 221-2
 di resistenza, 79-83, 218-9
Campo magnetico rotante, 486-7, 490
Canale del *Fet*, 393
Cannone elettronico, 172-83
Capacità –campioni di: vedi Campioni
Capacità distribuita, 158, 222
Capacità parassite, 216, 236
Caratteristica–curva, 9, 364, 388, 397-8, 426
Caratteristigrafo, 389, 426-7
Carica spaziale, 176-82
Carico, 308, 381
Cathode Ray Tube: vedi Oscillografo
Cavi schermati, 238-9, 266-7
Cella fotovoltaica, 42
Child-Langmuir legge di, 176-82
CHOPped: vedi Oscillografo
Circuito(i):
 accoppiati induttivamente, 163-5
 definizione, 18
 equivalente, 34-5, 312-3, 410-2
 L–R serie, 160-2
 oscillante: vedi R–L–C serie
 passa alto, 128, 257-9
 passa banda, 262-4
 passa basso, 128, 259-61
 R–C serie, 126-9
 risonante parallelo, 276-80, 283-4
 risonante serie, 271-6, 282-3
 R–L–C serie, 287-9
Classe di uno strumento, 61
Clock, 342
Codice binario, 295, 343-5
Codici mancanti, 303
Coefficiente di auto induzione, 155-65
Coefficiente di mutua induzione, 155-69, 291-3
Coefficiente di temperatura: vedi Temperatura
Coefficiente di merito: vedi Parametro
Coercitiva –forza, 440
Collegamento:
 in serie, 13-5
 in parallelo, 15-6
 a stella, 16-8
 a triangolo, 16-8
Collettore, 479

- Collettore –elettrodo, 386
 Comparatore, 343
 Compensato–Partitore: vedi Partitore
 Compensazione –Teorema: vedi Teorema
 Componenti reali in alternata, 207-11
 Comune –Terminale, 36, 323-4
 Condensatore, 124
 Condensatore in alternata, 208-9
 Condizionatore di segnale, 296-300
 Condizione di risonanza, 271, 278, 280-1
 Condizioni iniziali, 511-5
 Condizioni stazionarie, 3, 127, 195-6
 Conducibilità, 4
 Conduttanza, 9
 Conduzione ohmica, 4-9
 Conduzione –elettroni di, 6, 173-6, 353-4
 Contatore binario, 343-5
 Contatti striscianti, 471
 Contatto –ddp di: vedi Forza
 Contatto ohmico, 362, 393, 431
 Contatto –resistenza di: vedi Resistenza
 Conversione dell'energia, 451-97
 Convertitore:
 ad approssimazioni successive, 350-2
 analogico–digitale, 295-6, 342-52
 a pesiera, 350-2
 a rampa duale, 347-50
 a rapporto, 325, 347, 349
 corrente–tensione, 317
 Dual Slope Converter, 347-50
 digitale–analogico, 350
 tensione–frequenza, 346-7
 Coppia antagonista, 47, 475
 Coppia del galvanometro, 47, 50, 475
 Coppia allo spunto, 484
 Coppia di un motore a induzione, 485, 494-5
 Coppia di un motore in continua, 480, 484
 Corrente continua –motore in, 478-85
 Corrente di *Bias*, 329-35
 Corrente di magnetizzazione, 212
 Corrente di saturazione inversa, 361, 363, 388, 395
 Correnti alternate, 194-215
 Correnti di Maglia: vedi Maglia
 Correnti parassite, 159, 215
 Costantana, 5-6
 Costante Balistica, 131
 Costante dielettrica, 124, 455
 Costante di tempo, 128, 161
 Costante reometrica, 48, 151-3
 Costanti concentrate, 195-6, 267
 Costanti distribuite, 267
Crossover, 182
 Cuffia telefonica, 233-4
 Cursore, 82, 102
 Curva caratteristica: vedi Caratteristica
 Curva di isteresi, 439-41
 Curva di magnetizzazione, 438-45
 Curva di prima magnetizzazione, 439, 445

