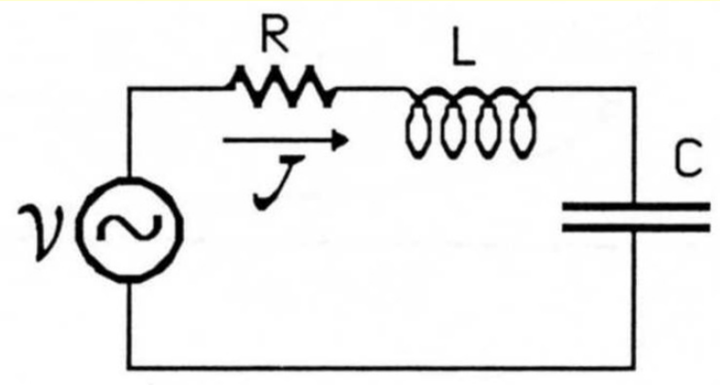
Circuito risonante serie

Il circuito accanto, con $\nu = \nu_0 e^{j\omega t}$, ha impedenza totale

$$\mathcal{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$



avente modulo e fase

$$\begin{cases} |\mathcal{Z}|^2 = R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2 \\ \varphi_{\mathcal{Z}} = \operatorname{atan} \frac{(\omega L - \frac{1}{\omega C})}{R} \end{cases}$$

per $\omega \to 0$ $|Z| \to \infty$ (condensatore) $\varphi_Z \to -\pi/2$

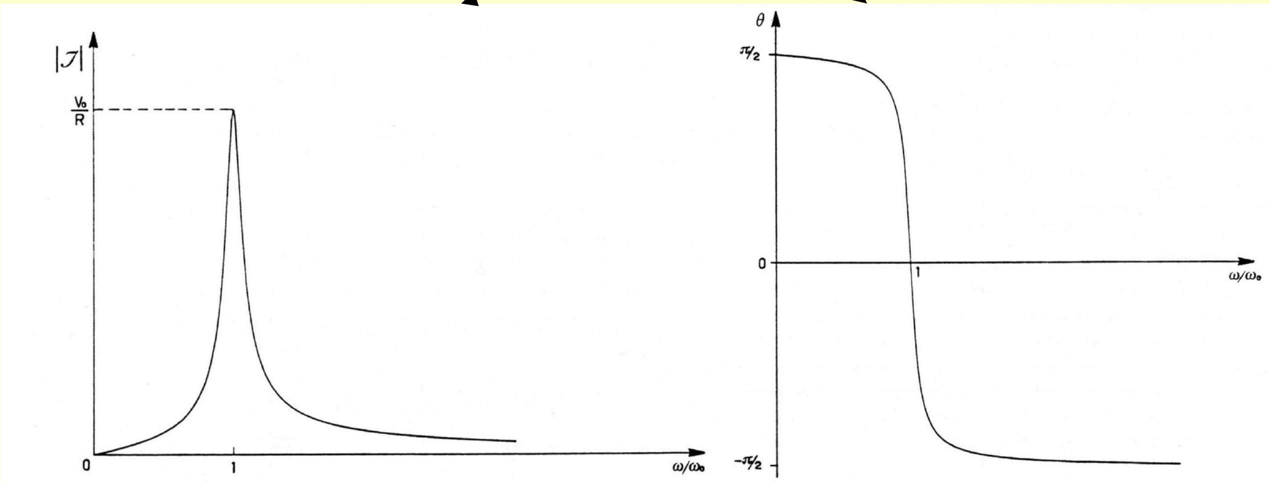
per $\omega \to \infty$ $|Z| \to \infty$ (induttanza) $\varphi_Z \to +\pi/2$

Ricordando che $|J| = |\nu|/|Z|$ e $\varphi(J) = -\varphi_Z$, la corrente che scorre nel circuito

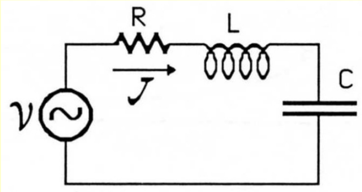
e quindi per

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

"pulsazione di risonanza" l'impedenza ha un minimo pari a R ed è tutta reale



Circuito risonante serie



Per $\omega = \omega_0$ → $\mathcal{J} = V_0 / R$ massima → V_R, V_C e V_L massime → $V_R = \mathcal{J}\, R$ → $V_C = -V_L$ infatti

$$\mathcal{V}_L = j\omega_0 L \frac{V_0 \cdot \exp j\omega_0 t}{R} = j\sqrt{\frac{L}{C}}\frac{V_0 \cdot \exp j\omega_0 t}{R}$$

$$\mathcal{V}_C = \frac{1}{j\omega_0 C}\frac{V_0 \cdot \exp j\omega_0 t}{R} = -j\sqrt{\frac{L}{C}}\frac{V_0 \cdot \exp j\omega_0 t}{R} = -\mathcal{V}_L$$

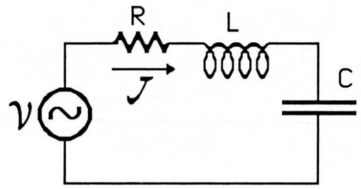
quindi le due tensioni sono in quadratura con il generatore e in opposizione tra loro

In risonanza l'energia si trasforma con continuità da energia elettrostatica (condensatore) a magnetica (induttanza), e viceversa, e il generatore si preoccupa di compensare le perdite di energia per effetto Joule sulla resistenza.

Il parametro che caratterizza il comportamento del circuito alla risonanza è il fattore di merito Q definito da

$$Q = 2\pi \frac{Energia\ massima\ immagazzinata}{Energia\ dissipata\ nel\ sistema\ durante\ un\ ciclo} = 2\pi \frac{E_{max}}{< E_D >}$$

Fattore di merito



$$Q = 2\pi \frac{\textit{Energia massima immagazzinata}}{\textit{Energia dissipata nel sistema durante un ciclo}} = 2\pi \frac{E_{max}}{< E_D >}$$

Nel nostro caso, in risonanza

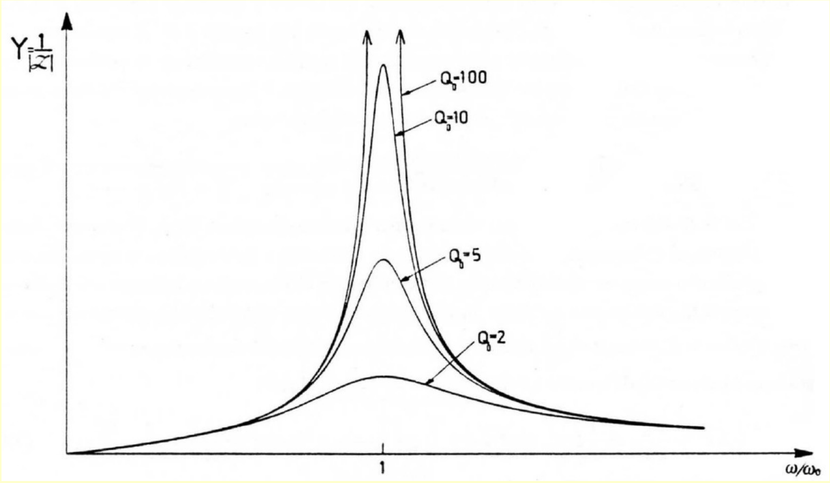
$$i = I_0 \cos\omega_0 t = \frac{V_0}{R}\cos\omega_0 t \longrightarrow q_c = \frac{V_0}{R\omega_0}\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t$$

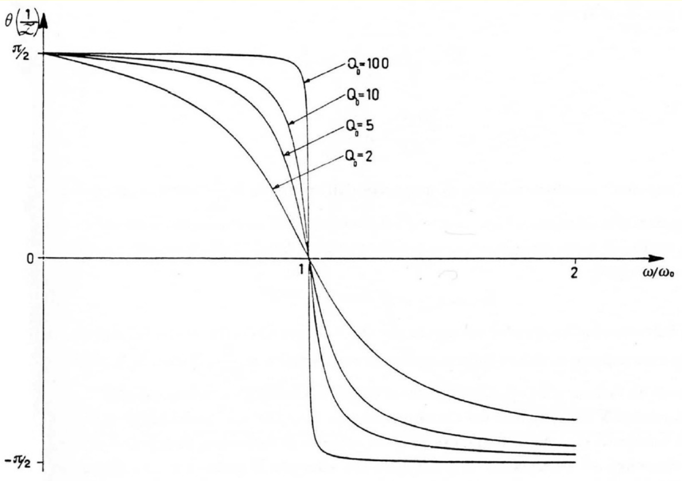
$$E_T(t) = \frac{1}{2} L\, i^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} L \frac{V_0^2}{R^2}\cos^2\omega_0 t + \frac{1}{2}\frac{V_0^2}{R^2\omega_0^2 C}\,\mathrm{sen}^2\omega_0 t = \frac{1}{2}\frac{L V_0^2}{R^2} = \frac{1}{2}\frac{V_0^2}{R^2\omega_0^2 C}$$