D factor: vedi Fattore di dissipazione
Decibel (dB), 256
DC-input, 187
 Decremento logaritmico, 134-6
Deflection sensitivity: vedi Sensibilità
 Densità dei livelli, 173-5
 Densità di corrente, 2, 179-81, 428-33
 Densità dei portatori, 2
 Densità di carica, 3, 178-182
 Densità spettrale di rumore, 336
 Dente di sega (*saw tooth*), 189
Depletion Mosfet, 425
 Deriva, 167, 334-5
 Derivatore matematico, 321
de Sauty: vedi Ponti
 Diagramma di ampiezza, 257-67
 Diagramma di fase, 257-67
 Dielettrica –costante: vedi Costante
 Differenza di potenziale di contatto: vedi Forza
 Differenziale –amplificatore: vedi Amplificatore
 Differenziale –linearità: vedi Linearità
 Digitalizzatore (oscillografo), 191-3
 Dimezzamento (metodo del), 153
 Diodo a giunzione o a semiconduttore:
 capacità di transizione, 368
 caratteristica dinamica, 371
 caratteristica diretta, 363-5
 corrente di saturazione inversa, 361, 363
 curva di trasferimento, 373
 di precisione, 389-92
 elemento circuitale, 370-3
 fisica del dispositivo, 362-8
 "piecewise model", 373-6
 raddrizzatore, 376-82
 resistenza diretta, 365
 retta di carico, 371
 tensione di soglia, 365
 Zener, 369-0
 zona di svuotamento, 365-8
Display, 294-5
Dissipation factor: vedi Fattore di dissipazione
 Distorsione, 341, 409
 Distribuite –costanti: vedi Costanti
 Divisione della corrente (*Splitting rule*), 26-7
 Divisione della tensione (Regola del Partitore), 31-2
 Divisore di tensione di *Kelvin–Varley*, 110-4

- Donatori, 357
 Doppia traccia, 192
 Doppio Ponte di *Thomson*, 97-9
 Domini magnetici, 159
Drain –elettrodo, 393 di
 Drogaggi, 357-8
 Dualità –Principio di, 32
Dual slope converter: vedi Convertitore
Dushman-Richardson legge di, 175
- Effetto *Hall*: vedi *Hall*
 Effetto termoionico, 172-6
 Elettrodi di focheggiamento: vedi Fuoco
 Elettrodi di estrazione: vedi Griglia
 Elettrodi di post accelerazione: vedi Oscillografo
 Elettrodinamici: vedi Strumenti
 Elettrodinamico –smorzamento, 51-2
 Elettrometro, 456-7
 Elettroni di conduzione, 6, 173-6, 353-4
 Elettroni di valenza, 353
 Elettronici –Multimetri, 294-306
 Ellisse –metodo per la determinazione della risonanza, 80-4
 Emittitore –elettrodo, 386
 Emissione termoionica, 172-86
 Energia di legame, 354
 Energia elettrostatica, 450-7
 Energia magnetica, 457-67, 512
Enhancement MosFet, 425
 Equivalenza di due reti, 34-5
 Errore di linearità, 105-8, 110, 300-3
 Errore di quantizzazione, 294
 Espansioni polari, 444
 Estrinseci –semiconduttori, 357
- Faraday –legge sull'induzione, 44
 Fase, 194
 Fase di un numero complesso, 198-9
 Fase iniziale, 194
 Fattore di amplificazione, 307, 414
 Fattore di dissipazione, 208-9, 219, 244
 Fattore di merito: vedi Parametro
 Fattore di potenza, 242, 247
Felici –sonda di, 150-1, 435, 438
 Fem: vedi forza elettromotrice
Fermi –livello di, 173
 Ferro mobile: vedi Strumenti in alternata
 Ferromagnetici –materiali, 159, 457
Fet (Field Effect Transistor):
 amplificatore a *source* comune, 407-16
 caratteristiche a *source* comune, 396-404, 426-7
 fisica del dispositivo, 394-404
 generatore di corrente, 423-4
 interruttore elettronico, 342-3, 404-7
 modello per piccoli segnali
 in alta frequenza, 418-23
 modello per piccoli segnali
 in bassa frequenza, 410-13
 polarizzazione, 413
 resistenza di drain, 410
Source follower, 416-8
 tensione di *pinch-off*, 395
 transconduttanza, 404, 410
 Filtro passa alto: vedi Circuito
 Filtro passa basso: vedi Circuito
 Fluorescenza, 186
 Flusso del campo di induzione magnetica,
 150-1, 212, 464, 474, 486
Follower: vedi Inseguitore
 Forza elettromotrice:
 campione, 104-5
 con grosse resistenze in serie, 149
 di contatto, 95, 122, 359
 generatore, 4, 9-13
 generatore elettrochimico, 12
 generatore sinusoidale, 200, 471-4
 parassite, 95-6
 termoelettrica, 95-6
 Fosforescenza, 186
 Fosfori, 186-7
Foucault –correnti di: vedi Correnti parassite
Fourier –sviluppo in serie, 195
 Frequenza:
 definizione, 194
 di risonanza, 271, 280-2
 di taglio inferiore, 258
 di taglio superiore, 260
 Frequenzimetro, 282
 Fuoco –elettrodo di, 182-3
 Fuoco –controllo di, 183
- Galvanometro a vibrazione, 233
 Galvanometro di *Deprez-d'Arsonval*:
 bilancio energetico, 474-8
 dinamica, 49-53
 portate, 84
 principio di funzionamento, 44-5
 statica, 45-9
 Galvanometro Balistico:
 con smorzamento finito, 132-3
 con smorzamento nullo, 129-31
 misure con il, 124-54
 taratura, 141-4
Gate –elettrodo di, 393
 Generatore:
 controllato, 413