costante

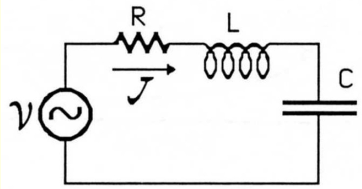
$$E_D = < W > \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi\, i_{eff}^2 R}{\omega_0} = \frac{\pi\, I_0^2\, R}{\omega_0} = \frac{\pi V_0^2}{\omega_0 R}$$

$$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$





Fattore di merito



Si ha infatti

$$\mathcal{Z} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = R\left[1 + j\frac{\omega L}{R}\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\right] = R\left[1 + j\frac{\omega}{\omega_0}Q_0\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\right]$$

$$|\mathcal{Y}| = \frac{1}{|\mathcal{Z}|} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} = \frac{1}{R\sqrt{1 + \frac{\omega^2 L^2}{R^2}\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2}} \longrightarrow |\mathcal{Y}|_{\omega=\omega_0} = \frac{1}{R}$$

$$\theta(\mathcal{Y}) = -\operatorname{atan}\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right) = -\operatorname{atan}\frac{\omega L(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2})}{R} \longrightarrow \theta(\mathcal{Y})_{\omega=\omega_0} = 0$$

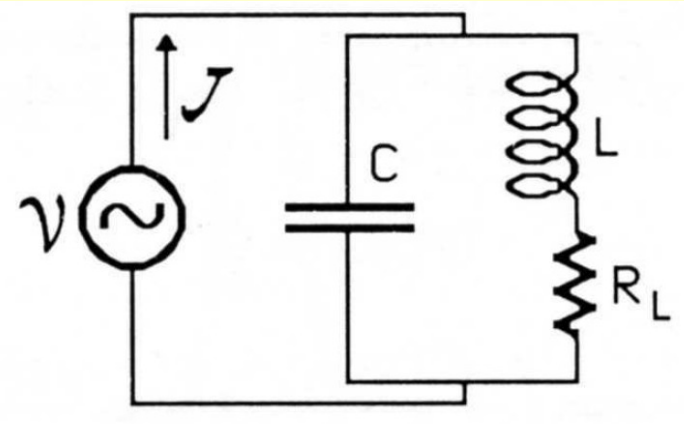
Se $Q_0 >> 1$ avremo che per $(\omega - \omega_0)/\omega_0 = \pm 1/(2Q_0)$ → $Y(\omega) = \sqrt{2}\, Y(\omega_0)$ [-3dB]
→ $\theta(\omega) = \mp 45°$

Quindi → circuito RLC serie ottimo filtro passa banda (nell'intorno di ω_0)

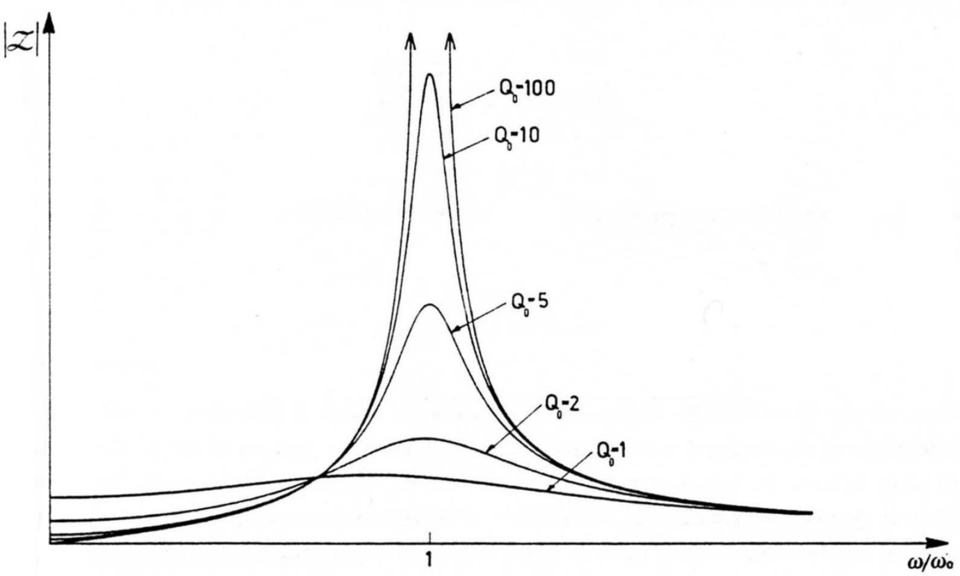
Circuito risonante parallelo

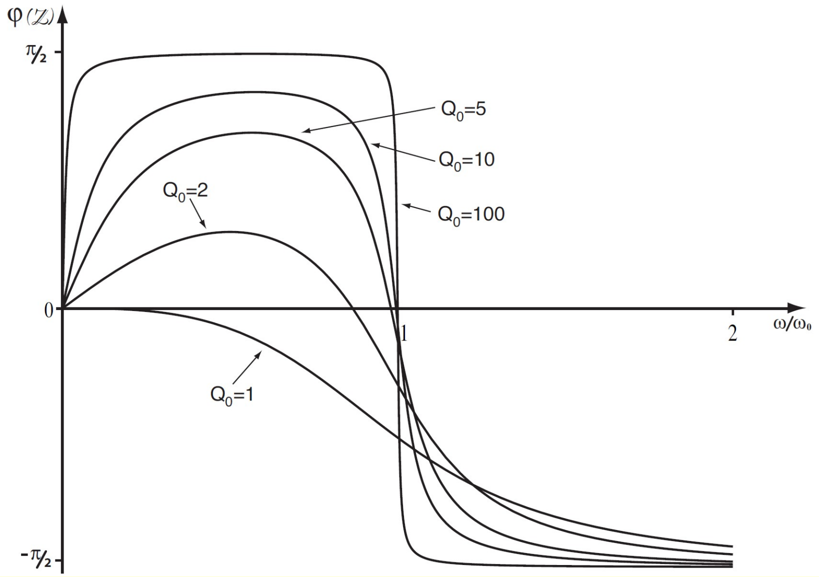
Il circuito accanto, con $\nu = \nu_0\, e^{j\omega t}$, ha impedenza totale

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{j\omega C + \dfrac{1}{R_L + j\omega L}} = \frac{R_L + j\omega L}{1 + j\omega C(R_L + j\omega L)}$$



con andamenti in funzione di ω/ω_0

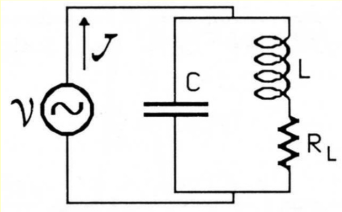




"pulsazione di risonanza" quella per cui l'impedenza è tutta reale

$$\omega_R^2 = \omega_0^2\left(1 - R_L^2\frac{C}{L}\right) = \omega_0^2\left(1 - \frac{1}{Q_0^2}\right)$$

Fattore di merito



Applicando la definizione del fattore di merito si ricava

$$Q_{0P} = \omega_R \frac{L}{R_L}\left(1 + R_L\sqrt{\frac{C}{L}}\right) = Q_0\left(1 - \frac{1}{Q_0^2}\right)\left(1 + \frac{1}{Q_0}\right)$$

$$\mathcal{Z} = \frac{R_L + j\omega L}{1 + j\omega C(R_L + j\omega L)}$$

e quindi per valori alti di Q_0 si ha $Q_{0P} \approx Q_0$

L'impedenza del circuito alla risonanza vale

$$\mathcal{Z}_p = R_L \frac{1 + j\dfrac{\omega_R L}{R_L}}{1 - \omega_R^2 CL + j\omega_R C R_L} = \frac{R_L}{1 - \omega_R^2 CL} = R_L Q_0^2 = \frac{1}{R_L}\frac{L}{C}$$