- di *Thévenin*, 28-31
- ideale di corrente, 32-3
- ideale di tensione, 3-4, 9-13
- reale di corrente, 33-4, 423-4
- reale di tensione, 4, 9-13
- sinusoidale di tensione, 200, 471-4
- Ginocchio del diodo *Zener*, 383
- Giunzione p-n, 359-63
- Griglia acceleratrice, 182
- Griglia di controllo, 182
- Guadagno, 307, 413
- Guardia –morsetto di, 216-8

- Hall* –effetto, 428-33
- Hall* –sonda di, 428-49
- Hall* –misuratori di valore efficace a effetto, 447-9
- Hay*: vedi Ponti
- Heaviside* –condizioni di, 89
- Hole*: vedi lacune

- Impedenza:
 - Campioni di, 216-8
 - definizione, 200-7
 - di ingresso, 214, 420
 - di reazione, 319
 - di uscita, 214, 421
 - misuratore vettoriale di, 89-91
 - riflessa, 214
- Impulso di corrente, 131
- Indotto, 492
- Induttanza:
 - misura con un circuito risonante, 282-7
 - resistenza interna, 210
- Induttore, 155-65
- Induttore in alternata, 209-10
- Induzione completa, 124
- Induzione –motore a, 485-97
- Inseguitore di tensione, 262, 321-2, 340-1
- Integratore operativo o di *Miller*, 167-9, 320, 332-5
- Intensità –controllo di, 182-3
- Interruttore elettronico, 342-3, 404-7
- Intrinseci –semiconduttori, 356
- Isteresi, 159, 438-45

- Joule* effetto, 37

- Kelvin*– *Varley*: vedi Divisore
- Kirchhoff* –Prima legge di, 20, 195-6
- Kirchhoff* –Seconda legge di, 20, 195-6

- Lacune, 354-8
- Lamierini, 159
- Langmuir*: vedi *Child*
- Laplace* –Prima legge di, 248, 467
- Laplace* –Seconda legge di, 44, 248, 467
- Legge di azione di massa, 357
- Legge di *Ohm*, 1-9
- Legge di *Ohm* per le impedenze, 202-4
- Lente elettrostatica, 182-3
- Leva ottica: vedi *Poggendorf*
- Level (*Trigger*), 191
- Linearità differenziale, 301-3
- Linearità integrale, 300-2
- Lorentz* –Forza di, 429
- LSB* (*Least Significant Bit*), 301-3, 345

- Maglia, 18
- Maglia –Metodo delle correnti di, 22-3
- Maglie –legge delle: vedi *Kirchhoff*
- Magnete permanente, 60, 440, 473, 477-8
- Magnetica –riluttanza, 490
- Magnetico –campo terrestre, 434
- Magnetizzante –forza, 438
- Magnetizzazione –curva di: vedi Curva
- Magnetomotrice –forza, 490
- Manganina, 5-6
- Massa virtuale, 168, 316
- Maxwell*: vedi Ponti
- Maxwell*–*Wien*: vedi Ponti
- Memoria di un oscillografo digitalizzatore, 193
- Metodo delle correnti di Maglia: vedi Maglia
- Metodo delle tensioni dei Nodi: vedi Nodi
- Metodo potenziometrico: vedi Potenzimetro
- Metodo del dimezzamento: vedi Dimezzamento
- Metodo simbolico, 198-207
- Microvoltmetro, 322-3, 337
- Miller* –integratore di: vedi Integratore
- Miller* –Teorema di: vedi Teorema
- Misuratore vettoriale di impedenza: vedi Impedenza
- Mobilità dei portatori, 4, 355-6, 403
- Modulo di in numero complesso, 198-9
- Moltiplicatore analogico, 448
- Monostabile, 345
- Mosfet*, 343, 425
- Motore:
 - a induzione, 485-97
 - asincrono, 487-97
 - in corrente continua, 478-85
 - rendimento, 485, 496
 - sincrono, 485-87
- MSB* (*Most Significant Bit*), 345
- μ : vedi Fattore di amplificazione