tutta reale (come atteso da definizione) ma non al massimo valore

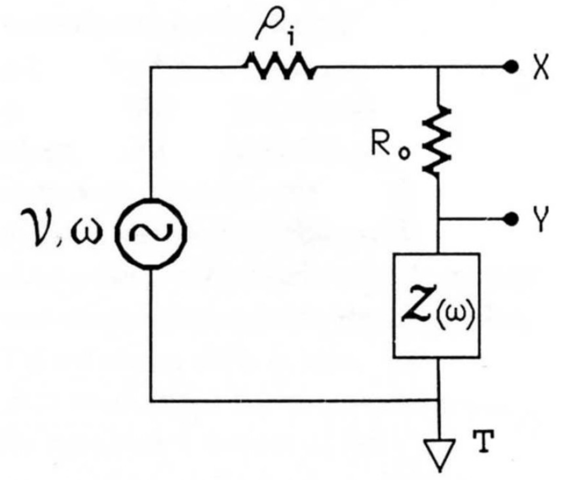
Le correnti che scorrono nei due rami del parallelo sono, indicando con J quella fornita dal generatore,

$J_{L0} \approx -j\, J\, Q_0$ e $J_{C0} \approx j\, J\, Q_0$

ovvero in modulo Q_0 volte quella entrante e sfasate rispetto ad essa di circa $\pm \pi/2$, dando luogo al continuo rimbalzo tra energia elettrostatica e magnetica e a cadute (massime) di tensione che questa volta non si compensano ma producono l'innalzamento della tensione ai capi del parallelo (applicazione a ricezione di onde radio)

Misura della frequenza di risonanza

Nel circuito accanto
Z (ω) rappresenta un circuito risonante
ν , ω generatore di tensione con ampiezza e frequenza variabili
ρ_i resistenza interna del generatore
R_0 resistore puro



Le tensioni $V_{XT} = \nu_X$ e $V_{YT} = \nu_Y$ sono legate dalla relazione

$$\mathcal{V}_y = \mathcal{V}_x \frac{\mathcal{Z}(\omega)}{R_0 + \mathcal{Z}(\omega)}$$

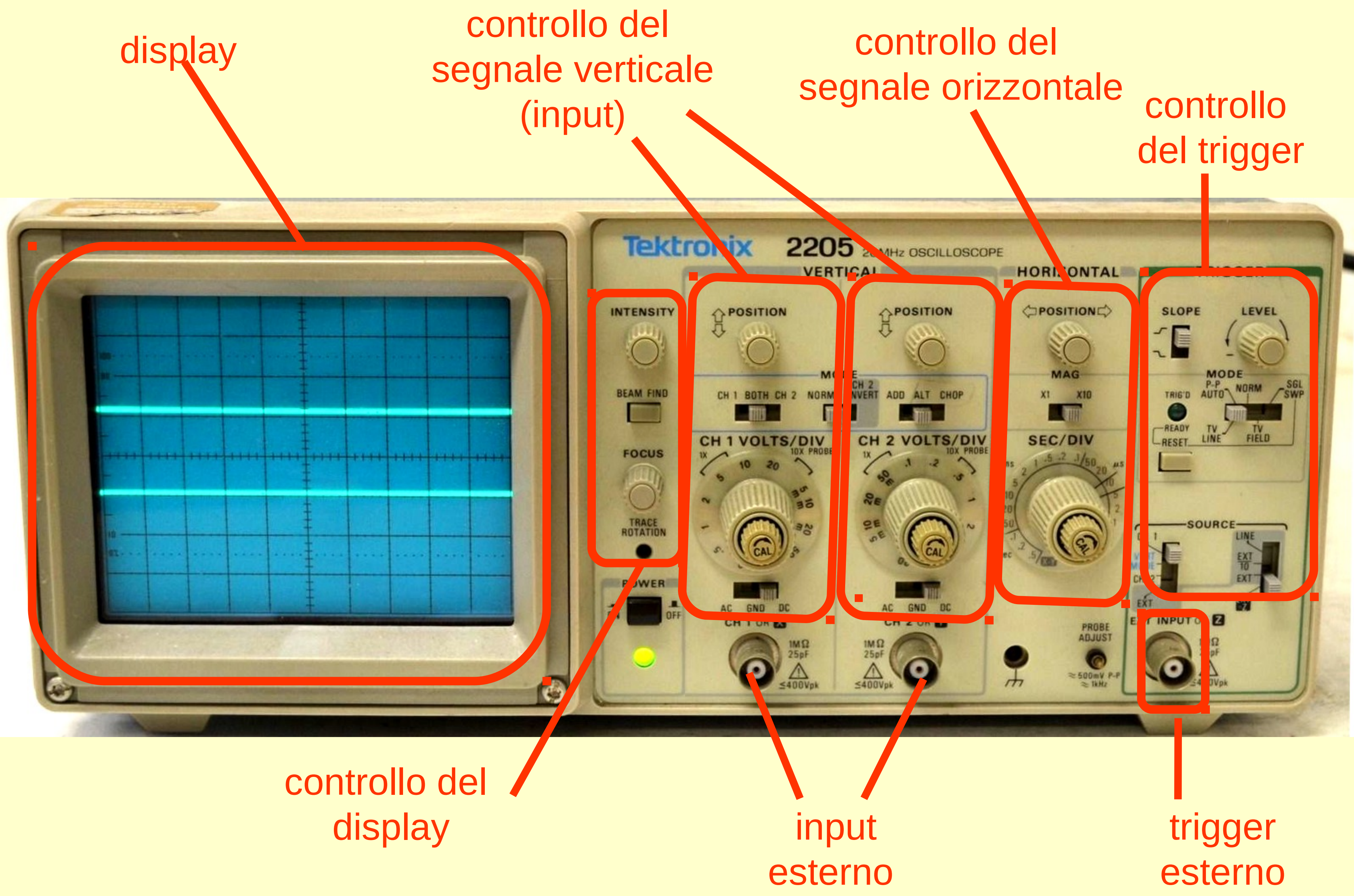
Inviando le tensioni ν_X e ν_Y ai canali x e y dell'oscillografo, la traccia sul monitor è caratterizzata da

$$\begin{cases} x = x_0 \cos \omega t \\ y = y_0 \cos(\omega t + \varphi) \end{cases} \longrightarrow \frac{y^2}{y_0^2} + \frac{x^2}{x_0^2} - \frac{2xy}{x_0 y_0} \cos \varphi = \text{sen}^2 \varphi$$

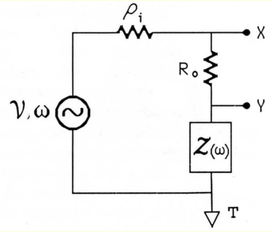
equazione di un'ellisse che degenera in un segmento di retta di pendenza y_0 / x_0 quando $\varphi = 0$ (risonanza).

OSCILLOGRAFO

L’oscilloscopio **v**isualizza l'andamento di un segnale elettrico nel tempo: dato un certo segnale di tensione in ingresso, consente misure qualitative e quantitative di: differenza di potenziale e di intervalli di tempo (*es. periodo di oscillazione del segnale in ingresso*).


display
controllo del segnale verticale (input)
controllo del segnale orizzontale
controllo del trigger
controllo del display
input esterno
trigger esterno

Misura della frequenza di risonanza



Ottimizzazione della misura

La pendenza del segmento degenere dipende dall'amplificazione dei canali x e y dell'oscillografo. La massima sensibilità nella determinazione della frequenza di risonanza la si ha quando la pendenza è intorno a 45°.

Scelta di R0

La condizione ottimale la si ottiene per R0 >> $\mathcal{Z}(\omega)$ per ogni ω in quanto:

- ν_Y dà direttamente $\mathcal{Z}(\omega)$ per ogni ω

- la valutazione di $\mathcal{Z}(\omega_R)$ è tanto più precisa quanto più $\nu_Y/\nu_X < 1$.

Infatti $\nu_Y/\nu_X = Z(\omega) / [R0 + Z(\omega)]$, alla risonanza ν_Y/ν_X = A reale e inoltre

$$\mathcal{Z}(\omega_R) = R_0\, A / (1 - A)$$

con incertezza relativa

$$\Delta\mathcal{Z}(\omega_R) / \mathcal{Z}(\omega_R) = \Delta R_0 / R_0 + \Delta A / [A(1 - A)]$$