- Multimetro analogico, 76-9
 Multimetro digitale, 294-306
 Mutua induzione: vedi Coefficiente
- Negative Feedback*: vedi Reazione
 Nodi –legge dei: vedi *Kirchhoff*
 Nodi –Metodo delle tensioni dei, 32
 Nodo, 18
 Non-linearità –errore di, 105-8, 300-3
Norton teorema di: vedi Teorema
Null detector: vedi Rivelatore
 Numeri complessi: vedi Metodo simbolico
- Offset* tensione di:
 in un amplificatore, 300, 326-35
 in una sonda di *Hall*, 433-7
- Ohm/Volt*, 70, 78
 Ohmetro, 71-4
- Operazionale –Amplificatore:
 configurazione invertente, 312-21
 configurazione non invertente, 321-2
 tensione di *offset*, 326-35
 corrente di *bias*, 329-35
 rumore, 335-9
 applicazioni alla strumentazione, 322-6
- Oscillografo o oscilloscopio:
 a doppia traccia (*ALT* e *CHOP*), 192
 amplificatore verticale, 187-9
 base dei tempi, 189-91
 canale X, 189
 canale Y, 187
Cathode Ray Tube (CRT), 171-87
 digitalizzatore, 192-3
 funzionamento in X–Y, 170, 280-2, 285, 389
 impedenza di ingresso, 187
 placchette deflettrici, 183-87
 posizione X e Y, 192
 postaccelerazione, 187
probe (sonda), 267-70
 schermo, 186-7
 sonda, 267-70
 tensione di postaccelerazione, 187
 tubo a raggi catodici, 171-87
trigger, 189-91
- Parametro di qualità, 158, 210, 221, 244, 273, 278
- Parassite –capacità: vedi Capacità
 Parassite –correnti: vedi Correnti
 Parassite –fem: vedi Forza
 Partitore –regola del, 31-2
 Partitore compensato, 268-9
- Pendenza duale –convertitore a: vedi Convertitore
 Perdite dielettriche, 208-9
 Perdite per isteresi, 214-5
 Periodo del galvanometro, 53
 Permeabilità magnetica, 156, 215, 221, 461, 519-25
Permendur, 525
 Persistenza dell'immagine, 186
 Pesiera –convertitore a: vedi Convertitore
 "Piecewise Model": vedi Diodo
 Picoamperometro, 324-5, 332, 337
 Pila Campione, 104-5
 Placchette deflettrici: vedi Oscillografo
Poggendorf:
 metodo della leva ottica, 48-9
 metodo potenziometrico: vedi Potenzimetro
- Polarizzazione del *Fet*: vedi *Fet*
- Ponte di *Wheatstone*:
 campo di valori di *R* misurabili, 87
 condizioni di *Heaviside*, 89-90
 errori nella misura, 84-5
 principio della misura, 83-4
 procedura di azzeramento, 84-5
 sensibilità col galvanometro, 85-91
 sensibilità col microvoltmetro, 91-3
- Ponti in alternata:
 con braccio a rapporto di trasformatore, 239
 di *de Sauty* parallelo, 225
 di *de Sauty* serie, 223
 di *Hay*, 227
 di *Maxwell* LC, 227
 di *Maxwell* LL, 226
 di *Maxwell–Wien*, 227
 di *Wien*, 225
 errori nella misura, 235-9
 messa a terra, 235-9
 principio della misura, 222-3
 procedura di azzeramento, 228-9
 rivelatore di zero, 233-5
 sensibilità, 230-3
 sintonizzazione del rivelatore, 235
- Portatori maggioritari e minoritari, 358
- Posizione–controllo X e Y: vedi Oscillografo
- Postaccelerazione: vedi Oscillografo
- Potenza nei circuiti elettrici:
 in corrente alternata, 241-55
 in corrente continua, 37-40
 massimizzazione del trasferimento in continua, 38-40
 massimizzazione del trasferimento in alternata, 245
 misure in alternata con un wattmetro, 245-52


