tanto minore quanto più A << 1

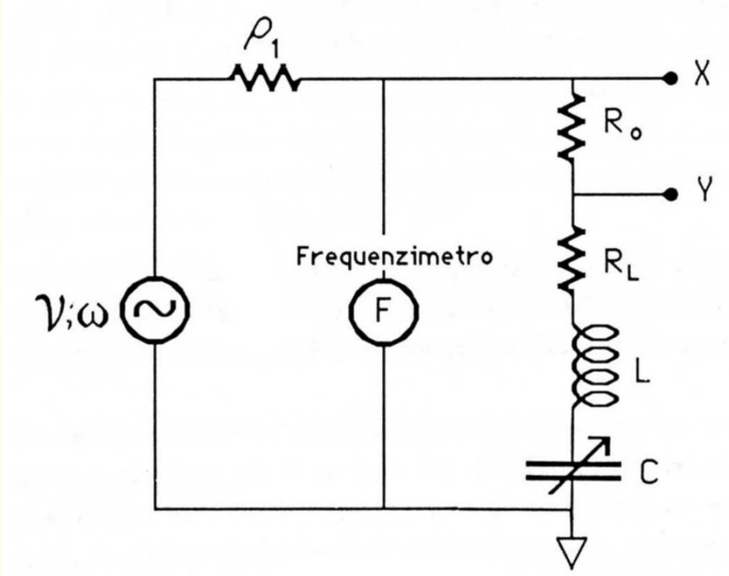
Misura con risonante serie

Se C e R_0 sono noti, la determinazione, con i metodi descritti e con l'utilizzo di un frequenzimetro, della ω_0 di risonanza permette di ricavare

$$L = 1/\omega_0^2 C \qquad R_L = Z(\omega_0)$$

e da queste il fattore di merito

$$Q_0 = \frac{1}{R_L}\sqrt{\frac{L}{C}}$$



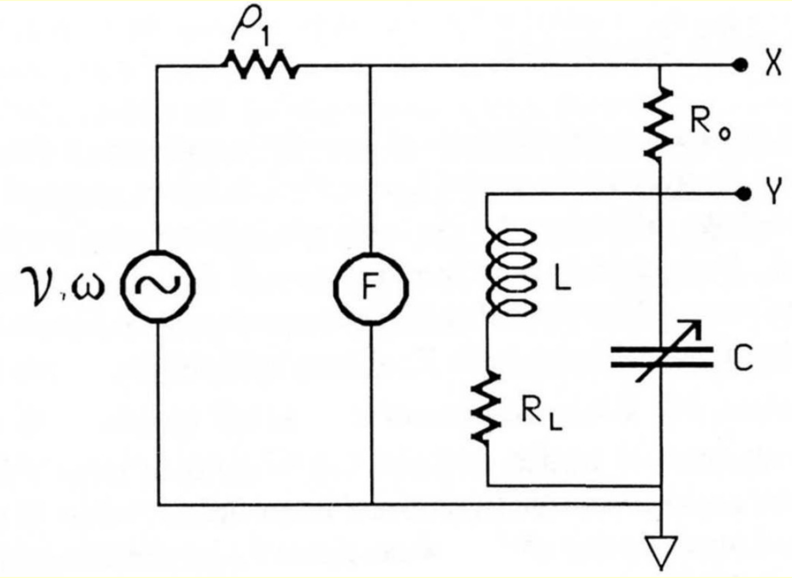
Può succedere che l'ellisse non degeneri in un segmento ma in una figura a forma di cappio.
Questo è dovuto a distorsioni nella ν_Y, causate da:
- generatore non perfettamente sinusoidale
- comportamenti non lineari in qualcuno dei componenti (ex. saturazioni nel nucleo della bobina L)

che si evidenziano alla risonanza in quanto a tale frequenza le componenti “normali“ delle impedenze si cancellano e quindi rimangono quelle “anomale”

Misura con risonante parallelo

Noti C e R_0, la misura di ω_R e $\nu_Y/\nu_X = A$ permette di determinare
$Z_P = Z(\omega_R) = R_0 A / (1 - A)$ e quindi

$$\begin{cases} \omega_R^2 = \dfrac{1}{LC}\left(1 - R_L^2 \dfrac{C}{L}\right) \\ \mathcal{Z}_p = \dfrac{1}{R_L}\dfrac{L}{C} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} R_L = \dfrac{\mathcal{Z}_p}{1 + \omega_R^2 C^2 \mathcal{Z}_p^2} \\ L = \dfrac{C\mathcal{Z}_p^2}{1 + \omega_R^2 C^2 \mathcal{Z}_p^2} \end{cases}$$



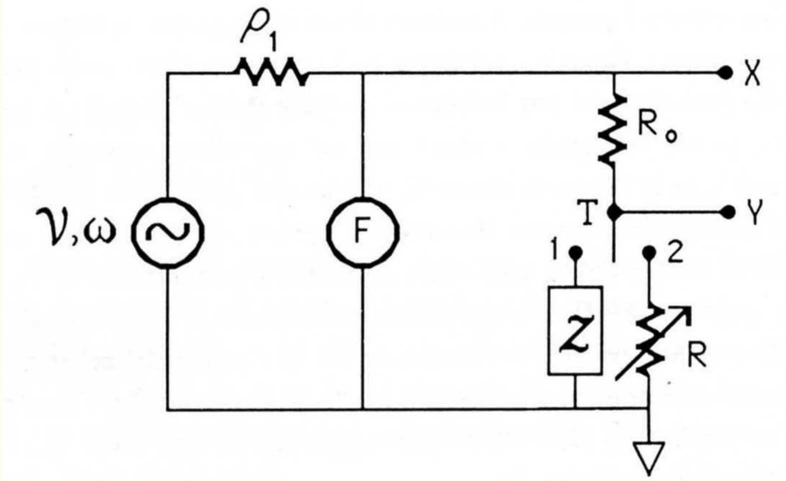
In questo caso la misura di L è meno precisa in quanto dipende anche dall'incertezza su Z_P.

Per questo circuito le distorsioni alla condizione di risonanza sono molto meno evidenti in quanto è la parte “normale” dell'impedenza che non si cancella e domina rispetto a quella “anomala”.

Inoltre, Z_P è massima alla risonanza e la condizione $R_0 \gg Z_P$ porta a valori elevati per R_0

Ottimizzazione misure

Influenza dell'oscillografo nelle misure:
- impedenza ingresso (1 MΩ, 10 pF)
- differente sfasamento tra i due canali (2°-3°, misurabile ma scomodo)
- incertezza nella calibrazione dei canali (3%)



Per ovviare a tali inconvenienti, conviene operare utilizzando il circuito accanto.

Trovata la condizione approssimativa di risonanza con il tasto in posizione 1 e l'oscillografo in modalità X-Y, si passa ad osservare il segnale all'ingresso Y in funzione del tempo, utilizzando il segnale prima inviato all'ingresso X come trigger esterno.

Variando il valore della capacità C si fa in modo che i due segnali visibili commutando il tasto da 1 a 2 siano in fase tra loro. Successivamente si può operare su R in modo da rendere i due segnali di pari ampiezza.
In tal modo si riesce a ridurre drasticamente le incertezze di misura.

Risonante serie

TABULATO

CIRCUITO SERIE

R0=		**ΔR0=**	

SCHEMA CIRCUITO	

Canali 1-2	**R'min**		**R'max**	
	C'min		**C'max**	

Canali 2-1	**R"min**		**R"max**	
	C"min		**C"max**	

ANDAMENTO AMMETTENZA IN FUNZIONE DELLA FREQUENZA

f ( )	V1 (div)	ΔV1 (div)	S1(V/div)	V2 (div)	ΔV2 (div)	S2(V/div)	t (div)	Δt (div)	St (s/div)

<u>Operazioni</u>

1) con oscilloscopio in modalità y-t ricerca risonanza
2) con oscilloscopio in modalità x-y ricerca risonanza
3) come 2 ma con x-y invertiti
4)studio andamento ammettenza e fase in funzione di f

CIRCUITO PARALLELO

R0=		ΔR0=	

SCHEMA CIRCUITO	

Canali 1-2	R'min		R'max	
	C'min		C'max	

Canali 2-1	R"min		R"max	
	C"min		C"max	

ANDAMENTO IMPEDENZA IN FUNZIONE DELLA FREQUENZA

f ( )	V1 (div)	ΔV1 (div)	S1(V/div)	V2 (div)	ΔV2 (div)	S2(V/div)	t (div)	Δt (div)	St (s/div)

Risonante parallelo

TABULATO

Operazioni

1) con oscilloscopio in modalità y-t ricerca risonanza
2) con oscilloscopio in modalità x-y ricerca risonanza
3) come 2 ma con x-y invertiti
4)studio andamento impedenza e fase in funzione di f