- nei motori elettrici, 479, 495
- trasferimento di, 38-42
- Potenziale di barriera, 173-4
- Potenziale di estrazione, 174
- Potenziometro:
 - a filo, 82
 - errori nella misura, 116
 - linearità, 105-8
 - misura di fem, 117-9
 - misura di resistenze, 117-9, 120-2
 - principio della misura, 101-3
 - sensibilità con un galvanometro, 114-6
 - sensibilità con un microvoltmetro, 116-7
 - taratura del, 103-8
 - taratura di strumenti con il, 119-20
- Preamplificatore, 187
- Precisione dei campioni: vedi Campioni
- Pretrigger*, 193
- Probe*: vedi Oscillografo
- Prodotto guadagno-banda passante, 319
- Pulsazione, 194
- Pulsazione di risonanza: vedi Frequenza
- Puntali, 77, 305

- Q Factor*: vedi Parametro
- Quasi stazionarie -condizioni, 3, 195-6
- Quattro terminali -misure a, 120-122, 299-300

- Raddrizzatore:
 - con filtro a condensatore, 376-82
 - a vero valore efficace, 392
- Ramo, 18
- Rampa duale: vedi Convertitore
- Rapporto di trasformazione, 213
- Rapporto segnale/disturbo, 334-5, 338
- Reattanza, 204
- Reazione:
 - negativa, 312, 316, 319, 418
 - positiva, 316
- Regolazione, 381-6
- Rendimento di un motore, 485, 496
- Reostato, 82-3
- Reset*, 348
- Resistenza:
 - a cavicchi, 80
 - a filo, 80, 83
 - a impasto di carbone, 79
 - a strato metallico, 79
 - campioni di, 79-83
 - critica, 53, 151-2
 - dei puntali, 78, 304
 - di carico, 373
 - di contatto, 77, 122
 - di isolamento, 99-100
 - di fuga, 145-9
 - dinamica di un diodo *Zener*, 385
 - diretta di un diodo, 373
 - equivalente, 24
 - in alternata, 207-8
 - interna di una bobina, 49, 157
 - interna di un generatore, 12-3, 136-40
 - interna del galvanometro, 93-4, 151-3
 - misura a quattro terminali, 81, 299-300
 - secondo *Thévenin*, 28-9, 433-3
- Resistività, 5-6
- Resistore: vedi Resistenza
- Rete, 18
- Reti lineari:
 - teoremi sulle, 24-33
 - ed estensione alle correnti alternate, 205
- Ricombinazione, 356
- Riferimento -Terminale di: vedi Comune
- Riluttanza magnetica, 490
- Ripetitore di tensione: vedi Inseguitore
- Ripple*, 381
- Risonanti -circuiti: vedi Circuito
- Ritardo, 188, 193
- Ritenzione di carica, 147, 209, 220
- Rivelatore:
 - di particelle ionizzanti, 368
 - di zero in continua, 58, 74-6, 83
 - di zero per i ponti in alternata, 233-5
- Root Mean Square (RMS)*, 194
- Rotante -Campo magnetico: vedi Campo magnetico
- Rotanti -vettori, 197-8
- Rotore, 479
- Rumore, 335-9

- Saturazione, 159, 212, 440
- Saw tooth* (Dente di sega), , 189
- Schermo magnetico, 187, 445-7, 519-25
- Semiconduttori, 353-8
- Scorrimento: vedi Slittamento
- Sensibilità:
 - amperometrica, 57
 - di deflessione, 185
 - del Ponte di *Wheatstone*: vedi Ponte dei ponti in alternata: vedi Ponti
 - del potenziometro: vedi Potenziometro
 - voltmetrica, 57-8
- Sfasamento, 194, 265, 285
- Shunt*, 64-8
- Shunt* di *Ayrton* o universale, 64-6, 140
- Sincronismo -segnale, 264
- Sincrono -motore, 485-7
- Sintonia del Rivelatore di zero: vedi Ponti

- Slittamento, 489-96
Slope (Trigger), 191
 Smagnetizzazione, 440-1
 Smorzamento elettrodinamico, 51-2
 Soglia (del *Trigger*), 191
 Sonda a effetto *Hall*: vedi *Hall*
 Sonda di *Felici*, 150-1, 435, 438
 Sonde: vedi Oscillografo
Source –elettrodo, 393
Source Follower: vedi *Fet*
 Sovrapposizione –Principio di, 24.7
 Spazzole, 479
 Stabilità dei componenti in un CAD, 349
Standard Cell: vedi Pila campione
 Statore, 485
 Stazionarietà –condizioni di: vedi Condizioni
 Strumenti a bobina mobile, 60-78
 Strumenti elettrodinamici, 245, 53
 Strumenti elettronici digitali, 294-306
 Strumenti in alternata, 252.5
 Strumenti universali a bobina mobile, 76-8
 Superconduttori, 440, 458-9
 Sviluppo in serie di *Fourier*, 195
 Svuotamento –zona di, 365-8, 394-5
- Tasto –rimbalzi del, 168-9
 Tasto triplo, 104
 Temperatura –coefficiente di, 5-6, 80, 104, 436-7
 Tempo di conversione, 305, 349
 Tensione: vedi Forza elettromotrice
 Tensione di *breakdown*: vedi *Breakdown*
 Tensione di *offset*: vedi *Offset*
 Tensione di *pinch-off*: vedi *Fet*
 Teorema di Compensazione, 28
 Teorema di *Norton*, 35
 Teorema di *Miller*, 36-7, 420
 Teorema di Reciprocità, 27
 Teorema di *Thévenin*, 28-31
 Terminale comune o di riferimento: vedi Comune
 Terminale di Terra: vedi Terra
 Termoelettriche –fem: vedi Forza
 Termoionica –emissione, 172-6
 Terra:
 –Terminale di, 36, 323-4
- di *Wagner*: vedi *Wagner*
Tester: vedi Multimetro
Thévenin –Teorema di: vedi Teorema
Thomson doppio Ponte di, 97-9
 Traferro, 442
 Transistore bipolare, 386-7
 Transistore a effetto di campo: vedi *Fet*
 Transitorio, 126-9, 160-5, 507-15
 Trasformatore:
 principio di funzionamento, 211-15
 nei raddrizzatori, 376, 382
 schermo elettrostatico, 158
 Trasformazioni stella–triangolo, 16-18
True Root Mean Square (TRMS), 392
Trigger: vedi Oscillografo
 Tubo a raggi catodici: vedi Oscillografo
- Universale –*shunt*: vedi *Shunt*
- Valenza –elettroni di, 353
 Valore efficace, 194
 Velocità degli elettroni nei metalli, 6-7
 Velocità di scrittura di un oscillografo, 186-7
 Vettori rotanti: 197-8
 Virtuale –massa: vedi Massa
 Voltmetri analogici, 69-71
 Voltmetri elettronici (vedi anche Convertitore), 297
- Wagner* –messa a terra di, 238
 Wattaggio, 37, 81
 Wattmetro elettrodinamico, 245-52, 516-8
 Wattmetro a stato solido (a effetto *Hall*), 447
Weston: vedi Pila Campione
Wien: vedi Ponti
Work function (Potenziale di estrazione), 174
- Zener* –diodo, 369-70, 382-6
 Zero –rivelatore di: vedi Rivelatore
Zero-Ohm –controllo, 74, 76

Simbolo	Strumento	Simbolo	Strumento
	Elettrodinamico		Elettrodinamico come misuratore di rapporto
	A magnete fisso e bobina mobile (magnetoelettrico)		A magnete fisso e bobina mobile come misuratore di rapporto
	A ferro mobile		A ferro mobile come misuratore di rapporto o strumento differenziale
	A induzione		A induzione come misuratore di rapporto o strumento differenziale
	Elettrodinamico con ferro (ferrodinamico)		Elettrodinamico con ferro come misuratore di rapporto
	Termico a filo caldo		Termico a lamina bimetallica
	Elettrostatico		A lamine vibranti
	A bobina mobile a termocoppia incorporata		A bobina mobile con raddrizzatore incorporato
Circuiti nei quali può essere inserito			
Simbolo	Circuito	Simbolo	Circuito
	A corrente continua		A corrente continua ed alternata
	A corrente alternata		
Disposizione dello strumento			
Simbolo	Disposizione	Simbolo	Disposizione
	Strumento da usare con quadrante verticale		Strumento da usare con quadrante inclinato
	Strumento da usare con quadrante orizzontale		Angoli di inclinazione
Tensione di prova			
Simbolo	Tensione	Simbolo	Tensione
	Tensione di prova 500 V		Tensione di prova 2000 V

FINITO DI ASSEMBLARE
NEL MESE DI AGOSTO 2016